

مقدمة في

نماذج الصفوف

Queueing Models

(النظرية – التطبيق)



الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذة بحوث العمليات والإحصاء ورئيسة قسم الرياضيات والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

مقدمة في
نماذج الصفوف
Queueing Models
(النظرية - التطبيق)

الطبعة الثانية

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذة بحوث العمليات والإحصاء التطبيقي

ورئيسة قسم الرياضيات والإحصاء التطبيقي

ووكيلة الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال - جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير بالدقي - القاهرة

٢٠٢٣ م / ١٤٤٥ هـ

نماذج الصفوف

(النظرية – التطبيق)

الطبعة الثانية

١٤٤٥هـ - ٢٠٢٣م

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء التطبيقي

ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

جميع حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة للمؤلفة

وطبقاً للقانون فإنه لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب أو إعادة طبعة أو تصويره أو اختزان مادته العلمية بأي صورة دون موافقة كتابية من المؤلفة

الطبعة الثانية: سنة ١٤٤٥هـ/٢٠٢٣م

الموزع: المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة.

رقم الإيداع: ١٦٢٤١ / ٢٠٢٣م

الترقيم الدولي: ٣-٦٧٩٩-٩٤-٩٧٧-٨٧٨

الموقع الإلكتروني: www.dr-afafeldach.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

{ أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَسَالَتْ أَوْدِيَهُمْ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَدًا
رَابِيًا وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاءَ حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِثْلَهُ
كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاءً وَأَمَّا مَا
يَنْفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُتُ فِي الْأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآية ١٧)

فهرس المحتويات

الصفحة	الموضوع
١١	مقدمة.....
١٧	الباب الأول: مشاكل التكس ونظرية الصفوف.....
١٩	(١-١) مقدمة.....
٢٠	(٢-١) مشاكل التكس.....
٢٣	(٣-١) نظرية الصفوف.....
٢٤	(٤-١) رؤية تاريخية.....
٢٨	(٥-١) نظرية الصفوف والأساليب والإحصائية.....
٣١	(٦-١) نظرية الصفوف وأساليب الأمثلية.....
٣٣	(٧-١) تمرينات.....
٣٥	الباب الثاني: أساسيات.....
٣٧	(١-٢) مقدمة.....
٣٨	(٢-٢) تعريفات ونظريات.....
٥٤	(٣-٢) التوزيع الثنائي.....
٦٠	(٤-٢) تحويله لابلاس.....
٦٨	(٥-٢) توزيع إيرلنج.....
٧٠	(٦-٢) معادلات الفروق التفاضلية.....
٧٥	(٧-٢) تمرينات.....

الموضوع	الصفحة
الباب الثالث: بعض العمليات العشوائية.....	٧٩
(١-٣) مقدمة.....	٨١
(٢-٣) العملية العشوائية.....	٨٢
(٣-٣) تصنيف العمليات العشوائية.....	٨٤
(٤-٣) العمليات المستقرة.....	٨٥
(٥-٣) عملية المشي العشوائي البسيطة.....	٨٦
(٦-٣) عمليات ماركوف.....	٨٨
(٧-٣) عمليات بواسون.....	١٠٢
(٨-٣) تمارينات.....	١٠٨
الباب الرابع: مكونات أنظمة الصفوف.....	١١١
(١-٤) مقدمة.....	١١٣
(٢-٤) نظام الصف.....	١١٤
(٣-٤) الصياغة الرمزية لأنظمة الصفوف.....	١١٨
(٤-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام.....	١٢٣
(٥-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهى خدمتهم.....	١٢٧
(٦-٤) التوزيع الاحتمالي لأزمنة الخدمة.....	١٢٩
(٧-٤) تمارينات.....	١٣٠
الباب الخامس: بعض نماذج ماركوف للصفوف.....	١٣٣

الموضوع	الصفحة
(١-٥) مقدمة.....	١٣٥
(٢-٥) نموذج بمركز خدمة واحد.....	١٣٦
(٣-٥) نموذج C من مراكز الخدمة المتوازية.....	١٤٢
(٤-٥) نموذج الرفض بمركز خدمة واحد.....	١٤٧
(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية.....	١٥٠
(٦-٥) استخدام حزمة TORA.....	١٥٤
(٧-٥) تمارينات.....	١٦٣
الباب السادس: توزيع زمن الانتظار في بعض أنظمة ماركوف ...	
(١-٦) مقدمة.....	١٦٩
(٢-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞)	١٧٠
(٣-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/C):(GD/∞/∞)	١٧٣
(٤-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/C):(GD/N/∞) ..	١٧٥
(٥-٦) أمثلة.....	١٧٧
تطبيقية.....	
(٦-٦) تمارينات.....	١٨٤
الباب السابع: نماذج عملية ماركوف الضمنية.....	
(١-٧) مقدمة.....	١٨٧
(٢-٧) نموذج ماركوف لزمن خدمة عام (M/G/1):(GD/∞/∞)	١٨٨

الموضوع	الصفحة
قاعدة Pollaczek-Khintchine.....	١٩٠ (٣-٧)
التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار.....	١٩٥ (٤-٧)
أمثلة تطبيقية.....	٢٠٣ (٥-٧)
الباب الثامن: بعض أنظمة إيرلنج للصفوف.....	
مقدمة.....	٢١١ (١-٨)
نموذج وصول العملاء في مجموعات.....	٢١٢ (٢-٨)
نموذج خدمة العملاء في مجموعات.....	٢١٩ (٣-٨)
نموذج الخدمة وفقاً لتوزيع إيرلنج.....	٢٢٤ (٤-٨)
تمريبات.....	٢٣٠ (٥-٨)
الباب التاسع:دراسة حالة.....	
مقدمة.....	٢٣٥ (١-٩)
بناء النموذج.....	٢٣٦ (٢-٩)
أختبارات الأستقرار.....	٢٤٠ (٣-٩)
أختبارات الأستقلال.....	٢٤٦ (٤-٩)
توفيق التوزيعات وأختبارات جودة التوفيق.....	٢٥٤ (٥-٩)
دراسة حالة.....	٢٦٦ (٦-٩)
تمريبات.....	٢٧٦ (٧-٩)

الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون). ٢٧٩

- ٢٨١ (١-١٠) مقدمة
- ٢٨٤ (٢-١٠) نموذج الخدمة في مرحلتين
- ٢٩٢ (٣-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية
- ٢٩٥ (٤-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية..
- ٣٠٢ (٥-١٠) أمثلة تطبيقية
- ٣٠٦ (٦-١٠) تمارينات

الباب الحادي عشر: نماذج الصفوف المتتالية مع حدوث رفض أو توقف ٣٠٩

- ٣١١ (١-١١) مقدمة
- ٣١٣ (٢-١١) نموذج الرفض
- ٣١٦ (٣-١١) نموذج التوقف
- ٣٢٥ (٤-١١) أمثلة تطبيقية
- ٣٣٥ (٥-١١) تمارينات

الباب الثاني عشر: نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية ٣٣٧

- ٣٣٩ (١-١٢) مقدمة
- ٣٤٠ (٢-١٢) نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية
- ٣٤٢ (٣-١٢) بعض نماذج الأمثلية
- ٣٤٥ (٤-١٢) تمارينات

٣٤٧	الباب الثالث عشر: أسلوب المحاكاة وأنظمة الصفوف.....
٣٤٩مقدمة (١-١٣)
٣٥٠أسلوب المحاكاة (٢-١٣)
٣٥٢طريقة المونت كارلو (٣-١٣)
٣٥٩توليد قيم المتغير العشوائي (٤-١٣)
٣٦٧تطبيق (٥-١٣)
٣٧٩	ملحق (١): مفكوك تيلور.....
٣٨٤	ملحق (٢): الأاحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسى (Z) ...
٣٨٦	ملحق (٣): الأاحتمالات التراكمية لمتغير كا ^٢
٣٨٨	ملحق (٤): القيم الحرجة لـ k_m^α لاختبار كولموجروف سيمرونوف
٣٨٩	ملحق (٥): التوزيع الأاحتمالي لدارين واتسون (D).....
٣٩٠	ملحق (٦): الأاعداد العشوائية.....
٣٩١	ملحق (٧): توزيع أستيوذنت t.....
٣٩٢	ملحق (٨): حساب تباين العينة.....
٣٩٥	ملحق (٩) التكامل العددي
٣٩٩	المصطلحات.....
٤١٢	قائمة المراجع.....

مقدمة

لقد أدى التطور السريع في السنوات الأخيرة لأهمية دراسة الطبيعة **Stochastic Nature** في كثير من مكونات عناصر المشاكل القرارية المختلفة بشكل عام وبالنسبة لمشاكل التكدس والانتظار بشكل خاص.

مما تطلب أهمية إصدار الطبعة الثانية من كتاب: " مقدمة في نماذج الصفوف: النظرية والتطبيق "

وتختلف هذه الطبعة عن الطبعة الأولى في التالي:

- إضافة نماذج جديدة لنماذج الصفوف في الطبعة الأولى مثل نماذج ماركوف الضمنية **imbedded Markov models** .
- إضافة عدة أمثلة وتطبيقات إضافية .
- تصويب الأخطاء المطبعية الواردة في الطبعة الأولى سنة ٢٠١٨ م .

كثير ما نشاهد صفوف الانتظار **waiting queues** في الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية مثل صفوف الانتظار في المستشفيات أو في مراكز التحليل أو البنوك أو المطارات الجوية والبحرية، الخ.

وصف الانتظار لا يمثل مشكلة حقيقة إذا كان هناك توازن بين تأخر حصول العميل على الخدمة وبين الوقت الذي يكون فيه مركز (أو مراكز) الخدمة غير مشغول بأداء الخدمة للعملاء. ولكن يمثل صف الانتظار مشكلة حقيقية تسمى بمشكلة التكدس **congestion problem** في حالة النقص في المعروض من الخدمة عن الطلب عليها أو سوء إدارة النظام أو كلاهما معاً.

وتكاليف الانتظار والتكدس تكاليف باهظة كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الباب الأول. لذلك كان من الأهمية دراسة أنظمة الصفوف **queueing systems** (الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية) التي تعاني من صفوف الانتظار وحدث تكدس.

وتعتبر أول دراسة علمية لأنظمة الصفوف الدراسة التي قدمها إيرلنج Erlang سنة ١٩٠٩، ثم توالى الدراسات النظرية والتطبيقية لأنظمة الصفوف المختلفة، وذلك بهدف وصف وتحليل أنظمة الصفوف ثم تحديد كيفية تحسين أداء هذه الأنظمة أو التوسع فيها.

وتلعب نظرية الصفوف دور هام في توصيف الأنظمة توصيف كمي دقيق وبالتالي تحديد الأسباب الحقيقية للانتظار والتكدس، وذلك من خلال قياس تأثير هذه الأسباب على كفاءة أداء النظام.

ونظرية الصفوف queuing theory هي فرع من فروع نظرية الاحتمالات التطبيقية branch of applied probability theory، فهي تمثل مجموعة النظريات والأساليب الاحتمالية التي تتناول بالدراسة والتحليل الأنظمة التي تعاني من ظاهرة الانتظار والتكدس.

وتنقسم نماذج الصفوف إلى:

• نماذج تحليلية analytical models

وهي عبارة عن صياغات رياضية أو إحصائية محددة تحت فروض معينة.

• نماذج تجريبية (عددية) numerical models

تعتمد على التجربة مثل نماذج المحاكاة simulation models.

وعادة في حالة عدم توافر الفروض التي يجب توافرها لصياغة النماذج الرياضية أو الإحصائية، أو صياغتها تكون معقدة، في هذه الحالات تستخدم النماذج التجريبية.

وأدى التطور الكبير في الحاسبات الآلية (الكمبيوتر) إلى إمكان استخدام النماذج والأساليب التجريبية بكفاءة وعلى نطاق واسع،

وسوف نرى في الأبواب التالية الارتباط الوثيق بين نظرية الصفوف والعمليات العشوائية stochastic processes والتحليل الإحصائي وبصفة خاصة اختبارات

الفروض الإحصائية المعلمية واللامعلمية **parametric and nonparametric tests** واختبارات الاستقرار **equilibrium (Stability test)** ومنذ الخمسينات في القرن السابق، قد أدي تطور نظرية العمليات العشوائية والتحليل الإحصائي إلى التطور الكبير في نظرية الصفوف وتطبيقاتها أيضاً.

ونظراً للنقص الشديد للكتابات العلمية بالمكتبة العربية، مما دفعني إلى أهمية كتابة ونشر الطبعة الثانية من هذا الكتاب.

وتتناول هذه الطبعة نماذج الصفوف من الجانبين النظري والتطبيقي والمتطلبات الأساسية لدراستها وتحليلها وكيفية تحسين أدائها أو التوسع فيها.

والمستهدفون من هذا الكتاب هم طلاب مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا في التخصصات المختلفة (الإحصاء - الرياضيات - الإدارة - الإقتصاد..... الخ)، ويحتوى الكتاب على ثلاثة عشر باب:

الباب الأول تحت عنوان: مشاكل التكس ونظرية الصفوف

ويتناول هذا الباب مشاكل التكس وخطورتها وأهمية استخدام نظرية الصفوف في دراستها وتحليلها. كذلك يقدم رؤية تاريخية لتطور نظرية الصفوف وتطبيقاتها بالإضافة إلى دور كل من التحليل الإحصائي وأساليب الأمثلية بالنسبة لتطبيقات نظرية الصفوف. كذلك يقدم هذا الباب أهم المتطلبات لدراسة أنظمة الصفوف.

الباب الثاني تحت عنوان: أساسيات

ويقدم هذا الباب بعض أهم التعريفات والنظريات والأساليب المرتبطة بنماذج الصفوف المقدمة في هذا الكتاب.

الباب الثالث تحت عنوان: بعض العمليات العشوائية

ويقدم هذا الباب تعريف العملية العشوائية وأهم أنواع العمليات المرتبطة بأنظمة الصفوف مثل عمليات ماركوف وعمليات إيرلنج وأهم خصائص هذه العمليات. مع تقديم بعض الأمثلة لها .

الباب الرابع تحت عنوان: مكونات أنظمة الصفوف

ويقدم هذا الباب تعريف لنظام الصف والصياغات الرمزية للأنظمة المختلفة، كذلك بعض التوزيعات الاحتمالية لبعض مكونات أنظمة الصفوف. مع تقديم عدد من الأمثلة التطبيقية والتمرينات.

الباب الخامس تحت عنوان: بعض نماذج ماركوف للصفوف

ويقدم هذا الباب بعض نماذج الصفوف التي قدمها ماركوف وكيفية اشتقاقها وأهم مؤشرات كفاءة هذه الأنظمة المقدمة، ذلك بالإضافة إلى كيفية استخدام حزمة البرامج الجاهزة TORA في إيجاد التوزيعات الاحتمالية لعدد العملاء في الأنظمة كذلك حساب مؤشرات كفاءة الأنظمة المقدمة في هذا الباب. مع تقديم بعض الأمثلة التطبيقية لهذه الأنظمة وبعض التمرينات .

الباب السادس تحت عنوان: توزيع زمن الانتظار في بعض أنظمة ماركوف

ويتناول هذا الباب كيفية اشتقاق التوزيع الاحتمالي لزمن انتظار العميل في الصف بالنسبة لبعض أنظمة ماركوف السابق تقديمها في الباب الخامس.

الباب السابع تحت عنوان: نماذج ماركوف الضمنية

ويقدم هذا الباب نموذج ماركوف الضمني $(GD/\infty/\infty)$: $(M/M/1)$ وأشتقاق التوزيع الاحتمالي المستقر لعدد العملاء في النظام ومؤشرات كفاءة النظام كذلك بعض التطبيقات

الباب الثامن تحت عنوان: بعض نماذج إيرلنج للصفوف

ويقدم هذا الباب بعض نماذج إيرلنج لصفوف الأنتظار من الجانب النظري في صياغة النماذج وأشتقاق مؤشرات أداء النظام، كذلك من الجانب التطبيقي تقديم بعض الأمثلة التطبيقية على الأنظمة المقدمة.

الباب التاسع تحت عنوان: دراسة حالة

ويتناول هذا الباب البيانات المطلوبة لبناء نموذج الصف المناسب والمراحل المختلفة لبناء النموذج، وتقديم بعض الاختبارات اللامعلمية لأستقلال والأستقرار للمدخلات وزمن الخدمة ثم تقديم كيفية توفيق التوزيعات الاحتمالية للمدخلات أو أزمنة الخدمة بأستخدام طرق التقديرات الإحصائية المقدمة، كذلك أختبارات جودة التوفيق. وأخيراً تقديم دراسة حالة لتوضيح كيفية بناء النموذج وإجراء الأختبارات المطلوبة.

الباب العاشر تحت عنوان: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون) ويتناول هذا الباب أنظمة الخدمة على مراحل متتالية، حيث يتم تقديم بعض نماذج روبرت جاكسون للصفوف المتتالية، مع تقديم بعض الأمثلة التطبيقية لهذه الأنظمة ب الأضافة لبعض الأمثلة التطبيقية والتمرينات .

الباب الحادي عشر تحت عنوان: نماذج الصفوف المتتالية مع حدوث رفض أو توقف

ويتناول هذا الباب أنظمة الخدمة المتتالية مع حدوث رفض لخدمة بعض العملاء أو حدوث توقف أحد مراكز الخدمة في المرحلة الأولى. وكيفية بناء النماذج المناظرة في كل حالة مع تقديم بعض الأمثلة التطبيقية لهذه الأنظمة.

الباب الثاني عشر تحت عنوان: نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية

ويتناول هذا الباب كيفية استخدام أساليب الأمثلية مثل الأساليب المختلفة للبرمجة الرياضية في تحديد المؤشرات المثلي لكفاءة الأنظمة محل الدراسة أو عند تصميم بعض الأنظمة للحصول على أفضل تصميم أو في مراقبة جودة الخدمة والتحكم فيها .

الباب الثالث عشر تحت عنوان: أسلوب المحاكاة وأنظمة الصفوف

ويتناول هذا الباب تقديم أسلوب المحاكاة كأحد الأساليب العديدة لدراسة وتحليل أنظمة الصفوف المعقدة أو التي لا يتوفر فيها الشروط المطلوبة لأشتقاق نماذج تحليلية. ويقدم هذا الباب طريقة المونت كارلو في بناء نماذج المحاكاة مع إعطاء بعض الأمثلة التطبيقية لذلك.

كذلك يتضمن الكتاب عدد ٩ ملاحق تتضمن بعض المتطلبات الرئيسية لتطبيق نماذج الصفوف بالإضافة إلى قائمة متنوعة من المراجع العربية والأجنبية.

وأخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجد القارئ العربي في هذا الكتاب لبنه من لبنات البناء، عسى أن نجد من المتخصصين العرب من يقدم إسهاماته في هذه العلوم.

والله ولي التوفيق

المؤلفة

أ.د. عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء

كلية التجارة - جامعة حلوان

أغسطس ٢٠٢٣

الباب الأول
مشاكل التكدس ونظرية الصفوف
**Congestion Problems and
Queueing Theory**

Introduction	(١-١) مقدمة
Congestion Problems	(٢-١) مشاكل التكدس
Queueing Theory	(٣-١) نظرية الصفوف
A Historical Perspective	(٤-١) رؤية تاريخية
	(٥-١) نظرية الصفوف والأساليب والإحصائية
Queueing Theory and Statistical Techniques	
	(٦-١) نظرية الصفوف وأساليب الأمثلية
Queueing Theory and Optimization Techniques	
Exercises	(٧-١) تمرينات

Introduction**(١-١) مقدمة**

يهدف هذا الباب إلى تناول مشاكل التكديس وأسبابها وخطورتها بطريقة مبسطة ومختصرة في العديد من الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية.

ثم يقدم تعريف لنظرية الصفوف ودورها في دراسة وتحليل أنظمة الصفوف التي تعاني من الأنتظار والتكديس.

حيث تقدم النظرية وصف للسلوك الاحتمالي للنظام وعناصره، كذلك تقديم مؤشرات قياس كفاءة النظام محل الدراسة.

في الفصل (١-٤) نقدم رؤية تاريخية عن تطور نظرية الصفوف وتطبيقاتها.

ومنذ سنة ١٩٢٠ وقد حدث تطور كبير في نظرية العمليات العشوائية **stochastic processes theory** وانعكس ذلك على تطور نظرية الصفوف، كذلك تطور التحليل الإحصائي أيضاً مما انعكس أيضاً على تطوير تطبيق نماذج الصفوف، لذلك في الفصل (١-٥) نقدم باختصار العلاقة بين نظرية الصفوف والأساليب الإحصائية.

كذلك منذ عام ١٩٥٠ وحدث تطور كبير في أساليب الأمثلية **optimization techniques** مما أدى إلى ربط نماذج الصفوف بهذه الأساليب للوصول إلى المؤشرات المثلى لكفاءة أنظمة الصفوف أو استخدام هذه الأساليب عند تصميم أنظمة جديدة أو المراقبة والتحكم في الأنظمة الموجودة .

لذلك في الفصل (١-٦) نقدم العلاقة بين نظرية الصفوف وأساليب الأمثلية.

Congestion Problems**(٢-١) مشاكل التكدس**

في حياتنا اليومية كثير ما نشاهد صفوف (طوابير) الانتظار (waiting lines) queues في كثير من المراكز الخدمية أو الإنتاجية وفيما يلي سوف نعطي بعض الأمثلة لذلك:

(١) انتظار العملاء على شبابيك الخدمة في البنوك،

(٢) انتظار المرضى أمام العيادات الطبية في المستشفيات أو إجراء التحاليل أو إجراء العمليات، الخ.

(٣) انتظار السفن في الموانئ البحرية لحين تفرغها أو شحنها أو تقديم الميناء للخدمات التي تطلبها. كذلك بالنسبة للطائرات بالمطارات التي يتم تزويدها بالخدمات في المطارات.

(٤) انتظار المواطنين على محطات الأتوبيسات، أو محطات القطارات، الخ.

(٥) كذلك في كثير من مراكز الإنتاج يتم انتظار وحدات الإنتاج في مرحلة أو أكثر من مراحل الإنتاج للدخول على خطوط الإنتاج، كذلك انتظار الوحدات المنتجة ليتم توزيعها على مراكز التسويق أو تخزينها بالمخازن.

والأمثلة الأخرى كثيرة، وصف (طابور) الانتظار لا يمثل مشكلة إذا كان متوسط معدل أداء الخدمة أكبر من متوسط معدل وصول العملاء إلى مركز (أو مراكز) الخدمة، أو بعبارة أخرى صفوف الانتظار موجودة في الدول المتقدمة ولكن لم تسبب مشكلة نظراً لأن زمن انتظار العميل يكون صغير جداً بالإضافة إلى إدارة مركز (أو مراكز) الخدمة بكفاءة بحيث لا تحدث مشاكل تكدس.

ولكن يكون صف الانتظار مشكلة حقيقية إذا كانت فترة انتظار العميل بالصف فترة كبيرة بالإضافة إلى وصول عملاء جدد مما يؤدي إلى حدوث مشكلة تكدس داخل نظام الخدمة.

وعادة ترجع ظاهرة الانتظار ومشاكل التكديس إلى الأسباب التالية:

١- الطلب على الخدمة أكبر من المعروض منها، وبالتالي وجود عدم توازن بين الطلب والعرض [٤].

٢- قد يكون الطلب على الخدمة أقل من أو يساوي المعروض منها، ولكن تحدث مشكلة التكديس نتيجة لعدم إدارة نظام الخدمة بكفاءة.

٣- وتتفاقم المشكلة في حالة زيادة الطلب من الخدمة عن المعروض منها وفي نفس الوقت عدم الكفاءة في إدارة نظام الخدمة مثلاً في المستشفيات أو الموانئ [١٠، ١٢، ١٤].

وتحدث هذه المشاكل بشكل يومي تقريباً في كثير من الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية في الدول غير المتقدمة حتى أصبحت سمة من سماتها السيئة والخطيرة.

والتكديس ظاهرة خطيرة لأن تكاليفها باهظة متمثلة في:

١- تكاليف غرامات التأخير في أداء الخدمة للعميل، ومثال ذلك في المثال (٣) أعلاه، حيث تفرض السفن على الموانئ غرامات تدفع بالعملة الأجنبية عن كل ساعة تأخير في أداء الخدمة للسفينة أو تفريغها وشحنها، بالمثل بالنسبة للمطارات، مما تمثل أعباء وإهدار لإيرادات نظام الخدمة.

ومما هو جدير بالذكر أن مصر خلال السبعينات في القرن السابق تكبدت ملايين الدولارات نتيجة دفع غرامات تأخير لانتظار وتكديس السفن بميناء الإسكندرية والموانئ الأخرى [٤].

٢- إهدار وقت العملاء وما ينشأ عنه من تكاليف غير مباشرة، مثال ذلك انتظار العملاء في البنوك في المثال أعلاه في (١) أو انتظار الأتوبيسات أو القطارات كما في المثال أعلاه في (١)، (٢).

٣- قد يسبب الانتظار والتكديس معاناة وفقد بعض المرضى لأرواحهم نتيجة انتظار فترات طويلة في قوائم انتظار عمليات طبية أو إجراء تحاليل كما في مثال (٢) أعلاه مما قد يؤدي إلى تعرض المرضى للخطر.

٤- تنشأ عن ظاهرة الانتظار والتكديس ظواهر أخرى سلبية كثيرة مثل انتشار الأمراض، والسرقات، الخ.

ومما ذكر أعلاه نجد من الأهمية دراسة مشاكل الانتظار والتكديس دراسة علمية وتقديم الحلول المناسبة لمتخذي القرارات في هذه الأنظمة التي يؤدي تطبيقها إلى معالجة وحل هذه المشاكل.

وتهتم نظرية الصفوف بدراسة وتحليل الأنظمة التي تعاني من الانتظار والتكديس، حيث تتحرى السلوك الاحتمالي للمتغيرات العشوائية في مكونة النظام والعلاقات الاحتمالية بينها.

وتعتبر أول دراسة علمية قدمت لدراسة أنظمة الصفوف سنة ١٩٠٩ التي قدمها المهندس الهولندي إيرلنج Erlang ، ثم توالى بعد ذلك العديد من الدراسات لهذه الأنظمة، وفي الفصول التالية سوف نتناول ذلك بالتفصيل [38].

Queueing Theory

(٣-١) نظرية الصفوف

تعتبر أول دراسة قدمت تتناول مشكلة صفوف الانتظار سنة ١٩٠٧، حيث نشرت أول دراسة للعلاقة بين أزمنة الانتظار لمكالمات التليفونات وعدد المكالمات التليفونية waiting time and number of calls ثم أعيد نشرها سنة ١٩١٠ في مجلة [76]: "Post office Electrical Engineers Journal, London"، ورغم أن هذه الدراسة تعتبر أول مقالة في دراسة مشكلة الانتظار، لكن الأسلوب الذي تناولته المقالة لم يكن أسلوباً دقيقاً رياضياً mathematically exact.

ولكن تعتبر أول دراسة علمية رياضية لدراسة أنظمة الصفوف هي الدراسة التي قدمها العالم Erlang سنة ١٩٠٩ [38]، كما سوف نوضح ذلك بشيء من التفصيل في الفصل التالي.

ونظرية الصفوف هي فرع من فروع نظرية الاحتمالات التطبيقية branch of applied probability [22]، فنظرية الصفوف هي عبارة عن مجموعة النظريات والأساليب الاحتمالية التي تتناول بالدراسة والتحليل الأنظمة التي تعاني من ظاهرة الانتظار والتكس.

حيث تلعب نظرية الصفوف دوراً بارزاً في تحديد الأسباب الحقيقية للانتظار والتكس. كذلك تقدم المؤشرات التي يمكن بأستخدامها تحقيق التوازن بين تأخير حصول العميل على الخدمة من ناحية وبين الوقت الذي يكون فيه مركز الخدمة (أو مراكز) الخدمة خالية غير مستغله [٤ ، 26].

وتهتم نظرية الصفوف بدراسة السلوك الاحتمالي لمكونات النظام كذلك دراسة العلاقات الاحتمالية بين مكونات النظام أيضاً.

وفي الأبواب التالية سوف نقدم العديد من أنظمة الصفوف المختلفة وتحليلها وتقديم أهم مؤشرات كفاءتها مع تقديم كيفية أستخدام أساليب الأمثلية للوصول إلى أفضل مؤشرات ممكنة من وجهة نظر متخذ القرار.

A Historical Perspective

(٤-١) رؤية تاريخية

وكما ذكرنا في الفصل السابق أن العالم المهندس الهولندي Erlang سنة ١٩٠٩ أول من قدم دراسة لنظرية الصفوف بأسلوب رياضي دقيق تحت عنوان "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations" حيث قدم العلاقة بين مستوي تقديم الخدمة وعدد خطوط الاتصال المتاحة، حيث أعتبر أن عدد المكالمات التي تصل إلى السنترال خلال فترة معينة متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون Poisson distribution (وبالتالي تكون الفترة بين وصول مكالمتين متتاليتين تمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي Exponential distribution [24])، ثم قدم جداول هندسية يمكن باستخدامها تحديد كفاءة النظام وتلي ذلك تقديمه لأول نموذج رياضي للصفوف [65].

لذلك يؤرخ لنظرية الصفوف من سنة ١٩٠٩ بدراسة إيرلنج، ثم توالت الأبحاث التي قدمها إيرلنج في دراسة الصفوف خلال العشرين عام التالية (خلال الفترة ١٩١٠-١٩٣٠)، فقد قدم خلالها أهم المفاهيم الأساسية والأساليب المرتبطة بالاستقرار الإحصائي statistical equilibrium وبصفة خاصة مقالته تحت عنوان: "An the Rational Determination of The Number of Circuits" حيث تناول فيها نظام الصف كمشكلة أمثلية optimization problem [52].

وفي خلال فترة عمل وأهتمام إيرلنج بنظرية الصفوف (خلال الفترة ١٩٢٠-١٩٣٠) قدم آخرين عديد من الدراسات أيضاً، ومن أمثلتهم Fry سنة ١٩٢٨ حيث قدم أول كتاب للاحتمالات والاستخدامات الهندسية تحت عنوان: "Probability and it's Engineering Uses" ، حيث أحتوى الكتاب على هندسة التليفونات telephone engineering، ثم تناول الكتاب أول أساس احتمالي للنماذج المستخدمة والتي يطلق عليها حالياً بعمليات الميلاد والوفاة birth and death processes كذلك قدم الصياغة الرياضية لعملية المرور traffic process [37].

وفي سنة ١٩٣٠ تم تعيين العالم Bähler رئيس قسم هندسة التليفونات في جامعة Delft Technological University مما أدى إلى أن تصبح نظرية المرور traffic Theory جزء تعليمي لمهندسين الاتصالات في هولندا، وبالتالي أدى إلى تطوير صناعات الاتصالات عن بعد telecommunication [78].

وأثناء العشرين سنة التالية (خلال الفترة ١٩٣٠-١٩٥٠) قدمت معظم النظريات التي أدت إلى تطوير وتحليل نماذج الصفوف لتصبح أكثر تعميماً وأكثر استخداماً في وصف وتحليل العديد من الأنظمة المعقدة. وخلال هذه الفترة كانت معظم الدراسات الخاصة بنظرية الصفوف وتطبيقاتها يقتصر على العلمين Scientists فقط وأتصاهم بهندسة التليفونات، ومن أهم العلماء في هذه الفترة:

- قدم Palm العديد من المقالات في تطبيق نظرية العمليات العشوائية stochastic processes في تطوير أنظمة الصفوف، وكان من أهم ما قدمه مفهوم نقط الانبعاث (التجديد) regeneration points.

- كذلك قدم Pollazek سنة ١٩٤٥ الأساليب النظرية الدالية function theoretical techniques والمعادلات التكاملية الشاذة singular integral equations في تحليل الصفوف queueing analysis.

ونظراً لأن النمذجة الرياضية mathematical modeling تعتبر تقريب للظواهر العشوائية، ولكن النماذج الإحصائية تكون أكثر واقعية في التعبير عن الظواهر العشوائية، لذلك خلال الفترة (١٩٥٠-١٩٧٠) قدم Kendall سنة ١٩٥١، ١٩٥٣ أول أسلوب احتمالي probabilistic approach عندما قدم سلسلة ماركوف الضمنية imbedded Markov chain وبأستخدام هذه السلسلة أمكنه صياغة form عمليات الطابور في الأنظمة (M/G/1)، (G1/M/S) [57]. وفي الباب السابع سوف نقدم (M/G/1).

هذا بالإضافة إلى استخدام نظرية التجديد **renewal theory** في تحليل أنظمة الصفوف خلال فترة الستينات. وفي نهاية الستينات أكتمل تحليل أنظمة الصفوف الأساسية. ومن أهم الذين ساهموا في هذه الفترة أيضاً كل من: **Crommelin, Feller, Jensen, Khintchine, Kolmogorov, Syski, Saaty** [80].

وخلال الخمسينات والستينات قدم **Robart Jackson** نماذج الصفوف المتتالية وشبكات الصفوف مما أدى إلى أن أصبحت نظرية الصفوف أداة فعالة في تصميم وتحليل أنظمة الحاسب [47-50].

ونتيجة للثورة التكنولوجية التي بدأت أثناء وبعد الحرب العالمية الثانية والتطور السريع لنظرية العمليات العشوائية مما أدى إلى التطور السريع لنظرية الصفوف وتطبيقاتها [53, 78, 76] أيضاً. وبسرعة بدأت نماذج الصفوف وتطبيقاتها تمثل جزء هام في بحوث العمليات والعلوم الإدارية أيضاً. ومن أهم الكتاب الذين قدموا العديد من المراجع للنظرية:

Courtios (1977), Kelly (1979), Sauer (1981), Lavenbery (1983), Kiessler & Disney (1987), Molloy (1989), Perros (1994), Pyolle & Gelenber (1998), etc.

ونظراً للتطور الكبير في الحاسبات (الكمبيوتر) من حيث السرعة وسعة التخزين مما أدى إلى استخدام الأساليب العددية **numerical techniques** مثل المحاكاة **simulation** في دراسة وتحليل أنظمة الصفوف المعقدة أو التي لا تتوافر فيها شروط النماذج التحليلية.

ففي العقود الأخيرة من القرن السابق حتى الآن لعبت تكنولوجيا المعلومات الحديثة **modern information technology** دور هام في حياتنا بصفة عامة، وتعتبر نظرية الصفوف واحدة من أكثر الأدوات الرياضية **mathematical tool** لبناء وتقييم وتحليل شبكات الاتصال المعلوماتية **infocommunication networks** حيث تمثل هذه الشبكات واحدة من أكثر أنظمة الصفوف المعقدة [92, 95, 100].

ونظراً لأن الهدف النهائي (المطلق) لتحليل أنظمة الصفوف هو: "فهم سلوك العمليات العشوائية داخل النظام بحيث يمكن تقديم المعلومات **information** والقرارات الفطنة للقائمين على إدارة الأنظمة".

ولدراسة وتطبيق نظرية الصفوف بكفاءة يتطلب ذلك:

- دراسة مكونات أنظمة الصفوف والسلوك الاحتمالي لكل مكون والعلاقات بين هذه المكونات دراسة إحصائية [73, 22, 17]. وفي الفصل التالي سوف نقدم باختصار مراحل الدراسة الإحصائية لأنظمة الصفوف قبل تطبيق نظرية الصفوف.
- استخدام أساليب الأمثلية **optimization techniques** وبصفة خاصة أساليب البرمجة الرياضية **mathematical programming** في التصميم والمراقبة **design and control** لأنظمة الصفوف، كذلك الوصول إلى المستوى الأمثل لإنجاز العمل بالنظام [89, 85, 77].

لذلك في الفصل (١-٦) نقدم باختصار دور أساليب الأمثلية في إتخاذ القرارات المثلي لأنظمة الصفوف. أما بالنسبة لأنظمة الصفوف التي لا تتوفر فيها الشروط التي تتطلبها نماذج الصفوف التحليلية مثل الإستقرار والإستقلال، الخ. ففي هذه الحالات يتم استخدام الأساليب العددية مثل أسلوب المحاكاة **simulation technique** أو الأساليب غير المعلمية **nonparametric technique** لدراستها وتحليلها وبصفة خاصة الأنظمة الأكثر تعقيداً [10, 46, 63, 64, 61, 78].

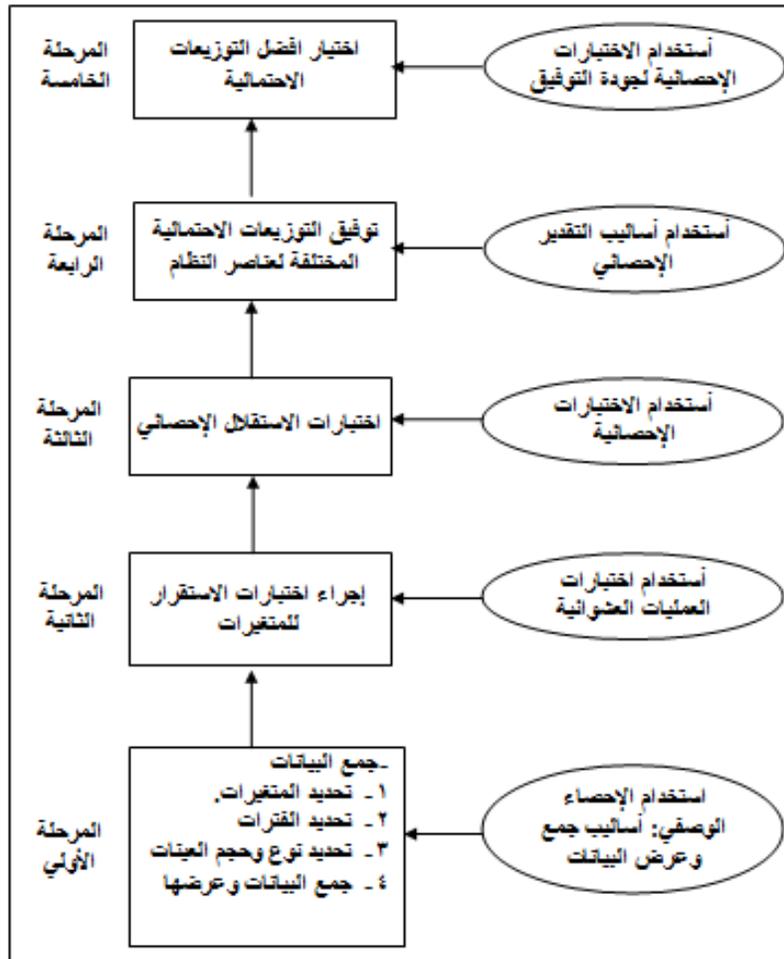
(٥-١) نظرية الصفوف والأساليب والإحصائية

Queueing Theory and Statistical Techniques

تلعب الإحصاء الوصفي والتحليلي descriptive and analytical statistics

دور بالغ الأهمية في تطبيق نظرية الصفوف. فيسبق تطبيق نظرية الصفوف المرور بالمرحل التالية التي تستخدم فيها الأساليب الإحصائية المختلفة والموضحة بالشكل التالي [٧, ٥٤, ٥٥, ١٠٤, ١٠٥].

شكل (١-١): المراحل الإحصائية السابقة لتطبيق نظرية الصفوف



المرحلة الأولى: جمع البيانات collection of data

يتم فيها تحليل النظام وتحديد المتغيرات المطلوبة في تطبيق نظرية الصفوف وجمع بياناتها ومن هذه المتغيرات ما يلي:

- وقت (زمن) خدمة العميل في النظام،
- الفترات الزمنية بين وصول عميلين متتاليين للنظام،
- الفترات الزمنية التي يقضيها العملاء في الانتظار،
- الفترات الزمنية بين خروج عميلين على التوالي بعد إنهاء خدمتهم في النظام.

وفي هذه المرحلة يتم:

- ١- اختيار الفترات التي يتم فيها دراسة المتغيرات.
- ٢- تحديد حجم العينات المختلفة وأسلوب سحبها.
- ٣- حساب مؤشرات الموضع مثل المتوسط والتشتت مثل التباين، كذلك حساب مؤشرات التفرطح والإلتواء أيضاً بالنسبة لكل متغير على حده.

المرحلة الثانية: اختبارات الأستقرار tests for stationary in time

البيانات التي تم جمعها خلال الفترات الزمنية السابق تحديدها تمثل بيانات لعمليات عشوائية *stochastic processes* وبالتالي لابد من تحديد العمليات المستقرة *stationary* وغير المستقرة *nonstationary*. وتوجد اختبارات مختلفة للأستقرار مثل *Mann-Whitney-Wilcoxon Test*.

وفي سنة ١٩٦٦ قدم كل من *Cox and Lewis* معالجة شاملة لاختبارات الأستقرار للعمليات العشوائية [24, 23].

المرحلة الثالثة: اختبارات الأستقلال tests for independence

والأستقلال هنا يعني: (أ) أستقلال قيم المشاهدات عن بعضها بالنسبة للمتغير الواحد فمثلاً اختبار أستقلال المشاهدات لزمن خدمة العملاء.

ب) أستقلال المتغيرات التي تمثل عنصر معين في النظام مثل عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام في الوحدات الزمنية المختلفة عن بعضها ويكون لكل منها نفس التوزيع، ومثال ذلك أيضاً أستقلال الفترات الزمنية لخدمة العملاء عن بعضها البعض وهل لكل منها نفس التوزيع الاحتمالي أم لا.

ج) أستقلال المتغيرات التي تمثل عناصر النظام عن بعضها، مثال ذلك أستقلال عدد العملاء الذين يصلون للنظام في طلب الخدمة عن أزمنة خدمة هؤلاء العملاء في مركز الخدمة.

وتوجد اختبارات متعددة للبنود أعلاه مثل الاختبارات اللامعلمية في دراسة الأستقلال [61, 57].

المرحلة الرابعة: توفيق التوزيعات الاحتمالية fitting the probability distributions

في هذه المرحلة يتم: ١- من المرحلة الأولى يتم رسم المنحنيات التكرارية النسبية لكل متغير خلال الفترات المختلفة.

٢- توفيق التوزيع الاحتمالي الذي يمثل كل متغير في الفترات المختلفة، وتقدير معالم parameters التوزيع باستخدام طرق التقدير الإحصائية المناسبة (مثل طريقة الأماكن الأعظم أو المربعات الصغرى) [74, 54-56].

المرحلة الخامسة: اختيار التوزيع distribution selection

المناظر لنظام الصف فنجد من المرحلة السابقة أنه تم تحديد التوزيع الاحتمالي لكل عنصر من عناصر النظام العشوائية , ووفقاً لذلك يتم تحديد نموذج الصف المناظر لهذه المكونات .

وفي الباب الثامن سوف نقدم دراسة حالة نوضح فيها كيفية تنفيذ المراحل المختلفة السابقة.

(٦-١) نظرية الصفوف وأساليب الأمثلية

Queueing Theory and Optimization Techniques

وكما ذكرنا سابقاً في الفصل (١-٣) أن نظرية الصفوف هي جميع النظريات والأساليب التي تقوم بوصف وتحليل أنظمة الصفوف المختلفة واستخراج مؤشرات تصف كفاءة النظام. ولكن لم تقدم كيفية معالجة الانتظار أو التكديس أو تحقيق توازن بين معدل وصول العملاء للخدمة ومعدل أداء الخدمة أو تقديم الوسائل التي يمكن باستخدامها الوصول بالنظام إلى وضع أفضل وتقديم البدائل الممكنة لمتخذ القرار.

ولذلك كان من الضروري بعد تطبيق نظرية الصفوف استخدام أساليب الأمثلية، ويعتبر Erlang سنة ١٩٢٤ أول من استخدم فكرة الأمثلية في تحديد عدد الدوائر المثلي ولكن حدد هذا العدد من خلال عمل جداول ورسومات بيانية [38, 40].

ومنذ سنة ١٩٥٠ بعد الحرب العالمية الثانية ومع التطور العظيم في الحاسب الآلي (الكمبيوتر) واستخدامه على نطاق واسع أدى إلى تطوير وتطبيق أساليب الأمثلية على نطاق واسع وكان من أهم تطبيقاتها التطبيق لنظرية الصفوف. وعادةً تستخدم أساليب الأمثلية بالنسبة لأنظمة الصفوف فيما يلي:

أولاً: تحديد القيم المثلي لمؤشرات الإنجاز performance measures، ففي سنة ١٩٥٥ قدم Brigham دراسة لتحديد العدد الأمثل للموظفين في مراكز الخدمة بأحدي شركات الطيران [69, 73]. وفي سنة ١٩٥٨ قدم Morse تحديد العدد الأمثل لأماكن الإنتظار للنظام $(M/M/1):(FCFs/N/\infty)$ بحيث يتحقق التوازن بين تكلفة الخدمة وتكلفة رفض خدمة العميل [٤, 81]، ثم توالى في هذا النطاق العديد من الأبحاث [25, 27, 28].

ثانياً: يمكن استخدام أساليب الأمثلية في تصميم ومراقبة أنظمة design & control systems الصفوف، وقدمت العديد من الدراسات لتحديد العدد الأمثل لمراكز الخدمة في الأنظمة التي يتم إنشاءها وكذلك مراقبة أداء هذه الأنظمة.

وفي الباب الثاني عشر سوف نقدم كيفية استخدام أساليب الأمثلية في تحديد المؤشرات المثلي لبعض الأنظمة، أو عند أنشأ أنظمة خدمية جديدة.

وفي هذا الكتاب سوف نقدم تطبيقات لبعض أساليب الأمثلية (البرمجة الرياضية) في تقييم لمشاكل التكديس أو كيفية تحقيق التوازن في النظام أو كيفية الوصول بالنظام لوضع أفضل.

مما سبق يتضح أن تطبيق نظرية الصفوف وتقديم حلول مثلي لمتخذ القرار يجب أن تسبقه مرحلة تطبيق الأساليب الإحصائية ثم تلي تطبيق نظرية الصفوف تطبيق أساليب الأمثلية.

Exercises

(٧-١) تمرينات

(١-١) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة أو علامة (×) أمام العبارة الخاطئة - مع

ذكر السبب:

- ١- أول من قدم دراسة رياضية لمشاكل الصفوف هو Kendall سنة ١٩٠٩.
- ٢- أول من قدم دراسة رياضية لمشاكل الصفوف هو إيرلنج.
- ٣- تطبيق نظرية الصفوف علاج مباشر لمشاكل التكديس.
- ٤- تقدم نظرية الصفوف وصف وتحليل أنظمة الصفوف.
- ٥- تطور نظرية الصفوف مرتبط بتطور الأساليب الإحصائية.
- ٦- تستخدم أساليب الأمثلية في مرحلة تالية لتطبيق نظرية الصفوف.
- ٧- تستخدم أساليب الأمثلية في مرحلة سابقة لتطبيق نظرية الصفوف.
- ٨- يتطلب تطبيق نظرية الصفوف توافر وتحليل البيانات.
- ٩- يتطلب تطبيق نظرية الصفوف استخدام الاختبارات الإحصائية.
- ١٠- ارتبط تطور نظرية الصفوف بتطور نظرية الاحتمالات.

(٢-١) ما هي نظرية الصفوف؟

(٣-١) تكلم باختصار عن خطورة مشاكل التكديس وتكاليفها.

(٤-١) هل التكديس يرجع فقط لنقص الإمكانيات في تقديم الخدمة؟

(٥-١) ما هو دور Kendall في تطوير نظرية الصفوف؟

(٦-١) ما دور أساليب الأمثلية في تطبيق نظرية الصفوف؟

- (٧-١) ما هي أسباب وجود ظاهرة التكديس في بعض الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية.
- (٨-١) أعطى بعض الأمثلة لصفوف الإنتظار التي تؤدي إلى حدوث غرامات للتأخير في أداء الخدمة أو حدوث مخاطرة نتيجة للإنتظار.
- (٩ - ١) تكلم بأختصار عن دور نظرية الصفوف بالنسبة لمشاكل التكديس.
- (١٠-١) يعتبر Saaty أول من قدم دراسة علمية لأنظمة الصفوف.
- (١١-١) هل تقدم نظرية الصفوف حلول لمشاكل التكديس؟
- (١٢-١) تكلم بأختصار عن المراحل الإحصائية المطلوب المرور بها قبل تطبيق نظرية الصفوف.
- (١٣-١) هل يمكن استخدام أساليب البرمجة الرياضية في تطبيق نظرية الصفوف؟
- (١٤-١) تكلم بأختصار عن دور العمليات العشوائية في دراسة وتطبيق نظرية الصفوف.
- (١٥-١) هل يقتصر تطبيق نظرية الصفوف على العلميين والمهندسين فقط؟
- (١٦-١) تكلم بأختصار عن دور نظرية الصفوف في بناء وتطوير شبكات المعلومات.
- (١٧-١) تكلم بأختصار عن الأختبارات الإحصائية اللامعلمية.
- (١٨-١) هل يمكن تطبيق نظرية الصفوف بدون استخدام الأساليب الإحصائية؟
- (١٩-١) ما هي الشروط الواجب توافرها في عناصر نظام الصفوف حتى يمكن صياغة نموذج تحليلي؟
- (٢٠-١) ما هو دور أساليب الأمثلية بالنسبة لنظرية الصفوف؟

الباب الثاني
أساسيات
Basics

Introduction	(١-٢) مقدمة
Definitions and Theorems	(٢-٢) تعريفات ونظريات
Bivariate Distribution	(٣-٢) التوزيع الثنائي
Laplace Transform	(٤-٢) تحويله لابلاس
Erlang Distribution	(٥-٢) توزيع إيرلنج
	(٦-٢) معادلات الفروق التفاضلية
Differential Difference Equations	
Exercises	(٧-٢) تمرينات

Introduction**مقدمة (١-٢)**

تتطلب دراسة نظرية الصفوف **queuing theory** وتطبيقاتها الإلمام الجيد ببعض التعريفات والنظريات والمفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات **probabilities theory**.

لذلك في الفصل التالي سوف نقدم أهم التعريفات التي يتم استخدامها في الأبواب التالية مثل: الدالة المولدة للعزوم، الدالة المولدة للأحتمالات، ... الخ، كذلك نقدم بعض النظريات الهامة التي تعتبر من متطلبات دراسة الصفوف في هذا الفصل أيضاً.

وفي الفصل (٢-٣) نقدم التوزيع الاحتمالي الثنائي **bivariate probability distribution** وأهم خصائصه وتطبيقاته.

وفي الفصل (٢-٤) نقدم تحويله لابلاس **Laplace transform** حيث تعتبر تحويله لابلاس من أهم الأدوات التي تستخدم في اشتقاق بعض نماذج الصفوف التي سوف تقدم في الأبواب التالية.

وفي الفصل (٢-٥) نقدم توزيع إيرلنج الذي يعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية لبعض مكونات بعض أنظمة الصفوف، حيث يعتمد على هذا التوزيع نماذج الصفوف في الباب الثامن.

ثم نقدم في الفصل (٢-٦) معادلات الفروق التفاضلية **differential difference equations** وبعض أساليب حلها، حيث تعتبر أساليب حل المعادلات التفاضلية من الأساليب الهامة في اشتقاق نماذج الصفوف التي سوف تقدم في الأبواب التالية.

هذا بالإضافة إلى تقديم مجموعة متنوعة من التمرينات.

تعريفات ونظريات (٢-٢) Definitions and Theorems

في هذا الفصل سوف نقدم بعض أهم التعريفات والنظريات الأساسية في الاحتمالات التي سوف تستخدم في هذا الباب والأبواب التالية في هذا الكتاب.

أولاً: التعريفات [24, 72]:

تعريف (١-٢): إذا فرضنا الأعداد الحقيقية a_i بحيث $i = 1, 2, \dots, n$ فإن الدالة $A(S)$ تسمى الدالة المولدة (g.f.) للأعداد a_i بحيث:

$$A(S) = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r S^r, \quad -s_0 < S < s_0 \quad (2.1)$$

حيث S متغير حقيقي.

ويمكن الحصول على أي عدد a_r باستخدام الدالة المولدة وذلك بإجراء التفاضل من الترتيب (r) للدالة $A(S)$ والقسمة على مضروب r ($r!$) عند $S = 0$ ، أو بعبارة أخرى:

$$a_r = \frac{1}{r!} \left[\frac{d^r A(S)}{d S^r} \right]_{S=0} \quad (2.2)$$

تعريف (٢-٢): إذا فرضنا أن X متغير عشوائي متقطع غير سالب بحيث:

$$P_r(X=r) = p_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

حيث:

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1 \quad (2.4)$$

وفي حالة المتغير المتصل X غير السالب، بدالة كثافة احتمال $f(X)$ ، فإن:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.5)$$

فإذا اعتبرنا الاحتمالات P_r ، $r = 0, 1, 2, \dots$ تساوى العناصر a_r ، فإن الدالة المولدة في هذه الحالة تسمى بالدالة المولدة للأحتمالات **probability generating function** ويشير لها بالرمز (p.g.f.)، وسوف نرمز لها بالرمز $P(S)$ وأحياناً تسمى **S-transform** أو التحويل الهندسية **geometric transform**، حيث:

$$P(S) = P_0 + P_1 S + P_2 S^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} P_r S^r \quad (2.6)$$

ومن تعريف (2.6) نجد أن:

$$i) P_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k P(S)}{d S^k} \right]_{S=0} \quad (2.7)$$

كذلك نجد أن:

$$ii) E(S^x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i (x = i) S^i = P(S) \quad (2.8)$$

$$iii) \frac{d P(S)}{d S} = P'(S) = \sum_{i=1}^{\infty} i P_i S^{i-1}, \quad -1 < S < 1 \quad (2.9)$$

$$E(X) = P'(S = 1) \quad (2.10)$$

$$iiiv) P''(S) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) P_i S^{i-2}, \quad -1 < S < 1$$

→

$$E[X(X-1)] = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) P_i = P''(S = 1) \quad (2.11)$$

→

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = P''(S = 1) + P'(S = 1)$$

$$\text{iv) } \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P^{\setminus}(S=1) + P^{\setminus}(S=1) - [P^{\setminus}(S=1)]^2 \quad (2.12)$$

$$\text{v) } E\{X(X-1)(X-2)\dots(X-i+1)\} = \left. \frac{d^i P(S)}{dS^i} \right|_{S=1}, \quad i=1,2,\dots \quad (2.13)$$

تعريف (٢-٣): إذا كان X متغير عشوائي متقطع فإن الدالة $M(S)$ حيث:

$$M(S) = E(e^{XS}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iS} P_i = P(e^{XS}), \quad -s_0 < S < s_0, \quad s_0 > 0 \quad (2.14)$$

تسمى بالدالة المولدة للعزوم **moment generating function**. وإذا كان X متغير متصل فإن:

$$M(S) = E(e^{XS}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{XS} f(X) dX = P(e^{XS}) \quad (2.15)$$

وإذا كانت الدالة $M(S)$ موجودة **exists** فإن $M(S)$ تكون متصلة وقابلة للتفاضل بالنسبة لـ S بحيث:

$$E(X^r) = \mu_r^{\setminus} = \left. \frac{d^r M(S)}{dS^r} \right|_{S=0} \quad (2.16)$$

وبما أن $M(S) = E(e^{XS})$ وباستخدام مفكوك تيلور (أنظر ملحق رقم (١)) يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} M(S) &= E\left\{1 + XS + \frac{1}{2!}(XS)^2 + \frac{1}{3!}(XS)^3 + \dots\right\} \\ &= 1 + \mu_1^{\setminus} S + \frac{1}{2!} \mu_2^{\setminus} S^2 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i^{\setminus} S^i \end{aligned} \quad (2.17)$$

وبالتالي فإن معامل $(S^r/r!)$ في الدالة $M(S)$ يساوي μ_r^{λ} أو بعبارة أخرى:

$$\mu_r^{\lambda} = E(X^r)$$

مثال (١-٢): إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون Poisson بدالة احتمال

$$P_i = P_r(X = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

المطلوب: ١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X .

٢- باستخدام الدالة المولدة للأحتمالات أوجد:

$$\text{i) } E(X), \quad \text{ii) } \text{Var}(X), \quad \text{iii) } E\{X(X-1)(X-2)(X-3)\}$$

٣- أوجد الدالة المولدة للغزوم $M(S)$.

٤- باستخدام $M(S)$ أوجد:

$$\text{i) } \mu_1^{\lambda}, \quad \text{ii) } \mu_2^{\lambda}, \quad \text{iii) } \mu_3^{\lambda}$$

الحل: ١- بما أن

$$P(S) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i S^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} S^i = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda S)^i}{i!} = e^{\lambda(S-1)} \quad (2.18)$$

٢- بما أن:

$$\text{i) } E(X) = \mu_1^{\lambda} = \left. \frac{dP(S)}{dS} \right|_{S=1} = \lambda e^{-\lambda(S-1)} \Big|_{S=1} = \lambda$$

$$\text{ii) } \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1)] + E(X) = P^{\lambda\lambda}(S=1) + P^{\lambda}(S=1) \\ &= \lambda^2 + \lambda \quad \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\text{iii) } E\{X(X-1)(X-2)(X-3)\} = \left. \frac{d^4 P(S)}{dS^4} \right|_{S=1} = \lambda^4$$

٣- الدالة المولدة للعزوم

$$M(S) = E(e^{XS}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{XS} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^S)^x}{x!} = e^{\lambda(e^S-1)}$$

ومن (2.16) نجد أن:

$$\mu_r^{\lambda} = E(X^r) = \left. \frac{d^r M(S)}{dS^r} \right|_{S=0}$$

بالتالي فإن:

$$E(X) = \mu_1^{\lambda} = \left. \frac{d M(S)}{dS} \right|_{S=0} = \lambda e^S e^{(\lambda e^S - \lambda)} \Big|_{S=0} = \lambda$$

$$\begin{aligned} E(X^2) = \mu_2^{\lambda} &= \left. \frac{d^2 M(S)}{dS^2} \right|_{S=0} = \lambda^2 e^{2S} e^{(\lambda e^S - \lambda)} + \lambda e^S e^{(\lambda e^S - \lambda)} \\ &= \lambda e^S e^{(\lambda e^S - \lambda)} \{\lambda e^S + 1\} \Big|_{S=0} = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^3) = \mu_3^{\lambda} &= \left. \frac{d^3 M(S)}{dS^3} \right|_{S=0} \\ &= \lambda \{ \lambda e^{(\lambda e^S - \lambda + 2S)} + (\lambda e^S + 1)^2 e^{(\lambda e^S - \lambda + 2S)} \} \Big|_{S=0} \\ &= \lambda[\lambda + (\lambda + 1)^2] \end{aligned} \quad (2.19)$$

تعريف (٢-٤): إذا كان X متغير عشوائي والدالة $C(S)$ بحيث:

$$C(S) = E(e^{iSx}) \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.20)$$

$$= \sum_x e^{iSx} P_r(x)$$

إذا كان X متغير متقطع

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iSx} f(x) dx$$

إذا كان X متغير متصل.

فإن الدالة $C(S)$ تسمى الدالة المميزة **characteristic function** وتعتبر الدالة المولدة للعزوم $M(S)$ حالة خاصة من الدالة المميزة $C(S)$ عند استبدال iS بـ S . وبالتالي يمكن اشتقاق العزوم من الدالة المميزة من العلاقة التالية:

$$\mu_r = E(X^r) = (-i)^r \left. \frac{d^r C(S)}{dS^r} \right|_{S=0} \quad (2.21)$$

وبما أن العزوم للمتغير العشوائي تعتبر مقادير ثابتة توصف شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير محل الدراسة. كذلك توجد فئة أخرى للمقادير الثابتة تناظر فئة العزوم تصف أيضاً خصائص التوزيع الاحتمالي أيضاً بشكل أدق وذات أهمية من الجانب النظرى تسمى عناصرها بالتراكومات **cumulants** وسوف نشير للتراكومات من الترتيب (r) بالرمز K_r وتسمى الدالة التي يمكن باستخدامها اشتقاق التراكومات بالدالة المولدة للتراكومات **cumulant generating function** وسوف نشير لها بالرمز $\phi(S)$ [55].

تعريف (٢-٥): إذا فرضنا أن $\phi(S)$ تشير إلى الدالة المولدة للتراكومات للمتغير X ، $M(S)$ الدالة المولدة للعزوم للمتغير X فإن:

$$\phi(S) = \ln M(S) \quad (2.22)$$

وهذا يعنى أن الدالة المولدة للتراكمات هي لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم.

وبأستخدام مفكوك تيلور نجد أن [55]:

$$\phi(S) = K_1 \frac{S}{1!} + K_2 \frac{S^2}{2!} + \dots + K_r \frac{S^r}{r!} + \dots \quad (2.23)$$

ومن التعريف (2.22) نجد أن:

$$\exp \phi(S) = \exp \{ \ln M(S) \} = M(S)$$

أو

$$\exp \left\{ K_1 \frac{S}{1!} + K_2 \frac{S^2}{2!} + K_3 \frac{S^3}{3!} + \dots \right\} = \left\{ 1 + \mu_1' S + \mu_2' \frac{S^2}{2!} + \dots \right\}$$

أو

$$\exp \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} K_r \frac{S^r}{r!} \right\} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r' \frac{S^r}{r!} \quad (2.24)$$

والمعادلة (2.24) تعطي العلاقة بين μ_r' ، k_r . ومن تعريف $\phi(S)$ في (2.23) نجد أن:

$$K_r = \left. \frac{d^r \phi(S)}{d S^r} \right|_{S=0}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

وفي سنة ١٩٤٩ أوجد كلاً من David and Kendall التراكم من الترتيب r

K_r كدالة في μ_t' ، $t \leq r$ ، كذلك μ_r' كدالة في K_t ، $t \leq r$ ، [55, page71] ، فعندما

$r = 1, 2, 3$ نجد أن:

$$k_1 = \mu_1' \quad , \quad k_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$k_3 = \mu_3' - 3 \mu_2' \mu_1' + 2(\mu_1')^3$$

كذلك:

$$\mu_1^{\setminus} = k_1 \quad , \quad \mu_2^{\setminus} = k_2 + (k_1)^2$$

$$\mu_3^{\setminus} = k_3 + 3 k_2 k_1 + (k_1)^3$$

مثال (٢-٢): أعتبر X متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي geometric distribution بدالة احتمال:

$$P_k = P_r(X = k) = q^k p \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad q + p = 1 \quad (2.26)$$

المطلوب: ١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات ومنها أوجد توقع وتباين X .

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم $M(S)$ ومنها أوجد توقع وتباين X .

٣- أوجد الدالة المولدة للتراكمات، ثم أحسب منها k_1, k_2, k_3 .

٤- أوجد العلاقة بين العزوم والتراكمات.

الحل: ١-

$$P(S) = E(S^x) = \sum_{x=0}^{\infty} P_x S^x = P \sum_{x=0}^{\infty} (S q)^x = \frac{P}{1 - q S} \quad (2.27)$$

حيث $\sum_{x=0}^{\infty} (S q)^x$ عبارة عن مجموع متوالية هندسية لا نهائية أساسها (sq) حيث $S q < 1$.

ومن (2.10) نجد أن:

$$E(X) = P^{\setminus}(S = 1) = p \left\{ q (1 - q S)^{-2} \Big|_{S=1} \right\} = \frac{q}{1 - q} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\therefore E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = P^{\setminus\setminus}(S = 1) + P^{\setminus}(S = 1)$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{2q^2 + pq}{p^2} \quad \longrightarrow$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2q^2 + pq}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

-٢

$$M(S) = E(e^{XS}) = \sum_X e^{XS} p q^X = p \sum_{X=0}^{\infty} (e^S q)^X = p(1 - e^S q)^{-1} \quad (2.28)$$

$$E(X) = \mu_1' = \left. \frac{dM(S)}{dS} \right|_{S=0} = p q e^S (1 - e^S q)^{-2} \Big|_{S=0} = \frac{q}{p} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mu_2' = E(X^2) &= \left. \frac{d^2 M(S)}{dS^2} \right|_{S=0} = p q (1 - e^S q)^{-3} e^S (1 + q e^S) \\ &= \frac{q(1+q)}{p^2} \longrightarrow \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\mu_3' = E(X^3) = \left. \frac{d^3 M(S)}{dS^3} \right|_{S=0} = q p^{-3} \{1 + 4q + q^2\} = \frac{q(1 + 4q + q^2)}{p^3}$$

$$\text{Var}(X) = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{pq + 2q^2}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2} \quad (2.31)$$

٣- بما أن الدالة المولدة للتراكمات $\phi(S)$ بحيث:

$$\begin{aligned} \phi(S) &= \ln M(S) = \ln[p(1 - e^S q)^{-1}] \\ &= \ln(p) - \ln(1 - e^S q) \end{aligned}$$

بالتالي فإن:

$$K_1 = \left. \frac{d\phi(S)}{dS} \right|_{S=0} = \left[\frac{q e^S}{(1 - e^S q)} \right] \Big|_{S=0} = \frac{q}{1 - q} = \frac{q}{p} \quad (2.32)$$

$$K_2 = \left. \frac{d^2 \phi(S)}{dS^2} \right|_{S=0} = \left[\frac{e^S q [(1 - e^S q) + q e^S]}{(1 - e^S q)^2} \right]_{S=0} = \frac{q(1 - q + q)}{(1 - q)^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$K_3 = \left. \frac{d^3 \phi(S)}{dS^3} \right|_{S=0} = \left[\frac{q e^S [1 + q e^S]}{(1 - e^S q)^3} \right]_{S=0} = \frac{q(1 + q)}{(1 - q)^3} = \frac{q(1 + q)}{p^3} \quad (2.33)$$

٤- مما سبق أعلاه نجد أن:

$$k_1 = \mu_1' = \frac{q}{p}$$

$$k_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \frac{q(1 + q)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$k_3 = \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 2(\mu_1')^3 = \frac{q(1 + q)}{p^3}$$

مثال (٢-٣): إذا فرضنا أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذات الحدين بأحتمال نجاح p واحتمال الفشل q وعدد n من المحاولات بدالة أحتمال:

$$P(X = k) = C_k^n P^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

المطلوب: ١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X ومنها أحسب التوقع والتباين للمتغير X .

٢- من الدالة المولدة للأحتمالات أوجد أحتمال $X = 3$ عندما $n = 5$.

٣- أوجد الدالة المولدة للعزوم ومنها أحسب التوقع والتباين.

الحل: ١- الدالة المولدة للأحتمالات:

$$P(S) = \sum_{k=0}^n P(X = k) S^k = \sum_{k=0}^n C_k^n P^k q^{n-k} S^k$$

$$= \sum_{k=0}^n C_k^n (PS)^k q^{n-k} = (q + PS)^n$$

من الدالة المولدة للأحتمالات $P(S)$ نجد أن:

$$P'(S=1) = E(X) = n(q + pS)^{n-1}(P) = nP$$

$$\begin{aligned} P''(S=1) &= E(X(X-1)) \\ &= P n(n-1)(q + pS)^{n-2}(P) = P^2 n(n-1) \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= P''(S=1) + P'(S=1) - [P'(S=1)]^2 \\ &= P^2 n(n-1) + nP - (nP)^2 \\ &= P^2 n^2 - nP^2 + nP - n^2 P^2 \\ &= np(1-p) = npq \end{aligned}$$

٢- بما أن:

$$\begin{aligned} P_r(X=k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k P(S)}{dS^k} \right]_{S=0} \\ &= \frac{1}{k!} [np^3(n-1)(n-2)(q + pS)^{n-3}] \end{aligned}$$

$$P_r(X=3) = \frac{1}{3!} [5p^3(5-1)(5-2)(q + pS)^{5-3}] = 10p^3q^2$$

٣- الدالة المولدة للعزوم:

$$\begin{aligned} M(S) &= E(e^{XS}) = \sum_{X=0}^n e^{XS} C_X^n P^X q^{n-X} \\ &= \sum_{X=0}^n C_X^n (Pe^S)^X q^{n-X} = [q + Pe^S]^n \end{aligned}$$

$$E(X) = \mu'(S=0) = n[q + Pe^S]^{n-1} P e^S = np$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \mu''(S=0) = nP\{[q + Pe^S]^{n-2} e^S(np e^S + q)\} \\ &= nP\{1(1)(np + q)\} = n^2 P^2 + npq \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n^2 P^2 + n p q - n^2 P^2 = n p q$$

مثال (٤-٢): إذا فرضنا أن X متغير عشوائي له الدالة المولدة للأحتمالات $P(S)$. أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير y حيث:

$$y = m X + n \quad , \quad m \neq 0 \quad , \quad m, n \text{ مقادير صحيحة ثابتة}$$

الحل: إذا أشرنا للدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X, y هما $P_x(S)$, $P_y(S)$ على الترتيب فإن:

$$\begin{aligned} P_y(S) &= E(S^y) = E(S^{mX+n}) = E(S^{mX} S^n) \\ &= S^n E(S^{mX}) = S^n E(S^m)^X = S^n P_x(S^m) \end{aligned}$$

$$P_x(S) = E(S^X) \quad \text{حيث:}$$

ثانياً: مجموع عدد محدد من المتغيرات العشوائية

إذا فرضنا أن X, y متغيران عشوائيين مستقلين غير سالبين يأخذ كل منهما قيم صحيحة غير سالبة بتوزيعات احتمالية:

$$P_r(X = k) = a_k \quad , \quad P_r(y = j) = b_j$$

فإذا فرضنا أن المتغير العشوائي Z بحيث:

$$Z = X + y$$

فإن الحدث $(Z = r)$ event ممكن أن يحدث بعدة طرق متنافية mutually exclusive ways على النحو [72, 74]:

بأحتمال $(X = 0 \text{ and } y = r)$ ، $(a_0 b_r)$ ، $(X = 1 \text{ and } y = r - 1)$ ، $(a_1 b_{r-1})$ ، وهكذا بأحتمال $(X = r \text{ and } y = 0)$ ، $(a_r b_0)$.

ومن أعلاه، إذا رمزنا لدالة الاحتمال للمتغير Z بالرمز C_r فإن:

$$C_r = P_r(Z = r) = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_r b_0 = \sum_{t=0}^r a_t b_{r-t} \quad (2.34)$$

فإذا فرضنا أن $P_x(S), P_y(S), P_z(S)$ تشير كل منهم إلى الدالة المولدة للأحتمالات للمتغيرات X, Y, Z على الترتيب فمن (2.34) نجد أن:

$$P_z(S) = P_x(S) \cdot P_y(S) \quad (2.35)$$

ثالثاً: النظريات

نظرية (١-٢): الدالة المولدة للأحتمالات لمجموع متغيران عشوائيين صحيحين وموجبين مستقلين X, Y هي عبارة عن حاصل ضرب الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X في الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Y أو بعبارة أخرى، إذا كان:

$$Z = X + Y$$

فإن:

$$P_z(S) = P_x(S) \cdot P_y(S)$$

الإثبات: أنظر أثبات العلاقة (2.35) أعلاه.

نظرية (٢-٢): إذا فرضنا أن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية صحيحة وموجبة ومستقلة ولكل منها نفس التوزيع الاحتمالي **independently distributed** (i.i.d.)، فإذا كان $P(S)$ هي الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X_i ، فإذا فرضنا أن المتغير العشوائي Z بحيث:

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

فإن الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z وسوف نشير لها بالرمز $P(S)$ على النحو التالي

$$P_z(S) = [P(S)]^n \quad (2.36)$$

الإثبات: بنفس الأسلوب أعلاه.

مثال (٢-٥): إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيران عشوائيين مستقلان كل منهما يتبع توزيع بواسون بمعلمة (توقع) λ_1, λ_2 على الترتيب.

المطلوب: ١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z حيث: $Z = X_1 + X_2$ ، ومنها أحسب احتمالاً $Z = 1$.

٢- أوجد الدالة المولدة للغزوم للمتغير Z ومنها أوجد توقع وتباين Z .

$$\therefore P_r(X_i) = \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i)^{X_i}}{X_i!}, \quad i = 1, 2 \quad \text{الحل:}$$

بالتالي فإن الدالة المولدة لأحتمال للمتغير X_i

$$\begin{aligned} P_i(S) = E(S^{X_i}) &= \sum_{x_i=0}^{\infty} S^{x_i} \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i)^{x_i}}{x_i!}, \quad i = 1, 2 \\ &= \sum_{x_i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i S)^{x_i}}{x_i!} = \exp\{\lambda_i (S - 1)\} \end{aligned}$$

فإذا فرضنا أن $P(S)$ تشير إلى الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z فإن:

$$\begin{aligned} P(S) = E(S^Z) &= E(S^{X_1+X_2}) = E(S^{X_1} \cdot S^{X_2}) \\ &= E(S^{X_1}) E(S^{X_2}) \\ &= \exp(\lambda_1 (S - 1)) \cdot \exp(\lambda_2 (S - 1)) \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(S - 1)\} \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} P_r(Z = 1) &= \frac{1}{1!} \left. \frac{dP(S)}{dS} \right|_{S=0} = (\lambda_1 + \lambda_2) \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(S - 1)\} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

٢- الدالة المولدة للعزوم $M(S)$ للمتغير Z على النحو:

$$\begin{aligned}
 M(S) &= E(e^{sz}) = \sum_{z=0}^{\infty} e^{sz} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^z e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} \\
 &= \sum_{z=0}^{\infty} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2) e^s]^z e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{z!} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2) e^s]^z}{z!} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) e^s] \\
 &= \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) (e^s - 1)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \mu_1^1 = M'(S) \Big|_{S=0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) e^s \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) (e^s - 1)] \Big|_{S=0} = \lambda_1 + \lambda_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Z^2) &= \mu_2^1 = M''(S) \Big|_{S=0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \{ e^s (\lambda_1 + \lambda_2) e^s \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) (e^s - 1)] + \\
 &\quad \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) (e^s - 1)] e^s \} \Big|_{S=0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) e^s \exp[(\lambda_1 + \lambda_2) (e^s - 1)] \{ (\lambda_1 + \lambda_2) e^s + 1 \} \Big|_{S=0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \{ (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 \} = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{Var}(Z) &= E(Z^2) - [E(Z)]^2 \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)
 \end{aligned}$$

مثال (٦-٢): إذا فرضنا أن X_1, X_2, \dots, X_n عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة كل منهم يتبع توزيع بواسون بتوقع λ_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ، كذلك

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i \text{ فإن:}$$

١- الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z وسوف نشير لها بالرمز $P(S)$ على النحو:

$$P(S) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) (S - 1)\right\}$$

٢- الدالة المولدة للغزوم $M(S)$ حيث

$$M(S) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) (e^S - 1)\right\} \longrightarrow$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

٣- احتمال $(Z = 1)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} P_r(Z = 1) &= \frac{1}{1!} \left. \frac{d P(S)}{d S} \right|_{S=0} \\ &= \left. \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) (S - 1)\right\} \right|_{S=0} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right\} \end{aligned}$$

Bivariate Distribution

(٣-٢) التوزيع الثنائي

إذا فرضنا أن X, Y متغيران عشوائيين بدالة احتمال مشتركة joint probability

function سوف نشير لها بالرمز $P_r(X, Y)$ على النحو التالي [74]:

$$P_r(X = j, Y = k) = P_{jk} \quad , \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad \sum_j \sum_k P_{jk} = 1 \quad (2.37)$$

وباستخدام دالة الاحتمال المشتركة p_{ij} يمكن إيجاد التوزيع الهامشي marginal

distribution لكل من المتغير X, Y كل على حدة على النحو التالي:

$$P_r(X = j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} = f_j \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

$$P_r(Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{jk} = g_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

وإذا فرضنا أن النقطة (j, k) بحيث $f_j \neq 0$ (أو بعبارة أخرى $f_j > 0$)، فإن التوزيع

الشرطي conditional distribution للمتغير Y بشرط $X = j$ على النحو التالي:

$$P_r(Y = k | X = j) = \frac{P_r(Y = k, X = j)}{P_r(X = j)} = \frac{p_{jk}}{f_j} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

بالمثل بالنسبة للتوزيع الشرطي لـ X بشرط $Y = k$ على النحو:

$$P_r(X = j | Y = k) = \frac{P_r(Y = k, X = j)}{g_k} \quad , \quad g_k \neq 0 \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

تعريف (٦-٢): من (2.40)-(2.41) يمكن تعريف التوقع الشرطي للمتغير Y

بشرط X على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E(y | X = j) &= \sum_k k P_r(y = k | X = j) \\ &= \sum_k k \frac{p_{jk}}{f_j} = \frac{\sum_k k p_{jk}}{f_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42) \end{aligned}$$

بالمثل التوقع الشرطي لـ X بشرط y على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E(X | y = k) &= \sum_j j P_r(X = j | y = k) \\ &= \sum_j j \frac{p_{jk}}{g_k} = \frac{\sum_j j p_{jk}}{g_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43) \end{aligned}$$

من التعريفين (2.42)-(2.43) نجد أن:

$$\begin{aligned} E\{E(y | X)\} &= \sum_j E(y | X = j) P_r(X = j) \\ &= \sum_k \left\{ \frac{\sum_j k p_{jk}}{f_j} \right\} f_j \\ &= \sum_j \sum_k k p_{jk} = \sum_k k (\sum_j p_{jk}) \\ &= \sum_k k P_r(y = k) = E(y) \quad (2.44) \end{aligned}$$

بالمثل:

$$E\{E(X | y)\} = E(X) \quad (2.55)$$

تعريف (٧-٢): إذا فرضنا أن $P(S_1, S_2)$ تشير إلى الدالة المولدة للأحتمالات لزوج المتغيرين العشوائيين X, Y فإن:

$$P(S_1, S_2) = \sum_j \sum_k p_{jk} S_1^j S_2^k, \quad S_1, S_2 \geq 0 \quad (2.46)$$

نظرية (٣-٢): ١- إذا فرضنا أن $A(S)$ تشير إلى الدالة المولدة للأحتمالات للتوزيع الهامشي $P_r(X = j)$ للمتغير X فإن:

$$A(S) = P(S,1) \quad (2.47)$$

٢- إذا فرضنا أن $B(S)$ تشير إلى الدالة المولدة للأحتمالات للتوزيع الهامشي $P_r(y = k)$ للمتغير y فإن:

$$B(S) = P(1,S) \quad (2.48)$$

٣- الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير $(X + y)$ هي $P(S,S)$ الإثبات:

$$\begin{aligned} 1) \therefore P(S,1) &= \sum_j \sum_k p_{jk} S^j = \sum_j S^j \left(\sum_k p_{jk} \right) \\ &= \sum_j S^j p_j = A(S) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$2) P(1,S) = B(S)$$

إذا فرضنا أن:

$$3) P_r(X + y = m) = \sum_{r=0}^m P_r(X = r, y = m - r) = \sum_{r=0}^m P_{r, m-r}$$

→

$$P(S,S) = \sum_{m=0}^{\infty} S^m P_r(X + y = m)$$

حيث $P(S,S)$ هي الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير $(X + y)$.

ملحوظة: ١- إذا كان X, y متغيرين مستقلين فإن:

$$P_{jk} = P_r(X = j) \cdot P_r(y = k) \longrightarrow$$

$$P(S_1, S_2) = A(S_1)B(S_2) = P(S_1, 1)P(1, S_2)$$

٢- يمكن الحصول على الاحتمالات المشتركة P_{jk} باستخدام الدالة المولدة $P(S_1, S_2)$ على النحو التالي:

$$P_{jk} = \frac{1}{j! k!} \left[\frac{\partial^{j+k} P(S_1, S_2)}{\partial S_1^j \partial S_2^k} \right]_{S_1=S_2=0}$$

مثال (٧-٢): إذا اعتبرنا سلسلة من محاولات برنولي المتماثلة بأحتمال نجاح p وأحتمال فشل q ($q = 1 - p$). فإذا عرفنا المتغير X بأنه عدد مرات الفشل قبل حدوث أول نجاح كذلك نعرف المتغير y بأنه عدد مرات الفشل قبل حدوث ثاني نجاح (عدد مرات الفشل بعد أول نجاح وقبل ثاني نجاح) بدالة أحتمال مشتركة $P(X, y)$ بحيث:

$$P_{jk} = P_r(X = j, y = k) = q^{j+k} p^2, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

المطلوب: ١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للتوزيع الثنائي P_{jk} .

٢- من (١) أوجد الاحتمالات التالية P_{11}, P_{12}, P_{00}

٣- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات الهامشية للمتغير X ثم للمتغير y .

٤- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير (X, y)

الحل: ١-

$$\therefore P_{jk} = q^{j+k} p^2 \longrightarrow.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_1, S_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} p^2 S_1^j S_2^k, \quad 0 < S_1, S_2 \leq 1 \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{\infty} (q S_1)^j \sum_{k=0}^{\infty} (q S_2)^k \\
&= p^2 \left(\frac{1}{1 - q S_1} \right) \left(\frac{1}{1 - q S_2} \right) \\
&= \frac{p^2}{(1 - q S_1)(1 - q S_2)}
\end{aligned}$$

-٢

$$\therefore \mathbf{P}_{jk} = \frac{1}{j! k!} \left[\frac{\partial^{j+k} \mathbf{P}(S_1, S_2)}{\partial S_1^j \partial S_2^k} \right]_{S_1=S_2=0}$$

فإن

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{00} &= \frac{1}{0! 0!} \left[\frac{\partial^0 \mathbf{P}(S_1, S_2)}{\partial S_1^0 \partial S_2^0} \right]_{S_1=S_2=0} \\
&= \frac{1}{1} \mathbf{P}(S_1, S_2) \Big|_{S_1+S_2=0} = \mathbf{P}^2
\end{aligned}$$

بالمثل:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{12} &= \frac{1}{1! 2!} \left[\frac{\partial^3 \mathbf{P}(S_1, S_2)}{\partial S_1 \partial S_2^2} \right]_{S_1=S_2=0} \\
&= \frac{2p^2 q^3}{(1 - q S_1)^2 (1 - q S_2)^3} \Big|_{S_1=S_2=0} = 2p^2 q^3
\end{aligned}$$

وبالمثل

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{1}{1! 1!} \left[\frac{\partial^2 P(S_1, S_2)}{\partial S_1 \partial S_2} \right]_{S_1=S_2=0} \\
&= \frac{p^2 q^2}{(1-q S_1)^2 (1-q S_2)^2} \Big|_{S_1=S_2=0} = p^2 q^3
\end{aligned}$$

٣- إذا فرضنا أن $A(S)$ ، $B(S)$ تشير إلى الدالة الهامشية المولدة للأحتمالات لكل من المتغيرين X ، Y على الترتيب، فإن

$$A(S) = P(S,1) = \frac{p^2}{(1-q S)(1-q)} = \frac{P}{(1-q S)}$$

$$B(S) = P(1,S) = \frac{p^2}{(1-q)(1-q S)} = \frac{P}{(1-q S)}$$

٤- إذا فرضنا أن $Z = X + Y$ فإن الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z وسوف نشير لها بالرمز $P(S,S)$ فإن:

$$P(S,S) = \left[\frac{P}{(1-q S)} \right]^2$$

Laplace Transform

(٢-٤) تحويله لابلاس

تعريف (٢-٨): إذا فرضنا أن $f(t)$ دالة في متغير حقيقي موجب t . فإن تحويله لابلاس (L.T.) للدالة $f(t)$ وسوف نرمز لها بالرمز $F(S)$ تعرف على النحو التالي:

$$F(S) = \int_0^{\infty} \exp(-St) f(t) dt \quad (2.50)$$

وتحويله لابلاس (أو دالة لابلاس) تعتبر أداة هامة وفعالة في كثير من الحالات، وعلى سبيل المثال في حل معادلات الفروق **difference equations**، كذلك في دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية وبصفة خاصة في التوزيعات الاحتمالية لبعض أنظمة الصفوف [72, 69, 78].

مثال (٢-٨): فيما يلي بعض الأشكال المختلفة للدالة $f(t)$ وتحويله لابلاس المناظرة لها على النحو التالي [72]:

١- إذا كان $f(t) = 1$ فإن:

$$L(f(t)) = F(S) = \int_0^{\infty} \exp(-St) dt = \frac{1}{S}, \quad S > 0 \quad (2.51)$$

٢- إذا كان $f(t) = t$ فإن:

$$F(S) = \int_0^{\infty} t \exp(-St) dt = \frac{1}{S^2}, \quad S > 0 \quad (2.52)$$

وبصفة عامة إذا كان $f(t) = t^n$, ($n > -1$) فإن:

$$F(S) = \int_0^{\infty} t^n \exp(-St) dt = \Gamma \frac{(n+1)}{S^{n+1}}, \quad S > 0 \quad (2.53)$$

٣- إذا كان $f(t) = e^{at}$ فإن:

$$F(S) = \int_0^{\infty} \exp(-St) \exp(at) dt = \frac{1}{S-a}, \quad S > a \quad (2.54)$$

٤- إذا كان $f(t) = e^{-t} t^n$ فإن:

$$\begin{aligned} F(S) &= \int_0^{\infty} \exp(-St) \exp(-t) t^n dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp\{-t(S+1)\} t^n dt \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{(S+1)^{n+1}}, \quad n > -1 \end{aligned} \quad (2.55)$$

بعض خصائص تحويله لابلاس [72, 24]

١- الخاصية الخطية linearity property: إذا فرضنا أن C_i 's مقادير ثابتة بحيث:

$$L\{f_i(t)\} = F_i(S), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

فإن:

$$L\{C_1 f_1(t) + \dots + C_2 f_2(t)\} = C_1 F_1(S) + \dots + C_n F_n(S) \quad (2.57)$$

مثال (٢-٩): إذا فرضنا أن $\sum_{i=1}^2 C_i f_i = 2t - 5$ بالتالي فإن:

$$L(2t - 5) = 2L(t) - 5L(1) = \frac{2}{S^2} - \frac{5}{S} = \frac{2-5S}{S^2} \quad (2.58)$$

٢- خاصية الترجمة (النقل) translation property: إذا فرضنا $a > 0$ مقدار ثابت

فإن:

$$L\{\exp(-at) f(t)\} = F(S+a), \quad a > 0 \quad (2.59)$$

مثال (٢-١٠): إذا فرضنا أن $f(t) = \exp(-t)t$ فإن $a = 1$

$$L\{\exp(-t)t\} = \int_0^{\infty} \exp(-t)t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} t dt = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (2.60)$$

٣- خاصية التدرج scale property: إذا فرضنا المقدار الثابت a ، $a > 0$ فإن:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(S/a) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.61)$$

٤- خاصية المشتقة التفاضلية:

$$L\{f'(t)\} = S F(S) - f(0) \quad (2.62)$$

تحويله لابلاس لدالة الاحتمال أو للمتغير العشوائي

إذا فرضنا أن X متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ حيث:

$$F(x) = P_r\{X \leq x\}$$

فإن الدالة $f^*(S)$ تسمى بتحويله لابلاس لتوزيع المتغير X حيث:

$$f^*(S) = \int_0^{\infty} \exp(-Sx) dF(x) \quad , \quad x \geq 0 \quad (2.63)$$

من تعريف تحويله لابلاس في (2.50) نجد أن:

$$f^*(S) = E\{\exp(-Sx)\} \longrightarrow \quad (2.64)$$

$$f^*(0) = 1$$

وعندما يكون المتغير X متغير متصل بحيث $f(x) = F'(x)$ فإن:

$$f^*(S) = \int_0^{\infty} \exp(-S x) f(x) dx \quad (2.65)$$

تحويله لابلاس لدالة التوزيع

وتعرف تحويله لابلاس لدالة التوزيع $F(x)$ وسوف نشير لها بالرمز $L\{F(x)\}$ وتعرف على النحو التالي:

$$L\{F(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-S X) F(x) dX \quad (2.66)$$

ويمكن الحصول على تحويله لابلاس لدالة التوزيع $F(X)$ بدلالة تحويله لابلاس للتوزيع (أو للمتغير X) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} L\{F(X)\} &= \int_0^{\infty} \exp(-S X) \left\{ \int_0^X F(t) dt \right\} dX \\ &= L\left\{ \int_0^X F(t) dt \right\} = \frac{f^*(S)}{S} \end{aligned} \quad (2.67)$$

[72, page 16]

التوقع والتباين باستخدام تحويله لابلاس

بما أن:

$$\frac{df^*(S)}{dS} = \int_0^{\infty} (-x) \exp(-S x) dF(x) = - \int_0^{\infty} x \exp(-S x) dF(x)$$

$$\frac{d^2 f^*(S)}{dS^2} = (-1)^2 \int_0^{\infty} x^2 \exp(-S x) dF(x)$$

وبصفة عامة فإن:

$$\frac{d^n f^*(S)}{dS^n} = (-1)^n \int_0^{\infty} x^n \exp(-Sx) dF(x) \quad (2.68)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} (-1)^n \left[\frac{d^n f^*(S)}{dS^n} \right] \Big|_{S=0} &= \int_0^{\infty} \exp(-Sx) x^n dF(x) \\ &= \int_0^{\infty} x^n dF(x) = E(x^n) \end{aligned} \quad (2.69)$$

وبالتالي فإن:

$$E(x) = - \left[\frac{df^*(S)}{dS} \right] \Big|_{S=0}$$

$$E(x^2) = \left[\frac{d^2 f^*(S)}{dS^2} \right] \Big|_{S=0}$$

وبالتالي فإن:

$$\text{Var}(x) = \left[\frac{d^2 f^*(S)}{dS^2} \right] \Big|_{S=0} - \left[\frac{-df^*(S)}{dS} \right] \Big|_{S=0}^2$$

مثال (٢-١١): إذا فرضنا أن X متغير يتبع التوزيع الأسّي السالب بمعلمة λ .

أوجد $f^*(S)$ ومنها أحسب التوقع والتباين للمتغير X .

الحل:

$$\begin{aligned} f^*(S) &= \int_0^{\infty} e^{-Sx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + S)} \int_0^{\infty} (S + \lambda) e^{-x(S+\lambda)} dx = \frac{\lambda}{(\lambda + S)} \end{aligned}$$

$$E(X) = - \left[\frac{df^*(S)}{dS} \right] \Big|_{S=0} = - \left[\frac{0 - \lambda(1)}{(\lambda + S)^2} \right] \Big|_{S=0} = - \left[\frac{-\lambda}{\lambda^2} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2 f^*(S)}{dS^2} \right] \Big|_{S=0} = \left[\frac{0 - (-\lambda)(2)(\lambda + S)(1)}{(\lambda + S)^4} \right] \Big|_{S=0}$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\lambda^4} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال (٢-١٢): إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ .

أوجد $f^*(S)$ ومنها أحسب التوقع

الحل:

$$\therefore f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f^*(S) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-Sx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{-S} \lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{-S} \lambda} = e^{\lambda(e^{-S}-1)} \quad (2.70)$$

$$\frac{df^*(S)}{dS} = -\lambda e^{-S} e^{\lambda(e^{-S}-1)} \longrightarrow$$

$$E(X) = - \left[\frac{df^*(S)}{dS} \right] \Big|_{S=0} = \lambda (1) e^{\lambda(0)} = \lambda$$

مثال (٢-١٣): إذا فرضنا أن X متغير يتبع التوزيع المنتظم بحيث:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن:

$$\begin{aligned} f^*(S) &= \int_0^{\infty} e^{-Sx} (1) dx = \frac{-1}{S} \int_0^{\infty} -S e^{-Sx} dx \\ &= \frac{-1}{S} [e^{-Sx}]_0^1 = \frac{-1}{S} [e^{-S} - 1] = \frac{1}{S} [1 - e^{-S}] \end{aligned} \quad (2.71)$$

مثال (٢-١٤): إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع جاما بمعلمات $\lambda, k > 0$ بحيث:

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma k}, \quad x > 0$$

فإن:

$$\begin{aligned} f^*(S) &= \int_0^{\infty} \exp(-Sx) f(x) dx \\ &= \frac{\lambda^k}{\Gamma k} \int_0^{\infty} \exp\{-(S+\lambda)x\} x^{k-1} dx \end{aligned}$$

وبوضع $t = (S+\lambda)x$

$$\begin{aligned} f^*(S) &= \frac{\lambda^k}{\Gamma k} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{k-1}}{(S+\lambda)^k} dt \\ &= \frac{\lambda^k}{(S+\lambda)^k} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{k-1}}{\Gamma k} dt}_1 = \left[\frac{\lambda}{(S+\lambda)} \right]^k \end{aligned} \quad (2.72)$$

وبالتالي فإن:

$$E(X) = - \left[\frac{df^*(S)}{dS} \right] \Big|_{S=0} = - \left[\frac{-k \lambda^k}{(S + \lambda)^{k+1}} \right] \Big|_{S=0} = - \left[\frac{-k \lambda^k}{\lambda^{k+1}} \right] = \frac{k}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2 f^*(S)}{dS^2} \right] \Big|_{S=0} = \left[\frac{k(k+1) \lambda^k}{(S + \lambda)^{k+2}} \right] \Big|_{S=0} \\ = \frac{k(k+1) \lambda^k}{\lambda^{k+2}} = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{k(k+1)}{\lambda^2} - \left[\frac{k}{\lambda} \right]^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

مثال (٢-١٥): إذا كان X متغير يتبع توزيع إيرلنج E_r (Erlang) بحيث:

$$f(x) = \frac{(\lambda k)^k x^{k-1} e^{-\lambda k x}}{\Gamma k}, \quad x > 0$$

فإن:

$$f^*(S) = \frac{(\lambda k)^k}{(S + \lambda k)^k} \quad (2.73)$$

وبالتالي فإن:

$$E(E_r) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(E_r) = \frac{k}{(\lambda k)^2} = \frac{1}{k \lambda^2}$$

Erlang Distribution

(٥-٢) توزيع إيرلنج

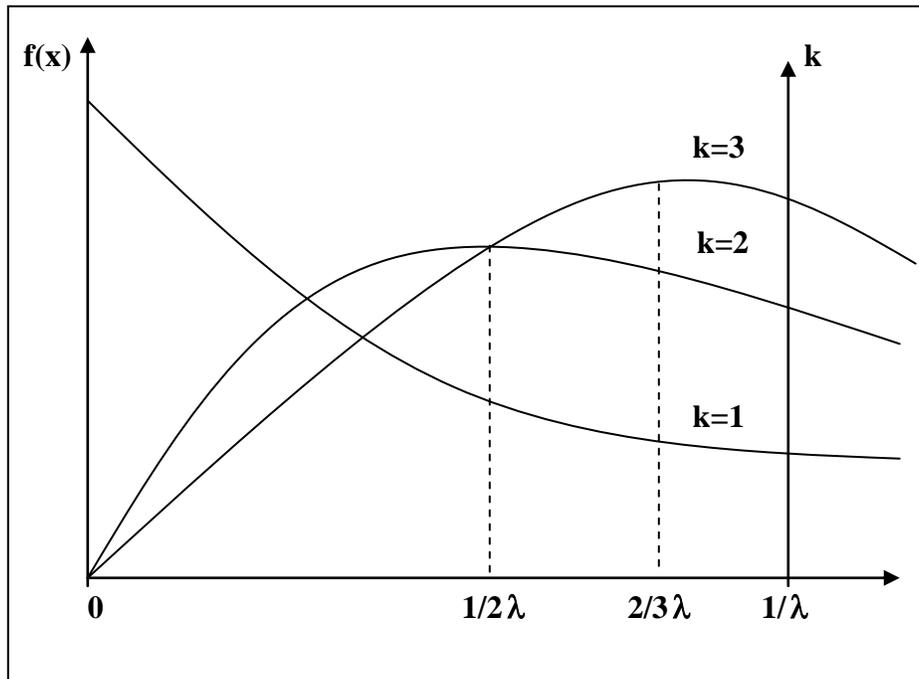
من التوزيعات الاحتمالية الأكثر استخداماً في دراسة أنظمة الصفوف توزيع إيرلنج Erlang. لذلك فيما يلي سوف نقدم التوزيع وبعض أهم خصائصه [13, 19, 22]:

تعريف (١-٢): إذا كان X متغير عشوائي متصل بدالة كثافة احتمال $f_{\lambda,k}(X)$ بحيث:

$$f_{\lambda,k}(X) = \frac{(\lambda k)^k X^{k-1} \exp(-\lambda k X)}{\Gamma(k)}, \quad X > 0 \quad (2.74)$$

فإنه يقال أن المتغير العشوائي X متغير يتبع توزيع إيرلنج بمعلمتين λ, k . والشكل التالي يوضح الدالة $f_{\lambda,k}(X)$ عند القيم المختلفة لـ k .

شكل (١-٢): يوضح دالة كثافة الاحتمال لتوزيع إيرلنج عند القيم المختلفة لـ k



وفي الحقيقة فإن متغير إيرلنج بمعلمتين λ, k هو عبارة عن مجموع عدد k من المتغيرات العشوائية المستقلة كل منها يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/k\lambda$ ، أو بعبارة أخرى إذا كانت $X_i, i = 1, 2, \dots, k$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/k\lambda$ ، فإن المتغير X حيث:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i \quad (2.75)$$

متغير يتبع توزيع إيرلنج بمعلمتين (λ, k) .

نظرية (٢-٣): إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع إيرلنج فإن:

١- توقع X وسوف نشير له بالرمز $E(X)$ على النحو:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.76)$$

٢- تباين X وسوف نشير له بالرمز $\text{var}(X)$ على النحو:

$$\text{var}(X) = \frac{k}{(\lambda k)^2} = \frac{1}{k \lambda^2} \quad (2.77)$$

حالات خاصة: يعتبر كل من التوزيع الآسي وتوزيع جاما حالات خاصة من توزيع إيرلنج:

١- عندما $k = 1$ فإن توزيع إيرلنج هو التوزيع الآسي.

٢- عندما $\lambda = 1$ فإن توزيع إيرلنج هو توزيع جاما بدرجات حرية (k)

٦-٢) معادلات الفروق التفاضلية

Differential Difference Equations

من المتطلبات الأساسية في دراسة أنظمة الصفوف معادلات الفروق التفاضلية وأساليب حلها. وفي هذا الفصل سوف نقدم بشيء من الاختصار تعريف معادلات الفروق ثم معادلات الفروق التفاضلية مع تقديم بعض طرق حلها [٦, 41, 69, 72].

تعريف (٢-٩): إذا فرضنا أن $f(n)$ دالة غير سالبة في المتغير n ، فإن الفرق الأول first difference وسوف نشير إليه بالرمز $\nabla f(n)$ يعرف على النحو التالي:

$$\nabla f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (2.78)$$

وبصفة عامة يمكن تعريف الفرق من الترتيب $(k+1)$ للدالة $f(n)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \nabla^{k+1}f(n) &= \nabla\{\nabla^k f(n)\} \quad , \quad k > 0 \\ &= \nabla^k f(n+1) - \nabla^k f(n) \end{aligned} \quad (2.79)$$

مثال (٢-١٦): إذا فرضنا أن الدالة $f(n)$ على النحو التالي:

$$f(n) = n^2 \quad , \quad n = 0,1,2,3,4$$

المطلوب: أوجد $\nabla f(n)$, $\nabla^2 f(n)$, $\nabla^3 f(n)$

الحل: في الجدول التالي سوف نوضح الفرق الأول والثاني والثالث للدالة $f(n)$.

ونظراً لأن $f(n)$ دالة من الدرجة الثانية، فنجد أن الفرق من الدرجة الثانية لجميع قيم (n) في العمود (4) تساوي مقدار ثابت، وبالتالي فإن الفرق من الدرجة الثالثة يساوي صفر لجميع قيم n .

جدول (١-٢): يوضح الفروق من الترتيب (3) للدالة $f(n)$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
N	f(n)	$\nabla f(n)$	$\nabla^2 f(n)$	$\nabla^3 f(n)$
0	0	—	—	—
1	1	$\nabla f(0) = 1$	—	—
2	4	$\nabla f(1) = 3$	$\nabla^2 f(0) = 2$	—
3	9	$\nabla f(2) = 5$	$\nabla^2 f(1) = 2$	$\nabla^3 f(0) = 0$
4	16	$\nabla f(3) = 7$	$\nabla^2 f(2) = 2$	$\nabla^3 f(1) = 0$
5	25	$\nabla f(4) = 9$	$\nabla^2 f(3) = 2$	$\nabla^3 f(2) = 0$
6	36	$\nabla f(5) = 11$	$\nabla^2 f(4) = 2$	$\nabla^3 f(3) = 0$

تعريف (٩-٢): إذا فرضنا الدالة $U_n(t)$ ، $n = 1, 2, \dots$ دالة في t ، متغير متصل وسوف نشير إلى المشتقة الأولى للدالة $U_n(t)$ بالرمز $U_n^{\lambda}(t)$ فإن:

$$\frac{d U_n(t)}{d t} = U_n^{\lambda}(t)$$

وتسمى المعادلة التي تتضمن $U_n^{\lambda}(t)$ وكل من $U_n(t)$ ، $U_{n+1}(t)$ ، $U_{n+2}(t)$ ، تسمى بمعادلة الفروق التفاضلية.

مثال (١٧-٢): إذا فرضنا أن الدالة $P_n(t)$ تشير إلى احتمال وجود عدد n عميل في أحد الأنظمة الخدمية خلال الفترة t فإن المعادلة التالية:

$$P_n^{\lambda}(t) = -\lambda[P_n(t) - P_{n-1}(t)] \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.80)$$

تسمى معادلة فروق تفاضلية، فالطرف الأيسر $P_n^{\lambda}(t)$ يمثل تفاضل الدالة $P_n(t)$ بالنسبة لـ t ، والطرف الأيمن يمثل دالة في الفرق الأول $[P_n(t) - P_{n-1}(t)]$ للدالة $P_n(t)$.

ووجود حل وحيد unique solution للمعادلات في (2.80) يعتمد على مدى ملائمة الشروط المبدئية suitable initial conditions للنظام التي يجب تحديدها بدقة.

ويمكن حل معادلات الفروق التفاضلية باستخدام:

١- أسلوب الدالة المولدة generating function.

٢- أسلوب تحويلات لابلاس.

٣- أسلوب الاستنتاج الرياضي mathematical induction.

وفيما يلي سوف نقدم باختصار أسلوب الدالة المولدة وأسلوب تحويلات لابلاس.

أولاً: الحل باستخدام أسلوب الدالة المولدة.

ومن خلال المثال التالي نوضح كيفية استخدام أسلوب الدالة المولدة في حل معادلة الفروق التفاضلية.

مثال (١٨-٢): باستخدام أسلوب الدالة المولدة، حل معادلة الفروق التفاضلية التالية:

$$U_n'(t) = U_{n-1}(t) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

تحت الشروط المبدئية التالية:

$$U_0(t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (2)$$

الحل: إذا أشرنا إلى الدالة المولدة لـ $U_n(t)$ بالرمز $G(s, t)$ [أنظر تعريف (١-٢)] فإن:

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) S^n \quad (3)$$

وبإجراء تفاضل طرفي المعادلة أعلاه، بالتالي فإن:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(t) S^n = U_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(t) S^n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(t) S^n \quad (4)$$

حيث $U_0^1(t) = 0$ من الشروط المبدئية.

وبضرب طرفي المعادلة (1) في S^n ثم إجراء عملية المجموع نجد أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^1(t) S^n = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-1}(t) S^n = S \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-1}(t) S^{n-1} \quad (5)$$

بالتعويض في (5) بـ (4) نجد أن:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = S G(s,t) \quad (6)$$

حيث تمثل المعادلة (6) معادلة تفاضل جزئي partial differential equation بحلها

نجد أن:

$$G(s,t) = e^{st} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} S^k \quad (7)$$

وبالتالي فإن معامل S^n في الطرف الأيمن للمعادلة (7) يكافئ $U_n(t)$ وبالتالي فإن:

$$U_n(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ثانياً: الحل باستخدام تحويلات لابلاس

وسوف نوضح أسلوب الحل باستخدام تحويله لابلاس من خلال المثال التالي.

مثال (٢-١٩): أعتبر مثال (٢-١٧) حيث:

$$P_n^1(t) = -\lambda [P_n(t) - P_{n-1}(t)] \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

$$P_0^1(t) = -\lambda P_0(t) \quad (2)$$

تحت الشروط المبدئية:

$$P_0(0) = 1 \quad , \quad P_n(0) = 0 \quad , \quad n \neq 0 \quad (3)$$

من تعريف تحويله لابلاس بالفصل (٢-٤) نجد أن:

$$L\{P_n(t)\} = \int_0^{\infty} \exp(-St) P_n(t) dt = f_n(S) \quad (4)$$

حيث $f_n(S)$ تمثل تحويله لابلاس للدالة $P_n(t)$ ، وبأستخدام الخاصية في (2.62) لتحويله لابلاس نجد أن:

$$L\{P_n'(t)\} = S f_n(S) - P_n(0) = S f_n(S) \quad , \quad n \geq 1 \quad (5)$$

وبإيجاد تحويله لابلاس لطرفي المعادلة (1) نجد أن:

$$S f_n(S) = -\lambda [f_n(S) - f_{n-1}(S)] \longrightarrow$$

$$f_n(S) (S + \lambda) = \lambda f_{n-1}(S)$$

$$f_n(S) = \frac{\lambda}{(S + \lambda)} f_{n-1}(S) \quad , \quad n \geq 1 \quad (6)$$

كذلك من المعادلة (2) نجد أن:

$$S f_0(S) = -\lambda f_0(S) \longrightarrow f_0(S) = \frac{1}{S + \lambda}$$

ومن الشروط المبدئية في (3) وأعتبار C مقدار ثابت نجد أن:

$$f_0(S) = C = \frac{1}{S + \lambda} \longrightarrow$$

$$f_{n-1}(S) = \frac{\lambda^{n-1}}{(\lambda + S)^n} \quad , \quad n \geq 1 \longrightarrow$$

$$f_n(S) = \frac{\lambda^n}{(\lambda + S)^{n+1}} \quad , \quad n \geq 0 \quad (7)$$

وتحويله لابلاس في (7) هي تحويله توزيع بواسون بتوقع (λt) بالتالي فإن $P_n(t)$ على النحو التالي:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0, 1, 2, \dots$$

Exercises

٧-٢) تمرينات

(١-٢) أعتبر المتغيرات العشوائية التالية $X \sim \text{exponential dist.}$ ،

$Z \sim \text{Binomial dist.}$ ، $Y \sim \text{standard normal dist.}$

أوجد ما يلي:

١- الدالة المولدة للعزوم لكل من X, Y, Z ، ومن كل منهم أحسب التوقع والتباين لـ X, Y, Z .

٢- الدالة المميزة لكل من X, Y, Z ، ومن كل منهم أحسب التوقع والتباين لـ X, Y, Z .

٣- أوجد الدالة المولدة للتراكومات لكل متغير من المتغيرات X, Y, Z .

(٢-٢) إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية n حيث $n = 6$. أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X ومنها أوجد التوقع والتباين.

(٣-٢) إذا فرضنا أن متغيران عشوائيين مستقلين كل منها يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة P_i ، $i = 1, 2$ ، فإذا كان $Z = X_1 + X_2$.

١- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z ومنها أحسب احتمال $Z = 3$.

٢- أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z ومنها أحسب التوقع والتباين.

(٤-٢) إذا فرضنا أن X_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة كل

منهم يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ_i ، فإذا كان $Z = \sum_{i=1}^n X_i$.

١- أثبت أن الدالة المولدة للأحتمالات $P(S)$ حيث:

$$P(S) = \exp\{(\sum \lambda_i)(S-1)\}$$

٢- أثبت أن الدالة المولدة للعزوم $M_Z(S)$ للمتغير Z حيث:

$$M_Z(S) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) (e^S - 1)\right\}$$

(٥-٢) أوجد الدالة المولدة لأحتمالات للمتغيرات العشوائية التالية:

- ١- المتغير يتبع توزيع ذات الحدين.
- ٢- المتغير يتبع التوزيع المنتظم المتقطع.
- ٣- المتغير يتبع توزيع بواسون.
- ٤- المتغير يتبع التوزيع الأسّي ومنه اوجد الدالة المولدة لمتغير يتبع توزيع جاما.
- ٥- المتغير يتبع توزيع إيرلنج بمعلمتين (λ, k) .

(٦-٢) إذا فرضنا أن Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بدالة احتمال:

$$P_r(Z = k) = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

أثبت أن الدالة المولدة لأحتمالات للمتغير Z المشار إليها بالرمز $P(S)$ على النحو:

$$P(S) = \frac{pS}{1 - Sq}, \quad 0 < sq < 1$$

ثم أثبت ان:

$$E(Z) = \frac{1}{p}, \quad \text{var}(Z) = \frac{q}{p^2}$$

(٧-٢) إذا فرضنا أن المتغير العشوائي X بحيث:

$$P_r(X = k) = p_k, \quad P_r(X > k) = q_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i, \quad k \geq 0$$

فإذا كان:

$$P(S) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^k, \quad \text{and } Q(S) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k S^k$$

أثبت أن:

$$(1-S)Q(S) = 1 - P(S) \quad , \quad E(X) = Q(1)$$

(٨-٢) إذا فرضنا أن X_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي (i.i.d.) فإذا كان التوزيع الاحتمالي لـ X_i هو توزيع ذات الحدين بالمعلمتين (n, p) . فإذا كانت $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. أوجد الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير Z ومنها احسب $E(Z)$, $var(Z)$.

(٩-٢) إذا فرضنا أن X متغير عشوائي متقطع (توزيع بواسون المبتور) بدالة احتمال:

$$P_k = P_r(X = k) = \frac{(e^a - 1)^{-1} a^k}{k!} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

أثبت أن الدالة المولدة للأحتمالات للمتغير X على النحو التالي:

$$P(S) = (e^a - 1)^{-1} (e^{aS} - 1)$$

ومنها أثبت أن:

$$(i) P(i) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$$

$$(ii) E(X) = \frac{a e^a}{(e^a - 1)}$$

(١٠-٢) أثبت ان:

١- تحويله لابلاس للتوزيع الأسي $f^*(S)$ على النحو:

$$f^*(S) = \frac{\lambda}{(\lambda + S)}$$

٢- تحويله لابلاس لتوزيع جاما بدرجات حرية k ومعلمة λ

$$f^*(S) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + S} \right)^k$$

٣- تحويله لابلاس لتوزيع إيرلنج

$$f^*(S) = \left[\frac{\lambda k}{(S + \lambda k)} \right]^k$$

٤- تحويله لابلاس للتوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال

$$f(X) = \frac{1}{b-a}$$

$$f^*(S) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{S(b-a)}$$

(١١-٢) إذا فرضنا أن $P_n(t)$ تحقق معادلات الفروق التفاضلية التالية:

$$P_n'(t) = -(a+b)P_n(t) + aP_{n-1}(t) + bP_{n+2}(t) \quad , \quad n \geq 2$$

$$P_1'(t) = -(a+b)P_1(t) + bP_2(t)$$

$$P_0'(t) = bP_1(t)$$

تحت الشروط المبدئية التالية:

$$P_1(0) = 1 \quad , \quad P_n(0) = 0 \quad , \quad n \neq 1$$

فإذا أشرنا إلى الدالة المولدة للأحتمالات لـ $P_n(t)$ هي $G(S,t)$ حيث:

$$G(S,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) S^n$$

أثبت ان:

$$S \left[\frac{\partial G(S,t)}{\partial t} \right] = (1-S)(b-aS) \{G(s,t) - P_0(T)\}$$

الباب الثالث
بعض العمليات العشوائية
Some Stochastic Processes

Introduction	مقدمة (١-٣)
Stochastic Process	العملية العشوائية (٢-٣)
	تصنيف العمليات العشوائية (٣-٣)
Specification of Stochastic Process	
Stationary Processes	العمليات المستقرة (٤-٣)
	عملية المشي العشوائي البسيطة (٥-٣)
Simple Random Walk Process	
Markov Processes	عمليات ماركوف (٦-٣)
Poisson Processes	عمليات بواسون (٧-٣)
Exercises	تمرينات (٨-٣)

Introduction

(١-٣) مقدمة

في الباب الرابع سوف نوضح أن بعض عناصر أنظمة الصفوف تمثل عمليات عشوائية مثل أزمنة خدمة العملاء، عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام في فترات معينة، الخ، وبالتالي فإن نماذج الصفوف هي في الحقيقة عملية عشوائية مركبة.

لذلك كان يتطلب دراسة أنظمة الصفوف وأشتقاق النماذج الملائمة لكل نظام دراسة مقدمة في العمليات العشوائية وخصائصها أولاً.

في هذا الباب سوف نقدم مقدمة بأسلوب مبسط لنظرية العمليات العشوائية *stochastic processes theory*، حيث تعتبر دراسة مقدمة في نظرية العمليات العشوائية ضرورة يجب أن تسبق دراسة نظرية الصفوف *queueing theory*.

ففي هذا الباب سوف نقدم تعريف العملية العشوائية وأنواعها المختلفة مع تقديم بعض الأمثلة لهذه الأنواع مثل عملية الحالات المتقطعة والزمن المتقطع أو عملية الحالات المتقطعة والزمن المتصل، الخ. ثم تقديم شروط العمليات العشوائية المستقرة، ذلك بالإضافة إلى تقديم نوعين من العمليات العشوائية الهامة والأكثر استخداماً في نظرية الصفوف وهما:

النوع الأول: عمليات ماركوف *Markov processes*

النوع الثاني: عمليات بواسون *Poisson processes*

هذا بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة العددية والتطبيقية التي توضح العمليات محل الدراسة.

Stochastic Process

(٢-٣) العملية العشوائية

منذ أواخر القرن التاسع عشر وقد أثبت العلماء أن النماذج الاحتمالية probabilistic models أكثر واقعية من النماذج اليقينية deterministic models. ففي كثير من الدراسات الديناميكية ترتبط المتغيرات العشوائية بالزمن time أو المكان space أو الاثنين معاً.

ولعب الفيزيائيين دور قيادي في دراسة وتطور الظواهر وفقاً للزمن أو المكان أو الاثنين معاً، ففي سنة ١٩٦٠ تتبع Neyman الانتقالات transitions للحالات محل الدراسة وفقاً للزمن [72, 80].

وكثير من الظواهر الطبيعية أو الاجتماعية أو الاقتصادية الخ لا يتم دراستها كمتغيرات عشوائية فقط بل يتم دراستها كدوال في الزمن أو المكان أو الاثنين معاً [41]. وعائلات families المتغيرات العشوائية التي تمثل دوال في الزمن (أو المكان أو الاثنين معاً) تسمى بالعمليات العشوائية.

وبالتالي فإن العملية العشوائية هي فئة set من المتغيرات العشوائية كل متغير فيها دالة في الزمن (أو المكان أو الاثنين معاً)، ولكل منها نفس التوزيع الاحتمالي. وفيما يلي سوف نقدم بعض الأمثلة البسيطة لبعض العمليات العشوائية.

مثال (٣-١): إذا اعتبرنا تجربة رمى زهرة طاولة متوازنة عدد n من الرميات.

أولاً: إذا أشرنا إلى نتيجة معينة من النتائج (1,2,3,4,5,6) الممكنة في الرمية رقم j بالرمز X_j ، حيث أن المتغير X_j متغير يتبع توزيع برنولي بحيث:

$$P_r\{X_j = i\} = p^i q^{1-i}, \quad i = 0,1 \quad (3.1)$$

فإن الفئة التي تمثل نتائج رمي عدد n من الزهرات (أو n رمية للزهرة الواحدة) تمثل عملية عشوائية، أو بعبارة أخرى إذا رمزنا لنتيجة الزهرة (أو الرمية) رقم j بالرمز X_j فإن الفئة

$\{X_j, j=1,2,\dots,n\}$ تمثل عائلة من المتغيرات العشوائية كل منها يتبع توزيع برنولي،
ولذا تسمى العملية العشوائية $\{X_j, j=1,2,\dots,n\}$ بعملية برنولي - Bernoulli-
.process

ثانياً: إذا فرضنا أن X_n تشير إلى عدد مرات ظهور الرقم 4 في عدد n من الرميات،
حيث:

$$\{X_j, j=1,2,\dots,n\}$$

فإن المتغير X_j متغير يتبع توزيع ذات الحدين حيث:

$$P_r\{X_j = i\} = C_i^n \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} \quad (3.2)$$

حيث تمثل الفئة $\{X_j, j=1,2,\dots,n\}$ عملية عشوائية لمتغيرات ذات الحدين.

مثال (٢-٣): إذا أشرنا إلى عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى أحد المؤسسات
في خلال الفترة الزمنية $[0,t]$ بالرمز $X(t)$ ، حيث $t \in T$ ، T هي مدة العمل في
المؤسسة خلال يوم عمل، فإن المتغيرات $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ تمثل عملية
عشوائية $\{X(t_i), t_i \in T\}$ بحيث التوزيع الاحتمالي لكل متغير على النحو:

$$P_r(X(t_i) = j) = \frac{e^{-\lambda t_i} (\lambda t_i)^j}{j!}, \quad j = 0,1,2,\dots, \quad i = 1,2,\dots,n$$

وتسمى العملية $X(t)$ بعملية بواسون.

(٣-٣) تصنيف العمليات العشوائية

Specification of Stochastic Process

تمثل فئة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X_n أو المتغير $X(t)$ للعمليات العشوائية $\{X_n, n \geq 1\}$ أو $\{X(t), t \in T\}$ على الترتيب فئة الحالات الممكنة possible states. وبالتالي ممكن تكون الحالات متقطعة discrete ، أو متصلة continuous. أولاً: فعلى سبيل المثال، إذا فرضنا أن X_n تشير إلى العدد الأجمالي لظهور الرقم (4) في عدد n من رميات زهرة الطاولة المتوازنة، فإن $X_n = 0, 1, 2, \dots, n$. وفي هذا المثال تكون الحالات متقطعة والزمن متقطع (الذي يمثله الرميات). ويمكن كتابة X_n على النحو التالي:

$$X_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad (3.3)$$

حيث y_i تمثل متغير عشوائي متقطع يمثل النتيجة في الرمية رقم i حيث $y_i = 0$ or 1 ، فإذا كانت النتيجة ظهور الرقم (4) فإن $y_i = 1$ وغير ذلك فإن $y_i = 0$. ثانياً: إذا فرضنا أن X_n تشير إلى درجة حرارة الطقس في مصر في الفترة n (حيث n تشير إلى عدد الأيام في الفترة) بحيث:

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (3.4)$$

حيث Z_i تمثل متغير عشوائي متصل $[0, \infty)$ وبالتالي فإن العملية تمثل عملية بزمن متقطع وحالات متصلة.

ويمكن تصنيف العمليات العشوائية إلى أربع مجموعات على النحو التالي:

١- عملية يكون فيها الزمن متقطع والحالات متقطعة

٢- عملية يكون فيها الزمن متقطع والحالات متصلة

٣- عملية يكون فيها الزمن متصل والحالات متقطعة.

٤- عملية يكون فيها الزمن متصل والحالات متصلة.

ويمكن اعتبار أن العمليات بأزمنة متقطعة حالة خاصة من الحالات بأزمنة متصلة. وفي الأبواب التالية سوف نوضح ذلك بالتفصيل.

Stationary Processes

(٤-٣) العمليات المستقرة

إذا فرضنا أن فترات زمنية محددة فإن التوزيع المشترك joint distribution لمتجه المتغيرات العشوائية:

$$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)] \quad (3.5)$$

هو نفس التوزيع الاحتمالي لمتجه المتغيرات التالي:

$$[X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_n + h)] , h > 0 \quad (3.6)$$

فإنه يقال أن العملية $\{X(t), t \in T\}$ عملية عشوائية مستقرة بالترتيب n stationary process of order n.

وإستقرار العملية يؤدي إلى أن البناء الاحتمالي probabilistic structure للعملية غير متغيرة invariant مع تغير الزمن time، وفي هذه الحالة إذا كان توقع العملية $\{X(t)\}$ موجود exists فإن:

$$E\{X(t)\} = E\{X(t+h)\} = m , h > 0 \quad (3.7)$$

حيث m مقدار لا يعتمد على الزمن t.

مثال (٣-٣): إذا اعتبرنا العملية العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ حيث أن:

$$P_r\{X(t_i) = n\} = \frac{\exp(-\alpha t_i) (\alpha t_i)^n}{n!} , \alpha > 0 , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X(t_i)] = \alpha t_i \quad (3.8)$$

فإن العملية $\{X(t), t \in T\}$ تسمى عملية بواسون Poisson ، كذلك:

$$P_r\{X(t_i + h) = n\} = \frac{\exp(-\alpha(t_i + h)) (\alpha(t_i + h))^n}{n!}$$

وبالتالي

$$E[X(t_i + h)] = \alpha(t_i + h) \quad (3.9)$$

من (3.8), (3.9) نجد أن عملية $\{X(t), t \in T\}$ عملية غير مستقرة لأنها تعتمد على الزمن

(٥-٣) عملية المشي العشوائي البسيطة

Simple Random Walk Process

في هذا الفصل نقدم بشيء من التفصيل أحد العمليات العشوائية البسيطة وهي عملية المشي العشوائي البسيط بالإضافة إلى بعض الأمثلة الأخرى لهذه العملية. وتعتبر هذه العملية من النوع الأول وفقاً للتصنيف في الفصل (٣-٣) فالحالات تمثل متغير متقطع والزمن متغير متقطع أيضاً.

إذا فرضنا تجربة لتحديد موقع جزئي $partical$ يتحرك حركة عشوائية $random move$ في كل وحدة زمنية (الوحدات الزمنية متساوية)، حيث تتمثل حركة الجزئي في القفز أعلى أو القفز أسفل فقط، وسوف نشير إلى نتيجة القفزة رقم n بالرمز Z_n ونتيجة القفزات نتائج مستقلة عن بعضها بحيث تبدأ الحركة من نقطة الأصل (0). ويمكن تعريف المتغير Z_n على النحو التالي:

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القفز إلى أعلى} \\ -1 & \text{إذا كان القفز إلى أسفل} \end{cases} \quad (3.10)$$

كذلك فإن:

$$P_r(Z_i = 1) = P_r(Z_i = -1) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

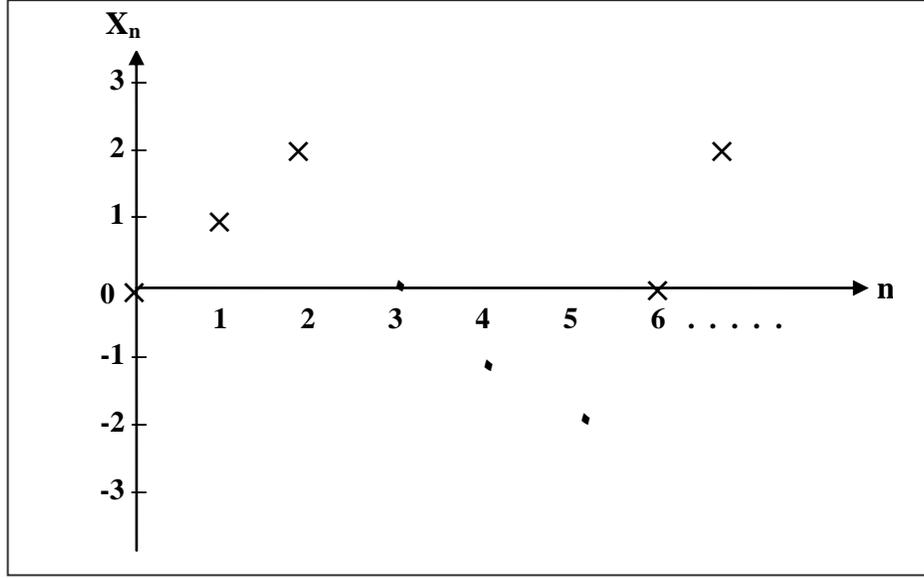
فإذا رمزنا لموقع الجزئي بعد n قفزة بالرمز X_n ، والشكل التالي (١-٣) يوضح موقع الجزئي.

كذلك يمكن التعبير عن X_n كدالة في Z_n على النحو التالي:

$$X_n = X_{n-1} + Z_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (3.11)$$

حيث $X_0 = 0$ لأن الحركة تبدأ من نقطة الأصل.

شكل (١-٣): يوضح موقع الجزئي وفقاً للزمن (n)



فإن المتغيرات Z_n ، $n = 1, 2, \dots$ تمثل متغيرات عشوائية يتبع كل منها توزيع برنولي، وبالتالي فإن العملية $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ تمثل عملية برنولي. كذلك بما أن:

$$X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$$

فإن المتغيرات X_n تمثل متغيرات كل منها يتبع توزيع ذات الحدين بحيث:

$$P_r\{X_n = j\} = C_j^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = C_j^n (2)^{-n} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

حيث j تشير إلى عدد القفزات إلى أعلى أو إلى أسفل، وبالتالي فإن $\{X_n, n \geq 0\}$ تمثل عملية ذات الحدين.

ويمكن تعميم أكثر للعملية إذا فرضنا أن الجزئي ممكن في وحدة الزمن يقفز إلى أعلى بمعنى $Z_n = 1$ أو إلى أسفل $Z_n = -1$ أو يظل في نفس الموضع $Z_n = 0$ بالاحتمالات التالية:

$$P_r(Z_n = 1) = p \quad , \quad P_r(Z_n = -1) = q \quad , \quad P_r(Z_n = 0) = 1 - p - q \quad (3.13)$$

Markov Processes

(٦-٣) عمليات ماركوف

تعتبر عمليات ماركوف من أهم العمليات العشوائية في دراسة نماذج الصفوف بل أهمها على الإطلاق [93, 94].

وفي هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا لعمليات ماركوف على النوع الأول: زمن متقطع وحالات متقطعة discrete time and discrete states كما ذكرنا ذلك سابقاً.

(١-٦-٣) متسلسلة ماركوف

تعريف (١-٣): إذا فرضنا أن العملية العشوائية $\{X_n, n \geq 0\}$ بحيث:

$$P_r\{X_n = k | X_{n-1} = j, X_{n-2} = j_1, X_{n-3} = j_2, \dots, X_0 = j_{n-1}\} = P_r\{X_n = k | X_{n-1} = j\} = P_{jk} \quad (3.14)$$

والمعادلة (3.14) تفيد أن الوصول للحالة $(X_n = k)$ يعتمد فقط على الحالة السابقة لها مباشرة $(X_{n-1} = j)$ ولا يعتمد على الحالات الأخرى السابقة التالية:

$$(X_{n-2} = j_1), (X_{n-3} = j_2), \dots, (X_0 = j_{n-1})$$

وتوجد أنواع مختلفة من عمليات ماركوف ولكن تسمى عملية ماركوف في (3.14)

بمتسلسلة ماركوف Markov chain.

ويلاحظ أنه في الحالة عندما يكون الاحتمال في الطرف الأيمن للمعادلة (3.14) لا يعتمد على (n) وفي هذه الحالة تسمى متسلسلة ماركوف بأنها متجانسة، وفي هذا الوضع يقال أن العملية عملية لها احتمالات انتقال مستقرة stationary transition probabilities وفي حالة اعتماد حالات الانتقال على (n) في هذه الحالة تسمى العملية عملية غير متجانسة non-homogeneous [24].

وبالنسبة لمتسلسلة ماركوف المتجانسة فإن الاحتمال P_{jk} تمثل احتمال الانتقال من الحالة j إلى الحالة k في خطوة واحدة (أو وحدة زمنية واحدة أو محاولة انتقال

واحدة). أما إذا كان الانتقال من الحالة j إلى الحالة k في عدد (m) من الخطوات (أو الفترات الزمنية أو المحاولات) فإنه يشار إلى الاحتمال بالرمز $P_{jk}^{(m)}$ بحيث:

$$P_r \{X_{n+m} = k | X_n = j\} = P_{jk}^{(m)} \quad (3.15)$$

تعريف (٣-٢): إذا فرضنا أن المصفوفة المربعة P تمثل احتمالات الانتقال في خطوة واحدة بحيث:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 3 & \dots & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0k} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1k} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{j0} & P_{j1} & P_{j2} & \dots & P_{jk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.16)$$

بحيث: $\sum_k P_{jk} = 1$, $P_{jk} \geq 0$ لجميع قيم j, k .

فإن المصفوفة P تسمى مصفوفة احتمالات الانتقال transition probability matrix وأحياناً تسمى مصفوفة ماركوف Markov matrix.

مثال (٣-٤): إذا فرضنا أن العملية $\{X_n, n \geq 0\}$ تمثل متسلسلة ماركوف بحيث $X_n = 0, 1, 2$ ومصفوفة الانتقال P بحيث:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

فإذا كان التوزيع الاحتمالي المبدئي initial distribution للحالات على النحو التالي:

$$P_r\{X_0 = j\} = \frac{1}{3}, \quad j = 0, 1, 2$$

المطلوب: باستخدام المصفوفة P أوجد الاحتمالات التالية:

(i) $P_r\{X_1 = 1 | X_0 = 2\}$, $P_r\{X_2 = 2 | X_1 = 1\}$

(ii) $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 2\}$

(iii) $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\}$

(iv) $P_r\{X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\}$

الحل:

(i) $P_r\{X_1 = 1 | X_0 = 2\} = P_{21} = \frac{1}{4}$, $P_r\{X_2 = 2 | X_1 = 1\} = P_{12} = \frac{1}{4}$

(ii) $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 2\} =$
 $P_r\{X_2 = 2 | X_1 = 1\} \cdot P_r\{X_1 = 1 | X_0 = 2\}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(iii) $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\} =$
 $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 2\} \cdot P_r\{X_0 = 2\}$
 $= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$

(iv) $P_r\{X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\} =$
 $P_r\{X_3 = 1 | X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\} \cdot$
 $P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\}$
 $= P_r\{X_3 = 1 | X_2 = 2\} \cdot P_r\{X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2\}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{192}$

تعريف (٣-٣): حواجز الامتصاص absorbing barriers هي حالات للنظام التي لا يمكن الانتقال منها إلى أي حالة أخرى، فإذا كانت الحالة $X_{n-1} = j$ حالة ماصة فإن:

$$P_r\{X_n = k | X_{n-1} = j\} = \begin{cases} 0 & \text{for all } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases} \quad (3.16)$$

مثال (٣-٥): إذا فرضنا نظام يتكون من الحالات 0,1,2,3,4 بحيث الحالتين 0,4 حالات ماصة كذلك:

$$P_r\{X_n = r+1 | X_{n-1} = r\} = p$$

$$P_r\{X_n = r-1 | X_{n-1} = r\} = q, \quad 0 < r < q$$

$$P_r\{X_n = 0 | X_{n-1} = 0\} = 1$$

$$P_r\{X_n = 4 | X_{n-1} = 4\} = 1$$

فإن مصفوفة الانتقال P تصبح على النحو التالي:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(٣-٦-٢) أحتمالات الانتقال الأعلى higher transition probabilities

يمكن الانتقال من حالة إلى حالة أخرى في عدد من الخطوات steps (أو عدد من الوحدات الزمنية) m ، بحيث $m > 1$. فإذا تم الانتقال من الحالة j إلى الحالة k في عدد m من الخطوات، وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز $P_{jk}^{(m)}$. فإذا تم الانتقال في الخطوة رقم (n) إلى الحالة j ومن j تم الانتقال إلى الحالة k في الخطوة رقم $(n+m)$ فإن:

$$P_{jk}^{(m)} = P_r \{X_{n+m} = k \mid X_n = j\} \quad (3.18)$$

ونلاحظ أن الاحتمالات $P_{jk}^{(m)}$ لا تعتمد على n وبالتالي فإن العملية في هذه الحالة تسمى عملية ماركوف المتجانسة أيضاً.

$$P_{jk}^{(1)} = P_{jk} \quad \text{ملحوظة:}$$

مثال (٦-٣): إذا فرضنا أن الانتقال من الحالة j إلى الحالة k في عدد 2 خطوة فإن:

$$P_{jk}^{(2)} = P_r \{X_{n+2} = k \mid X_n = j\}$$

حيث يمكن الوصول من j إلى k من خلال حالة وسيطة (r) intermediate state في خطوتين أو بعبارة أخرى:

$$\begin{aligned} P_r \{X_{n+2} = k, X_{n+1} = r \mid X_n = j\} &= \\ P_r \{X_{n+2} = k \mid X_{n+1} = r, X_n = j\} \cdot P_r \{X_{n+1} = r \mid X_n = j\} &= \\ = P_{rk}^{(1)} \cdot P_{jr}^{(1)} = P_{jr}^{(1)} P_{rk}^{(1)} = P_{jk}^{(2)} & \quad (3.18) \end{aligned}$$

وبصفة عامة، بما أن $r = 1, 2, \dots$ حيث الحالات r حالات متنافية mutually exclusive بالتالي فإن:

$$\begin{aligned} P_{jk}^{(2)} &= P_r \{X_{n+2} = k \mid X_n = j\} \\ &= \sum_r P_r \{X_{n+2} = k \mid X_{n+1} = r\} \cdot P_r \{X_{n+1} = r \mid X_n = j\} \\ &= \sum_r P_{jr} P_{rk} \end{aligned} \quad (3.19)$$

وبنفس الأسلوب يمكن تعميم ذلك وإثبات أن:

$$P_{jk}^{(m+1)} = \sum_r P_{jr} P_{rk}^{(m)} \quad (3.20)$$

وبشكل عام فإن:

$$P_{jk}^{(m+n)} = \sum_r^n P_{jr}^{(m)} P_{rk}^{(n)} \quad (3.21)$$

وتسمى المعادلة (3.21) بمعادلة Chapman-Kolmogrov، كذلك يمكن أثبات أن:

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

أو

$$P^{(m+n)} = P^m \cdot P^n = P^n \cdot P^m \quad (3.22)$$

مثال (٧-٣): أعتبر مثال (٤-٣) أوجد $P^{(2)}$ ، $P^{(4)}$.

$$\begin{aligned} P^2 = P \cdot P &= \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9/16 & 1/16 & 6/16 \\ 5/16 & 5/16 & 6/16 \\ 1/16 & 5/16 & 10/16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ومن $P^{(2)}$ نجد أن:

$$P_r \{X_{n+2} = 0 \mid X_n = 0\} = 9/16$$

$$P_r \{X_{n+2} = 2 \mid X_n = 1\} = 6/16$$

بالمثل

$$\begin{aligned} P^{(4)} = P^{(2)} \cdot P^{(2)} &= \begin{bmatrix} 9/16 & 1/16 & 6/16 \\ 5/16 & 5/16 & 6/16 \\ 1/16 & 5/16 & 10/16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9/16 & 1/16 & 6/16 \\ 5/16 & 5/16 & 6/16 \\ 1/16 & 5/16 & 10/16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 92/256 & 44/256 & 120/256 \\ 76/256 & 60/256 & 120/256 \\ 44/256 & 76/256 & 136/256 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(٣-٦-٣) التوزيع المبدئي: إذا اعتبرنا العملية $\{X_n, n \geq 0\}$ وإذا أشرنا إلى متجه الحالات الممكنة للنظام قبل بدأ الحركة (الانتقال أو عند الزمن صفر) بالرمز X_0 فإن متجه احتمالات الحالات الممكنة وسوف نشير له بالرمز \mathbf{a} بحيث:

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots]$$

حيث a_i تشير إلى احتمال وجود النظام في الحالة i قبل بدء الحركة أو بعبارة أخرى:

$$\mathbf{P}_r(X_0) = \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots] , \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1 \quad (3.23)$$

ويسمى المتجه \mathbf{a} بالتوزيع المبدئي **initial distribution** للحالات الممكنة. وبالتالي يمكن أثبات أن التوزيع الاحتمالي للحالات الممكنة للنظام بعد (n) خطوة (أو n وحدة زمنية) على النحو التالي:

$$\mathbf{P}_r[X_n] = \mathbf{a} \mathbf{P}^{(n)} \quad (3.24)$$

وبالتالي فإن احتمال وجود النظام في الحالة (i) بعد (n) خطوة على النحو:

$$\mathbf{P}_r[X_n = i] = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{P}_{ji}^{(n)} , \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}_r(X_n) = \mathbf{a} \mathbf{P}^{(n)} \quad \text{أو}$$

ملحوظة: إذا كانت العملية العشوائية عملية مستقرة **stationary process** (أنظر الفصل (٣-٣)) فإن:

$$\mathbf{P}_r[X_n] = \mathbf{a} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{a} , \quad n \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

وتسمى الاحتمالات \mathbf{a} في هذه الحالة باحتمالات التوازن أو الاستقرار **equilibrium probability** وهذا يعني أن التوازن الاحتمالي $\mathbf{P}_r(X_n)$ لا يتأثر بعدد الخطوات n (أو الزمن n).

مثال (٣-٨): إذا اعتبرنا أحد أنظمة الاتصالات بحيث يتم نقل المعلومات من خلال الرقمين (0),(1) خلال عدد n من المراحل المتتالية. فإذا أشرنا لحالة النظام في المرحلة j بالرمز X_j ، وإذا كانت حالة النظام في المرحلة j تعتمد على حالة النظام في المرحلة $(j-1)$ فقط. وفي كل مرحلة يوجد احتمال ثابت q بأن الرقم الداخل لا يختلف عن الرقم السابق له، واحتمال p لغير ذلك بحيث $p + q = 1$.

وبالتالي فإن $\{X_j, j = 0,1,2,\dots\}$ تمثل عملية ماركوف بمصفوفة انتقال P حيث:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \\ 1 & q \end{bmatrix}, \quad P_r[X_0 = 1] = P_r[X_0 = 0] = \frac{1}{2}$$

والمطلوب: ١- أوجد $P^{(2)}$

٢- $P_{11}^{(2)}$ ، $P_{00}^{(2)}$

٣- $P_{10}^{(2)}$ ، $P_{01}^{(2)}$

٤- أوجد الاحتمالات التالية:

i) $P_r(X_3 = 1, X_0 = 0)$ ، ii) $P_r(X_3 = 0, X_0 = 0)$

الحل:

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} (q^2 + p^2) & 2pq \\ 2pq & (q^2 + p^2) \end{bmatrix} \quad -١$$

$$P_{00}^{(2)} = (q^2 + p^2) \quad , \quad P_{11}^{(2)} = (q^2 + p^2) \quad -٢$$

$$P_{01}^{(2)} = 2pq \quad , \quad P_{10}^{(2)} = 2pq \quad -٣$$

$$i) P_r(X_3 = 1, X_0 = 0) = P_r(X_3 = 1 | X_0 = 0) P_r(X_0 = 0) \quad -٤$$

ويمكن الحصول على الأختمال $P_r(X_3 = 1, X_0 = 0)$ مباشرة من المصفوفة $P^{(3)}$ أو باستخدام معادلة chapman-kolog. على النحو التالي:

$$\begin{aligned} P_r(X_3 = 1 | X_0 = 0) &= \sum_i P_{0i} P_{i1}^{(2)} \\ &= P_{00} P_{01}^{(2)} + P_{01} P_{11}^{(2)} = q(2pq) \longrightarrow \end{aligned}$$

$$P_r(X_3 = 1, X_0 = 0) = 2 p q^2 (1/2) = p q^2$$

بالمثل:

$$\text{ii) } P_r(X_3 = 0, X_0 = 0) = P_r(X_3 = 0 | X_0 = 0) P_r(X_0 = 0) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} P_r(X_3 = 0 | X_0 = 0) &= P_{00} P_{00}^{(2)} + P_{01} P_{10}^{(2)} \\ &= q(q^2 + p^2) + p(2pq) \\ &= q(q^2 + p^2) + 2qp^2 \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r(X_3 = 0, X_0 = 0) &= \{q(q^2 + p^2) + 2qp^2\} \cdot (1/2) \\ &= (1/2)(q^3 + qp^2) + qp^2 \end{aligned}$$

مثال (٣-٩): إذا فرضنا أن حالة الطقس في أحد الشهور الشتوية (الشهر ٣٠ يوم) يكون ممطر وسوف نشير لذلك بالرمز (1) أو غير ممطر وسوف نشير له بالرمز (2). فإذا كانت حالة الطقس في اليوم رقم (j) تعتمد على حالة الطقس في اليوم السابق له مباشرة (j-1). فإذا كانت مصفوفة الأنتقال على النحو التالي:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.750 & 0.250 \\ 0.338 & 0.662 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

والتوزيع المبدئي للحالات a بحيث:

$$\mathbf{a} = [0.575 \quad 0.425] \quad (2)$$

فبعد 10 أيام مثلاً نجد أن مصفوفة الانتقال على النحو:

$$\mathbf{P}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0.750 & 0.250 \\ 0.338 & 0.662 \end{bmatrix} \quad (3)$$

وبالتالي فإن احتمالات حالة الطقس بعد 10 أيام على النحو التالي:

$$\begin{aligned} P_r[X_{10}] &= \mathbf{a} \mathbf{P}^{(10)} = [0.575 \quad 0.425] \begin{bmatrix} 0.750 & 0.250 \\ 0.338 & 0.662 \end{bmatrix} \\ &= [0.575 \quad 0.425] = \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4)$$

ويتضح من (2)، (4) أن عملية ماركوف في هذه الحالة عملية مستقرة.

(٤-٦-٣) تصنيف الحالات والمتسلسلات

Classification of states and chains

يتم تصنيف حالات النظام لمتسلسلة ماركوف وفقاً لسلوكها النهائي **limiting behavior** وفقاً لبعض خصائص النظام. وفيما يلي سوف نقدم أهم بعض خصائص الحالات والمتسلسلات لماركوف على النحو التالي.

تعريف (٣-٣): إذا فرضنا انه يمكن الوصول من أي حالة j إلى أي حالة أخرى k في أي عدد من الخطوات (أو الوحدات الزمنية) لجميع قيم j, k ، أو بعبارة أخرى جميع الحالات متصلة ببعضها.

وهذا يعني أن $P_{jk}^{(n)} > 0$ لجميع قيم j, k . في هذه الحالة تسمى الحالات حالات غير قابلة للاختزال **irreducible** وتسمى مصفوفة الانتقال في هذه الحالة بالمصفوفة غير قابلة للاختزال **irreducible matrix**.

تعريف (٤-٣): إذا فرضنا أن $f_{jk}^{(n)}$ تشير إلى احتمال الوصول من الحالة j إلى الحالة k أول مرة في عدد (n) من الخطوات (أو الوحدات الزمنية)، فإن:

$$f_{jk}^{(n)} = P_r \{X_r \neq k, r = 1, 2, \dots, n-1, X_n = k | X_0 = j\} \quad (3.27)$$

حيث:

$$P_{jk}^{(n)} = \sum_{r=0}^n f_{jk}^{(r)} P_{kk}^{(n-r)}, \quad n \geq 1 \quad (3.28)$$

$$P_{kk}^{(0)} = 1, \quad f_{jk}^{(0)} = 0, \quad f_{jk}^{(1)} = P_{jk} \quad (3.29)$$

ومن (3.28), (3.29) نجد أن:

$$P_{jk}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n-1} f_{jk}^{(r)} P_{kk}^{(n-r)} + f_{jk}^{(n)}, \quad n > 1 \quad (3.30)$$

تعريف (٣-٥): إذا رمزنا لأحتمال البدء في الحالة j والوصول منها دائماً إلى الحالة k بالرمز F_{jk} فإن:

$$F_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^{(n)} \quad (3.31)$$

تسمى الحالة j حالة متكررة أو دائمة **persistent or recurrent** إذا كان:

$$F_{jj} = 1 \quad (3.32)$$

وتسمى الحالة j حالة مؤقتة أو غير متكررة **transient or nonrecurrent** إذا كان:

$$F_{jj} < 1 \quad (3.33)$$

تعريف (٣-٦): تسمى الحالة j حالة دورية **periodic** بدورة طولها t (أي عدد خطوات يساوي t ، أو في t من الوحدات الزمنية) حيث $t > 1$ ، إذا كان الرجوع للحالة j في الخطوات $t, 2t, 3t, \dots$ فقط بمعنى أن:

$$\left. \begin{aligned} P_{jj}^{(n)} &> 0, & n = t, 2t, 3t, \dots, & t > 1 \\ P_{jj}^{(n)} &= 0, & n \neq t, 2t, 3t, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

وبالتالي تسمى الحالة z غير دورية (non-periodic) aperiodic إذا لم يتحقق الشرط في (3.28) وعلى سبيل المثال إذا كان:

$$P_{jj} > 0$$

فإنه في هذه الحالة $t = 1$ وبالتالي فإن الحالة z غير دورية.

تعريف (٣-٧): إذا رمزنا إلى الزمن المتوقع للوصول للحالة k من الحالة z بالرمز μ_{jk} حيث:

$$\mu_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jk}^{(n)}$$

فإن الحالة z تسمى حالة غير موجودة null إذا كان:

$$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \infty \quad (3.35)$$

وتسمى حالة موجودة non-null إذا كان:

$$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} < \infty \quad (3.36)$$

تعريف (٣-٨): تسمى الحالة z حالة عامة ergodic إذا كانت:

١- دائمة (recurrent) persistent

٢- موجودة non-null

٣- غير دورة aperiodic

وإذا كانت جميع الحالات لمتسلسلة ماركوف تتوافر فيها الشروط أعلاه فإنها تسمى متسلسلة عامة ergodic chain.

مثال (٣-١٠): إذا فرضنا العملية العشوائية $\{X_n, n \geq 0\}$ تمثل متسلسلة ماركوف بمصفوفة انتقال P حيث:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

المطلوب: ١- وضح أن متسلسلة ماركوف دورية.

٢- أوجد $f_{11}, f_{11}^{(2)}, F_{11}$ ثم حدد نوع الحالة (1).

٣- أوجد $f_{22}, f_{22}^{(2)}, F_{22}$ ثم حدد نوع الحالة (2).

الحل: ١- نوجد $P^{(2)}, P^{(3)}$ فنجد أن:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بإيجاد المصفوفات $P^{(4)}, P^{(5)}, \dots$ نجد أن:

$$P^{(2n)} = P^{(2)}, \quad P^{(2n+1)} = P, \quad n = 1, 2, \dots$$

وبالتالي نجد أن:

$$P_{ii}^{(2n)} > 0, \quad P_{ii}^{(2n+1)} = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.37)$$

من (3.37) نجد أن جميع حالات النظام دورية بدورة t حيث $t = 2$ ، وبالتالي فإن المتسلسلة دورية بدورة $t = 2$.

٢- من المصفوفة p نجد أن:

$$F_{11} = 0$$

ومن المصفوفة $P^{(2)}$ نجد أن:

$$f_{11}^{(2)} = 1$$

وبالتالي فإن:

$$F_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1$$

وبالتالي فإن الحالة (1) حالة دائمة .persistent

كذلك نجد أن:

$$\mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2 < \infty$$

وبالتالي فإن الحالة (1) حالة موجودة non-null.

٣- بالمثل بالنسبة للحالة (2) نجد أن:

$$f_{22} = 0 \quad , \quad f_{22}^{(2)} = \frac{1}{2} \quad , \quad F_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} 1(0) + 2(1/2) = 1$$

وبالتالي فإن الحالة (2) حالة دائمة أيضاً، كذلك أيضاً الحالة (0) بالمثل.

Poisson Processes

(٧-٣) عمليات بواسون

في الفصل السابق تم تقديم بعض أنواع عمليات ماركوف مع التركيز على عملية ماركوف عندما تكون الحالات متقطعة discrete states والزمن (أو الخطوات) متقطع discrete time أيضاً.

ولكن كثير من الظواهر العملية تكون فيها الحالات متقطعة والزمن متصل continuous time. لذلك تلعب عمليات ماركوف ذات الحالات المتقطعة والزمن المتصل دور هام في دراسة هذه الظواهر.

وتعتبر عملية بواسون إحدى العمليات التي تنتمي إلى هذه الفئة من عمليات ماركوف. ومن الأمثلة العملية لهذا النوع من العمليات:

- ١- عدد مكالمات التليفونات خلال فترة زمنية معينة.
- ٢- عدد الحوادث التي تقع في أحد الطرق خلال فترة زمنية معينة.
- ٣- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد مراكز الخدمة (مثل البنك) خلال فترة زمنية معينة.

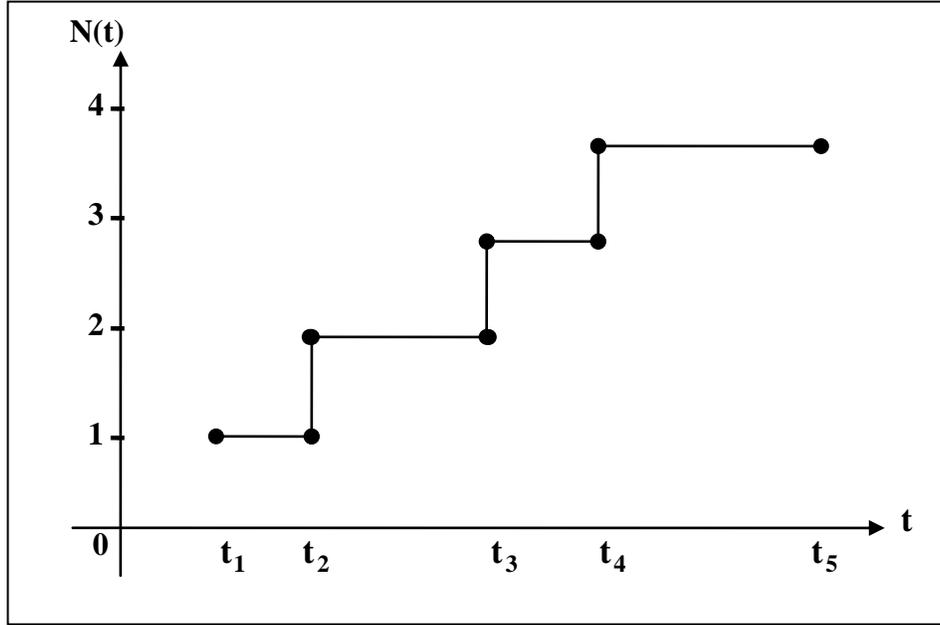
فإذا فرضنا أن $N(t)$ تشير إلى عدد مرات وقوع الحدث A خلال الفترة t . فإذا بدأنا في $t = 0$ ، وأن الحدث A يقع في النقط الزمنية $t = t_1, t = t_2, \dots$ ، والشكل التالي يوضح العلاقة بين $N(t)$ و $t = t_1, t_2, \dots$ ، حيث تحدث القفزات jumps عند النقط الموضحة على المحور الأفقي في الشكل التالي .

فإذا فرضنا أن $P_n(t)$ تشير إلى احتمال أن $N(t) = n$ فإن:

$$P_n(t) = P_r[N(t) = n] \quad (3.38)$$

حيث $P_n(t)$ دالة في المتغير t عندما $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \quad (3.39)$$

شكل (٣-١): يوضح عدد مرات وقوع الحدث في الفترة $(0, t)$ 

وبالتالي فإن $P_n(t)$ يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير $N(t)$ بالنسبة لكل قيمة من قيم t . وعائلة المتغيرات العشوائية $N(t)$ ، $\{N(t), t \geq 0\}$ ، تمثل عملية عشوائية حيث المتغير $N(t)$ متغير متقطع، t متغير متصل. ومن أمثلة هذا النوع من العمليات عملية بواسون تحت شروط معينة **certain conditions**.

وفيما يلي نقدم فروض **postulates** عملية بواسون:

- ١- فرض الاستقلال independence: وهذا الفرض يتمثل في ان المتغير $N(t)$ متغير مستقل بمعنى أن $N(t_1 \leq t \leq t_2)$ مستقل عن $N(t_2 \leq t \leq t_3)$ أو بعبارة أخرى عدد مرات وقوع الحدث A في فترة معينة مستقل عن عدد مرات وقوع الحدث A في أي فترة أخرى.

٢- التجانس homogeneity: التجانس هنا يعني أن $P_n(t)$ يعتمد على طول الفترة (t_1, t_1+t) أي يعتمد على t ولا يختلف باختلاف t_1 . أو بعبارة أخرى يعتمد على طول الفترة وليس موقعها.

٣- الانتظام regularity: وهذا يعني إذا كانت الفترة (Δt) فترة زمنية صغيرة جداً فإن احتمال وقوع الحدث A مرة واحدة خلال (Δt) يساوي $\lambda(\Delta t) + O(\Delta t)$ ، حيث $O(\Delta t)$ دالة من الدرجة الثانية أو أكثر من الدرجة الثانية في (Δt) ، كذلك عندما $\Delta t \rightarrow 0$ فإن $O(\Delta t)$ يؤول أسرع إلى الصفر من (Δt) بمعنى:

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad \text{فإن:}$$

وبالتالي فإن:

$$P_1(\Delta t) = \lambda(\Delta t) + O(\Delta t)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta t) = O(\Delta t) \quad \text{وبما أن:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\Delta t) = 1 \longrightarrow \quad \text{بما أن:}$$

$$P_0(\Delta t) = 1 - [\lambda(\Delta t) + O(\Delta t)] \quad (3.40)$$

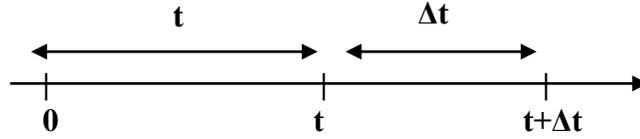
نظرية (٣-١): المتغير $N(t)$ يتبع توزيع بواسون بتوقع (λt) أو بعبارة أخرى:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

عندما:

$$P_0(0) = 1 \quad , \quad P_n(0) = 0 \quad , \quad n \neq 0 \quad (3.42)$$

الإثبات: أعتبر $n \geq 0$ ، $P_n(t + \Delta t)$



فإن وقوع عدد n من الأحداث events المتنافية خلال الفترة $(t + \Delta t)$ ممكن أن يحدث بعدد $(n + 1)$ من الطرق المتنافية mutually exclusive ways ولتكن A_1, A_2, \dots, A_{n+1} .

فإذا كان A_1 تشير إلى وقوع عدد (n) في الفترة t وعدم وقوع أي حدث في الفترة $(t, t + \Delta t)$ وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} P_r(A_1) &= P_r[N(t) = n] P_r[N(\Delta t) = 0 | N(t) = n] \\ &= P_n(t) P_0(\Delta t) \longrightarrow \\ &= p_n(t)[1 - \lambda(\Delta t)] + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

كذلك إذا فرضنا الحدث A_2 حيث وقوع عدد $(n-1)$ حدث خلال الفترة t ووقوع حدث واحد خلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} P_r(A_2) &= P_r[N(t) = n - 1] P_r[N(\Delta t) = 1 | N(t) = n - 1] \\ &= P_{n-1}(t) P_1(\Delta t) \\ &= P_{n-1}(t)[\lambda(\Delta t)] + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

كذلك الحدث A_3 حيث وقوع عدد $(n-2)$ خلال الفترة t ووقوع عدد 2 خلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ ، وبالتالي فإن:

$$P_r(A_3) = P_{n-2}(t)\{O(\Delta t)\} = O(\Delta t)$$

بالمثل A_4, A_5, \dots ، وبالتالي يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$P_r(A_k) = O(\Delta t) \quad , \quad n \geq k \geq 3 \quad (3.45)$$

وبما أن الأحداث متنافية فإن:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)[1 - \lambda(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda(\Delta t)] + O(\Delta t) \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.46)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + n P_{n-1}(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \longrightarrow$$

$$P_n'(t) = -\lambda[P_n(t) - P_{n-1}(t)] \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.47)$$

وعندما $n = 0$ فإن:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda(\Delta t)] + O(\Delta t) \longrightarrow$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \quad (3.48)$$

وبحل المعادلات التفاضلية في (3.47), (3.48) تحت الشروط في (3.42) باستخدام طريقة حل معادلات الفروق التفاضلية differential difference equations المقدمة في الفصل (٦-٢) نجد أن:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

مثال (١١-٣): إذا فرضنا أحد فروع بنك مصر يصل العملاء إلى الفرع بمعدل متوسط 5 عملاء في الدقيقة.

المطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء التي تصل إلى الفرع في الساعة.

٢- أوجد احتمال عدم وصول أي عميل خلال الساعة.

٣- أوجد العدد المتوقع للعملاء في الساعة.

الحل: ١- إذا اعتبرنا أن n عدد العملاء، والفترة $t = 60$ ، $\lambda = 5$ فإن:

$$P_n(60) = \frac{e^{-(5)(60)} (5(60))^n}{n!} = \frac{e^{-300} (300)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

٢- أحتمال عدم وصول أي عميل خلال الساعة فإن:

$$P_0(60) = \frac{e^{-300} (300)^0}{0!} \approx 0$$

٣- العدد المتوقع للعملاء الذين يصلون إلى البنك في الساعة $E(n)$ بحيث:

$$\begin{aligned} E(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ \frac{e^{-300} (300)^n}{n!} \right\} \\ &= 300 e^{-300} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(300)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 300 e^{-300} e^{300} = 300 \text{ عميل} \end{aligned}$$

مثال (٣-١٢): إذا اعتبرنا أحدي ماكينات الطباعة ممكن أن يحدث لها عطل من الأعطال البسيطة بمعدل متوسط $\lambda = 2$ في الأسبوع.

المطلوب: ١- أوجد التوزيع الأحتمالي لعدد الأعطال خلال 4 أسابيع.

٢- أوجد احتمال عدم وقوع أي عطل في فترة 4 أسابيع أو أقل.

٣- أوجد احتمال حدوث 3 أعطال على الأكثر خلال 4 أسابيع.

الحل: ١- إذا فرضنا أن n عدد الأعطال خلال 4 أسابيع بحيث $t = 4$, $\lambda = 2$. فإن:

$$P_n(t=4) = \frac{e^{-2(4)} (8)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

٢- وبالتالي فإن احتمال عدم وقوع أي عطل في فترة 4 أسابيع أو أقل:

$$P_0(t \leq 4) = \int_0^4 \frac{e^{-2(4)} (8)^n}{n!} dt = e^{-8} (4) = 0.0013$$

Exercises

(٨-٣) تمارينات

(١-٣) إذا فرضنا أن العملية العشوائية $\{X(t), t \geq 0\}$ بحيث $X_i(t)$ ، $i = 1,2,3,\dots$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منهم يتبع التوزيع المعتاد القياسي بتوقع (0) وتباين (1).
وضح ان العملية عملية مستقرة .

(٢-٣) إذا اعتبرنا العملية العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ بحيث $X_i(t)$ ، متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ

$$P_r\{X_i(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} , \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

وضح أن العملية عملية غير مستقرة.

(٣-٣) إذا كانت $\{X_n, n \geq 0\}$ عملية ماركوف بمصفوفة أنتقال P :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P_r\{X_0 = i\} = \frac{1}{3} , \quad i = 0,1,2$$
 والتوزيع المبدئي

١- وضح أن العملية *aperiodical, irreducible*.

٢- أوجد الأاحتمالات التالية:

$$i) P_r\{X_{n+2} = 1 | X_n = 0\} , \quad ii) P_r\{X_{n+3} = 0 | X_n = 1\}$$

$$iii) P_r\{X_{n+1} = 2 | X_{n-1} = 0\} , \quad iv) P_r\{X_n = 1 | X_{n-1} = 2\}$$

$$٣- أوجد التوزيع $P_r\{X_3 = i\} , \quad i = 0,1,2$$$

(٤-٣) أعتبر $\{X_n\}$ تمثل سلسلة من الرميات المستقلة المتتالية لقطعة عملة بحيث
 احتمال ظهور الشعار (H) يساوي p وبالتالي احتمال ظهور الكتابة T يساوي $(1-p)$.
 فإذا أشرنا إلى نتائج رميتين متتاليتين TT, TH, HT, HH بالأرقام 1,2,3,4 على
 الترتيب. وضح أن $\{X_n\}$ تمثل عملية ماركوف ثم أوجد مصفوفة الانتقال p ثم أوجد
 $P^{(m)}$ ، $(m \geq 2)$.

(٥-٣) إذا فرضنا رمي زهرة طاولة متوازنة $\{k = 1,2,3,4,5,6\}$ عدد n من الرميات
 المستقلة. وضح أن العملية $\{X_n\}$ تمثل عملية ماركوف ثم أوجد مصفوفة الانتقال p ثم
 أوجد $P^{(2)}$ ، $P^{(3)}$.

(٦-٣) جزئ يتحرك حركة عشوائية بحيث يبدأ حركته من نقطة الأصل (0) فإذا تحرك من
 النقطة (j) إلى (j+1) باحتمال a_j بحيث يرجع إلى نقطة الأصل باحتمال $(1-a_j)$.

بافتراض أن الحالات بعد n خطوة هي $0,1,2,3,\dots$.

١- وضح أن الحالة (0) حالة ممكنة الرجوع recurrent.

٢- أثبت أنه عندما $n \rightarrow \infty$ فإن:

$$\text{Lim}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \rightarrow 0$$

(٧-٣) أعتبر متسلسلة ماركوف بالحالات $0,1,2,3,\dots$ بأحتمال الانتقال P_{jk} بحيث:

$$P_{jk} = \frac{e^a \sum_{r=0}^k C_r^j P^r (1-p)^{j-r} a^{k-r}}{(k-r)!} , \quad j, k = 0,1,2,\dots$$

وضح أن التوزيع النهائي $\{V_k\}$ limiting distribution يمثل توزيع بواسون بمعلمة
 $[a/(1-P)]$.

(٨-٣) إذا قسمنا الفترة الزمنية $[0, t]$ إلى عدد n من الفترات الزمنية الجزئية المتساوية الطول كل منها يساوي h ، وبافتراض أنه في كل فترة زمنية جزئية يتم إجراء محاولة لبرنولي بأحتمال نجاح λh وفشل باحتمال $(1 - \lambda h)$. أثبت أن عدد مرات النجاح خلال الفترة t تمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بتوقع (λt) مع تحديد الفروض التي تم على أساسها اشتقاق التوزيع.

(٩-٣) إذا فرضنا أن $N_1(t), N_2(t)$ عمليتين عشوائيتين مستقلتين وكل منها تتبع توزيع بواسون بمعلمتين λ_1, λ_2 على الترتيب. أثبت أن:

$$P_r \{N_1(t) = k \mid N_1(t) + N_2(t) = n\} = C_k^n p^k q^{n-k}$$

$$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

(١٠-٣) أعتبر العملية العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ بحيث:

$$P_r \{X(t_i) = n\} = \frac{e^{-\lambda t_i} (\lambda t_i)^n}{n!}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وضح أن العملية $\{X(t), t \in T\}$:

١- عملية غير مستقرة.

٢- عملية متجانسة.

الباب الرابع
مكونات أنظمة الصفوف
Components of Queueing Systems

Introduction	(١-٤) مقدمة
Queueing System	(٢-٤) نظام الصف
	(٣-٤) الصياغة الرمزية لأنظمة الصفوف
Queueing System Notations	
	(٤-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام
Distribution of Arrivals	
	(٥-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهى خدمتهم
Distribution of Departures	
	(٦-٤) التوزيع الاحتمالي لأزمنة الخدمة
Distribution of Service Times	
Exercises	(٧-٤) تمارينات

Introduction

(١-٤) مقدمة

في هذا الباب نقدم بشيء من التفصيل التعريف الدقيق لنظام الصف، ومكونات النظام من مدخلات inputs، وأزمنة خدمة service times ومخرجات output.

ومنذ سنة ١٩٥٣ حيث قدم kendall الصياغة الرمزية لأنظمة الصفوف، حيث تعطي الصياغة الرمزية للنظام وصف دقيق لعناصر النظام ثم تقدم السلوك الاحتمالي (التوزيع الاحتمالي) لعناصر النظام التي تمثل متغيرات عشوائية.

في الفصل التالي نقدم وصف لأنظمة الصفوف، ثم نقدم في الفصل (٤-٣) الصياغة الرمزية لأنظمة الصفوف.

في الفصل (٤-٤) نقدم اشتقاق التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام. وفي الفصل (٤-٥) نقدم اشتقاق التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم.

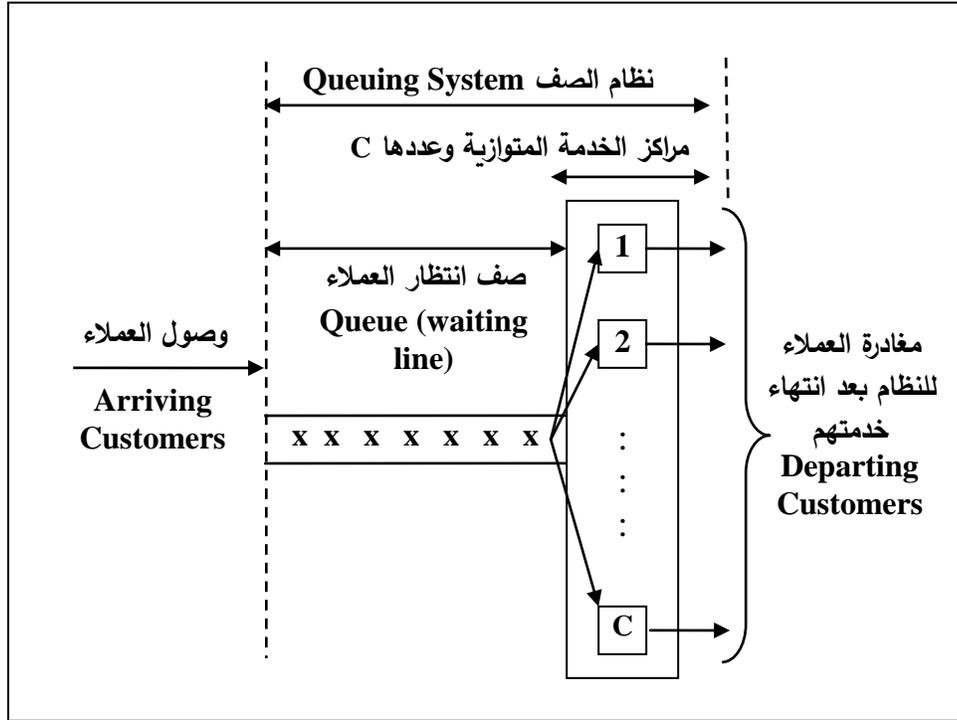
وفي الفصل (٤-٦) نقدم التوزيع الاحتمالي لأزمنة خدمة العملاء. حيث التوزيعات الاحتمالية لعناصر النظام الاحتمالية تخضع لبعض الشروط التي يجب أن تأخذ في الاعتبار عند التطبيق. ذلك بالإضافة إلى عدد من الأمثلة والتمارين.

Queueing System

(٢-٤) نظام الصف

يتكون نظام الصف أو نظام الانتظار **waiting system** من عملاء **customers (items)** يصلون إلى مركز خدمة (أو عدد من مراكز الخدمة التي تؤدي نفس نوع الخدمة وفي هذه الحالة تسمى مراكز متوازية **parallel stations**) في طلب خدمة معينة يؤديها المركز. فإذا كان مركز الخدمة خالي فإنه يدخل مباشرة للحصول على الخدمة، أما إذا كان المركز مشغول (أو كل المراكز مشغولة) في تأدية خدمة لعميل (أو عملاء) سابق فإنه ينتظر في الصف **queue** لحين خلو المركز (أو أحد المراكز) من خدمة عميل كما هو موضح في الشكل التالي:

شكل (١-٤): مكونات نظام الصف



ويمكن دراسة أي نظام من أنظمة الصفوف وفقاً لعدد من الخصائص التالية التي تمثل العناصر الأساسية في بناء النماذج الرياضية **mathematical models** التي تمثل هذه الأنواع من الأنظمة [103, 19, 22]:

١- تيار المدخلات الذي يمثل عدد وسلوك وصول العملاء إلى النظام **arriving customers (input)**.

٢- زمن خدمة العميل **service time** داخل مركز الخدمة أو الفترة الزمنية بين خروج عميلين متتاليين من مركز الخدمة **inter-departures time** بعد أدائها.

٣- عدد مراكز الخدمة **service stations (channels)** بالنظام.

٤- طريقة الدخول للخدمة **service discipline**.

٥- الحد الأقصى لعدد العملاء المسموح به في النظام **maximum number of customers allowed in the system**.

٦- عدد العملاء (المفردات) في المجتمع الذي يصل منه العملاء **population (calling source)**.

وفيما يلي سوف نتناول كل عنصر من العناصر بالتفصيل.

أولاً تيار المدخلات: تيار المدخلات للنظام هو عبارة عن السلوك الاحتمالي لعدد العملاء (المفردات) التي تصل إلى النظام في طلب الخدمة خلال فترة معينة. وغالباً من الصعب بل قد يكون من المستحيل تحديد دقيق لموعد وصول هذه المفردات إلى النظام أو تحديد عددهم خلال فترة زمنية معينة، فعلي سبيل المثال وصول العملاء إلى البنوك أو وصول المرضى إلى العيادات أو وصول السيارات لمحطات البنزين، الخ.

وبالتالي أصبح عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام خلال فترة زمنية معينة يمثل متغير عشوائي **random variable** يعتمد على الفترة الزمنية (أي يمثل عملية عشوائية - أنظر الباب الثالث) ولذلك فإن دراسة التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام خلال فترة معينة (أو الفترة الزمنية بين وصوليين متتالية **inter-arrival time**) من العناصر الأساسية في بناء نموذج صف (طابور) مناسب يصف النظام.

ثانياً زمن خدمة العميل: زمن خدمة العميل هو الوقت الذي يقضيه العميل داخل مركز الخدمة في أداء الخدمة وهو ما يطلق عليه زمن الخدمة وهو يمثل متغير عشوائي أيضاً حيث يعتمد هذا المتغير على كفاءة القائم على أداء الخدمة، كفاءة الأدوات المستخدمة، ... الخ. فعلي سبيل المثال تموين السيارة بالبنزين في المحطة يختلف من سيارة لأخرى وفقاً لكمية البنزين المطلوبة كذلك وفقاً لسرعة أداء العامل القائم على التموين، بالمثل زمن كشف الطبيب على المريض يختلف من مريض إلى آخر وفقاً لطبيعة المريض وطبيعة المرض. لذلك يعتبر زمن الخدمة في مركز الخدمة متغير عشوائي أيضاً.

ثالثاً عدد مراكز الخدمة: عدد مراكز الخدمة المتكافئة في النظام، وهنا المقصود بالتكافئ أي تؤدي نفس الخدمة ولها نفس التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة، ولكن قد تكون بمعدلات مختلفة. ويسمى هذا النوع من مراكز الخدمة بالمراكز المتوازنة **parallel stations** حيث تتم خدمة العميل في مرحلة واحدة في أحد المراكز من هذه المراكز. ويوجد نوع آخر من الخدمات تؤدي على مراحل متتالية مثل عملية طباعة الكتب فالمرحلة الأولى الطباعة، المرحلة الثانية التجميع، المرحلة الثالثة التجليد.

وسوف تقتصر الأبواب (٥)-(٨) على الخدمة التي تؤدي في مرحلة واحدة، في حالة وجود مركز خدمة واحد أو عدد من المراكز المتوازنة وفي هذا النوع من مراكز الخدمة لا يستطيع المركز الواحد خدمة أكثر من عميل في نفس الوقت.

وفي الأبواب (٩)،(١٠) سوف نقدم الخدمة على مراحل متتالية، حيث تتم خدمة العميل الواحد في عدد من المراحل المتتالية وتنتهي خدمة العميل بمروره على جميع المراحل.

رابعاً طريقة الدخول للخدمة: طريقة الدخول لمركز الخدمة تعني القاعدة التي على أساسها يتم اختيار العميل من صف الانتظار لدخوله مركز الخدمة وبدء خدمته بالمركز. وفي كثير من الأنظمة تكون القاعدة "من يأتي أولاً يخدم أولاً" **first**

"come – first served" وذلك كما هو موجود في محطات البنزين، أو دخول السفن للميناء، الخ.

وتوجد أنظمة أخرى يكون "من يأتي أخيراً يخدم أولاً" **last come – first served** ومثال ذلك سحب البضائع من مركز تخزين. وأحياناً يكون دخول العملاء للنظام وفقاً لأولويات **priorities** مثل إجراء عمليات جراحية معيبة ببعض المستشفيات.

وبالتالي تختلف هذه القاعدة باختلاف الأنظمة التي تقوم بدراستها وفقاً لنوع الخدمة التي تؤدي.

خامساً الحد الأقصى لعدد العملاء: ويختلف عدد العملاء المسموح به في النظام باختلاف الأنظمة ونوع الخدمة التي تؤدي فمثلاً في إشارات المرور نجد أنه لا يوجد أي قيد على عدد السيارات التي تصل إلى الإشارة وتنتظر لحين بدء الحركة، وبالتالي يمكن افتراض أن العدد المسموح به لا نهائي (∞) في حين أن عدد المقاعد المسموح به للحجز على الطائرة في رحلة ما يكون محدد بعدد المقاعد في الطائرة أي يوجد حد أقصى لعدد العملاء في النظام بعد هذا الحد يرفض النظام استقبال العملاء.

سادساً عدد العملاء في المجتمع: ويأتي العملاء (أو المفردات) من مصدر معين قد يكون عدد مفرداته محدود أو غير محدود فمثلاً السلع التي تصل إلى المجمعات الاستهلاكية تأتي من مصدر محدد عدد مفرداته (حيث الكميات الموجودة بالمخازن يكون عددها محدود) وقد يكون عدد المفردات في المصدر الذي يأتي منه المفردات غير محدود فإذا فرضنا أحد إشارات المرور فإن السيارات تصل إليها بدون أي حد لعددها، فإنه يمكن افتراض أن عدد العملاء (السيارات) المترددة على هذه الإشارة يأتون من مصدر عدد مفرداته غير محدود (لا نهائية)، كذلك مثل عدد الميكروبات في لتر المياه المأخوذة يومياً من إحدى الأنهار لتحليلها.

(٣-٤) الصياغة الرمزية لأنظمة الصفوف

Queueing System Notations

تمكن عالم الرياضيات Kendall سنة ١٩٥٣ من وضع صياغة رمزية للثلاثة خصائص الأولى لنظام الصف السابق تناولها في الفصل السابق (الخصائص ١ ، ٢ ، ٣) فوضع الصياغة (a / b / c) للتعبير عن هذه الخصائص حيث [103, 53, ٤]:

a: تشير إلى التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام أو التوزيع الاحتمالي للفترة الزمنية بين وصوليين متتاليين arrival distribution (or inter arrival)

b: تشير إلى التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة (أو الفترة الزمنية بين خروج عمليتين على التوالي بعد انتهاء خدمتهم service time(or departure time) dist.

c: تشير إلى عدد مراكز الخدمة المتوازية في النظام.

وفي سنة ١٩٦٦ قدم عالم الإحصاء Lee الصياغة الرمزية للثلاثة خصائص الأخرى للنظام (أنظر الفصل السابق الخصائص ٤ ، ٥ ، ٦) على النحو (d / e / f) حيث [103,65]:

d: تشير إلى القاعدة التي على أساسها يتم اختيار العميل من الصف (في حالة وجود انتظار) للدخول للخدمة.

e: تشير إلى الحد الأقصى المتاح لعدد العملاء في النظام (في الخدمة والانتظار).

f: تشير إلى عدد العملاء (أو المفردات) في المجتمع الذي يصل منه العملاء للنظام.

وبالتالي يمكن تحديد خصائص أي نظام للصفوف من خلال خصائصه في الصورة الرمزية على النحو (d / e / f) : (a / b / c).

وعادة تأخذ الرموز a, b, d بعض الأكواد المتعارف عليها وفيما يلي سوف نتناول أهمها.

بالنسبة لـ a, b عادة تستخدم الرموز التالية:

- M:** تشير إلى أن التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء التي تطلب الخدمة (أو عدد العملاء المنتهي خدمتهم) وفقاً لتوزيع بواسون **Poisson** (وفقاً لعملية ماركوف)، وذلك مكافئ أن يكون الفترة الزمنية بين وصولين متتاليين يتبع التوزيع الأسى أو زمن الخدمة وفقاً للتوزيع الأسى أيضاً.
- D:** تشير إلى أن الفترة الزمنية بين وصولين متتاليين أو زمن الخدمة قيم غير عشوائية (يقينية) **deterministic**.
- E_k:** تشير إلى أن أزمنة الخدمة أو الفترة بين وصولين متغير عشوائي يتبع توزيع Erlang أو جاما بمعلمة k .
- GI:** تشير إلى أن وصول العملاء المستقلين إحصائياً (أو الفترات الزمنية بين وصولين متتاليين) تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع **General distribution of independent arrivals**.
- G:** تشير إلى أن أزمنة الخدمة أو الفترات الزمنية بين خروج عمليين على التوالي بعد انتهاء خدمتهم تتبع توزيع عام **General distribution**.

كذلك d عادة تستخدم الأكواد التالية:-

- FCFS:** من يأتي أولاً يخدم أولاً **First Come – First Served**.
- LCFC:** من يأتي أخيراً يخدم أولاً **Last Come – First Served**.
- SIRO:** الدخول للخدمة بأمر عشوائي **Service in Random Order**.
- GD:** مبدأ عام للدخول للخدمة **General Service Discipline**.

مثال (٤-١): حدد خصائص كل نظام من الأنظمة التالية:

$$\text{أ- } (M/M/3) : (FCFS/100/\infty)$$

$$\text{ب- } (D/E_3/5) : (LCFS/\infty/\infty)$$

الحل:

$$\text{أ- بالنسبة للنظام } (M/M/3) : (FCFS/100/\infty)$$

بما أن $a = M$ فهذا يعني أن عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون، كذلك $b = M$ فهذا يعني أن زمن الخدمة وفقاً للتوزيع الأسي، $c = 3$ يعني وجود 3 مراكز خدمة متوازنة ومتكافئة بالنظام، كذلك نجد أن $d = FCFS$ فهذا يعني أن يتم دخول العملاء للخدمة وفقاً من يأتي أولاً يخدم أولاً، كذلك $e = 100$ فهذا يعني أن أقصى عدد ممكن أن يستوعبه النظام لا يزيد عن 100 عميل في الخدمة والانتظار، كذلك بما أن $f = \infty$ فهذا يعني أنه يأتي العملاء من مصدر غير محدود infinite عدد العملاء به.

$$\text{ب- } (D/E_3/5) : (LCFS/\infty/\infty)$$

بما أن $a = D$ فهذا يعني أن العملاء يصلون إلى النظام في مواعيد محددة يقينية، $b = E_3$ فإن زمن الخدمة يتبع توزيع Erlang أو جاما بمعلمة 3، كذلك $c = 5$ فإن عدد مراكز الخدمة المتوازنة يساوي 5 مراكز متكافئة، $d = LCFS$ فهذا يعني أن قاعدة دخول العميل للخدمة وفقاً من يأتي أخيراً يخدم أولاً، $e = \infty$ فهذا يعني إن العدد الأقصى للعملاء في النظام والخدمة غير محدد (∞)، كذلك $f = \infty$ فهذا يعني أنه يأتي العملاء من مصدر غير محدود (∞) أيضاً.

وبصفة عامة يمكن تقسيم أنظمة الصفوف وفقاً لسلوك النظام system's behavior (أي خصائص تشغيل النظام operating characteristics) إلى حالتين هما [93, 80]:

١- الحالة الأولى: وتسمى الحالة غير المستقرة (أو المتقلبة) **transient state** وهي تشتمل على الأنظمة التي يتغير فيها سلوك النظام وفقاً للزمن أو المكان أو الأثنين.

٢- الحالة الثانية: وتسمى الحالة المستقرة (أو الدائمة) **steady state** وهي تشتمل على الأنظمة التي لا يتغير فيها سلوك النظام مع الزمن (أو المكان أو الاثنين). ومن ثم فإنه يشار إلى احتمال وجود n عميل بالنظام في الحالة المستقرة بالرمز P_n أما في الحالة غير المستقرة (المتقلبة) بالرمز $P_n(t)$ حيث يعتمد سلوك النظام على الزمن t في هذه الحالة.

وفي الأبواب (٥)-(١١) سوف تقتصر دراستنا على الأنظمة وفقاً للحالة المستقرة (أو الدائمة) حيث لا يتغير سلوك النظام وفقاً للزمن.

وبالنسبة لمعظم أنظمة الصفوف في الحالة المستقرة **steady state** تتوافر فيها الفروض التالية التي تعتبر بديهيات أساسية **basic axioms** في أنظمة الصفوف التي سوف نتناولها بالتفصيل في الفصول التالية ومن أهم هذه البديهيات - البديهيات التالية [85,93]:

١- إذا اعتبرنا $N(t)$ تشير إلى عدد العملاء الذين يصلون لنظام الخدمة في الفترة $(0, t)$ فإن المتغيرين:

$$\{N(t_{i+1}) - N(t_i)\} , \{N(t_{i+1} + h) - N(t_i + h)\} \quad (4.1)$$

حيث: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ تمثل عدد $(k + 1)$ من النقط زمنية، حيث $i = 0, 1, \dots, k$ تشير إلى فترة زمنية صغيرة جداً بحيث تمثل جزء من الوحدة الزمنية بالنسبة للنظام، $h > 0$ ، فإن المتغيران في (4.1) متغيران مستقلين ولهما نفس التوزيع الاحتمالي **independent and identically distributed**. أو بعبارة أخرى عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام خلال الفترات الزمنية

المتساوية والمختلفة تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي ولا تعتمد على النقط الزمنية k ، بحيث $i = 0,1,2,\dots,k-1$.

٢- احتمال وصول عميل (أو خروج عميل من أداء الخدمة) خلال الفترة h احتمال موجب أي:

$$0 < P_r\{N(h) = 1\} < 1 \quad (4.2)$$

٣- احتمال وصول أكثر من عميل خلال الفترة (h) يساوي صفر أي:

$$P_r\{N(h) \geq 2\} = 0 \quad (4.3)$$

أي تعتبر الفترة h من الصغر بحيث لا يوجد إمكانية وصول أكثر من عميل إلى النظام خلال h .

ووفقاً لهذه الفروض سوف نقدم التوزيعات الاحتمالية لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام arrival dist. في الفصل (٤-٤) ، والتوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم departures dist. بالفصل (٤-٥) ، ثم التوزيع الاحتمالي لأزمنة الخدمة dist. of service time في الفصل (٤-٦) .

(٤-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام

Distribution of Arrivals

يسمى التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون لنظام الخدمة بعملية الميلاد الخام **pure birth process** (حيث مسموح فقط بوصول العملاء للنظام - وغير مسموح بالخروج). فإذا اعتبرنا λ تشير إلى متوسط معدل وصول العملاء للنظام في الوحدة الزمنية، وأن t تشير إلى الزمن، وأن النظام يبدأ التشغيل عند $t = 0$.

وبأستخدام الفروض (البديهيات الأساسية) المقدمة في الفصل السابق لأنظمة الصفوف فإنه يمكن افتراض أن احتمال وصول عميل إلى النظام خلال الفترة h يساوي $\lambda h + O(h^2)$ حيث $O(h^2)$ دالة في h من درجة أكبر من الدرجة الأولى وبالتالي فإن $O(h^2) \rightarrow 0$ أسرع من $h \rightarrow 0$ ، كذلك إذا أشرنا لأحتمال وجود عدد n عميل في النظام في الزمن (t) والزمن $(t+h)$ بالرمز $P_n(t)$ ، $P_n(t+h)$ على الترتيب كذلك في $i = 1, 2, \dots, n$ ، $P_i(0) = 0$ ، $P_0(0) = 1$ فإن [80,78]:

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \lambda h - O(h^2)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + O(h^2)) \quad (4.4)$$

$, n > 0$

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h + O(h^2)) \quad , n = 0 \quad (4.5)$$

وبقسمة طرفي كل معادلة من المعادلتين (4.4), (4.5) على h ثم أخذ نهاية الطرفين عندما $h \rightarrow 0$ نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad , n > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) \quad , n = 0$$

وبما أن الطرف الأيسر في المعادلتين السابقتين يمثل المشتقة الأولى لـ $P_n(t)$ ، $P_0(t)$ على التوالي أي أن:

(٤-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام الباب الرابع: مكونات أنظمة الصفوف

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad , n > 0 \quad (4.6)$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \quad , n = 0 \quad (4.7)$$

وتمثل المعادلتين أعلاه معادلات فروق تفاضلية **difference-differential equations** بحلها نحصل على $P_n(t)$ ، $P_0(t)$ ويمكن إجراء ذلك باستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضي على النحو التالي [65, 80]:

١- بقسمة طرفي المعادلة (4.7) على $P_0(t)$ وإجراء عملية التكامل بالنسبة لـ t نجد أن:

$$\int \frac{P'_0(t)}{P_0(t)} dt = \int -\lambda dt \longrightarrow \ln P_0(t) = -\lambda t + C \longrightarrow$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^C$$

$$e^C = 1 \longrightarrow C = 0 \quad \text{فإن} \quad P_0(t=0) = 1 \quad \text{وبما أن:}$$

حيث C تشير إلى ثابت التكامل. وبالتالي فإن:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (4.8)$$

٢- بالنسبة للمعادلة (4.6) بوضع $n = 1$ نحصل على

$$\begin{aligned} P'_1(t) &= -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) \\ &= -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \longrightarrow \end{aligned}$$

$$P'_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.9)$$

فنجد أن المعادلة (4.9) معادلة فروق تفاضلية من الترتيب الأول ويمكن الحصول على الحل العام لها على النحو التالي [٦, 88]:

(٤-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام الباب الرابع: مكونات أنظمة الصفوف

$$P_1(t) = \frac{1}{e^{\int \lambda dt}} \left[\int \lambda e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt + C \right] \quad (4.10)$$

$$= e^{-\lambda t} [\lambda t + C]$$

وبما أن: $P_1(0) = 0$ بالتالي فإن $C = 0$ ، وبالتعويض بـ $C = 0$ في المعادلة (4.10) نجد أن:

$$P_1(t) = (\lambda t) e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t) e^{-\lambda t}}{1!} \quad (4.11)$$

وبإتباع نفس الإجراء السابق للحصول على $P_n(t)$ وذلك بوضع $n = 2, 3, 4, \dots$ في المعادلة (4.6) وبأستخدام أسلوب الاستنتاج الرياضي وتحت أفترض أن النظام يبدأ التشغيل عند $t = 0$ بالتالي $P_n(0) = 0$ ، $P_0(0) = 1$ فإننا نحصل على $P_n(t)$ على النحو التالي:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

ونجد أن التوزيع الاحتمالي $P_n(t)$ في (4.12) هو توزيع Poisson بتوقع يساوي (λt) ، وبالتالي فإنه وفقاً للفروض في الفصل (٤-٣) فإن التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام يتبع توزيع Poisson.

إثبات آخر: ويمكن الوصول للنتيجة نفسها في (4.12) بأستخدام الدالة المولدة للأحتمالات على النحو التالي:

١- بضرب طرفي المعادلة (4.6) في Z^n ثم أخذ المجموع نجد أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(t) Z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda P_n(t) Z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda P_{n-1}(t) Z^n$$

وبإضافة المعادلة (4.7) نجد أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) Z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda P_n(t) Z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda P_{n-1}(t) Z^n$$

٢- وبما أن:

$$P(Z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) Z^n \quad (4.13)$$

حيث: $P(Z,t)$ تمثل الدالة المولدة للأحتمالات لدالة الأبطال $P_n(t)$ (أنظر تعريف (٢-٢)).

٣- بإجراء التفاضل لطرفي (4.13) نجد أن:

$$P'(Z,t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) Z^n \longrightarrow$$

$$P'(Z,t) = -\lambda P(Z,t) + \lambda Z P(Z,t) \longrightarrow$$

$$\frac{d P(Z,t)}{P(Z,t)} = \lambda (Z-1) dt \quad (4.14)$$

٤- وبحل المعادلة أعلاه نجد أن:

$$P(Z,t) = B e^{\lambda t(Z-1)}$$

ولإيجاد الثابت B ، حيث:

$$P(Z,0) = P_0(0) = 1 \longrightarrow B = 1$$

وبالتالي:

$$P(Z,t) = e^{\lambda t(Z-1)} \quad (4.15)$$

ف نجد أن الدالة في (4.15) هي الدالة المولدة للأحتمالات لتوزيع بواسون بتوقع λt (أنظر

الباب الثاني مثال (٢-١)) وبالتالي فإن:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

(٥-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم

Distribution of Departures

ويسمى التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم في النظام بعملية الوفاة الخام **pure death process** أيضاً، حيث يمثل تيار المخرجات من النظام. وإذا فرضنا وجود N عميل بالنظام في الزمن $t = 0$ (أي عند بدأ تشغيل النظام)، ويفترض مسموح فقط بخدمة العملاء بالنظام وغير مسموح بوصول أي عميل آخر للنظام، كذلك متوسط معدل خروج العملاء من النظام بعدد انتهاء خدمتهم يساوي μ . ووفقاً للفروض (البديهيات الأساسية) في الفصل (٤-٣) فإنه يمكن افتراض أن احتمال خروج عميل بعد انتهاء خدمته يساوي $\mu h + O(h^2)$ كذلك تشير $P_n(t)$ ، إلى احتمال خروج عدد n عميل خلال الفترة (t) ، والفترة $(t+h)$ على الترتيب وبالتالي فإن [13, 24]:

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \mu h - O(h^2)) \quad , \quad n = N \quad (4.16)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \mu h - O(h^2)) + P_{n+1}(t)(\mu h + O(h^2)) \quad (4.17)$$

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1)^* + P_1(t)(1 - \mu h - O(h^2)) \quad (4.18)$$

وبقسمة طرفي المعادلات (4.17)-(4.18) على h وأخذ نهاية الطرفين

عندما $h \rightarrow 0$ نجد أن:

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) \quad , \quad n = N \quad (4.19)$$

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad , \quad 0 < n < N \quad (4.20)$$

$$P'_0(t) = -\mu P_1(t) \quad , \quad n = 0 \quad (4.21)$$

* حيث احتمال عدم خروج أي عميل خلال الفترة h إذا كان لا يوجد أي عميل بالنظام في t مؤكد ويساوي واحد في هذه الحالة.

(٤-٥) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم الباب الرابع: مكونات أنظمة الصفوف

وبحل معادلات الفروق التفاضلية (4.21)-(4.19) بنفس الأسلوب المتبع في الفصل السابق (٤-٤) نجد أن:

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.22)$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N P_n(t), \quad n = 0 \quad (4.23)$$

والتوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهي خدمتهم خلال الفترة (0,t) في (4.22),(4.23) وفقاً للفروض أعلاه يمثل توزيع بواسون المبتور truncated Poisson distribution [57, 55, 74].

(٦-٤) التوزيع الاحتمالي لأزمنة الخدمة

Distribution of Service Times

إذا فرضنا أن دالة كثافة الاحتمال لزمن الخدمة t ، $t > 0$ يرمز لها بالرمز $f(t)$ وفي هذا الفصل سوف نوضح اشتقاق $f(t)$ على النحو التالي تحت الفروض السابق تناولها في الفصل (٣-٤)، ومن الفصل السابق نجد أن احتمال عدم خدمة أي عميل خلال الفترة T يساوي $P_N(T)$ من المعادلة (4.22) نجد أن [103]:

$$P_N(T) = e^{-\mu t} \quad (2.24)$$

وبالتالي فإن احتمال أن يكون زمن الخدمة t أكبر من T هو نفس احتمال عدم خروج أي عميل من النظام خلال الفترة t أو بعبارة أخرى:

$$P_r(t > T) = P_r(t \text{ عميل من النظام في } t) \longrightarrow$$

$$1 - F(T) = P_N(T) = e^{-\mu T} \longrightarrow F(T) = \int_0^T f(t) dt = 1 - e^{-\mu T} \quad (4.25)$$

حيث $F(T)$ دالة التوزيع التراكمية للمتغير t ، وبأخذ تفاضل طرفي المعادلة (4.25) نجد أن:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

ويتضح من (4.26) أن الفترة الزمنية لزمن الخدمة متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي

exponential dist. أيضاً بمعلمة μ أو بتوقع $\frac{1}{\mu}$.

ملحوظة: μ تشير إلى متوسط معدل خدمة العملاء في وحدة الزمن.

Exercises

(٧-٤) تمارينات

(١-٤) فيما يلي بعض الصياغات الرمزية لبعض أنظمة الصفوف التي تصف خصائص هذه الأنظمة، عرف النظام المناظر لكل صياغة مع توضيح خصائصه مع إعطاء مثال تطبيقي له.

$$١ - (M/M/10) : (FCFS/\infty/\infty)$$

$$٢ - (M/E_3/3) : (FCFS/N/\infty)$$

$$٣ - (GI/M/7) : (LCFS/\infty/\infty)$$

$$٤ - (G/G/1) : (SIRO/\infty/\infty)$$

$$٥ - (M/D/2) : (FCFS/100/\infty)$$

$$٦ - (E_5/D/1) : (FCFS/10/20)$$

(٢-٤) أعتبر أحد مراكز الخدمة يصل إليه العملاء وفقاً لتوزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 3$ في وحدة الزمن. وبافتراض أن النظام خالي من العملاء عند بدأ العمل $t = 0$.

١- أوجد المعادلات التي تصف النظام.

٢- أوجد احتمال وجود 5 عملاء عند $t = 2$.

٣- أوجد احتمال وجود 20 عميل في النظام في $t = 30$ بشرط وجود عدد 15 عميل في $t = 20$.

(٣-٤) أعتبر عملية الميلاد الخام pure birth process حيث يوجد عدد m عميل عند بدأ النظام، أي عند $t = 0$.

١- اشتق المعادلات التي تصف النظام مع إثبات أن:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!}, \quad n = m, m+1, m+2, \dots$$

بأستخدام: أ- أسلوب الأستنتاج الرياضي.

ب- أسلوب الدالة المولدة للأحتمالات.

(٤-٤) مخبز يقدم 20 ألف وحدة في اليوم للبيع، بحيث يتم البيع بمعدل $\mu = 1.5$ ألف

في الساعة. أعتبر عملية البيع في اليوم عملية وفاة خام pure death process.

١- أشتق المعادلات التي تصف النظام.

٢- أوجد الأحتمالات التالية:

$$P_4(t=3), \quad P_{15}(t=5), \quad P_{15}(t=10)$$

٣- أوجد عدد الوحدات المتوقع بيعه بعد ساعة واحدة.

٤- أوجد عدد الوحدات المتوقع بيعه بعد 10 ساعات.

(٤-٥) يستقبل أحد المزارات الأثرية الزوار بمعدل متوسط 20 زائر في الساعة، بحيث يبدأ

في الاستقبال للزائرين في $t = 0$. أعتبر عملية زيارة الأثر عملية ميلاد خام.

١- أشتق المعادلات التي تصف النظام.

٢- أوجد التوزيع الأحمالي لعدد الزائرين في الأثر $P_n(t)$.

٣- أوجد: $P_{10}(t=5), P_{100}(t=5), P_{150}(t=5)$.

الباب الخامس

بعض نماذج ماركوف للصفوف

Some Markovian Queueing Models

Introduction	(١-٥) مقدمة
	(٢-٥) نموذج مركز خدمة واحد
(M/M/1):(FCFS/∞/∞) Model	
	(٣-٥) نموذج C من مراكز الخدمة المتوازية
(M/M/C):(GD/∞/∞) Model	
	(٤-٥) نموذج الرفض ومركز خدمة واحد
(M/M/1):(FCFS/N/∞) Model	
	(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية
(M/M/C):(GD/N/∞) Model	
Using TORA Package	(٦-٥) استخدام حزمة TORA
Exercises	(٧-٥) تمارينات

(١-٥) مقدمة

Introduction

في هذا الباب نقدم نماذج الصفوف لبعض الأنظمة البسيطة المسماة بـ "أنظمة ماركوف للصفوف". وترجع هذه التسمية إلى أن عملية وصول العملاء للنظام وعملية الخدمة في كل مركز خدم تمثل عملية ماركوف (أنظر الفصل (٣-٦)) كذلك تسمى أيضاً بنماذج بواسون، نظراً لأن عملية وصول العملاء للنظام (عدد العملاء تيار الدخول) تصاغ في شكل توزيع بواسون كذلك عملية خروج العملاء بعد تأدية الخدمة لكل منهم (عدد العملاء المنتهي خدمتهم - تيار المخرجات) تصاغ في شكل توزيع بواسون أيضاً.

وبالنسبة لكل نظام من الأنظمة المقدمة يتم اشتقاق التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام أو في الصف في حالة الاستقرار (الحالة الدائمة steady state) أي في وضع الاستقرار، ثم اشتقاق مؤشرات كفاءة النظام مثل عدد العملاء المتوقع في النظام، عدد العملاء المتوقع في الإنتظار، الخ. هذا بالإضافة إلى تقديم عدد من النماذج كتطبيقات لبعض الأنظمة العملية.

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد حزم برامج جاهزة مثل TORA يمكن استخدامها في حساب الاحتمالات المختلفة لعدد العملاء في النظام بالنسبة للنماذج المقدمة، كذلك بعض أهم مؤشرات كفاءة النظام مع إتاحة وجود عدد من السيناريوهات المختلفة.

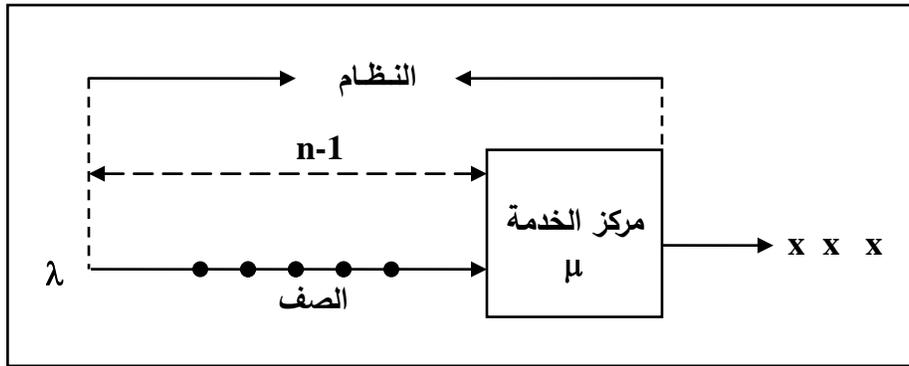
وفي الفصل (٥-٦) نوضح استخدام حزمة TORA من خلال عرض بعض الأمثلة التطبيقية،

هذا بالإضافة إلى تقديم مجموعة من التمرينات المتنوعة.

(٢-٥) نموذج مركز خدمة واحد (M/M/1):(FCFS/∞/∞) Model

ويسمى هذا النموذج أيضاً بنموذج الميلاد والوفاة معاً. والنموذج (M/M/1):(FCFS/∞/∞) هو عبارة عن التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في نظام الخدمة (M/M/1):(FCFS/∞/∞) في وضع الأستقرار (الحالة الدائمة Steady State). فإذا رمزنا لاحتمال وجود n عميل في النظام بالرمز P_n حيث يصل العملاء للنظام وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ ، وزمن الخدمة متغير عشوائي وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu$ والشكل التالي يوضح النظام محل الدراسة (أنظر الفصل (٣-٤)). وفيما يلي سوف نوضح أشتقاق النموذج من خلال النظرية التالية.

شكل (١-٥): يوضح نظام الصف (M/M/1):(FCFS/∞/∞)



فإذا فرضنا أن $P_n(t)$ ، $P_n(t+h)$ تشير إلى احتمال وجود n عميل بالنظام خلال الفترة (0,t) ، والفترة (0,t+h) على الترتيب، ومتوسط معدل وصول للعملاء يساوي λ عميل ومعدل متوسط للخدمة يساوي μ عميل، كذلك متوسط معدل الوصول λ أقل من معدل الخدمة μ أو بعبارة أخرى $\lambda/\mu < 1$.

نظرية (١-٥): تحت الفروض السابق تناولها في الفصل (٧-٣) وخصائص النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞) في الفصل (٣-٤) فإن:

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad 0 < \rho < 1 \quad (5.1)$$

الإثبات: يوجد طرق متعددة مختلفة لإثبات النظرية، وفي هذا الفصل سوف نقدم طريقتين للإثبات بالتفصيل نظراً لاستخدامنا نفس الطرق في بعض الإثباتات في الفصول التالية في هذا الباب، كذلك في الأبواب التالية.

الطريقة الأولى: باستخدام الاستنتاج الرياضي
mathematical induction

إذا اعتبرنا احتمال وصول عميل خلال الفترة h يساوي $\lambda h + O(h^2)$ كذلك احتمال خدمة عميل خلال الفترة h يساوي $\mu h + O(h^2)$ وبالتالي فإن [93,85,82]:

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \lambda h - \mu h - O(h^2)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + O(h^2)) + P_{n+1}(t)(\mu h + O(h^2)) \quad , \quad n > 0 \quad (5.2)$$

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h - O(h^2)) + P_1(t)(\mu h + O(h^2)) \quad , \quad n = 0 \quad (5.3)$$

حيث $O(h^2)$ دالة في h من الدرجات الثانية فأكثر، وبقسمة طرفي المعادلتين أعلاه على h ثم أخذ نهاية الطرفين عندما $h \rightarrow 0$ نحصل على المعادلات التفاضلية التالية:

$$P'_n(t) = -(\lambda + \mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad , \quad n > 0 \quad (5.4)$$

$$P'_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \quad , \quad n = 0 \quad (5.5)$$

والمعادلتين (5.4), (5.5) معادلات فروق تفاضلية من الدرجة الأولى [٦]، وفي حالة الاستقرار (الحالة الدائمة للنظام (Steady State) أي عندما التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء n لا يعتمد على الزمن t ، وبالتالي فإنه عندما $t \rightarrow \infty$ نجد أن:

$$P_n(t) \rightarrow P_n \quad , \quad P'_n(t) \rightarrow 0$$

بحيث $n = 0, 1, 2, \dots$. وفي هذه الحالة تصبح المعادلتين (5.4), (5.5) على النحو التالي:

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0 \quad , \quad n > 0 \quad (5.6)$$

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \quad , \quad n = 0 \quad (5.7)$$

ومن المعادلة (5.7) نجد أن:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (5.8)$$

وبالتعويض في المعادلة (5.6) عند $n = 1, 2, \dots$ وأستخدام أسلوب الاستنتاج الرياضي

نجد أن $P_n = \rho^n P_0$ وبما أن $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ بالتالي فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \longrightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \longrightarrow P_0 = (1 - \rho) \quad (5.9)$$

ويصبح النموذج على النحو التالي:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

الطريقة الثانية: بأستخدام الدالة المولدة للأحتمالات

من معادلات الاستقرار في (5.6), (5.7) يمكن إعادة كتابتها على النحو:

$$P_{n+1} = (1 + \rho) P_n - \rho P_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \quad (5.10)$$

$$P_1 = \rho P_0 \quad (5.11)$$

بضرب طرفي المعادلة (5.10) في Z^n نجد أن:

$$P_{n+1} Z^n = (\rho + 1) P_n Z^n - \rho P_{n-1} Z^n \longrightarrow$$

$$Z^{-1} P_{n+1} Z^{n+1} = (\rho + 1) P_n Z^n - \rho Z P_{n-1} Z^{n-1}$$

وبأجراء عملية المجموع على طرفين المعادلة أعلاه نجد أن:

$$Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} Z^{n+1} = (\rho + 1) \sum_{n=1}^{\infty} P_n Z^n - \rho Z \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^{n-1} \longrightarrow$$

$$Z^{-1} [P(Z) - P_1 Z - P_0] = (\rho + 1) [P(Z) - P_0] - \rho Z P(Z) \quad (5.12)$$

بالتعويض في (5.12) نجد أن: $P_1 = \rho P_0$

$$Z^{-1} [P(Z) - (\rho Z + 1) P_0] = (\rho + 1) [P(Z) - P_0] - \rho Z P(Z) \longrightarrow$$

$$P(Z) = \frac{P_0}{1 - \rho Z} \quad (5.13)$$

وبما أن:

$$P(Z=1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (5.14)$$

بوضع $Z=1$ في المعادلة (5.13) ثم بالتعويض بالطرف الأيمن في المعادلة (5.14) نجد أن:

$$P(Z=1) = 1 = \frac{P_0}{1 - \rho} \longrightarrow P_0 = (1 - \rho) \quad (5.15)$$

وبالتعويض بـ P_0 في (5.13) نجد أن:

$$P(Z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho Z}, \quad 0 < \rho < 1, \quad |Z| \leq 1 \quad (5.16)$$

وبما أن $\frac{1}{1 - \rho Z}$ يمثل مجموع متوالية هندسية لا نهائية بالتالي فإن:

$$\frac{1}{1 - \rho Z} = 1 + \rho Z + (\rho Z)^2 + (\rho Z)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho Z)^n \longrightarrow$$

$$P(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n Z^n \quad (5.17)$$

وبما أن معامل Z^n هو P_n ، بالتالي فإن:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n, \quad n \geq 0$$

وباستخدام النموذج (5.9) يمكن إيجاد مقاييس كفاءة النظام على النحو التالي:

إذا رمزنا إلى عدد العملاء المتوقع في النظام وفي الانتظار (في الصف) بالرمز L_q ، L_s على الترتيب فنجد أن:

$$L_s = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (5.18)$$

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (5.19)$$

كذلك إذا فرضنا أن W_q ، W_s تشير إلى زمن الانتظار المتوقع للعميل في النظام، والزمن المتوقع للانتظار في الصف على الترتيب.

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} \quad (5.20)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} \quad (5.21)$$

مثال (١-٥): في إحدى محطات البنزين تصل السيارات للمحطة وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل متوسط 5 سيارات في الساعة. وكان متوسط زمن خدمة السيارة بالمحطة $1/6$ ساعة (أو بعبارة أخرى متوسط عدد السيارات التي يتم خدمتهم في الساعة 6 سيارات)، حيث يمثل زمن خدمة السيارة متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي، والمطلوب:

- ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات في المحطة في الساعة،
- ٢- أوجد العدد المتوقع للسيارات في المحطة خلال يوم عمل (اليوم ١٦ ساعة عمل)،
- ٣- أحسب الزمن المتوقع لوجود السيارة في المحطة،

٤- أحسب الزمن المتوقع لانتظار السيارة بالصف قبل الخدمة.

الحل: من المثال يتضح أن نظام الخدمة هو $(M/M/1):(FCFS/\infty/\infty)$ حيث λ

تساوي 5 سيارات في الساعة، μ تساوي 6 سيارات في الساعة أيضاً.

وبالتالي فإن:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$$

فإذا فرضنا أن P_n تشير إلى احتمال وجود عدد السيارات n في المحطة في الخدمة والانتظار فإن:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n = \left(1 - \frac{5}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وبالتالي فإن عدد السيارات المتوقع وجودهم في المحطة في الساعة يساوي L_s حيث:

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{5/6}{1 - 5/6} = 5 \text{ سيارات}$$

وبالتالي عدد السيارات المتوقع في النظام في اليوم عبارة عن L_s مضروب في 16 ساعة:

$$= L_s \times 16 = 80 \text{ سيارة}$$

٢- الزمن المتوقع لوجود السيارة بالمحطة في الخدمة والانتظار يساوي W_s حيث:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5}{5} = 1 \text{ ساعة}$$

٣- العدد المتوقع للسيارات في الانتظار يساوي L_q حيث:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{25/36}{1-5/6} = \frac{25}{6} \approx 4 \text{ سيارة}$$

وبالتالي فإن الزمن المتوقع لانتظار السيارة في المحطة قبل بدأ الخدمة يساوي W_q حيث:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho)} = \frac{5}{6} = 0.83 \text{ ساعة} = 50 \text{ دقيقة}$$

(٣-٥) نموذج C من مراكز الخدمة المتوازية

(M/M/C):(GD/∞/∞) Model

إذا اعتبرنا نظام الصف (M/M/C):(GD/∞/∞) كما هو موضح بشكل (١-٥)، حيث يصل العملاء للنظام وفقاً لتوزيع بواسون بمعلمة λ وزمن الخدمة في كل مركز متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع يساوي $1/\mu$ (أنظر الفصل (٤-٢))، حيث يوجد عدد C من مراكز الخدمة المتكافئة والمتوازنة، ونظام الدخول للخدمة نظام عام general service discipline بمعنى قد يكون وصول العملاء للخدمة في الصف في أوقات مختلفة متتالية ولكن يتم دخولهم للخدمة في نفس الوقت لوجود أكثر من مركز غير مشغول، كذلك عدد العملاء في النظام غير محدد (∞) وعدد المفردات في المصدر عدد لا نهائي ∞ أيضاً.

وهنا في حالة الأستقرار (الحالة الدائمة للنظام Steady State)، سوف نوجد التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام P_n ، بنفس الأسلوب المتبع في الفصل السابق.

نظرية (٢-٥): إذا اعتبرنا النظام (M/M/C):(GD/∞/∞) فإن:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!}\right) P_0 & n > c \end{cases} \quad (5.22)$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{\rho}{c} < 1 \quad (5.23)$$

الإثبات:

$$P'_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t), \quad n = 0 \quad (5.24)$$

$$P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) P_n(t) + (n+1) P_{n+1}(t) , 0 < n < c \quad (5.25)$$

$$P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + c\mu) P_n(t) + c\mu P_{n+1}(t) , n \geq c \quad (5.26)$$

وفي الحالة الدائمة Steady State حيث:

$$P_n(t) \rightarrow P_n \text{ وبالتالي } P'_n(t) \rightarrow 0$$

نجد أن:

$$-\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = 0 , n = 0 \quad (5.27)$$

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu) P_n + (n+1)\mu P_{n+1} = 0 , 0 < n < c \quad (5.28)$$

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + c\mu) P_n + c\mu P_{n+1} = 0 , n \geq c \quad (5.29)$$

وبأستخدام أسلوب الاستنتاج الرياضي أيضاً نحصل على P_n على النحو التالي:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0 & n > c \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1} , \rho = \frac{\lambda}{\mu} , \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{\rho}{c} < 1$$

ملحوظة: في حالة $c=1$ نجد أن النموذج (5.22),(5.23) مكافئ للنموذج في (5.1) وبالنسبة لهذا النظام نجد أن:

١- العدد المتوقع للعملاء في الصف L_q حيث:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0 \\ &= \left(\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \right) P_0 = \left(\frac{c\rho}{(c-\rho)^2} \right) P_c \end{aligned} \quad (5.30)$$

٢- العدد المتوقع للعملاء في النظام L_s حيث:

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = L_q + \rho \quad (5.31)$$

٣- الزمن المتوقع للعميل في الصف W_q حيث:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (5.32)$$

٤- الزمن المتوقع للعميل في النظام W_s حيث:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (5.33)$$

ملحوظة: بوضع $c = 1$ في (5.33)-(5.30) نحصل على نفس المؤشرات في (5.21)-
(5.18)

مثال (٢-٥): في أحد محلات السوبر ماركت وجد أن العملاء يصلون إلى محصلي المبالغ للمشتريات وفقاً لتوزيع بواسون. فإذا كانت الفترة المتوقعة بين وصول عمليين على التوالي للمحصل تساوي 6 دقائق (حيث يوجد صف إنتظار واحد للعملاء)، والزمن الذي يستغرقه العميل لدفع المبلغ المطلوب يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع 20 دقيقة.

فإذا كانت تكلفة الساعة الواحدة للمحصل 50 جنيهاً والتكلفة المتوقعة لانتظار العميل الواحد في الصف (لأنها تعتبر مؤشر فقد عملاء) تقدر بـ 100 جنيه. ويرغب صاحب السوبر ماركت في تحديد عدد المحصلين الذي يجب وجوده في السوبر ماركت بحيث تكون التكلفة الكلية [تكلفة المحصلين + تكلفة انتظار العملاء] أقل ما يمكن.

الحل: يتطلب حساب التكلفة الكلية المتوقعة، حساب تكلفة انتظار العملاء في الساعة وذلك يمكن الحصول عليه بضرب طول الصف المتوقع L_q في الزمن المتوقع لانتظار العميل W_q ، حيث يعتبر النظام نظام $(M/M/C):(\infty/\infty)$.

ومن المثال نجد أن:

$$\frac{1}{\lambda} = 6 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{6} = 0.16667 \text{ عميل في الثانية}$$

$$\frac{1}{\mu} = 20 \longrightarrow \mu = 0.05 \text{ عميل في الثانية}$$

وبما أن $\frac{\lambda}{\mu c} < 1$ بالتالي فإن:

$$\frac{\lambda}{\mu c} = \frac{1/6}{(1/20)c} = \frac{20}{6c} < 1 \longrightarrow c > 3.3 \longrightarrow c > 3$$

وهذا يعني أن عدد المحصلين يجب أن يزيد عن 3 محصلين.

وبالتالي لتحديد الزمن المتوقع لانتظار العميل W_q وطول الطابور L_q نبدأ بعدد 4 مراكز خدمة. والجدول التالي يوضح حساب التكلفة الكلية المتوقعة عندما $c = 4, 5, 6$ حيث:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{(3.334)^n}{n!} \right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{(3.334)^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0 & n > c \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(3.334)^n}{n!} + \frac{(3.334)^c}{c! \left(1 - \frac{3.334}{c} \right)} \right]^{-1}$$

$$L_q = \left(\frac{c(3.334)}{(c - 3.334)^2} \right) P_c$$

$$L_s = L_q + \rho = \left(\frac{c(3.334)}{(c-3.334)^2} \right) P_c + (3.334)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \text{ دقيقة}$$

والجدول التالي يوضح التكاليف الكلية عند $c = 4,5,6,7$ ومن الجدول يتضح أن أقل تكلفة تكون عند وجود 5 محصلين.

عدد المحصلين	P_0	L_s	L_q	W_q	التكلفة الكلية = تكلفة المحصلين + تكلفة إنتظار العملاء
4	0.021	6.581	3.247	19.482	$4(50)+100(3.247)=524.7$
5	0.032	3.995	0.661	3.963	$5(50)+100(0.661)=316.1 \leftarrow$
6	0.035	3.523	0.189	1.131	$6(50)+100(0.189)=318.9$
7	0.0361	3.397	0.063	0.376	$7(50)+100(0.063)=356.3$

من الجدول يتضح أن أقل تكلفة عندما $c = 5$.

ملحوظة: يمكن الحصول على العدد الأمثل لـ c باستخدام أحد أساليب البرمجة الرياضية كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الباب (١١).

(٤-٥) نموذج الرفض ومركز خدمة واحد

(M/M/1):(FCFS/N/∞) Model

إذا أعتبر النموذج (M/M/1):(FCFS/∞/∞) في الفصل (٢-٥) بأستثناء أن أقصى عدد للعملاء في النظام يساوي N (في الخدمة والانتظار) بدلاً من ∞، وبالتالي أقصى عدد في الصف يساوي (N - 1) Maximum Queue Length وهذا يؤدي إلى رفض خدمة أي عميل في حالة وجود عدد N بالنظام. لذلك أحياناً تسمى النماذج التي يوجد بها عدد محدد من أماكن الانتظار بأنظمة الرفض rejected systems ومن أمثلة هذه الأنظمة المطاعم التي تقدم وجبات داخل المطعم، العيادات الطبية، خدمة العملاء بالبنوك، حجز تذاكر الطائرات..... الخ.

نظرية (٣-٥): إذا أعتبرنا النظام (M/M/1):(FCFS/N/∞) فإن:

$$P_n = \left[\frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{N+1})} \right] \rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.31)$$

الإثبات: بنفس الأسلوب السابق أتباعه في الفصل (٢-٥) يمكن الحصول على المعادلات التفاضلية في الحالة الدائمة Steady State حيث $P'_n(t) = 0$ على النحو التالي:

$$-\rho P_0 + P_1 = 0, \quad n = 0 \quad (5.32)$$

$$-(1+\rho)P_n + P_{n+1} + \rho P_{n-1} = 0, \quad 0 < n < N \quad (5.33)$$

$$-P_N + \rho P_{N-1} = 0, \quad n = N \quad (5.34)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{حيث:}$$

وبحل معادلات الفروق في (5.34)-(5.32) نحصل على:

$$P_n = \left[\frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{N+1})} \right] \rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

وفي هذا النظام نجد أن متوسط المعدل الفعلي لوصول العملاء إلى النظام **effective arrival rate** وسوف نشير له بالرمز λ_{eff} ، حيث λ_{eff} على النحو:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N) \quad (5.35)$$

ويصبح احتمال رفض خدمة عميل يساوي P_N .

ومما هو جدير بالذكر أن احتمال رفض خدمة عميل يمثل احتمال فقد إيرادات كان ممكن تحقيقها من خدمة العملاء الذين يتم رفض خدمتهم.

وفي هذه الحالة يكون العدد المتوقع في النظام L_s على النحو التالي:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho[1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \quad (5.36)$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = L_s - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu} \quad (5.37)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}} \quad (5.38)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{eff}}} = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (5.39)$$

مثال (٥-٣): في أحد المراكز الطبية للعلاج بالأشعاع حيث يوجد جهاز واحد فقط يستخدم لمريض واحد في نفس الوقت، ويصل المرضى للمركز وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل $\lambda = 9$ في يوم العمل وزمن خدمة المريض على الجهاز متغير يتبع التوزيع الأسّي بتوقع

$1/\mu = 1/10$ يوم عمل، فإذا كان أقصى عدد من العملاء الممكن أن يستقبلها المركز 10 مريض في اليوم.

المطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام.

٢- أوجد احتمال رفض خدمة مريض، ثم أوجد المعدل الفعلي لوصول المرضى.

٣- أوجد زمن إنتظار المريض المتوقع في الإنتظار.

الحل: ١- بما أن $\lambda = 9$ ، $\mu = 10$ ، $N = 10$ بالتالي $\rho = 0.9$ ، وبالتالي:

$$P_n = \left[\frac{(0.1)}{0.6862} \right] (0.9)^n = (0.14573) (0.9)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

٢- احتمال رفض خدمة عميل يساوي P_{10} حيث:

$$P_{10} = (0.14573) (0.9)^{10} = 0.05081$$

وبالتالي المعدل الفعلي لوصول λ_{eff} بحيث:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_{10}) = 9(1 - 0.0508) = 8.542 \text{ مريض}$$

٣- لحساب الزمن المتوقع لإنتظار العميل W_q نحسب أولاً L_s ثم L_q على النحو التالي:

$$L_s = \frac{0.9[1 - (11)(0.9)^{10} + 10(0.9)^{11}]}{(1 - 0.9)[1 - (0.9)^{11}]} = 3.96944 \approx 4 \text{ مريض}$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda(1 - P_N)}{\mu} = 3.11517 \approx 3 \text{ مريض}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}} = 0.3644 \text{ يوم عمل}$$

(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية

(M/M/C):(GD/N/∞) Model

إذا اعتبرنا نظام الخدمة (M/M/C):(GD/∞/∞) ولكن إذا فرضنا أن عدد العملاء المسموح به في النظام يساوي N أو بعبارة أخرى عدد أماكن الإنتظار في النظام يساوي (N - c) فقط.

في هذه الحالة يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي في حالة الأستقرار على النحو التالي.

نظرية (٤-٥): إذا فرضنا أن نظام الخدمة (M/M/C):(GD/N/∞) فإن:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & , 0 \leq n \leq c \\ \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} P_0 & , c \leq n \leq N \end{cases} \quad (5.40)$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^N \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \right]^{-1} , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} , \quad \frac{\rho}{c} < 1$$

الإثبات: في الحالة الدائمة (وضع الأستقرار) تكون المعادلات التفاضلية على النحو التالي:

$$\left. \begin{aligned} \mu P_1 - \lambda P_0 &= 0 & , n=0 \\ (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - (n\mu + \lambda) P_n &= 0 & , 0 < n < c \\ c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} - (c\mu + \lambda) P_n &= 0 & , c \leq n < N \\ \lambda P_{N-1} - c\mu P_N &= 0 & , n=N \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

وبحل المعادلات التفاضلية أعلاه بنفس الأسلوب المستخدم في الفصول السابقة نجد أن التوزيع الاحتمالي P_n كما هو في (5.40).

(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية الباب الخامس: بعض نماذج ماركوف للصفوف

وباستخدام التوزيع الاحتمالي أعلاه يمكن تحديد مؤشرات كفاءة النظام على النحو التالي:

$$L_q = \sum_{n=c+1}^N (n-c)P_n$$

$$= P_0 \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \right\} \quad (5.42)$$

إذا فرضنا أن \bar{c} هي عبارة عن العدد المتوقع لمراكز الخدمة غير العاملة (الخالية

من العملاء) expected number of idle servers حيث

$$\bar{c} = \sum_{n=0}^c (c-n)P_n \quad (5.43)$$

كذلك العدد المتوقع للعملاء في النظام L_S يمكن إثبات أن:

$$L_S = L_q + (c - \bar{c}) \quad (5.44)$$

ويمكن إثبات أن المعدل الفعال λ_{eff} يمكن أن يأخذ الصياغة التالية:

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_N) = \mu(c - \bar{c}) \quad (5.45)$$

حيث يمثل P_N احتمال الرفض للعملاء.

مثال (٥-٤): في إحدى محطات البنزين يوجد 5 طلمبات متكافئة لضخ البنزين بحيث تصل السيارات إلى المحطة لطلب الخدمة وفقاً لتوزيع بواسون بمعلمة λ فإذا كان معدل وصول السيارات للبنزينة 40 سيارة في الساعة، وزمن الخدمة على أي طلمبة متغير يتبع التوزيع الأسّي بمعلمة μ ، بحيث معدل خدمة العملاء في الساعة على الطلمبة الواحدة 10 سيارات في الساعة، فإذا كان أقصى عدد للسيارات في الخدمة والانتظار تتواجد في المحطة 35 سيارة فقط.

(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية الباب الخامس: بعض نماذج ماركوف للصفوف

المطلوب: (١) حدد نظام الخدمة ثم اوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات في المحطة.

(٢) أوجد معدل الوصول الفعال λ_{eff} .

(٣) أوجد احتمال الرفض P_{35} .

(٤) أوجد العدد المتوقع للسيارات في صف الإنتظار L_q .

(٥) أوجد عدد الطلقات المتوقع وغير مستخدمة \bar{c} .

(٦) أوجد العدد المتوقع للسيارات في المحطة L_S .

الحل: (١) النظام هو (GD/35/∞): (M/M/5)، كذلك

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{10} = 4, \quad c = 5 \longrightarrow \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{4}{5} < 1 \longrightarrow$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{4^n}{n!} P_0 & , \quad 0 \leq n \leq 5 \\ \frac{4^n}{5! (5)^{n-5}} P_0 & , \quad 5 \leq n \leq 35 \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^5 \frac{4^n}{n!} + \sum_{n=6}^{35} \frac{4^n}{5! (5)^{n-5}} \right]^{-1} = 0.01299 \approx 0.013$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_{35}) = 40(0.999) = 39.995 \quad (٢)$$

$$P_{35} = \frac{4^{35}}{5! (5)^{30}} (0.013) = 0.001 \quad (٣)$$

(٤) بالتعويض بـ ρ, c في (5.42) نجد أن:

(٥-٥) نموذج الرفض بعدد C من مراكز الخدمة المتوازية الباب الخامس: بعض نماذج ماركوف للصفوف

$$L_q = (0.01299) \frac{4^6}{4!(5-4)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{30} - 30 \left(\frac{4}{5}\right)^{29} \left(1 - \frac{4}{5}\right) \right\} = 2.2 \approx 2 \text{ سيارة}$$

$$\bar{c} = \sum_{n=0}^c (c-n)P_n = \sum_{n=0}^5 (5-n)P_n \quad (٥)$$

$$= 5P_0 + 4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4$$

$$= P_0 \left\{ 5 + \frac{4}{1!} + 3 \frac{4^2}{2!} + 2 \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} \right\}$$

$$= 0.01299 [5 + 4 + 24 + 21.33 + 10.66] = 0.844 \approx 1$$

وهذا يعني أن عدد الطلبات المتوقعة بدون استخدام تقريباً طلبية واحدة.

$$L_s = L_q + (c - \bar{c}) = 2.2 + (5 - 0.844) = 6.37 \approx 6 \text{ سيارة} \quad (٦)$$

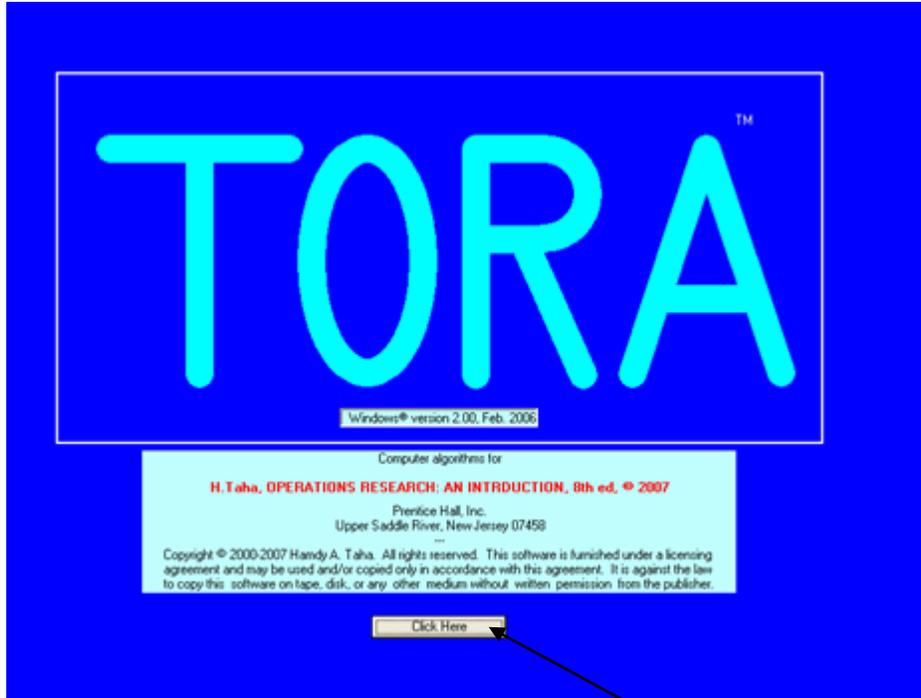
Using TORA Package

(٦-٥) استخدام حزمة TORA

في هذا الفصل سوف نقدم باختصار خطوات استخدام حزمة TORA لحساب التوزيعات الاحتمالية لبعض أنظمة ماركوف المقدمة في الفصول السابقة من هذا الباب مع توضيح ذلك من خلال بعض الأمثلة الرقمية.

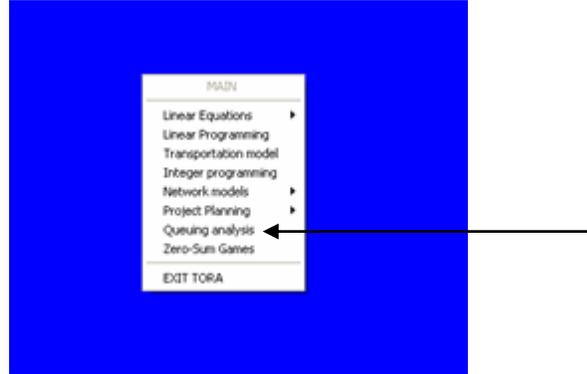
الخطوة ١: ١- أضغط على أيقونة TORA فيتم استدعاء حزمة البرامج بظهور الصفحة في الشكل التالي:

شكل (١-٥)



٢- يتم الضغط على كما هو مشار إليه بالسهم. فيتم ظهور قائمة البرامج كما هو موضح بالشكل (٢-٥).

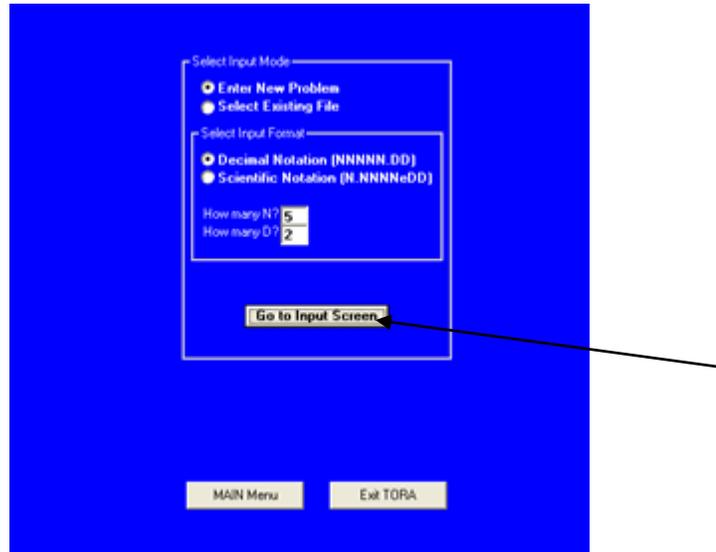
شكل (٢-٥)



الخطوة ٢: ١- من قائمة البرامج يتم الضغط على برنامج تحليل الصفوف
Queueing analysis.

٢- سيتم فتح الصفحة الموضحة بالشكل (٣-٥)

شكل (٣-٥)



٣- يتم الضغط على المستطيل Go to Input Screen المشار إليه بالسهم فتظهر
الصفحة بشكل (٤-٥) في المستطيل في الطرف الشمالي الغربي من الصفحة عند

No. of Scenarios يتم كتابة عدد السيناريوهات المطلوبة ونفترض 1 ثم نضغط على مفتاح tab فتظهر الصفحة في الشكل (٥-٥).

شكل (٥-٤)

The screenshot shows the TORA software interface. At the top, there are two input fields: "Problem Title:" and "No. of Scenarios". The "No. of Scenarios" field contains the value "1". Below these fields is a small instruction: "Enter value then press RETURN or TAB to initialize input grid". At the bottom of the screen, there are three buttons: "SOLVE Menu", "MAIN Menu", and "Exit TORA".

شكل (٥-٥)

The screenshot shows the TORA software interface with the "INPUT TABLE - M/M/c queues" displayed. The table has the following data:

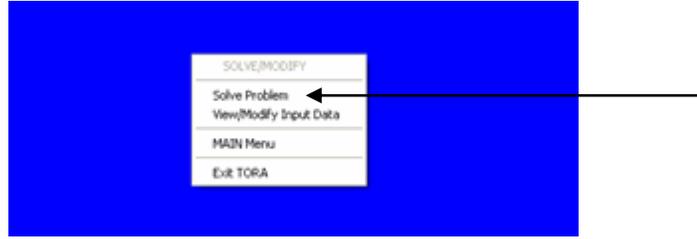
Scenario	Lambda	Ms	Nbr. of Servers	System Limit	Source Limit
1	80.00	12.00	10	infinity	infinity

At the bottom of the screen, there are three buttons: "SOLVE Menu", "MAIN Menu", and "Exit TORA". An arrow points to the "SOLVE Menu" button.

الخطوة ٣: في الجدول الموجود في شكل (٥-٥) من اليسار، يظهر في العمود الأول رقم ال Scenario، وفي العمود الثاني يوضع قيمة λ في العمود بعنوان Lambda ثم نوضع قيمة μ في العمود رقم 3 تحت عنوان MU، وفي العمود الرابع يوضع عدد مراكز الخدمة c، وفي العمود الخامس يوضع الحد الأقصى لعدد العملاء في النظام (إذا كان محدود) وإذا كان غير محدود تترك infinity.

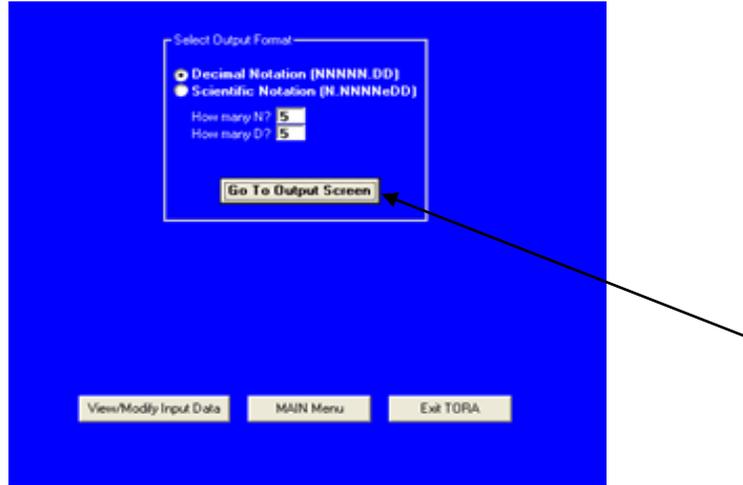
ثم نضغط على المستطيل solve menu أسفل الجدول كما هو مشار إليه بالسهم، فتظهر الصفحة التالية بشكل (٦-٥)

شكل (٦-٥)



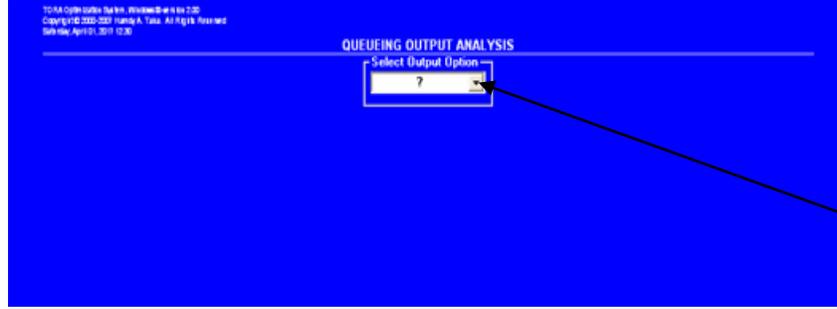
الخطوة ٤: ١- في المستطيل بشكل (٦-٥) يتم الضغط على Solve problem كما هو مشار إليه بالسهم فتظهر الصفحة التالية بشكل (٧-٥).

شكل (٧-٥)



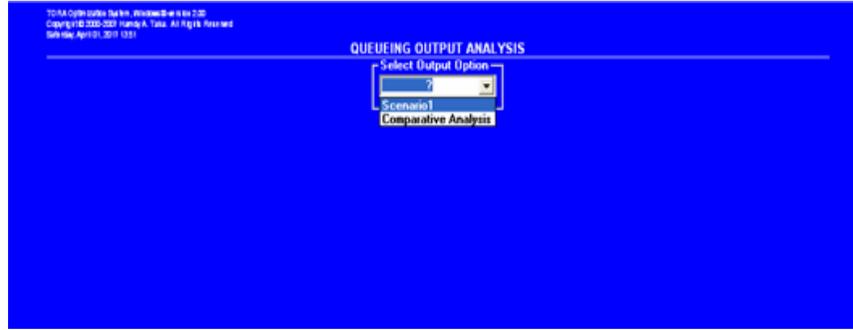
٢- يتم الضغط على المستطيل **Go to Output Screen** كما هو مشار إليه بالسهم فتظهر الصفحة بشكل (٨-٥)

شكل (٨-٥)



٣- يتم الضغط على السهم المشار إليه في مستطيل **select output option** فتظهر الصفحة التالية بشكل (٩-٥)

شكل (٩-٥)



الخطوة 0: ١- في الشكل (٩-٥) إذا تم الضغط على **Scenario** تظهر الصفحة التي بها قيم الاحتمالات P_n وقيم مؤشرات كفاءة النظام أيضاً.

٢- أما إذا تم الضغط على **comparative analysis** في نفس الصفحة فتظهر صفحة جديدة بها النتائج النهائية لجميع السيناريوهات حتى يتم المقارنة بينها

وفيما يلي نقدم بعض الأمثلة التي تم حلها باستخدام الحزمة.

مثال (٥-٥): أعتبر النظام $(M/M/10):(GD/\infty/\infty)$ حيث

$$c = 10 , \mu = 12 , \lambda = 80$$

١- أوجد قيم الأاحتمالات المختلفة P_n ، كذلك مؤشرات كفاءة النظام.

الحل: بأستخدام الحزمة TORA نجد أن الحل كما هو موضح بشكل (٥-١٠).

شكل (٥-١٠)

Scenario 1:(M/M/10):(GD/infinity/infinity)

Lambda = 80.00000 Mu = 12.00000
 L'da eff = 80.00000 Rho:c = 0.66667
 Lx = 7.01583 Lq = 0.34916
 Ws = 0.08770 Wq = 0.00436

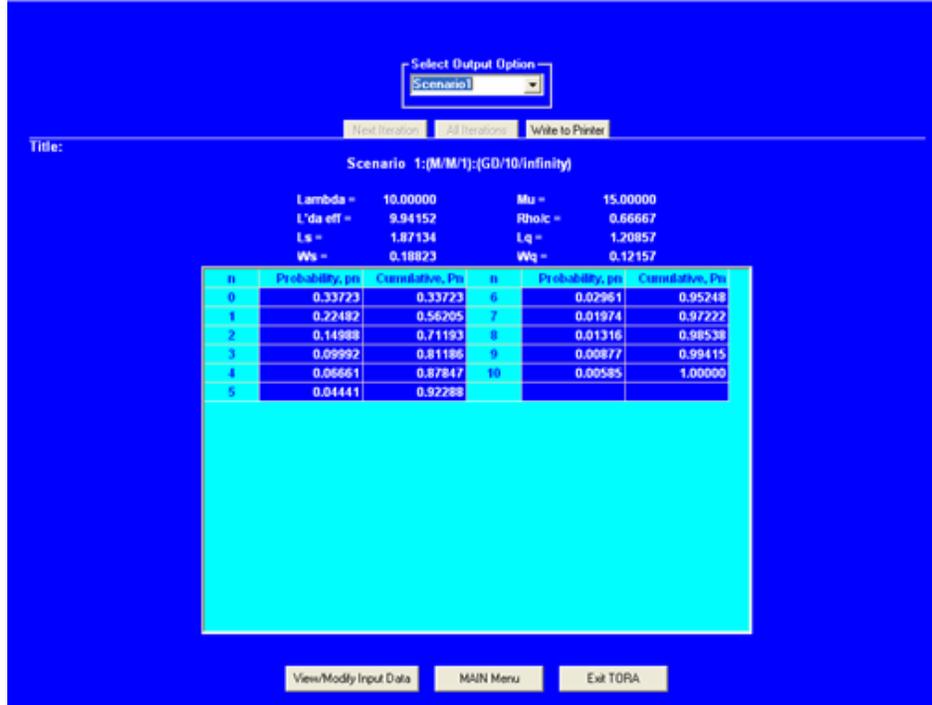
n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.00122	0.00122	16	0.00511	0.98978
1	0.00812	0.00934	17	0.00341	0.99319
2	0.02706	0.03640	18	0.00227	0.99546
3	0.06014	0.09653	19	0.00151	0.99697
4	0.10023	0.19676	20	0.00101	0.99798
5	0.13363	0.33039	21	0.00067	0.99865
6	0.14848	0.47887	22	0.00045	0.99910
7	0.14141	0.62028	23	0.00030	0.99940
8	0.11784	0.73813	24	0.00020	0.99960
9	0.08729	0.82542	25	0.00013	0.99973
10	0.05819	0.88361	26	0.00009	0.99982
11	0.03880	0.92241	27	0.00006	0.99988
12	0.02586	0.94827	28	0.00004	0.99992
13	0.01724	0.96551	29	0.00003	0.99995
14	0.01150	0.97701	30	0.00002	0.99996
15	0.00766	0.98467	31	0.00001	0.99998

مثال (٥-٦): أعتبر النظام $(M/M/1):(FcFs/10/\infty)$ بحيث

$$N = 10 , \mu = 15 , \lambda = 10$$

الحل: الشكل التالي (٥-١١) يوضح الحل.

شكل (١١-٥)



مثال (٧-٥): أعتبر النظام (M/M/3):(GD/15/∞) أعتبر الحالات التالية:

$$N = 15, \quad c = 3, \quad \mu = 2, \quad \lambda = 5 - 1$$

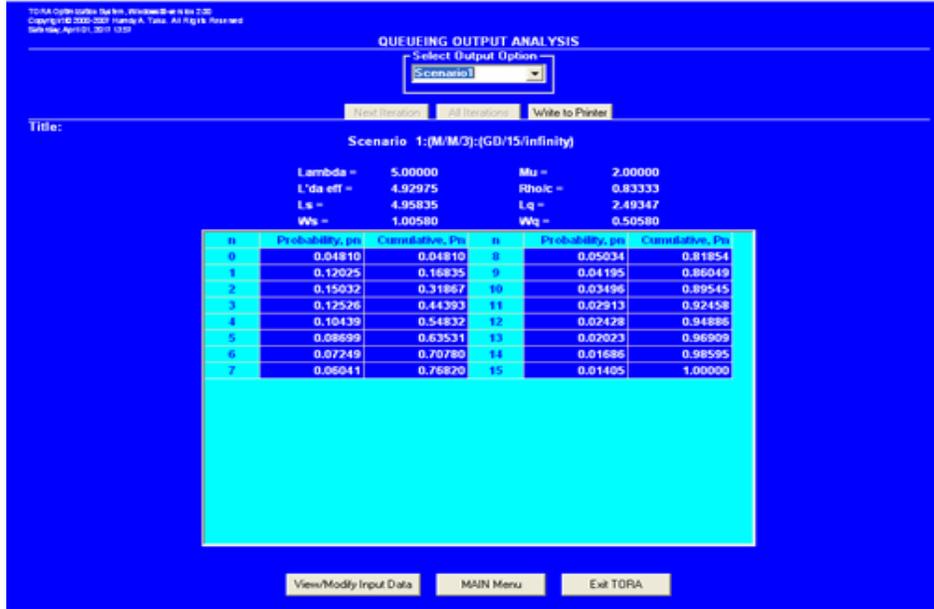
$$N = 15, \quad c = 3, \quad \mu = 3, \quad \lambda = 5 - 2$$

$$N = 15, \quad c = 3, \quad \mu = 4, \quad \lambda = 5 - 3$$

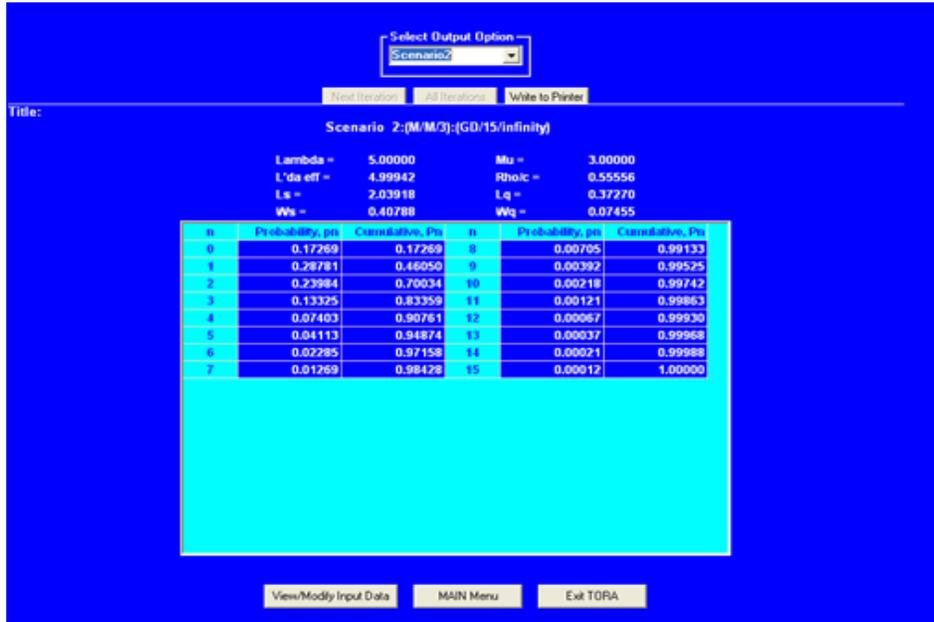
الحل: في هذا المثال لدينا 3 سيناريوهات يتم إدخال البيانات وفي شكل (١٢-٥) يتم عرض السيناريو الأول (الحالة الأولى)، كذلك الشكلين (١٣-٥)، (١٤-٥) للسيناريوهات الثاني والثالث.

هذا بالإضافة إلى الشكل (١٥-٥) يوضح المقارنة بين السيناريوهات الثلاثة.

شكل (٥-١٢)



شكل (٥-١٣)



شكل (٥-١٤)



شكل (٥-١٥)



Exercises

(٧-٥) تمرينات

(١-٥) أعتبر النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞)، أثبت أن:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n, \quad n \geq 0$$

١- باستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضي.

٢- باستخدام الدالة المولدة للأحتمالات.

(٢-٥) أعتبر النظام (M/M/C):(GD/∞/∞)، أثبت أن:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0 & n > c \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

١- باستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضي.

٢- باستخدام الدالة المولدة للأحتمالات.

(٣-٥) أثبت أن زمن انتظار العميل t في الصف بالنسبة للنموذج

(M/M/1):(FCFS/∞/∞) يمثل متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال W(t) حيث:

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \rho & t = 0 \\ \mu \rho (1 - \rho) e^{-(\mu - \lambda)t} & t > 0 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \text{حيث}$$

ثم اوجد توقعه وتباينه.

(٤-٥) في النموذج (FCFS/∞/∞):(M/M/1) إذا فرضنا في حالة وجود n عميل بالنظام، فإن وصول عميل جديد يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون أيضاً بمعلمة λ_n وزمن خدمة عميل بالنظام في حالة وجود عدد n عميل في النظام (في الخدمة والانتظار) متغير يتبع التوزيع الآسي بمعلمة μ_n أثبت أن:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(٥-٥) في التمرين السابق أوجد دالة الاحتمال P_n عندما:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n^\alpha \mu$$

حيث λ, μ, α مقادير ثابتة موجبة.

(٦-٥) في نموذج الانتظار (GD/∞/∞):(M/M/2) إذا كان زمن الخدمة المتوقع يساوي 5 دقائق والفترة الزمنية المتوقعة بين وصولين متتاليين تساوي 8 دقائق.

١- أوجد التوزيع الاحتمالي P_n .

٢- ما هو احتمال انتظار عميل.

٣- ما هو احتمال وجود على الأقل مركز من مراكز الخدمة بدون عملاء.

(٧-٥) بالنسبة لنموذج الانتظار (GD/∞/∞):(M/M/C) أثبت أن:

أ- احتمال انتظار عميل يساوي

$$\left(\frac{\rho}{c-\rho} \right) P_c$$

ب- زمن الانتظار المتوقع للعميل في الصف يساوي

$$1/\mu(c-\rho)$$

(٥-٨) إذا كانت الفترة الزمنية بين وصول سفينتين متتاليتين إلى أحد الموانئ البحرية تمثل متغير عشوائي له التوزيع الآسي السالب بتوقع 3 ساعات. فإذا كان الزمن المطلوب لشحن وتفريغ السفينة يمثل متغير عشوائي أيضاً يتبع التوزيع الآسي بتوقع 12 ساعة للسفينة. ما هو العدد الأمثل للأرصفة التي يجب أن توجد بالميناء للشحن والتفريغ بحيث لا تزيد مدة انتظار السفينة الواحدة داخل الميناء قبل الشحن أو التفريغ 6 ساعات.

الباب السادس

توزيع زمن الانتظار في بعض أنظمة ماركوف

Waiting-Time Distribution In Some Markoving Systems

Introduction	(١-٦) مقدمة
Waiting Time Distribution in (M/M/1):(FCFS/∞/∞)	(٢-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞)
Waiting Time Distribution in (M/M/C):(GD/∞/∞)	(٣-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/C):(GD/∞/∞)
Waiting Time Distribution in (M/M/C):(GD/N/∞)	(٤-٦) توزيع زمن الانتظار في النظام (M/M/C):(GD/N/∞)
Applied	(٥-٦) أمثلة تطبيقية
Exercises	(٦-٦) تمرينات

Introduction

(١-٦) مقدمة

في هذا الباب نقدم اشتقاق التوزيع الاحتمالي لزمن انتظار العميل في الصف أو في النظام بالنسبة لبعض أنظمة ماركوف للصفوف السابق تقديمها في الباب السابق.

والهدف الأساسي من اشتقاق التوزيع الاحتمالي لزمن الانتظار في الصف أو زمن وجود العميل في النظام هو حساب احتمالات الانتظار المختلفة سواء في الصف أو في النظام لأنهما تمثلين أهمية لمتخذ القرار بالنسبة للقائمين بإدارة هذه الأنظمة، كذلك بالنسبة للعملاء، حيث يمثل زمن الانتظار خسارة مباشرة أو غير مباشرة بالنسبة للقائمين على إدارة هذه الأنظمة كذلك بالنسبة للعملاء.

هذا بالإضافة إلى استخدام توزيع زمن الانتظار في الحصول على بعض مؤشرات كفاءة النظام مثل زمن الانتظار المتوقع في الصف أو في النظام.

وفي الباب (١١) سوف نقدم بعض أساليب الأمثلية التي يمكن باستخدامها تحديد كيفية الحصول على أقل زمن انتظار متوقع للعميل في الصف أو الانتظار.

Waiting Time Distribution (٢-٦) توزيع زمن الانتظار

في النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞) in (M/M/1):(FCFS/∞/∞)

إذا اعتبرنا النظام (M/M/1):(FCFS/∞/∞) السابق تعريفه في الفصل (٢-٥)، وإذا أشرنا إلى زمن انتظار العميل رقم (n+1) في صف الانتظار بالرمز τ حيث τ متغير عشوائي يعتمد على نظام الدخول للخدمة service discipline [80]، وبالتالي فإن اشتقاق التوزيع الاحتمالي في هذا الفصل يعتمد على نظام الدخول للخدمة (FCFS).

فإذا أشرنا إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير τ بالرمز $W_q(t)$ حيث:

$$\begin{aligned} W_q(t) &= P_r(\tau \leq t), \quad t \geq 0 \\ &= W_q(0) + W_q(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

حيث أن المتغير τ معرف عند النقطة $t=0$ كمتغير متقطع، وعند $\tau > 0$ كمتغير متصل [41].

فإذا فرضنا أن t_i تمثل زمن خدمة العميل رقم i ، فإن زمن انتظار العميل رقم (n+1) في الصف تكافئ زمن خدمة n عملاء سابقين له في النظام (بشرط وجود عدد n عميل في النظام عند وصول العميل رقم (n+1)) أو بعبارة أخرى:

$$\tau = t_1^* + t_2 + \dots + t_n \quad (6.2)$$

حيث t_i تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع (i.i.d.) هو التوزيع الآسي بمعلمة μ ، وبالتالي فإن τ متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية n ومعلمة μ .

ملحوظة: t_1^* تشير إلى الجزء المتبقي من زمن خدمة العميل الموجود في مركز الخدمة لحظة وصول العميل (n+1)، وبالنسبة لـ t_1^* سوف نعتبرها تتبع التوزيع الآسي بمعلمة μ أيضاً حيث أن نظام الدخول للخدمة (FCFS) [103]، أو بعبارة أخرى:

$$\begin{aligned}
 W_q(\tau \leq t) &= W_q(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P_r [\text{وجود } n \text{ عميل في النظام} \\
 &\quad \text{لحظة وصول العميل رقم } n \text{ | زمن انتهاء خدمته } \leq t] P_n \\
 &= (1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\mu (\mu \tau)^{n-1} e^{-\mu \tau}}{(n-1)!} d\tau \right] (1-\rho) \rho^n \\
 &= (1-\rho) + \rho (1-\rho) \int_0^t \mu e^{-\mu \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \rho \tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \\
 &= (1-\rho) + \rho (1-\rho) \int_0^t \mu e^{-\mu \tau (1-\rho)} d\tau \\
 &= 1 - \rho e^{-\mu (1-\rho)t}, \quad t \geq 0 \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

وإذا أشرنا إلى دالة كثافة احتمال المتغير τ بالرمز $f(\tau)$ فإن:

$$f(\tau) = \frac{\partial W_q(\tau)}{\partial \tau} = \mu \rho (1-\rho) e^{-\mu (1-\rho)\tau}, \quad \tau > 0 \quad (6.4)$$

وبما أن τ متغير متقطع في $\tau = 0$ فإن:

$$P_r(\tau = 0) = 1 - \rho \quad (6.5)$$

وبالتالي فإن توقع زمن انتظار العميل في الصف W_q حيث:

$$\begin{aligned}
 W_q = E(\tau) &= \int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau \mu \rho (1-\rho) e^{-\mu (1-\rho)\tau} d\tau \\
 &= \frac{\rho}{\mu (1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{\mu (1-\rho)} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

ونلاحظ أن W_q في (6.6) هي نفس النتيجة لزمن الانتظار المتوقع للعميل السابق تقديمه

في العلاقة (5.21) بالفصل (٥-٢).

وبما أن زمن انتظار العميل في النظام هو عبارة عن زمن انتظار العميل في الصف

مضاف إليه زمن خدمته في مركز الخدمة، وبالتالي إذا أشرنا إلى زمن وجود العميل في

النظام بالرمز τ^1 فإن:

$$\tau^1 = \tau + t_{n+1} = t_1^* + t_2 + t_3 + \dots + t_{n+1} \quad (6.7)$$

وبالتالي فإن المتغير τ^1 متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية $(n+1)$ ومعلمة μ ،
وبالتالي إذا كانت $W(t)$ تشير إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير τ^1 فإن:

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n [\text{وجود عدد } n \text{ عميل بالنظام عند وصول العميل } (n+1) \mid \text{زمن انتهاء خدمته } (n+1) \text{ العميل} \leq t] P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\mu (\mu \tau^1)^n e^{-\mu \tau^1}}{n!} d\tau^1 \right] (1-\rho) \rho^n \\ &= \mu (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{(\mu \rho \tau^1)^n e^{-\mu \tau^1}}{n!} d\tau^1 \right] \\ &= \mu (1-\rho) \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \rho \tau^1)^n}{n!} \right) e^{-\mu \tau^1} d\tau^1 \\ &= \mu (1-\rho) \int_0^t e^{-\mu (1-\rho) \tau^1} d\tau^1 \\ &= \mu (1-\rho) \left[\frac{e^{-\mu (1-\rho) \tau^1}}{-\mu (1-\rho)} \Big|_0^t \right] \\ &= 1 - e^{-\mu (1-\rho) t}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

وبالتالي إذا كانت $f(\tau^1)$ دالة كثافة الاحتمال للمتغير τ^1 فإن:

$$f(\tau^1) = \mu (1-\rho) e^{-\mu (1-\rho) \tau^1}, \quad \tau^1 > 0$$

وبالتالي فإن الزمن المتوقع للعميل في النظام W_S على النحو:

$$E(\tau^1) = W_S = \int_0^{\infty} \tau^1 f(\tau^1) d\tau^1 = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (6.9)$$

ونلاحظ أن W_S في (6.9) نفس قيمة W_S في العلاقة (5.20) بالفصل (٢-٥).

Waiting Time Distribution (٣-٦) توزيع زمن الانتظار

في النظام (M/M/C):(GD/∞/∞) in (M/M/C):(GD/∞/∞)

في هذا الفصل سوف نقوم بأشتقاق التوزيع الاحتمالي لزمن انتظار العميل في الصف وزمن انتظار العميل في النظام (M/M/C):(GD/∞/∞) السابق تعريفه في الفصل (٣-٥) وبنفس الأسلوب المستخدم في الفصل السابق.

إذا فرضنا أن $W_q(t)$ تشير إلى دالة التوزيع التراكمية لزمن انتظار العميل في الصف τ فإن:

$$W_q(t) = P_r(\tau \leq t)$$

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{n=C}^{\infty} P_r \left\{ \begin{array}{l} \text{وجود } n \text{ عميل في} \\ \text{النظام عند وصول} \\ \text{العميل } (n+1) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{زمن انتهاء خدمته} \\ \text{عميل } (n-C-1) \leq t \end{array} \right\} P_n \quad (6.10)$$

حيث:

$$\begin{aligned} W_q(0) &= P_r(t=0) = P_r(n \leq C-1) \\ &= \sum_{n=0}^{C-1} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} = 1 - \frac{\rho^C P_0}{C!(1-\rho)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\rho/C)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{\rho}{C} < 1$$

كذلك

$$\begin{aligned} &\sum_{n=C}^{\infty} P_r \left\{ \begin{array}{l} \text{وجود } n \text{ عميل في النظام عند وصول} \\ \text{العميل } (n+1) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{زمن انتهاء خدمته} \\ \text{عميل } (n-C+1) \leq t \end{array} \right\} P_n \\ &= \sum_{n=C}^{\infty} \frac{\rho^n P_0}{C^{n-C} C!} \int_0^t \frac{C \mu (C \mu \tau)^{n-C}}{(n-C)!} e^{-C \mu \tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho^C P_0}{(C-1)!} \int_0^t \mu e^{-C\mu\tau} \sum_{n=C}^{\infty} \frac{(\mu\rho\tau)^{n-C}}{(n-C)!} d\tau \\ &= \frac{\rho^C P_0}{C!(1-\rho)} (1 - e^{-\mu(C-\rho)t}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

من (6.11),(6.12) نجد أن:

$$W_q(t) = 1 - \frac{\rho^C P_0}{(C-1)!(C-\rho)} e^{-\mu(C-\rho)t}, \quad t \geq 0 \quad (6.13)$$

وبالتالي إذا فرضنا أن $f(\tau)$ تشير إلى دالة كثافة الاحتمال لزمن انتظار العميل في الصف في النظام محل الدراسة نجد أن:

$$f(\tau) = \frac{\mu\rho^C P_0}{(C-1)!} e^{-\mu(C-\rho)\tau}, \quad \tau \geq 0 \quad (6.14)$$

وبالتالي فإن زمن انتظار العميل المتوقع في الصف W_q على النحو التالي:

$$E(\tau) = W_q = \int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau = \frac{\rho^C P_0}{(C-1)!(C-\rho)^2} \quad (6.15)$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في العلاقة (5.32) بالفصل (٣-٥).

Waiting Time Distribution (٤-٦) توزيع زمن الانتظار
in (M/M/C):(GD/N/∞) في النظام (M/M/C):(GD/N/∞)

في هذا الفصل سوف نعتبر نظام الخدمة (M/M/C):(GD/N/∞) حيث أن أقصى عدد للعملاء في النظام يساوي N. حيث:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & , \quad 1 \leq n < C \\ \frac{\rho^n}{C^{n-C} C!} P_0 & , \quad n \geq C \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^N \frac{\rho^n}{C^{n-C} C!} \right]^{-1}$$

وفي هذا الفصل سوف نقدم دالة التوزيع التراكمية لزمن انتظار العميل $W_q(t)$ في الصف، وبنفس الأسلوب المتبع في الفصلين السابقين، نجد أن:

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{n=C}^{N-1} P_n \left\{ \begin{array}{l} \text{وجود } n \text{ عميل في} \\ \text{النظام لحظة وصول} \\ \text{العميل } (n+1) \end{array} \mid \begin{array}{l} \text{زمن خدمته} \\ \text{عميل } (n-C+1) \leq t \end{array} \right\} P_n \quad (6.16)$$

ملحوظة: حيث $n+1 \leq N$

$$= W_q(0) + \sum_{n=C}^{N-1} P_n \left[1 - \int_t^{\infty} \frac{C\mu (C\mu\tau)^{n-C}}{(n-C)!} e^{-C\mu\tau} d\tau \right] \quad (6.17)$$

وللتبسيط يمكن وضع الحد الذي يحتوي على التكامل في صياغة المجموع على

النحو التالي [41 Page 78]:

$$\int_t^{\infty} \frac{C\mu (C\mu\tau)^{n-C}}{(n-C)!} e^{-C\mu\tau} d\tau = \sum_{i=0}^{n-C} \frac{(C\mu\tau)^i e^{-C\mu\tau}}{i!} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{N-1} P_n - \sum_{n=C}^{N-1} P_n \sum_{i=0}^{N-C} \frac{(C\mu t)^i e^{-C\mu t}}{i!} \\ &= 1 - \sum_{n=C}^{N-1} P_n \sum_{i=0}^{N-C} \frac{(C\mu t)^i e^{-C\mu t}}{i!} \end{aligned} \quad (6.19)$$

حيث يمكن الحصول على $W_q(t)$ عند التعويض بقيم N, C, μ . أنظر تطبيق (٢) بالفصل التالي.

Applied Examples

٥-٦) أمثلة تطبيقية

في هذا الفصل سوف نقدم بعض الأمثلة التطبيقية على التوزيعات الاحتمالية لزمن انتظار العميل في الصف أو في النظام للأنظمة التي تم تقديمها في هذا الباب.

تطبيق (١): عند مدخل القاهرة الإسكندرية، يوجد 4 بوابات متماثلة لدخول الإسكندرية من القاهرة، حيث يتم دفع رسم دخول 10 جنيهات لكل سيارة. فإذا كانت السيارات التي تصل إلى المدخل وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع 23 سيارة في الساعة (23/h)، فإذا كان زمن خدمة السيارة على البوابة يقترب من التوزيع الآسي بتوقع 10 دقائق للسيارة.

المطلوب: ١- حدد نظام الخدمة في هذا المدخل.

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات عند المدخل.

٣- أوجد عدد السيارات المتوقع في الانتظار والنظام، ثم أوجد زمن الانتظار المتوقع للسيارة في الصف و في النظام أيضاً.

٤- أوجد التوزيع الاحتمالي لزمن انتظار السيارة في الصف، ثم أوجد العدد المتوقع للسيارات المنتظرة في الصف من التوزيع الاحتمالي لزمن الانتظار.

٥- أوجد الإيراد المتوقع من رسم دخول السيارات في يوم كامل (٢٤ ساعة).

الحل: ١- الخدمة في مدخل القاهرة والإسكندرية يمثل النظام $(M/M/4):(GD/\infty/\infty)$

٢- بما أن العدد المتوقع لوصول العملاء (23/h) بالتالي فإن $\lambda = 23$ كذلك بما أن زمن الخدمة للسيارة متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع 10 دقائق لخدمة السيارة، بالتالي فإن:

عدد السيارات التي يتم خدمتهم μ في الساعة على النحو التالي:

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ في الدقيقة} \longrightarrow \mu = \frac{60}{10} = 6/h \longrightarrow$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{23}{6} = 3.833 \longrightarrow \frac{\rho}{C} = \frac{23}{6(4)} = \frac{23}{24} = 0.96 < 1$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(23/6)^n}{n!} P_0 & , \quad 1 \leq n < 4 \\ \frac{(23/6)^n}{4^{n-4} (4!)} P_0 & , \quad n \geq 4 \end{cases}$$

من العلاقة (5.23) بالفصل (٥-٣) نجد أن:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\rho/C)} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^3 \frac{(3.833)^n}{n!} + \frac{(3.833)^4}{4!(1-0.96)} \right]^{-1}$$

$$= [21.565 + 224.8454]^{-1} = 0.004$$

ومن العلاقة (5.30) نجد أن عدد السيارات في الانتظار (في الصف):

$$L_q = \left[\frac{C\rho}{(C-\rho)^2} \right] P_0 = \left[\frac{4(3.833)}{(4-3.833)^2} \right] (0.004) = 2.2 \text{ سيارة}$$

وبالتالي زمن الانتظار المتوقع للسيارة في الصف

$$W_q \approx \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.2}{23} = 0.09565 \text{ ساعة} \approx 5.74 \text{ دقيقة}$$

كذلك عدد السيارات المتوقع في المدخل (في النظام) على النحو التالي:

$$L_s = L_q + \rho = 2.2 + 3.833 = 6.033 \text{ سيارة}$$

وبالتالي الزمن المتوقع للسيارة في النظام

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 5.74 + 10 = 15.74 \text{ دقيقة}$$

٤- إذا كانت τ فترة أنتظار السيارة في الصف، من العلاقة (6.14) نجد أن دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{\mu \rho^c P_0}{(C-1)!} e^{-\mu(C-\rho)\tau}, \quad \tau > 0 \\ &= \frac{6(3.833)^4}{3!} (0.004) e^{-6(4-3.833)\tau} \\ &= (0.8634) e^{-1.002\tau}, \quad \tau > 0 \end{aligned}$$

وبالتالي، فإن:

$$E(\tau) = W_q = \frac{\rho^c P_0}{(C-1)!(C-\rho)^2} = \frac{(3.833)^4 (0.004)}{(3!)(4-3.833)} = 5.16 \text{ دقيقة}$$

٥- بما أن L_s في الساعة عدد 6.033 سيارة بالتالي فإن الإيراد المتوقع في اليوم على النحو:

$$R = 24(P)L_s = 24(10)(6.033) = 1447.92 \text{ جنيه}$$

حيث P تشير إلى رسم دخول السيارة الواحدة

تطبيق (٢): في أحد مراكز الأشعة بالرنين المغناطيسي يوجد جهازين متكافئين كل جهاز مرفق به فريق العمل الخاص به، بحيث لا يمكن استخدام الجهاز الواحد لخدمة أكثر من مريض واحد في نفس الوقت. فإذا كان المركز يمكن أن يستقبل 10 مريض على الأكثر في الساعة، وإذا كان المرضى يصلون إلى المركز وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع 5 مرضي في

الساعة، كذلك زمن خدمة المريض على الجهاز يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع 20 دقيقة للمريض.

المطلوب: أ- تحديد نظام الخدمة الذي يمثل مركز الأشعة.

ب- أوجد احتمال رفض خدمة مريض.

ج- أوجد المعدل الفعلي لوصول المرضى للنظام، ثم أوجد معدل التشغيل الفعلي.

د- أوجد عدد المرضى المتوقع في الانتظار، ثم أوجد زمن الانتظار المتوقع للمريض.

الحل: بما أن $\lambda = 5$ ، دقيقة $1/\mu = 20$ ، وبالتالي ساعة $1/\mu = 1/3$ ، وبالتالي

$\mu = 3$ عملاء في الساعة، كذلك $C = 2$ ، $N = 10$.

أ- يمثل النظام $(M/M/2):(GD/N/\infty)$ نظام الخدمة في مركز الإشعاع.

وبالتالي فإن: $\rho = 5/3$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^1 \frac{(5/3)^n}{n!} + \sum_{n=2}^{10} \frac{(5/3)^n}{2^{n-2} 2!} \right]^{-1}$$

$$= [(8/3) + 8.33]^{-1} = [10.9999]^{-1} = 0.091 \quad (1)$$

ب- كذلك احتمال رفض خدمة مريض:

$$P_N = P_{10} = \frac{\rho^{10}}{2^{10-2} (2!)} (0.091)$$

$$= \frac{(5/3)^{10}}{2^{-2} (2)} (0.091) = 0.0294$$

ج- وبالتالي المعدل الفعلي للوصول λ_{eff} حيث:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N) = 5(1 - 0.094) = 4.53$$

د- العدد المتوقع في الانتظار

$$\begin{aligned}
 L_q &= P_0 \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \right] \{1 - (\rho/c)^{N-c} - (N-c)(\rho/c)^{N-c} (1 - (\rho/c))\} \\
 &= (0.091) \left[\frac{(5/3)^3}{(2 - (5/3))^2} \right] \{1 - (5/6)^8 - 8(5/6)^8 (1 - (5/6))\} \\
 &= 0.7221 \approx 1 \text{ مريض}
 \end{aligned}$$

وبالتالي زمن انتظار المريض المتوقع على النحو التالي:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{0.7221}{4.53} = 0.1594 \text{ ساعة} = 9.56 \text{ دقيقة}$$

تطبيق (٣): يعقد أحد المفكرين صالون ثقافي شهري، يوم السبت في الأسبوع الأول من الشهر لمدة ٣ ساعات من ٦-٩ مساءً. فإذا كان رواد الصالون يصلون وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل 5 أفراد في الساعة بحيث يأخذ كل فرد الكلمة وفقاً لأولوية وصوله. فإذا كان الزمن الذي يستغرقه الفرد في كلمته يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع 10 دقائق.

والمطلوب: ١- تحديد النظام الذي يمثل الصالون الثقافي.

٢- أوجد العدد المتوقع للمستمعين في الصالون في الساعة.

٣- أوجد الزمن المتوقع لعدد المفكرين بالصالون.

الحل: ١- إذا اعتبرنا أعطاء الكلمة للفرد يمثل مركز الخدمة فإن النظام $(M/M/1):(FCFS/\infty/\infty)$ يمثل النظام بالصالون.

٢- بما أن التوزيع الاحتمالي لعدد الرواد (بما فيهم الراعي للصالون) $\lambda = 5/h$ ، $\mu = 6/h$.

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n = (1 - (5/6))(5/6)^n, \quad n = 0,1,2,\dots$$

بما أن العدد المتوقع الرواد L_q حيث:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(5/6)^2}{1-(5/6)} = \frac{0.69439}{0.1667} \approx 4.2 \text{ فرد}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4.2}{5} = 0.84 \text{ ساعة} \approx 50.4 \text{ دقيقة}$$

٣- العدد المتوقع للرواد في الصالون:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{5}{6-5} = 5/h$$

تطبيق (٤): مطبعة يوجد بها ماكينتين متكافئتين لطباعة الملازم (الملزمة 16 صفحة) بحيث يتم طباعة 1000 نسخة من الملزمة الواحدة (بمعنى طباعة الملزمة طباعة 1000 نسخة)، فإذا كان عدد الملازم التي يكون من المطلوب طباعتها تمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بتوقع 5 ملازم في الساعة، فإذا كان زمن طباعة الملزمة الواحدة في الماكينة يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu = 4$ ساعات.

المطلوب: ١- تحديد نظام الصفوف الذي يتفق مع العمل في المطبعة.

٢- أوجد عدد الملازم المتوقعة في انتظار المطبعة، ثم أوجد زمن الانتظار المتوقع لطباعة الملزمة، ثم أوجد احتمال عدم عمل الماكينتين (بسبب عدم وجود ملازم للطباعة).

٣- أوجد عدد الملازم المتوقع في المطبعة في الطباعة أو انتظار الطباعة.

٤- أوجد التوزيع الاحتمالي لزمن انتظار الملزمة حتى تدخل على الماكينة للطباعة.

الحل: ١- يمثل النظام $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ نظام الطباعة في المطبعة، حيث:

$$C = 2, \quad \lambda = 5/h, \quad \frac{1}{\mu} = 4 \longrightarrow \mu = \frac{1}{4}/h$$

التوزيع الاحتمالي لعدد الملازم في المطبعة (في انتظار الطباعة أو على الماكينات)

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & , \quad 0 \leq n \leq C \\ \frac{\rho^n}{C^{n-C} C} P_0 & , \quad n > C \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\rho/C)} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^1 \frac{(5/4)^n}{n!} + \frac{(5/4)^4}{2!(1-(5/8))} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{9}{4} + \frac{25}{12} \right]^{-1} = \frac{3}{13} = 0.231$$

وبالتالي احتمال عدم عمل الماكينتين معاً يساوي P_0 يساوي 0.231

٢- عدد الملازم المتوقع في انتظار الطباعة L_q حيث:

$$L_q = \left[\frac{C\rho}{(C-\rho)^2} \right] P_0 = \left[\frac{2(5/4)}{(2-(5/4))^2} \right] (0.231) = 1.03 \text{ ملزمة}$$

٣- عدد الملازم المتوقع في الطباعة والانتظار L_s حيث:

$$L_s = L_q + \rho = 1.03 + \frac{5}{4} = 2.28$$

Exercises

٦-٦) تمارينات

(١-٦) أوجد التوزيع الاحتمالي لزمن أنتظار العميل في النظام $(M/M/C):(GD/N/\infty)$ ثم أثبت أنه يؤول إلى التوزيع لزمن انتظار العميل في النظام $(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$ عندما $N \rightarrow \infty$.

(٢-٦) أوجد دالة التوزيع التراكمية ودالة كثافة الاحتمال للتطبيقات (١)-(٤) في الفصل السابق (٥-٦).

(٣-٦) مركز لتصوير المستندات به 3 ماكينات متكافئة بحيث زمن التصوير لطالب الخدمة يمثل متغير عشوائي (يتوقف على عدد المستندات التي يطلب تصويرها) يتبع التوزيع الآسي بتوقع 10 دقائق، فإذا كان طالبي الخدمة يصلون وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل 10 عملاء في الساعة.

المطلوب: ١- تحديد نظام الصفوف الذي يمثل العمل في مركز التصوير.

٢- تحديد العدد المتوقع للعملاء في المركز والزمن المتوقع لوجود العميل في المركز.

٣- تحديد العدد المتوقع للعملاء في أنتظار الخدمة.

٤- أوجد احتمال التعطل (عدم العمل لعدم وجود عملاء) في ماكينة أو أكثر.

٥- أوجد التوزيع الاحتمالي لزمن أنتظار العميل في الصف.

(٤-٦) أوجد التوزيع الاحتمالي P_n للنظام $(M/M/C):(GD/N/\infty)$.

(٥-٦) أعتبر التمرين (٤)، أوجد التوزيع الاحتمالي لزمن أنتظار العميل بالنظام.

(٦-٦) أثبت أن توزيع زمن أنتظار العميل في النظام $(M/M/1):(FCFS/N/\infty)$ حالة خاصة من التوزيع في التمرين (٥) عندما $C = 1$.

الباب السابع
نماذج عملية ماركوف الضمنية
Imbedded Markov models

Introduction	(١-٧) مقدمة
	(٢-٧) نموذج ماركوف بزمن خدمة عام
(M/G/1):(GD/∞/∞)	
	(٣-٧) قاعدة Pollaczek-Khintchine
Pollaczek-Khintchine rule	
	(٤-٧) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار
Applied Example	(٥-٧) أمثلة تطبيقية

Introduction

(١-٧) مقدمة

في الفصول السابقة تناولنا بشئ من التفصيل بعض نماذج الصفوف لماركوف التي تتبع عملية ماركوف حيث التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام يتبع توزيع بواسون وزمن خدمة العميل يمثل متغير يتبع التوزيع الأسي، ويترتب على ذلك ان الفترة الزمنية بين خروجين متتاليين من العملاء بعد انتهاء خدمتهم تمثل متغير يتبع التوزيع الأسي وعدد العملاء المنتهي خدمتهم يتبع توزيع بواسون أيضاً وذلك مثل النماذج $(M/M/1), (M/M/C)$.

ولكن في كثير من الأنظمة يكون زمن الخدمة لا يتبع التوزيع الأسي مثل النظام $(G/M/1)$ أو عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام لا تتبع التوزيع بواسون مثل النظام $(M/G/1)$ حيث تشير (G) أن التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة أو عدد الذين يصلون إلى النظام تتبع توزيع عام ومحدد دالة كثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية وسوف نرسم لها بالرمز $b(t), B(t)$ على الترتيب .

وفي هذه الحالات تسمى نماذج عملية ماركوف بنماذج الصفوف التي تتبع عملية ماركوف الضمنية **imbedded Markov chain** .

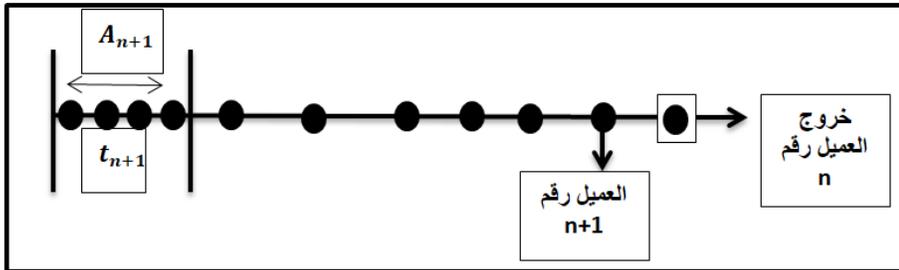
وفي هذا الباب سوفت نقدم بالتفصيل النموذج $(M/G/1): (GD/\infty / \infty)$ كأحد النماذج التي تتبع ماركوف الضمنية بالإضافة إلى تقديم بعض الأمثلة التطبيقية.

(٢-٧) النموذج $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$

كما ذكرنا سابقا أن الحصول على التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام أو في الصف يكون يهدف الحصول على مؤشرات كفاءة النظام [103,4] والحصول على التوزيع الاحتمالي المستقر لعدد العملاء في النظام والنظام $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ يمثل وجود مركز خدمة واحد بحيث يكون عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام وفقا لتوزيع بواسون بمعلمة λ وزمن خدمة العملاء تمثل متغيرات عشوائية مستقلة لها توزيع احتمالي عام (G) بدالة كثافة احتمال ودالة تراكمية $B(t), b(t)$ على الترتيب.

فإذا أشرنا بالرمز x_{n+1} إلى عدد العملاء في النظام عند خروج العميل رقم $(n+1)$ بعد انتهاء خدمته كذلك A_{n+1} تشير إلى عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام خلال فترة خدمة العميل رقم $(n+1)$ ، كما هو موضح بالشكل التالي:

شكل (٧-١): يوضح النظام $(M/G/1)$



وبالتالي يمكن الإشارة إلى عدد العملاء في النظام على النحو التالي [41,106]:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} , & x_n \geq 1 \\ A_{n+1} , & x_n = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

وبما أن أزمنة الخدمة $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ تمثل متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس

التوزيع الاحتمالي (G) ، كذلك A_1, A_2, \dots تمثل متغيرات عشوائية مستقلة مرتبطة بـ

t_1, t_2, t_3, \dots وبالتالي فإنه يمكن تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير A على النحو

التالي:

$$Pr(A = a) = \int_0^{\infty} Pr(A = a | s = t) dB(t) \quad (7.2)$$

$$Pr(A = a | s = t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^a}{a!} \quad (7.3)$$

والاحتمال الشرطي أعلاه ممكن كتابته على النحو التالي:

$$P_{ij} = P_r\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P_r\{A = j - (i - 1)\} \\ = P_r(A = j - i + 1)$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} B(t), & j \geq i - 1, i \geq 1 \\ 0, & j < i - 1, i \geq 1 \end{cases}$$

فإذا رمزنا لاحتمال وصول عدد n من العملاء خلال فترة خدمة عميل بالرمز K_n فإن:

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} B(t) \quad (7.4)$$

Pollaczek-Khintchine صياغة (٣-٧)

Pollaczek-Khintchine form

بالنسبة للنماذج الضمنية مثل نموذج $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ فقد قدم كل من Pollaczek, Khintchine صياغة رياضية يمكن باستخدامها الحصول على مؤشرات كفاءة النظام بدون التوزيع الاحتمالي المستقر. حيث يكون في كثير من المشاكل يهتم متخذ القرار فقط بحساب مؤشرات كفاءة النظام ولا يهتم بالتوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام .

وفي هذا الفصل سوف نعتبر النظام $(M/G/1)$ بحيث عدد العملاء الذين يصلون إلى

النظام وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل λ وزمن الخدمة له توزيع عام محدد بتوقع $E(t) = \frac{1}{\mu}$

وتباين $v(t) = \sigma^2$ فقد توأصلا $(P-K)$ إلى المؤشرات التالية في وضع الاستقرار Steady

State

$$(1) L_s = \lambda E(t) + \frac{\lambda^2 \{E^2(t) + var(t)\}}{2[1 - \lambda E(t)]} \quad (7.5)$$

$$(2) L_q = L_s - \lambda E(t) \quad (7.6)$$

$$(3) W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho(z - \rho) + \lambda^2 \sigma_t^2}{2\lambda(1 - \rho)} \quad (7.7)$$

$$(4) W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_t^2}{2\lambda(1 - \rho)} \quad (7.8)$$

الإثبات:

من العلاقة (7.1) يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$X_{n+1} = X_n - U(X_n) + A \quad (7.9)$$

حيث:

$$U(X_n) = \begin{cases} 1, & x_n > 0 \\ 0, & x_n = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

وبما أن المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ متغيرات عشوائية لها نفس التوزيع،

بالتالي في وضع الاستقرار فأن

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) = L^d \quad (7.11)$$

حيث تشير إلى متوسط عدد العملاء في النظام فور خروج (أو اثناء خروج) العميل وبالتالي

فأن:

$$X_{n+1} = X_n - U(X_n) + A \quad (7.12)$$

ويوجد التوقع للطرفين في العلاقة أعلاه نجد أن :

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) - E(U(X_n)) + E(A)$$

$$0 = -E(U(X_n)) + E(A)$$

$$E(U(X_n)) = E(A) \quad (7.13)$$

ومن العلاقة (7.4) فإن:

$$\begin{aligned} E(A) = E(U(X_n)) &= \int_0^{\infty} E(A|s = t) d\beta(t) \\ &= \int_0^{\infty} \lambda t d\beta(t) = \lambda E(t) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \end{aligned} \quad (7.14)$$

حيث $\rho \leq 1$ في وضع الاستقرار

وبتربيع طرفي العلاقة (7.12) فإن:

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + U^2(X_n) + A^2 - 2X_n U(X_n) - 2AU(X_n) + 2AX_n$$

وبأخذ التوقع لطرفي العلاقة أعلاه نجد أن:

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + E[U^2(X_n)] + E(A^2) - 2E(X_n U(X_n)) - 2E(AU(X_n)) + 2E(X_n) \quad (7.15)$$

وبما أن وضع الاستقرار

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2)$$

وبالتالي تصبح المعادلة (7.15) على النحو التالي:

$$0 = E[U^2(X_n)] + E(A^2) - 2E(X_n U(X_n)) - 2E(AU(X_n)) + 2E(AX_n) \rightarrow$$

$$0 = \rho + E(A^2) - 2L^d - 2\rho^2 + 2\rho L^d \rightarrow$$

$$L^d = \frac{\rho + E(A^2) - 2\rho^2}{2(1 - \rho)} \quad (7.16)$$

وللحصول على $E(A^2)$ ، حيث:

$$E(A^2) = \text{Var}(A) + [E(A)]^2 = \text{Var}(A) + \rho^2$$

في سنة 1996 أثبت R011 أن :

$$\text{Var}(A) = E[\text{Var}(A|t)] + \text{Var}[E(A|t)]$$

ومن العلاقة (7.4) نجد أن:

$$\text{Var}(A) = E(\lambda t) + \text{Var}(\lambda t) = \rho + \lambda^2 \sigma_t^2 \quad (7.19)$$

بالتعويض في (7.16) بـ الطرف الأيمن في (7.17) نجد أن:

$$L^d = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_t^2}{2(1 - \rho)}$$

وبما أن في وضع الاستقرار $L_s = L^d$ بالتالي فإن:

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_t^2}{2(1 - \rho)}$$

وبما أن:

$$L_q = L_s - \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_t^2}{2(1 - \rho)}$$

كذلك

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho(z - \rho) + \lambda^2 \sigma_t^2}{2\lambda(1 - \rho)}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_t^2}{2\lambda(1 - \rho)}$$

(٤-٧) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار

في كثير من الدراسات النظرية والتطبيقية يتطلب الحصول على التوزيع الاحتمالي المستقر لعدد العملاء في النظام. لذلك في هذا الفصل نقدم اشتقاق التوزيع الاحتمالي المستقر لعدد العملاء في النظام (M/G/1) على النحو التالي:

أولاً: لإيجاد الاحتمالات في (7.4):

$$P_r(A = j - i + 1) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} d\beta(t), & j \geq i - 1, i \geq 1 \\ 0, & j < i - 1, i \geq 1 \end{cases}$$

فإذا أشرنا إلى الاحتمال أعلاه بالرمز K_n حيث :

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} d\beta(t)$$

حيث K_n تشير على احتمال وصول عدد n من العملاء إلى النظام خلال فترة خدمة عميل في مركز الخدمة ويعتبر حساب ضرورة للحصول على التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في حالة الاستقرار

(٧-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار الباب السابع: نماذج عملية
ماركوف الضمنية

ملحوظة:

إيجاد الاحتمالات K_n ، $n=0,1,2,\dots$ يتطلب إجراء عملية التكامل لحاصل ضرب دالتين

قد يصعب الحصول عليه كذلك يمكن إيجاد القيمة التقريبية لـ K_n بتحويل عملية التكامل

إلى عملية المجموع بأحد أساليب التكامل العددي. في سنة ١٩٨٤ قدم slityes نظرية

التكامل العددي [42,98]

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)[g(x_{j+1}) - g(x_j)] \quad (7.20)$$

ويستخدم العلاقة (7.18) يمكن الحصول على الاحتمالات K_n

وبالتالي يمكن كتابة الاحتمالات الشرطية P_{ij} في صياغة مصفوفة الانتقال P باستخدام

الاحتمالات K_{j-i+1} على النحو التالي:

$$P = \{P_{ij}\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (i) \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & \dots & k_{i-1} & \dots \\ 0 & 0 & k_1 & \dots & k_{i-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{array} \right] \end{matrix} \quad (7.21)$$

(٧-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في حالة الاستقرار الباب السابع: نماذج عملية
ماركوف الضمنية

ويمكن افتراض أن احتمالات عدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار تساوي المتجه π

حيث:

$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_i \dots] \quad (7.22)$$

وبالتالي فإن في حالة الأستقرار يمكن الحصول على الاحتمالات في (7.19) من حل

مجموعة المعادلات التالية:

$$\pi P = \pi \quad (7.23)$$

من (7.9) يمكن كتابة قيم π_i عن طريق k_i على النحو التالي :

$$\pi_i = \pi_0 k_i + \sum_{j=0}^{i-1} \pi_j K_{(i-j+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

ويمكن الحصول على الدالة المولدة للأحتمالات π_i ، $i = 0, 1, 2, \dots$ ونرمز لها بالرمز

$\pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i$ والدالة المولدة للاحتمالات k_i ، $i = 0, 1, 2, \dots$ ونرمز لها

بالرمز $K(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i$

وبضرب طرفي المعادلة (7.22) في z^i ثم أخذ المجموع للطرفين فنجد أن:

(٤-٧) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في حالة الاستقرار الباب السابع: نماذج عملية
ماركوف الضمنية

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} z^i k_i + \sum_{i=0}^{\infty} z^i \{ \pi_1 k_i + \pi_2 k_{i-1} + \pi_3 k_{i-2} + \dots \}, |z| \leq 1$$

$$= \pi_0 k(z) + \{ \pi_1 K(z) + \pi_2 z K(z) + \pi_3 z^2 K(z) + \dots \}$$

$$= \pi_0 k(z) + K(z) \{ \pi_1 + \pi_2 z + \pi_3 z^2 + \dots \}$$

$$\pi_0(z) + k(z) [\pi(z) - \pi_0] \pi(z) [k(z) - z]$$

$$= k(z) \pi_0 (1 - z)$$

$$\pi(z) = \frac{\pi_0 (1-z) k(z)}{k(z) - z} \quad (7.25)$$

وباستخدام الدالة المولدة للاحتتمالات

حيث :

$$\left. \frac{d^i \pi(z)}{dz^i} \right|_{z=0} = \pi_i = \left. \frac{d^i}{dz^i} \left\{ \frac{\pi_0 (1-z) k(z)}{k(z) - z} \right\} \right|_{z=0} \quad (7.26)$$

فإذا رمزنا لمؤشر كثافة حركة مرور العملاء في النظام بالرمز ρ حيث $\rho < 1$ فإنه في

حالة الاستقرار يتحقق الشرط

$$\rho = \lambda E(t)$$

(٤-٧) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في حالة الاستقرار الباب السابع: نماذج عملية
ماركوف الضمنية

حيث $E(t)$ توقع زمن الخدمة للعميل (ملحوظة في حالة عندما يكون زمن الخدمة متغير

يتبع التوزيع الأسي فإن $\rho = \lambda/\mu$)

وبما أن

$$K(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i$$

فأنه يمكن اثبات أن [4]:

$$E(x_n) = \dot{K}(1) = \lambda E(t) = \rho$$

انظر تحويله لابلاس بالفصل (٤-٢). وباستخدام قاعدة لوبيتال

فإنه عندما $z \rightarrow 1$ ، $\pi(z) \rightarrow 1$

وبأخذ النهايات لطرفي المعادلة (7.23) فإن

$$\lim_{z \rightarrow 1} \pi(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} \pi_0 [k(z) - (z-1)k'(z)]}{\lim_{z \rightarrow 1} [1 - k'(z)]} \quad (7.28)$$

وبما أن

$$k(1) = 1, \hat{k}(1) = \rho \quad (7.29)$$

حيث

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

وبالتالي فإن:

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)(z - 1)k(z)}{z - k(z)} = \frac{(1 - \rho)(1 - z)k(z)}{K(z) - z}$$

مثال (٧-١) اعتبر نظام الخدمة (M/G/1):(GD/∞/∞)

حيث المعدل المتوقع لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام $\lambda = 5/h$ وزمن الخدمة له

التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال [74]:

$$b(t) = \frac{1}{b - a}, \quad a < t < b, 2 \leq t \leq 12$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \text{، وتباين } E(t) = \frac{a+b}{2} \text{ بتوقع}$$

(٧-٤) التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في حالة الاستقرار الباب السابع: نماذج عملية
ماركوف الضمنية

(١) أوجد الاحتمال k_i ، $i = 0, 1, 2$

(٢) أوجد احتمالات الاستقرار لعدد العملاء في النظام π_i ، $i = 0, 1, 2$

الحل

١- من العلاقة (7.6) فإن

$$k_0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} d\left(\frac{t}{b-a}\right)$$

وبتحويل عملية التكامل إلى عملية المجموع التقريبي باستخدام تقريب *Rommain*

stielyen integral [6]فان:

$$\int_a^b f(t) dg(t) \approx \sum_{j=1}^n f(c_j) [g(t_{j+1}) - g(t_j)]$$

فإذا فرضنا أن:

$$f(t) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda t)^i}{i!}, \quad g(t) = \frac{t}{b-a}$$

فإن

$$k_i = \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda c_j} (\lambda)^i}{i!} [g(t_{j+1}) - g(t_j)]$$

وبافتراض أن $n=10$ فإن:

$$k_i = \frac{1}{(b-a)i!} \sum_{j=0}^{11} e^{-\lambda c_j} (\lambda t_j)^i [t_{j+1} - t_j]$$

وبالتالي فإن:

$$k_0 = \frac{1}{10(0!)} \{e^{-\lambda(2.5)} (2.5\lambda)^0 [t_1 - t_0] \\ + e^{-\lambda(3.5)} (3.5\lambda)^0 [t_2 - t_1] \\ + \dots e^{-\lambda(11.5)} (11.5\lambda)^0 [t_{11} - t_{10}]\} = 0.00000038$$

$$k_1 = \frac{1}{10(1!)} \{e^{-\lambda(2.5)} (2.5\lambda) [t_1 - t_0] + e^{-\lambda(3.5)} (3.5\lambda) [t_2 - t_1] \\ + \dots e^{-\lambda(11.5)} (11.5\lambda) [t_{11} - t_{10}]\} = 0.000005$$

$$k_0 = \frac{1}{10(2!)} \{e^{-\lambda(2.5)} (2.5\lambda)^2 [t_1 - t_0] \\ + e^{-\lambda(3.5)} (3.5\lambda)^2 [t_2 - t_1] \\ + \dots e^{-\lambda(11.5)} (11.5\lambda)^2 [t_{11} - t_{10}]\} = 0.00003$$

والحل التفصيلي للمثال بمحلق رقم (٩)

Applied Example**(٥-٧) أمثلة تطبيقية**

تطبيق (٧-١): في أحد مراكز إصلاح إطارات السيارات يصل العملاء الذين يطلبون الخدمة وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل متوسط 10 عملاء في الساعة ($\lambda = 10$) . وزمن خدمة العميل يمثل متغير يتبع التوزيع الأسّي بقيمة متوقعة 5 دقائق للعميل (بمعنى $\sigma = 5$, $1/\mu = 5$ دقيقة). ويرغب متخذ القرار في المركز بتحسين الخدمة (بزيادة زمن الخدمة المتوقع للعميل) وذلك بزيادة القيمة المتوقعة لزمن الخدمة. فتم تقديم دورة تدريبية لتحسين الخدمة ، وقدّر توقع زمن الخدمة بعد الدورة بـ 5.5 دقيقة بدلاً من 5 دقائق وانحراف معياري 4 دقائق بدلاً من 5 دقائق.

وبالتالي أصبح النظام بعد التدريب النظام (M/G/1) بدلاً من النظام قبل التدريب (M/M/1) .

والمطلوب المقارنة بين النظامين قبل وبعد الدورة من حيث

- متوسط عدد العملاء في النظام L_s

- متوسط زمن انتظار العميل في النظام W_s

الحل

(١) المؤشرات قبل الدورة

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10/60}{1/5} = \frac{5}{6}$$

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{5/6}{1 - 5/6} = \frac{4}{1} = 5 \text{ عملاء}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5}{10/60} = 30 \text{ دقيقة}$$

(٢) النظام بعد الدورة

$$\sigma = 4, \quad \lambda = \frac{10}{60}$$

$$\rho = \frac{10/60}{\frac{1}{5.5}} = \frac{11}{12}, \quad \lambda E(t) = \frac{10}{60} (5.5) = \frac{11}{12} < 1$$

$$\begin{aligned} L_s &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{var}(t)}{2(1 - \rho)} = \frac{11}{12} + \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2 + \left(\frac{10}{60}\right)^2}{2\left(1 - \frac{11}{12}\right)} \quad (16) \\ &= \frac{11}{12} + \frac{1665}{216} = 8.625 \text{ عميل} \end{aligned}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{8.625}{1/6} = 51.75 \text{ دقيقة}$$

ومما سبق يلاحظ استخدام النظام (M/G/1) أدى إلى زيادة متوسط عدد العملاء في النظام وزيادة زمن انتظار العميل أيضاً

تطبيق (٧-٢): في أحد محطات البنزين يصل العملاء إلى المحطة وفقاً لتوزيع

بواسون بمعدل متوسط 12 سيارة في الساعة وزمن خدمة السيارة يمثل متغير يتبع

التوزيع الأسّي بتوقع 4 دقائق للسيارة فإذا حدث تغير في العمال القائمين بالخدمة

فأصبح توقع زمن خدمة السيارة 3 دقائق بدلاً من 4 دقائق وانحراف معياري 5 دقائق.

المطلوب:

١- توقع عدد السيارات التي تتطلب الخدمة قبل تغير العمال، كذلك توقع زمن انتظار

السيارة في المحطة

٢- حدد نظام الخدمة بعد تغير العمال ثم أوجد توقع عدد السيارات في البنزينة في هذه

الحالة كذلك توقع زمن انتظار السيارة في المحطة

الحل

١- النظام قبل تغيير العمال نظام (M/M/1) حيث:

$$\lambda = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}, \frac{1}{\mu} = 4, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/5}{1/4} = \frac{4}{5} < 1$$

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{4/5}{1 - 4/5} = \frac{4}{1} = 4 \text{ سيارة}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{4}{1/5} = 20 \text{ دقيقة}$$

٢- النظام بعد تغيير العمال نظام (M/G/1)

$$\rho = \lambda E(t) = \frac{1}{5} (3) = \frac{3}{5} < 1$$

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{var}(t)}{2(1 - \rho)} = \frac{12}{20} + \frac{34/25}{4/5} = 2.3 \text{ سيارة}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{46/20}{12/60} = 11.5 \text{ دقيقة}$$

جدول (٧-١) للمقارنة بين مؤشرات النظامين

المؤشر	قبل التغيير (M/M/1)	بعد التغيير (M/G/1)
L_s	4	2.3
W_s	20	11.5

وبالتالي يعتبر النظام بعد تغيير العمال أفضل

تطبيق (٧-٣): في التطبيق السابق اعتبر الحالة بعد تغيير العاملين والنظام

(M/G/1) والتوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة توزيع تجريبي بدالة كثافة

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}$$

أوجد : الاحتمالات التقريبية k_i ، والمصفوفة P_{ij} كذلك أوجد احتمالات الاستقرار π_i

الباب الثامن
بعض أنظمة إيرلنج للصفوف
Some Erlang Queueing Systems

Introduction	(١-٨) مقدمة
	(٢-٨) نموذج وصول العملاء في مجموعات
Bulk Input ($M^{[X]} / M / 1$) Model	
	(٣-٨) نموذج خدمة العملاء في مجموعات
Bulk Service ($M / M^{[Y]} / 1$) Model	
	(٤-٨) نموذج الخدمة وفقاً لتوزيع إيرلنج
Erlang Service Model ($M / E_k / 1$)	
Exercises	(٥-٨) تمرينات

Introduction

(١-٨) مقدمة

في الباب الخامس تناولنا بشيء من التفصيل بعض أنظمة ماركوف للصفوف، وفي هذا الباب سوف نقدم نوع آخر من الأنظمة - حيث يتم وصول العملاء في شكل مجموعات أو خدمتهم في شكل مجموعات أيضاً. وقد قدم إيرلنج بعض النماذج التي تمثل هذه الأنظمة، وفي هذا الباب سوف نقدم [19, 76, 88]:

(١) نموذج لوصول العملاء في مجموعات بحجم المجموعة X ، حيث $X = 1, 2, \dots$ ، حيث X متغير عشوائي متقطع بدالة احتمال $C(X)$.

ومن أمثلة الأنظمة التي يمثلها هذا النموذج وصول السائحين في شكل مجموعات أو وصول العملاء إلى المطاعم في شكل مجموعات، الخ.

(٢) نموذج خدمة العملاء في شكل مجموعات بحجم المجموعة Y ، حيث $Y = 1, 2, 3, \dots$.

(٣) نموذج الخدمة وفقاً لتوزيع إيرلنج لزمن خدمة العميل $(E_k / M / 1)$.

ونظراً لأن عمليات الوصول أو الخدمة في هذا الباب تعتمد أيضاً على عمليات ماركوف، لذلك تسمى هذه النماذج في بعض الكتابات بنماذج ماركوف المتقدمة advanced Markovian queueing models أيضاً.

(٢-٨) نموذج وصول العملاء في مجموعات

Bulk Input ($M^{[X]}/M/1$) Model

كثير من الأنظمة يصل العملاء للخدمة في شكل مجموعات (أو أفواج) مثل وصول العملاء إلى المطاعم أو وصول الأفواج السياحية إلى المطارات أو المزارات السياحية، أو وصول مجموعات من الرسائل الإلكترونية في نفس الوقت، الخ.

وفي هذا الفصل سوف نعتبر نظام الخدمة $(M/M/1):(FcFs/\infty/\infty)$ السابق تقديمه في الفصل (٢-٥) ولكن بدلاً من وصول عميل واحد في وحدة الزمن (Δt) يصل إلى النظام مجموعة من العملاء بالحجم $[X]$ حيث $X = 1, 2, \dots$ تمثل متغير عشوائي متقطع بدالة احتمال C_X .

فإذا كان λ_X تشير إلى معدل وصول المجموعة بحجم X عميل إلى النظام، وبالتالي احتمال وصول المجموعة بالحجم X في الفترة Δt يساوي $(\lambda_X \Delta t)$. وبما أن المجموعات X مستقلة ومتنافية فإنه يمكن افتراض أن:

$$C_X = \frac{\lambda_X}{\lambda} \quad , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda \quad (8.1)$$

حيث تشير λ إلى معدل الوصول المجمع composite arrival rate ، وفي هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا على:

- اشتقاق معادلات الأستقرار،
- اشتقاق الدالة المولدة للأحتمالات لعدد العملاء في النظام، وبالتالي اشتقاق P_n ،
- اشتقاق بعض مؤشرات كفاءة النظام.

أولاً: اشتقاق معادلات الأستقرار

بنفس الأسلوب المستخدم في تكوين معادلات الأستقرار في الفصل (٢-٥)، نحصل على معادلات الأستقرار وفقاً للفروض المذكورة أعلاه على النحو التالي:

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{k=1}^n P_{n-k} C_k, \quad n \geq 1 \quad (8.2)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \quad (8.3)$$

حيث μ تشير إلى معدل خدمة العميل في مركز الخدمة.

ثانياً: اشتقاق الدالة المولدة للأحتمالات،

إذا أشرنا إلى الدالة المولدة للأحتمالات لـ P_n بالرمز $P(Z)$ ، كذلك إذا أشرنا إلى

الدالة المولدة للأحتمالات لـ C_x بالرمز $C(Z)$ فإن:

$$P(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n, \quad |Z| \leq 1 \quad (8.4)$$

$$C(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z^n, \quad |Z| \leq 1 \quad (8.5)$$

وبضرب طرفي المعادلة (7.2) في Z^n ثم أخذ المجموعة بالنسبة لـ n نجد أن:

$$0 = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n Z^n + \frac{\mu}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} P_n Z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P_{n-k} C_k Z^n \quad (8.6)$$

وبما أن الحد $\left(\sum_{k=1}^n P_{n-k} C_k \right)$ يمثل دالة الاحتمال لمجموعة احتمالات وجود $(n-k)$ عميل

في النظام ووصول مجموعة بعدد k عميل للخدمة لجميع قيم k ، فإنه يمكن إعادة صياغة

الحد الأخير في (8.6) على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P_{n-k} C_k Z^n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k Z^k \sum_{n=1k}^{\infty} P_{n-k} Z^{n-k} = C(Z)P(Z) \quad (8.7)$$

وبالتعويض في (8.6) بـ (8.7) نجد أن [76]:

$$0 = -\lambda P(Z) - \mu [P(Z) - P_0] + \frac{\mu}{Z} [P(Z) - P_0] + \lambda C(Z)P(Z) \longrightarrow$$

$$P(Z) = \frac{\mu P_0 (1-Z)}{\mu(1-Z) - \lambda Z [1-C(Z)]}, \quad |Z| \leq 1 \quad (8.8)$$

ويمكن إعادة كتابة (7.8) على النحو التالي:

$$P(Z) = \frac{P_0}{1 - \rho Z \bar{C}(Z)}, \quad \bar{C}(Z) = \frac{1-C(Z)}{1-Z}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (8.9)$$

حيث ترمز $\bar{C}(Z)$ للدالة المولدة للأحتمالات لمكمل دالة الاحتمال لدالة الاحتمال C_X أو بعبارة أخرى:

$$P_r(X > x) = 1 - C_x = \bar{C}_x$$

وبما أن $\frac{1}{(1-Z)}$ عبارة عن الدالة المولدة لـ (1)، كذلك $\frac{C(Z)}{(1-Z)}$ تمثل الدالة المولدة للأحتمالات التراكمية C_X .

كذلك يمكن إعادة كتابة الدالة المولدة للدالة التراكمية لدالة الاحتمال C_X على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \sum_{X=1}^{\infty} C_x Z^X &= \sum_{X=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^X C_i \right) Z^X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i Z^i \right) \left(\sum_{X=i}^{\infty} Z^{X-i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i Z^i \right) \left(\frac{1}{1-Z} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

ويمكن الحصول على توقع X من (7.9)، وبتطبيق قاعدة لوبيتال [103, ٦] نجد أن:

$$\begin{aligned} \bar{C}(1) &= \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{1-C(Z)}{1-Z} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{-C'(Z)}{-1} \\ &= \lim_{Z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i C_i Z^{i-1} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} i C_i = E(X) \end{aligned} \quad (7.11)$$

وبتطبيق قاعدة لوبيتال مرة ثانية على (7.10) نجد أن:

$$\bar{C}'(1) = [E(X(X-1))] / 2 \quad (8.12)$$

وبما أن $P(1) = 1$ بالتعويض في (7.9) بـ $Z = 1$ نجد أن:

$$1 = P(1) = \frac{P_0}{1 - \rho \bar{C}(1)} \quad (8.13)$$

$$P^1(1) = \frac{\rho [\bar{C}(1) + \bar{C}'(1)]}{1 - \rho \bar{C}(1)} \quad (8.14)$$

من (8.13) نجد أن:

$$P_0 = 1 - \rho E(X) = 1 - r, \quad r = \rho E(X), \quad r < 1 \quad (8.15)$$

ويصبح العدد المتوقع للعملاء في النظام L_S على النحو التالي:

$$L_S = \frac{\rho \{E(X) + E(X^2)\}}{2(1-r)} = \frac{r + \rho E(X^2)}{2(1-r)}, \quad r = \rho E(X) \quad (8.16)$$

كذلك العدد المتوقع للعملاء في الصف L_q على النحو:

$$L_q = L_S - (1 - P_0) = L_S - r \quad (8.17)$$

ويوجد حالتين هامتين في دراسة النظام $(M^{[X]}/M/1): (FcFs/\infty/\infty)$ هما:

الحالة الأولى: إذا فرضنا أن حجم مجموعة الوصول X يساوي مقدار ثابت h ،
بالتالي فإن:

$$E(X) = h \quad \longrightarrow \quad r = \frac{\lambda h}{\mu} \quad (8.18)$$

وفي هذه الحالة يصبح:

$$L_S = \frac{r + r h}{2(1-r)} = \frac{r(h+1)}{2(1-r)} \quad (8.19)$$

$$L_q = L_s - r = \frac{2r^2 + (h-1)r}{2(1-r)} \quad (8.20)$$

الحالة الثانية: إذا فرضنا أن دالة الاحتمال متغير يتبع التوزيع الهندسي أو بعبارة أخرى:

$$C_x = (1-\alpha)\alpha^{x-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (8.21)$$

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$r = \frac{\lambda E(X)}{\mu} = \frac{\rho}{(1-\alpha)}$$

كذلك:

$$C(Z) = (1-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} Z^n = \frac{Z(1-\alpha)}{1-\alpha Z} \quad (8.22)$$

بالتعويض في (7.9) بـ C_x نجد أن:

$$\begin{aligned} P(Z) &= \frac{(1-r)(1-Z)}{1-Z-\rho Z[1-C(Z)]} \\ &= \frac{(1-r)(1-Z)}{1-Z-\rho Z[1-Z(1-\alpha)/(1-\alpha Z)]} \\ &= \frac{(1-r)(1-\alpha Z)}{1-Z[\alpha+(1-\alpha)r]} \\ &= (1-r) \left[\frac{1}{1-Z[\alpha+(1-\alpha)r]} - \frac{\alpha Z}{1-Z[\alpha+(1-\alpha)r]} \right] \quad (8.23) \end{aligned}$$

ومن $P(Z)$ يمكن الحصول على P_n علي النحو التالي:

$$P_n = (1-r) \{ [\alpha + (1-\alpha)r]^n - \alpha [\alpha + (1-\alpha)r]^{n-1} \}$$

$$= (1-r) [\alpha + (1-\alpha)\rho]^{n-1} [(1-\alpha)r], \quad n > 0 \quad (8.24)$$

مثال (٨-١): مركز لإصلاح السيارات تصل إليه السيارات في طلب الخدمة بحيث يكون بالسيارة عطل واحد في أحد مكونات السيارة أو عطلين في مكونين. فإذا كان عدد السيارات التي تصل إلى المراكز وبها عطل واحد تمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون $\lambda_1 = 2/h$ (سيارة كل ساعة)، كذلك عدد السيارات التي تصل إلى المحطة وبها عطلين تتبع توزيع بواسون أيضاً بمعدل $\lambda_2 = 1/h$ ، ونظام الدخول للمركز وفقاً للنظام FcFs، فإذا كان زمن إصلاح السيارة التي بها عطل واحد أو أكثر يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu = 10 \text{ min}$ أو بعبارة أخرى ساعة $1/\mu = 1/6$.

والمطلوب: ١- تحديد نظام الخدمة، ثم أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال (C_x) .

٢- أوجد العدد المتوقع للأعطال في النظام، وفي الأنتظار.

الحل: ١- إذا اعتبرنا السيارة هي المجموعة (الفوج) والعميل (أو المفردة) هي الأعطال وبالتالي، تصل إلى المركز في مجموعات حجمها X حيث $X = 1, 2$ إذا $X = 1$ إذا كان يوجد عطل واحد في السيارة، $X = 2$ عندما يوجد بالسيارة أكثر من عطل)، وبالتالي يكون معدل الوصول الإجمالي λ بحيث:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3/h$$

وبالتالي فإن نظام الخدمة يمثل النظام $(M^{[X]}/M/1): (FcFs/\infty/\infty)$ ،

ومن العلاقة (8.1) نجد أن:

$$P_r(X=1) = C_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

$$P_r(X=2) = C_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{2}{3}$$

فإنه من العلاقة (8.1) أيضاً نجد أن توقع عدد الأعطال $E(X)$ على النحو التالي:

$$E(X) = 1C_1 + 2C_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \approx 2 \text{ عطل}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{6} \longrightarrow r = \rho E(X) = \frac{3}{6} \left(\frac{5}{3} \right) = \frac{5}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} + 4 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{15}{3} = 5$$

ومن العلاقة (8.16) نجد أن العدد المتوقع للأعطال بالمركز L_s على النحو:

$$L_s = \frac{r + \rho E(X^2)}{2(1-r)} = \frac{(5/6) + (3/6)(3)}{2(1-(5/6))} = 7 \text{ أعطال}$$

كذلك من العلاقة (8.17) نجد أن العدد المتوقع للأعطال في الانتظار L_q على النحو:

$$L_q = L_s - r = 7 - \frac{5}{6} = \frac{37}{6} = 6.166 \approx 6 \text{ أعطال}$$

(٣-٨) نموذج خدمة العملاء في مجموعات

Bulk Service (M/M^[Y]/1) Model

في بعض الأنظمة الخدمية يتم خدمة العملاء في شكل مجموعات، مثال ذلك صعود أو هبوط الأسانسير، حيث ينتظر العملاء أمام الأسانسير فإذا كان عددهم أقل من أو يساوي الحمولة يتم دخولهم ويعمل الأسانسير، وإذا كان عدد العملاء أكبر من الحمولة يتم دخول العدد المساوي للحمولة والباقي يظل في طابور الانتظار، كذلك حاملات السيارات ففي الموانئ البحرية يتم تحميل الحاملة بالسيارات المطلوب خروجها من الميناء إلى مكان التسليم، كذلك خدمة العملاء في المطاعم حيث تتم خدمة العملاء في شكل مجموعات، وأمثلة أخرى كثيرة.

فإذا اعتبرنا نظام الخدمة (M/M/1) حيث يصل العملاء إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون بمعلمة λ ، وتحت افتراض وصول عميل واحد خلال الفترة (Δt)، ولكن إذا فرضنا أن خدمة العملاء تتم في شكل مجموعة من العملاء حجمها [Y] يتم خدمتهم معاً في وحدة الزمن (Δt) وفقاً للتوزيع الآسي بمعلمة μ ، حيث Y تمثل متغير عشوائي، ولكن للتبسيط سوف نفترض أن الذين يتم خدمتهم في نفس الوقت عدد ثابت يساوي k ومثل ذلك عدد العملاء في الطائرة.

فإذا كان عدد العملاء في النظام يساوي n، $n \geq k$ فإنه يتم دخول عدد k معاً للخدمة ويتبقى عدد (n - k) في الانتظار، أما إذا كان عدد العملاء في النظام أقل من العدد الذي يتم خدمتهم معاً بمعنى $n < k$ فإن مركز الخدمة يظل بدون عمل (معطل) حتى يكتمل العدد k فتبدأ الخدمة [82].

وبنفس الأسلوب السابق أتباعه في الفصل (٥-٢) يمكن تكوين المعادلات التفاضلية الاحتمالية في حالة الاستقرار steady state على النحو [78, 80]:

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n-k} + \lambda P_{n-1} \quad , \quad n \geq k \quad (8.26)$$

$$0 = -\lambda P_n + \mu P_{n+k} + \lambda P_{n-1} \quad , \quad 1 \leq n < k \quad (8.27)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_k \quad (8.28)$$

والمعادلات التفاضلية المتجانسة في (7.26) يمكن إعادة كتابتها باستخدام المؤثرات operators من الدرجة (k + 1) فتصبح المعادلة المميزة characteristic equation المناظرة للمعادلات (8.26) على النحو التالي [80, 41]:

$$[\mu r^{k+1} + (\lambda + \mu)r + \lambda] P_n = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad (8.29)$$

والمعادلة أعلاه لها عدد (k + 1) من الجذور roots ولتكن $(r_1, r_2, \dots, r_{k+1})$ ، وبأستخدام أساليب حل المعادلات التفاضلية المتجانسة يمكن أثبات أن [24, ٦]:

$$P_n = \sum_{i=1}^{k+1} c_i r_i^n \quad (8.30)$$

حيث c_i مقادير ثابتة (يمكن تحديدها من الشروط المبدئية).

وبما أن $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ ، بالتالي يتم أستبعاد الجذور $r > 1$ لأنه في هذه الحالة c_i المناظرة لها تساوي صفر ويتم قبول الجذور $0 < r < 1$ فقط، وقد أثبتت نظرية رويتش Rouché's theorem أنه يوجد جذر واحد فقط من (k + 1) جذر وسوف نرمز له بالرمز r_0 حيث $0 < r_0 < 1$ ، وبالتعويض في الطرف الأيمن للمعادلة (7.30) نجد أن:

$$P_n = c r_0^n \quad , \quad n \geq k - 1 \quad , \quad 0 < r_0 < 1 \quad (8.31)$$

ومن المعادلة (8.28) نجد أن:

$$P_k = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = c r_0^k \longrightarrow c = \frac{\lambda P_0}{\mu r_0^k} \quad (8.32)$$

وللحصول على P_0 يتم بالتعويض في المعادلة (7.27) بـ P_{n+k} فنجد ان:

$$P_0 r_0^n = P_n - P_{n-1} \quad , \quad 1 \leq n \leq k \quad (8.33)$$

والمعادلة (8.33) تمثل معادلة فروق خطية غير متجانسة، بوضع $n=1$ ثم بالتعويض المتتالي بقيم n أعتبر من $n=1$ يمكن الحصول على قيم P_n المختلفة، كذلك يمكن الحصول على P_n بحل المعادلات (7.33) كمعادلات فروق خطية غير متجانسة **nonhomogenous linear difference equations** ويكون الحل على النحو التالي [80]:

$$P_n = c_1 + c_2 r_0^n \quad , \quad (8.34)$$

$$c_1 = P_0 - c_2 \quad , \quad c_2 = -P_0 r_0^2 / (1 - r_0)$$

وبالتعويض بقيم c_1, c_2 في الطرف الأيمن لـ (7.34) نجد أن:

$$P_n = \begin{cases} \frac{P_0 (1 - r_0^{n+1})}{(1 - r_0)} \quad , & 1 \leq n < k \\ \frac{P_0 \lambda r_0^{n-k}}{\mu} \quad , & n \geq k \end{cases} \quad (8.35)$$

ومن الشرط $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ يمكن الحصول على P_0 على النحو التالي:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(1 - r_0^{n+1})}{(1 - r_0)} + \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=k}^{\infty} r_0^{n-k} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\mu r_0^{k+1} - (\lambda + \mu) r_0 + \lambda + \mu k (1 - r_0)}{\mu (1 - r_0)^2} \right]^{-1} \quad (8.36)$$

ولكن من المعادلة المميزة (8.29) نجد أن:

$$[\mu r_0^{k+1} - (\lambda + \mu) r_0 + \lambda] P_n = 0 \quad (8.37)$$

وبالتعويض بالطرف الأيسر في المعادلة (7.37) في الطرف الأيمن للمعادلة (7.36) نجد أن:

$$P_0 = \left[\frac{0 + \mu k (1 - r_0)}{\mu (1 - r_0)^2} \right]^{-1} = \frac{(1 - r_0)}{k} \quad (8.38)$$

وبالتالي فإن العدد المتوقع للعملاء في النظام L_S على النحو:

$$L_S = \frac{r_0}{1 - r_0}$$

كذلك العدد المتوقع في الانتظار L_q حيث:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu}$$

كذلك الزمن المتوقع للعميل في النظام W_S حيث:

$$W_S = \frac{r_0}{\lambda (1 - r_0)}$$

كذلك زمن الانتظار المتوقع للعميل في الانتظار W_q حيث:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu}$$

مثال (٢-٨): في إحدى محطات تنظيف السيارات بمكينة كهربائية حيث تصل السيارات للمحطة للتنظيف وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل $\lambda = 20/h$ ، ووحدة تشغيل الماكينة لتنظيف سيارتين معاً يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي بمعلمة $\mu = 1/5 \text{ min}$.
والمطلوب:

١ - حدد نظام الخدمة،

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات في المحطة P_n ،

٣- أوجد L_q ، L_s .

الحل: ١- النموذج المناظر لنظام عمل المحطة ($M/M^k/1$) حيث:

$$\mu = 1/5 \text{ min} = 12/h \quad , \quad \lambda = 20/h \quad , \quad k = 2$$

٢- لإيجاد P_n نتبع الخطوات التالية:

أ- المعادلة المميزة:

$$[\mu r_0^{k+1} - (\lambda + \mu) r_0 + \lambda] P_n = 0 \longrightarrow$$

$$12r^3 - (32)r + 20 = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = 0.884 \quad , \quad r_3 = -1.8 \longrightarrow$$

$$r_0 = r_2 = 0.884 \longrightarrow$$

$$P_0 = \frac{1 - 0.884}{2} = \frac{0.116}{2} = 0.058$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(0.058)[1 - (0.884)^{n+1}]}{1 - 0.884} & , \quad n = 1 \\ \frac{(0.058)(20)(0.884)^{n-2}}{12} & , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

-٣

$$L_s = \frac{r_0}{1 - r_0} = \frac{0.884}{1 - 0.884} = 7.621 \approx 8 \text{ سيارات}$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = 7.621 - \frac{20}{12} = 5.9 \approx 6 \text{ سيارات}$$

(٤-٨) نموذج الخدمة وفقاً لتوزيع إيرلنج

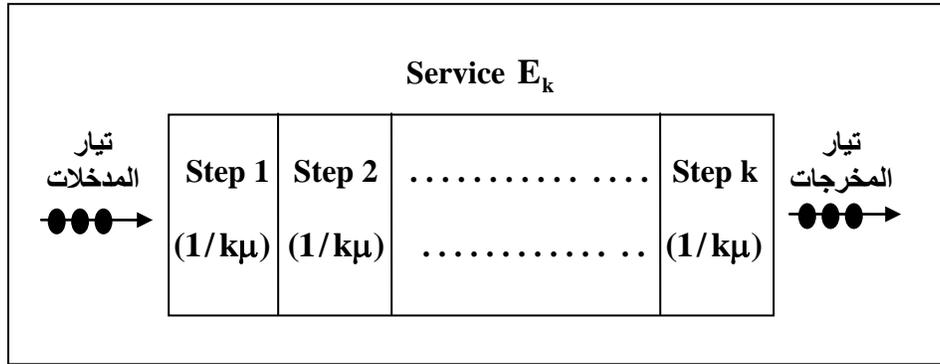
Erlang Service Model ($M/E_k/1$)

في كثير من المراكز الخدمية تتم خدمة العميل داخل المركز على k من الأجزاء (التي ليست بالضرورة أن تكون متتالية) المستقلة عن بعضها وزمن الخدمة المتوقع في كل جزء متساوي مع زمن الخدمة المتوقع في أي جزء آخر ويساوي $(1/k\mu)$ فإذا كان زمن الخدمة في الجزء الواحد يتبع التوزيع الآسي بتوقع $(1/k\mu)$ بالتالي فإن زمن الخدمة في المركز هو عبارة عن مجموع k من المتغيرات العشوائية المستقلة (i.i.d.) أو بعبارة أخرى زمن الخدمة (t) في المركز يمثل متغير يتبع توزيع إيرلنج بمعلمتين (μ, k) وبدالة كثافة احتمال $f(t)$ حيث:

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k t^{k-1} e^{-\mu k t}}{(k-1)!}, \quad t > 0$$

ويوجد العديد من أنظمة الخدمة التي تتم فيها خدمة العميل في عدد من المراحل أو الأجزاء المستقلة مثل مركز إصلاح السيارات، أو التليفزيونات، الخ. والشكل التالي يوضح النظام $(M/E_k/1):(FcFs/\infty/\infty)$

شكل (٨-١): يوضح نظام الخدمة $(M/E_k/1)$



فإذا أشرنا إلى احتمال وجود عدد n عميل في النظام والعميل الموجود في الخدمة في الجزء رقم (i) في الزمن t بالرمز $P_{n,i}(t)$ بحيث $i = 1, 2, \dots, k$. فإذا فرضنا انتقال العميل داخل مركز الخدمة من جزء لآخر من الخلف backward بمعنى أن الجزء الأول يكون رقم (k) والجزء (1) يكون الجزء الأخير الذي بعد انتهاء خدمة العميل يترك العميل النظام.

فبأستخدام نفس الأسلوب السابق أتباعه في الباب الخامس لأشتقاق المعادلات في حالة الأستقرار نحصل على المعادلات التالية:

$$0 = -(\lambda + k\mu)P_{n,i} + k\mu P_{n,i+1} + \lambda P_{n-1,i}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq i \leq k-1 \quad (8.39)$$

$$0 = -(\lambda + k\mu)P_{n,k} + k\mu P_{n+1,1} + \lambda P_{n-1,k}, \quad n \geq 2 \quad (8.40)$$

$$0 = -(\lambda + k\mu)P_{1,i} + k\mu P_{1,i+1}, \quad 1 \leq i < k-1 \quad (8.41)$$

$$0 = -(\lambda + k\mu)P_{1,k} + k\mu P_{2,1} + \lambda P_0 \quad (8.42)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_{1,1} \quad (8.43)$$

وحل المعادلات (8.39)-(8.43) يدوياً للحصول على صياغة رياضية عامة للتوزيع P_n ليس بسيط وبالتالي يكون أيضاً من الصعب الحصول على مؤشرات كفاءة النظام L_s, L_q, W_s, W_q . ولكن يمكن الحصول على P_n بطريقة غير مباشرة عن طريق أستخدام التوزيع الأحمالي لعدد العملاء في النظام $(M^{[k]}/M/1): (FcFs/\infty/\infty)$ وسوف نشير له بالرمز $P_n^{(b)}$ والتي سبق كيفية الحصول عليها من (8.24) في الفصل (٢-٨).

فأحتمال الحالة الثنائية bivariate state (n,i) في النظام محل الدراسة $(M/E_k/1)$ يكافئ احتمال الحالة $[(n-1)k+i]$ في النظام $(M^{[k]}/M/1)$ على أعتبار أن عدد أجزاء الخدمة للعميل الواحد تمثل حزمة من العملاء. وقد أثبت Prabhu سنة ١٩٩٧ [80, 69] أن:

$$P_n = \sum_{j=(n-1)k+1}^{nk} P_j^{(b)}, \quad n \geq 1 \quad (8.44)$$

حيث:

$$P_0 = P_0^{(b)} \quad (8.45)$$

ثم أمكنة اشتقاق مؤشرات كفاءة النظام على النحو التالي:

$$W_q = \frac{k+1}{2k} \left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right], \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (8.46)$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{k+1}{2k} \left[\frac{\rho^2}{(1-\rho)} \right] \quad (8.47)$$

$$L_s = L_q + \rho \quad (8.48)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (8.49)$$

مثال (٨-٣): في إحدى الكليات يوجد شبك لدفع المصروفات الدراسية حيث يصل الطلاب إلى الشباك وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل دقيقة $\lambda = 4/15$ ، حيث يقدم الطالب للموظف القائم بالتحصيل مبلغ المصروفات فيقوم الموظف بالآتي: ١- تدوين أسم الطالب على الحاسب، ٢- أستخراج إيصال، ٣- طباعة الإيصال، ٤- تسليمه للطالب (ويمثل زمن الخدمة هنا متغير يتبع توزيع إيرلنج بمعلمة $k = 4$ وبتوقع دقيقة $E(t) = 1/\mu = 2.5$ ، وتباين $\sigma^2(t) = \frac{25}{16}$ والمطلوب:

١- أوجد زمن الأنتظار المتوقع للطالب.

٢- أوجد الطول المتوقع للصف في الأنتظار.

٣- أوجد زمن أنتظار الطالب في النظام (دفع المصروفات).

الحل: يمثل نظام الخدمة في هذه الحالة النظام $(M/E_4/1):(FcFs/\infty/\infty)$ وبالتالي فإن:

$$k = 4 \quad , \quad \lambda = \frac{4}{15} \quad , \quad \mu = \frac{2}{5} \quad , \quad \rho = \frac{2}{3} \longrightarrow$$

$$1- W_q = \frac{k+1}{2k} \left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right] = \frac{5}{8} [5] = \frac{25}{8} \approx 3.1 \text{ دقيقة}$$

$$2- L_q = \lambda W_q = \frac{4}{15} \left(\frac{25}{8} \right) = \frac{5}{6} \approx 1 \text{ طالب}$$

$$3- L_s = L_q + \rho = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \approx 2 \text{ طالب}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3/2}{4/15} = \frac{45}{8} \approx 5.6 \text{ دقيقة}$$

مثال (٤-٨): في أحد مراكز البريد يوجد احد الشبابيك لإرسال الطرود، التي يتطلب وزنها. حيث يقوم القائم على الخدمة بالوزن أولاً ثم تحديد التكلفة للعميل ثانياً. فإذا كان العملاء يصلون إلى المركز وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع $\lambda = 10/h$ ، كذلك وزن الطرد يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/30h$ ، كذلك تحديد التكلفة للعميل متغير أيضاً يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/30h$. والمطلوب:

١- تحديد نوع وخصائص النظام للخدمة.

٢- تحديد زمن الانتظار المتوقع للعميل.

٣- تحديد العدد المتوقع للعملاء المنتظرين.

الحل: ١- يمكن أن يمثل نظام الخدمة بالنظام $(M/E_2/1):(FcFs/\infty/\infty)$ بحيث:

$$k = 2 \quad , \quad \lambda = 10/h \quad , \quad 1/\mu = 1/15h \quad , \quad \rho = \frac{10}{15} \longrightarrow$$

$$W_q = \frac{k+1}{2k} \left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right] = \frac{2+1}{4} \left[\frac{10/15}{15(1-(10/15))} \right] = \frac{2}{15} h = 8 \text{ دقائق}$$

$$L_q = \lambda W_q = 10 \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \approx 1 \text{ عميل}$$

$$L_s = L_q + \rho = \frac{4}{3} + \frac{10}{15} = 2 \text{ عميل}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} h = 12 \text{ دقيقة}$$

مثال (٥-٨): تقوم إحدى شركات إنتاج المولدات الكهربائية بحيث يتم اختبار المولد المنتج على مرحلتين قبل عرضه في السوق. فإذا كانت المولدات المنتجة تصل إلى مركز الاختبار وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل يومياً $\lambda = 5$ ، وزمن اختبار المولد في المرحلة الأولى يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/16$ (يوم)، كذلك زمن اختبار المولد في المرحلة الثانية متغير يتبع التوزيع الآسي أيضاً بتوقع $1/16$ (يوم). حيث أن الاختبارين مستقلين عن بعضهما. والمطلوب:

١- عرف العميل ثم حدد نوع الخدمة.

٢- أوجد عدد المولدات المتوقع أنتظارها للاختبار، ثم أوجد زمن الأنتظار للمولد حتى يتم اختبارها.

الحل: ١- يمكن أن يعتبر المولد هو العميل، ويمكن تمثيل نظام الخدمة في هذه الحالة بالنظام $(M/E_2/1):(\infty/\infty)$ بحيث:

$$k = 2 \quad , \quad \lambda = 5 \quad , \quad \mu = 16 \quad , \quad \rho = \frac{5}{16}$$

٢- الزمن المتوقع لأنتظار المولد للاختبار على النحو:

$$W_q = \frac{k+1}{2k} \left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right], \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{2+1}{4} \left[\frac{5/16}{16[1-(5/16)]} \right] = \frac{15}{704} \text{ يوم}$$

$$L_q = \lambda W_q = 5 \left(\frac{15}{704} \right) = \frac{75}{704} \approx 0 \text{ مولد}$$

Exercises

٥-٨) تمرينات

(١-٨) أشتق الدالة المولدة للأحتمالات للتوزيع P_n في (7.8).

(٢-٨) أثبت أن النموذج $(M^{[X]}/M/1)$ يكافئ النموذج $(M/M/1)$ عندما $X = 1$

(٣-٨) أشتق الدالة المولدة للأحتمالات للتوزيع P_n في (7.36).

(٤-٨) أثبت أن النموذج $(M/M^{[k]}/1)$ يكافئ النموذج $(M/M/1)$ عندما $k = 1$.

(٥-٨) أعتبر النموذج $(M^{[X]}/M/1)$ ، فإذا فرضنا أن المتغير X عشوائي، كذلك معدل الخدمة $\mu = 2/h$ ويصل العملاء في نوعين من المجموعات، المجموعة الأولى تتكون من عميل واحد وتصل وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل $\lambda_1 = 1/h$ والمجموعة الثانية تتكون من عميلين بمعدل $\lambda_2 = 2/h$ وتتبع توزيع بواسون أيضاً.

المطلوب: أ- أشتق التوزيع الاحتمالي P_n في هذه الحالة.

ب- من (أ) أوجد W_q ، W_s ، L_q ، L_s .

(٦-٨) في أحد الأرصفة بأحد الموانئ البحرية، حيث تصل السفن المحملة بالسيارات المستوردة ويتم تفريغها (حيث عدد السيارات التي يتم تفريغها يمثل متغير يتبع توزيع بواسون) بمعدل $\lambda = 10/h$ ، فإذا كانت حاملة السيارات لأخراج هذه السيارات خارج الميناء تتسع لحمل 5 سيارات في نفس الوقت، وبعد تحميلها بـ 5 سيارات تتحرك بالسيارات خارج الميناء. فإذا كان زمن الخدمة للحاملة متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu = 2/h$.

المطلوب: أ- أوصف نظام الخدمة بالنسبة للحاملة.

ب- أوجد التوزيع الاحتمالي P_n لعدد السيارات المفرغة ويتم حملها للخارج.

ج- أوجد W_q ، W_s ، L_q ، L_s .

(٧-٨) أعتبر النظام $(M^{[X]}/M/1):(FcFs/\infty/\infty)$

١- كون معادلات الأستقرار ثم أشتق التوزيع P_n .

٢- بأستخدام التوزيع أوجد المؤشرات: W_q, W_s, L_q, L_s

(٨-٨) أعتبر النظام $(M/M^{[k]}/1):(FcFs/\infty/\infty)$ ، حيث k مقدار ثابت

١- كون معادلات الأستقرار ثم أشتق التوزيع P_n .

٢- أوجد مؤشرات كفاءة النظام.

(٩-٨) أعتبر نظام الخدمة $(M^{[3]}/M/1):(FcFs/\infty/\infty)$ بمعدل خدمة $\mu = 3/h$

حيث يصل العملاء إلى النظام في مجموعات حجم المجموعة 3 عملاء، فإذا كان معدل وصول المجموعات $\lambda = 2/h$. المطلوب:

١- كون معادلات الأستقرار ثم أشتق التوزيع P_n .

٢- أستخدم أسلوب الدالة المولدة للأحتمالات للحصول على التوزيع P_n .

٣- أوجد مؤشرات كفاءة النظام.

(١٠-٨) أعتبر النظام $(M/E_k/1):(FcFs/\infty/\infty)$ فإذا فرضنا أن: $k = 2$ ،

$\lambda = 5$ ، $\mu = 10$.

١- أوجد الاحتمالات التالية: P_0, P_1, P_2

(١١-٨) أتوبيس للرحلات حمولته 30 فرد، بحيث يتحرك للرحلة عند أكمال العدد، فإذا

كان العملاء يصلون للأتوبيس وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل $\lambda = 3/\text{min}$ ، فإذا كانت الفترة التي تستغرقها الرحلة تمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع

$1/\mu = 50 \text{ min}$.

١- كون معادلات الأستقرار.

٢- أوجد مؤشرات كفاءة النظام.

(١٢-٨) أعتبر نظام الخدمة $(M/E_3/1):(FcFs/\infty/\infty)$

١- أشتق معادلات

٢- أوجد التوزيع الأحمالي P_n .

٣- أوجد مؤشرات كفاءة النظام عندما $\mu = 15$, $\lambda = 10$.

الباب التاسع
دراسة حالة
Case Study

Introduction	(١-٩) مقدمة
Structure Model	(٢-٩) بناء النموذج
Tests for Stationary	(٣-٩) أختبارات الأستقرار
Tests for Independence	(٤-٩) أختبارات الأستقلال
	(٥-٩) توفيق التوزيعات وأختبارات جودة التوفيق
Fitting Distributions and Goodness of Fitting Tests	
Case Study	(٦-٩) دراسة حالة
Exercises	(٧-٩) تمرينات

Introduction

(١-٩) مقدمة

يهدف هذا الباب إلى تقديم المراحل التي يجب المرور بها عند بناء واختيار نموذج الصفوف المناسب الذي يمثل النظام محل الدراسة.

ويتطلب بناء نموذج الصفوف الإلمام الجيد بأساليب الإحصاء الوصفي والإحصاء التحليلي وإجادة استخدامها، وبصفة خاصة أساليب اختيار العينات وخصائصها، وأساليب التقديرات، وأساليب الأختبارات المعلمية واللامعلمية [٥، ٧].

وفي الفصل التالي سوف نقدم المراحل المتتالية التي يجب إتباعها لبناء واختبار نموذج الصف المناسب للنظام محل الدراسة.

ومن الشروط التي يجب توافرها شرط الاستقرار للمتغيرات محل الدراسة خلال الفترات الزمنية لبناء واستخدام نموذج الصف، لذلك في الفصل (٨-٣) نقدم بعض أختبارات الاستقرار مثل اختبار Mann-Whitney-Wilcoxon test اللامعلمي.

كذلك أيضاً وجود شروط استقلال المتغيرات واستقلال المشاهدات للمتغير الواحد خلال فترة الدراسة لذلك في الفصل (٩-٤) نقدم بعض أختبارات الاستقلال مثل اختبار Spearman's Rank-Correlation test لأختبار استقلال المتغيرات عن بعضها، وكذلك اختبار Durbin-Watson test لأختبار استقلال المشاهدات عن بعضها للمتغير الواحد.

وفي الفصل (٩-٥) نقدم كيفية توفيق التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات التي تكون النظام وأختبار جودة التوفيق مثل اختبار كا^٢ أو اختبار Kolmogorov-Simrnov test.

وأخيراً في الفصل (٩-٦) نقدم دراسة حالة نوضح من خلالها المراحل المتتالية لبناء نموذج الصفوف والأختبارات المقدمة.

Structure Model**(٢-٩) بناء النموذج**

في الباب الأول بالفصل (١-٥) أشرنا باختصار إلى أن اختيار وبناء نموذج الصف يتطلب المرور بعدة مراحل متتالية، تتمثل في المراحل التالية:

المرحلة الأولى: توصيف النظام

وفي هذه المرحلة يتم وصف النظام محل الدراسة وأسلوب تشغيله ومكوناته بأسلوب إحصائي. كذلك تحديد متغيرات (عناصر) النظام المتمثلة في:

أ- عدد العملاء الذين يصلون للنظام arrivals number في وحدة الزمن، أو تحديد الفترة الزمنية بين وصول عميلين على التوالي interarrival times (تيار المدخلات)،

ب- أزمنة خدمة العملاء service times في كل مركز خدمة، أو أزمنة خروج العملاء المنتهي خدمتهم من النظام (تيار المخرجات).

المرحلة الثانية: الدراسة الإحصائية الوصفية

في هذه المرحلة يتم:

- ١- تحديد الفترة الزمنية التي يتم فيها الدراسة وجمع البيانات.
- ٢- تحديد حجم وأسلوب اختيار العينات.
- ٣- جمع البيانات عن المتغيرات السابق تحديدها في المرحلة الأولى والتي تمثل أهم عناصر النظام من مشاهدات عينة أو أكثر.
- ٤- من البيانات يتم حساب مؤشرات الموضع مثل المتوسط، المنوال، ... الخ، كذلك مؤشرات التشتت مثل التباين، الانحراف المعياري، ... الخ، كذلك حساب معامل التفرطح والألتواء بالنسبة لكل متغير على حدة.

٥- بالنسبة لكل متغير يتم إيجاد التوزيع التكراري والتوزيع النسبي ورسم التوزيع التكراري النسبي وتحديد شكله بيانياً.

المرحلة الثالثة: الأختبارات اللامعلمية

تتطلب نماذج الصفوف السابق تقديمها في الأبواب السابقة الشروط التالية:

- ١- شرط استقرار كل متغير من المتغيرات مع الزمن محل الدراسة خلال فترة الدراسة. لذلك لا بد من اختبار هذه المتغيرات خلال الفترة من حيث الاستقرار.
- ٢- شرط استقلال (الأستقلال الإحصائي) المتغيرات عن بعضها البعض، وذلك يتطلب اختبار استقلال المتغيرات عن بعضها البعض.
- ٣- شرط استقلال المشاهدات بالنسبة للمتغير الواحد عن بعضها، وذلك يتطلب اختبار استقلال (أو عدم ارتباط) هذه المشاهدات مع بعضها.

وفي هذه المرحلة يتم استخدام الأختبارات اللامعلمية *nonparametric tests*، كما سوف نوضح بعض الأختبارات اللامعلمية في الفصلين التاليين مع توضيح إجراء كل اختبار من خلال بعض الأمثلة.

المرحلة الرابعة: توفيق التوزيعات واختبار جودة التوفيق

في هذه المرحلة يتم توفيق التوزيع الاحتمالي الملائم لكل متغير من المتغيرات العشوائية محل الدراسة (التي تمثل عناصر النظام)، كذلك اختبار جودة التوفيق لكل توزيع. ويتطلب ذلك الآتي:

١- من بند (٥) بالمرحلة الثانية يمكن افتراض توزيع احتمالي نظري ملائم للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة.

٢- تقدير معالم التوزيع المفترض باستخدام طرق التقدير الإحصائية لمعاملات التوزيع مثل طريقة العزوم *moments method* أو طريقة المربعات الصغرى

least square method أو طريقة الأمكان الأكبر maximum likelihood
[55, 23, ٧] method.

٣- أختبار جودة التوفيق التوزيع النظري السابق أفترضه وتقدير معلماته في (١)، (٢)
بأستخدام أحد أختبارات جودة التوفيق goodness fit tests.

المرحلة الخامسة: أختيار نماذج الصفوف

وفي هذه المرحلة يتم تحديد نموذج الصف queueing model الممثل للنظام وفقاً
لخصائص النظام (السابق دراستها في المرحلة الأولى) ووفقاً للتوزيعات الاحتمالية التي
تم توفيقها في المرحلة الرابعة.

أما بالنسبة لأنظمة الصفوف المعقدة والتي لا يتوافر فيها شروط نماذج الصفوف
السابق تقديمها في الأبواب السابقة، فإنه يتم دراستها بأستخدام الأساليب العديدة.
وتعتبر أساليب المحاكاة simulation techniques من أهم هذه الأساليب العديدة
التي تتناول أنظمة الصفوف المعقدة وبصفة خاصة بعد التطور الكبير في الحاسبات
الآلية (أجهزة الكمبيوتر) حيث السعة الكبيرة في تخزين البيانات والقدرة الفائقة على
إجراء العمليات الحسابية المعقدة. وفي الباب الثاني عشر سوف نقدم أحد أساليب
المحاكاة في دراسة بعض أنظمة الصفوف [100, 82, 64, 62, 12].

Tests for Stationary

(٣-٩) أختبارات الأستقرار

يعتبر أفترض أستقرار عمليات الصفوف queueing processes مع الزمن، السابق تقديمها في الأبواب السابقة شرط أساسي في بناء نماذج الصفوف المقدمة، حيث يتطلب أستقرار عملية الصف أستقرار العمليات المكونة منها وهي عملية وصول العملاء إلى النظام arrivals process، عملية خدمة العملاء service process في مركز أو أكثر من مراكز الخدمة، ... الخ.

في سنة ١٩٦٦ قدم كل من Cox and Lewis معالجة شاملة لأختبارات الأستقرار للعمليات العشوائية وأعتبر أن أختبارات الأستقرار والمشاكل المرتبطة بها مشاكل إحصائية [23, 67]. حيث قد لا يتوافر في بعض العمليات العشوائية مثل أعداد العملاء الذين يصلون إلى المطارات الجوية أو عدد مكالمات التليفون قد تكون عمليات غير مستقرة nonstationary processes في بعض الفترات الزمنية.

ولأختبار العملية العشوائية من حيث الأستقرار مع الزمن يمكن استخدام أختبار Mann-Whitney-Wilcoxon test وإجراء هذا الأختبار يتم أخذ عينتين في فترتين مختلفتين طول كل منها t فترة زمنية، حيث يتم تقسيم الفترة الأولى إلى فترات جزئية عددها n_1 على النحو [78, 93]:

$$(0 - t_1], (t_1 - t_2], (t_2 - t_3], \dots, (t_{n_1-1} - t_{n_1}]$$

وفي كل فترة جزئية يتم قياس قيمة المتغير العشوائي محل الدراسة، فكانت قيم المشاهدات في هذه الفترات المتتالية على النحو:

$$X_i : X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_1}$$

بالمثل يتم تقسيم الفترة الثانية إلى فترات جزئية عددها n_2 بحيث:

$$(0 - t_1], (t_1 - t_2], (t_2 - t_3], \dots, (t_{n_2-1} - t_{n_2}]$$

وقياس قيم المشاهدات للمتغير في كل فترة جزئية متتالية على النحو:

$$Y_j : y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n_2}$$

وبافتراض أن دالة التوزيع التراكمية للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة X_1 ،
 $i = 1, 2, \dots, n_1$ هي F ودالة التوزيع التراكمية المسحوب منه العينة y_j ، $j = 1, 2, \dots, n_2$ هي G فيتم إجراء الأختبار (أختبار الاستقرار) في الخطوات التالية:

$$H_0 : F = G \quad (1) \text{ الفرض العدمي (العملية مستقرة)}$$

$$H_1 : F \neq G \quad \text{الفرض البديل (العملية غير مستقرة)}$$

(٢) ترتيب مشاهدات العينتين على التوالي ترتيب تصاعدي.

(٣) إعطاء رتبة لكل مشاهدة بالنسبة لكل عينة على حدة.

(٤) حساب مجموع رتب العينة الأولى وليكن يساوي W (حيث W متغير عشوائي بتوقع

μ_W وإنحراف معياري σ_W)، كذلك يتم حساب μ_W ، σ_W على النحو التالي:

$$\mu_W = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} \quad (9.1)$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \quad (9.2)$$

وعندما $n_1, n_2 \geq 10$ فإن المتغير W يؤول إلى المتغير المعتاد (الطبيعي) وبالتالي:

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} \quad (9.3)$$

حيث يتم حساب Z ، حيث Z متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسي .

(٥) تحديد منطقة القبول ومناطق الرفض، ووفقاً لقيمة Z ووفقاً لذلك يتم تحديد استقرار

أو عدم استقرار العملية (المتغير) خلال فترة زمنية معينة.

وفيما يلي سوف نوضح خطوات إجراء الأختبار من خلال المثال التالي.

مثال (١-٩): يرغب أحد البنوك التجارية في معرفة هل عدد العملاء الذين يصلون إلى البنك في يوم العمل خلال فترة 15 يوم عمل (3 أسابيع عمل) متغير عشوائي مستقر أم لا.

لذلك قام البنك بأخذ عينة A من عدد العملاء الذين يصلون إلى البنك يومياً خلال فترة 15 يوم عمل، كذلك أخذ عينة B من أعداد العملاء الذين يصلون إلى البنك يومياً خلال 3 أسابيع أخرى فكانت على النحو الموضح بالجدول التالي.

جدول (١-٩): يوضح أعداد العملاء في يوم العمل في العينتين A,B

رقم يوم العمل	مشاهدات العينة A	مشاهدات العينة B	رقم يوم العمل	مشاهدات العينة A	مشاهدات العينة B
1	100	1681	9	253	118
2	475	65	10	205	911
3	605	101	11	320	420
4	186	739	12	420	115
5	391	243	13	18	201
6	402	631	14	320	52
7	21	311	15	125	300
8	475	152			

هنا نجد أن $n_1 = n_2 = 15 \geq 10$ ويمكن إجراء أختبار Mann-Whitney- Wilcoxon test على النحو التالي.

إذا فرضنا أن F تشير إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير الذي يمثل عدد العملاء في المجتمع المسحوب منه العينة A، G تشير إلى دالة التوزيع التراكمية لعدد العملاء في يوم العمل في المجتمع المسحوب منه العينة B. نتبع الخطوات التالية:

$$(١) \text{ الفرض العدمي (أستقرار المتغير في الفترتين) } H_0 : F = G$$

الفرض البديل (عدم أستقرار المتغير في الفترتين) $H_1 : F \neq G$

٢) ترتيب المشاهدات في العينتين على التوالي ترتيب تصاعدي، ثم إعطاء رتبة لكل مشاهدة بالنسبة لكل عينة كما هو موضح في الجدول التالي.

جدول (٩-٢): لتحديد قيمة الإحصاء W

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
عدد العملاء في اليوم في العينتين مرتبة تصاعدياً	تحديد العينة المناظرة	الرتب ranks	رتب مشاهدات العينة A	رتب مشاهدات العينة B
18	A	1	1	
21	A	2	2	
52	B	3		3
65	B	4		4
100	A	5	5	
101	B	6		6
115	B	7		7
118	B	8		8
125	A	9	9	
152	B	10		10
186	A	11	11	
201	B	12		12
205	A	13	13	
243	B	14		14
253	A	15	15	
300	B	16		16

311	B	17		17
-----	---	----	--	----

تابع جدول (٢-٩)

320	A	18.5	18.5	
320	A	18.5	18.5	
391	A	20	20	
402	A	21	21	
420	A	22.5	22.5	
420	B	22.5		22.5
475	A	24.5	24.5	
475	A	24.5	24.5	
605	A	26	26	
631	B	27		27
739	B	28		28
911	B	29		29
1681	B	30		30
			W=231.5	

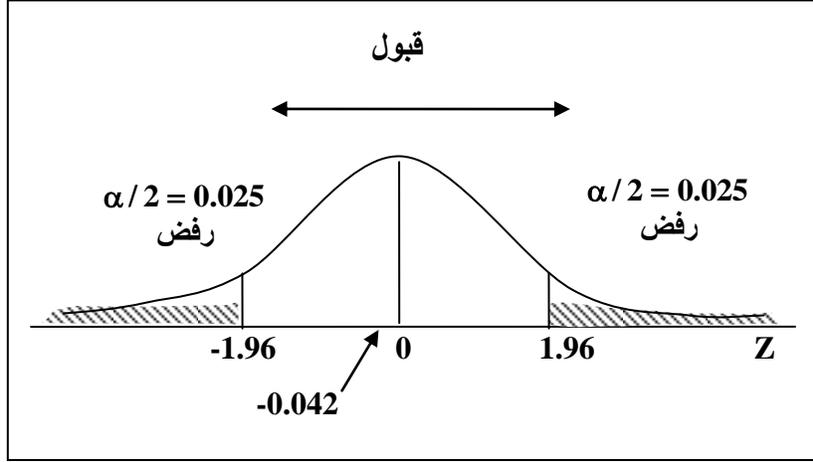
(٣) من المعادلتين (9.1),(9.2) نجد أن:

$$\mu_w = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{15(15 + 15 + 1)}{2} = \frac{15(31)}{2} = 232.5$$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 15(31)}{12}} = 24.11 \longrightarrow$$

$$Z = \frac{W - \mu_w}{\sigma_w} = \frac{231.5 - 232.5}{24.11} = -0.042$$

شكل (٩-١): يوضح منطقة القبول ومناطق الرفض



٤) وبما أن Z المحسوبة تقع في منطقة القبول، بالتالي يمكن قبول الفرض القائل بأستقرار عملية وصول العملاء إلى البنك خلال الفترة محل الدراسة وذلك بدرجة ثقة 95%.

Tests for Independence**(٩-٤) أختبارات الاستقلال**

كذلك من أهم الفروض التي بنيت عليها نماذج الصفوف السابق تناولها في الأبواب السابقة:

١- فرض استقلال المتغيرات التي تمثل عناصر النظام عن بعضها مثل المتغير الذي يمثل أعداد العملاء الذين يصلون إلى النظام والمتغير الذي يمثل أزمدة خدمة العملاء في مركز الخدمة، الخ.

٢- فرض عدم ارتباط (أو استقلال) مشاهدات المتغير الواحد خلال فترة زمنية معينة عن بعضها.

ويمكن استخدام الأختبارات اللامعلمية لأختبار استقلال المتغيرات عن بعضها مثل اختبار سبيرمان للرتب، أو استقلال المشاهدات عن بعضها مثل اختبار الارتباط الذاتي لدرين واتسون.

(٩-٤-١) اختبار سبيرمان للرتب Sperman's Rank-correlation

إذا فرضنا أن X, Y متغيران عشوائيين من مجتمعين مختلفين، والمطلوب اختبار عدم استقلال (أو ارتباط) المتغيران X, Y وذلك من خلال اختبار معامل الارتباط بينهما ρ ، حيث ρ يمثل معامل الارتباط بين المتغيرين في المجتمعين المسحوبان منهما العينتين.

فإذا تم سحب عينتين من المتغيران ولتكونا:

$$X : X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

وتم حساب معامل الارتباط بين مشاهدات العينتين وسوف نشير له بالرمز $\hat{\rho}$ حيث $\hat{\rho}$ يعتبر تقدير لمعامل الارتباط ρ ، كذلك $\hat{\rho}$ يمثل متغير عشوائي. ويمكن إجراء خطوات اختبار سبيرمان للرتب على النحو التالي:

(١) الفرض العدمي (لا يوجد ارتباط) $H_0 : \rho = 0$

الفرض البديل (يوجد ارتباط) $H_1 : \rho \neq 0$

(٢) ترتيب x_j, y_j تصاعدياً فيصبح لدينا المشاهدات المرتبة $x_i^{\downarrow}, y_i^{\downarrow}$.

(٣) نجد الفرق d_i

$$d_i = x_i^{\downarrow} - y_i^{\downarrow} \quad (9.4)$$

ثم نقوم بحساب معامل ارتباط الرتب $\hat{\rho}$ على النحو التالي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (9.5)$$

حيث $\hat{\rho}$ متغير عشوائي بتوقع $\mu_{\hat{\rho}}$ ، وإنحراف معياري $\sigma_{\hat{\rho}}$ على النحو:

$$\mu_{\hat{\rho}} = 0, \quad \sigma_{\hat{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}} \quad (9.6)$$

وعندما تكون $n \geq 10$ فإن $\hat{\rho}$ يؤول إلى المتغير المعتاد وبالتالي فإن المتغير Z حيث:

$$Z = \frac{\hat{\rho} - \mu_{\hat{\rho}}}{\sigma_{\hat{\rho}}} = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{1/(n-1)}} \quad (9.7)$$

متغير يؤول إلى المعتاد القياسي.

(٤) وعند درجة الثقة $(1 - \alpha)$ ، إذا كانت Z تقع في مناطق الرفض فهذا يعني وجود

ارتباط بين X, Y أي عدم الاستقلال بينهما، فيما عدا ذلك يمكن القول أن X, Y

غير مرتبطين (أو مستقلين) بدرجة ثقة $(1 - \alpha)$.

وفيما يلي سوف نوضح خطوات إجراء الأختبار من خلال المثال التالي.

مثال (٩-٢): في أحد المراكز الخدمية أخذت عينة من طول الفترات الزمنية بين وصول عميلين على التوالي بالدقائق x_i ، كذلك أخذت عينة من أزمنا خدمة العملاء في المركز بالدقائق y_j أيضاً فكانت على النحو التالي:

$$x_i = 12, 15, 10, 12, 17, 10, 8, 11, 10, 8, 14, 12$$

$$y_j = 16, 18, 10, 15, 14, 12, 13, 17, 15, 10, 10, 12$$

والمطلوب اختبار الفرض القائل باستقلال الفترات الزمنية بين وصول عميلين على التوالي X وأزمنا خدمة العملاء y وذلك بدرجة ثقة 95%.

الحل: ١- الفرض العدمي (عدم وجود ارتباط) $H_0 : \rho = 0$

الفرض البديل (وجود ارتباط) $H_1 : \rho \neq 0$

٢- نحسب كل من x_i' , y_i' ثم d_i كما هو موضح في الجدول التالي.

جدول (٩-٣): لحساب المتغير d_i

x_j	y_j	x_i'	y_i'	d_i	d_i^2
12	16	8	10	-2	4
15	18	8	10	-2	4
10	10	10	10	0	0
12	15	10	12	-2	4
17	14	10	12	-2	4
10	12	11	13	-2	4
8	13	12	14	-3	9
11	17	12	15	-3	9
10	15	12	15	-3	9
8	10	14	16	-2	4
14	10	15	17	-2	4
12	12	17	18	-1	1
$\sum d_i^2 = 70$					

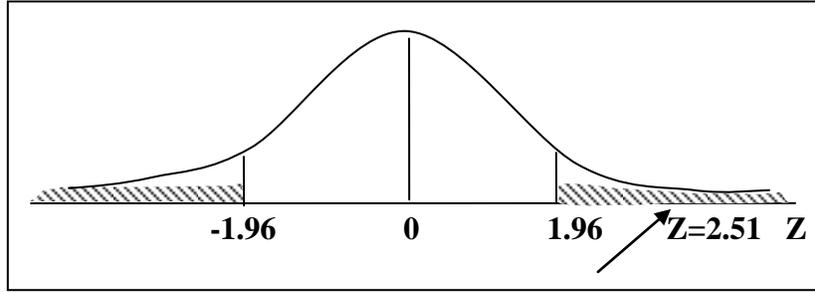
٣- وبما أن $n \geq 10$ ، بالتالي فإن:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(70)}{12(144 - 1)} = 0.756$$

$$\mu_{\hat{\rho}} = 0 \quad , \quad \sigma_{\hat{\rho}}^2 = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{12-1} = 0.091 \longrightarrow$$

$$Z = \frac{\hat{\rho} - \mu_{\hat{\rho}}}{\sigma_{\hat{\rho}}} = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{1/(n-1)}} = \frac{0.756}{\sqrt{0.091}} = 2.51$$

شكل (٨-٢): يوضح منطقة القبول ومناطق الرفض



٤- وبما أن Z تقع في منطقة الرفض، بالتالي نرفض الفرض العدمي ونقبل الفرض البديل القائل بوجود ارتباط (أي عدم استقلال) بين المتغيران X, y بدرجة ثقة 95%.

(٩-٤-٢) استقلال (أو عدم ارتباط) المشاهدات

كما ذكرنا سابقاً أن بناء نموذج الصفوف يتم تحت افتراض أن مشاهدات المتغير الواحد تكون غير مرتبطة (مستقلة) عن بعضها، أو بعبارة أخرى عدم وجود ارتباط ذاتي auto-correlation (أو serial correlation) بين المشاهدات خلال فترة زمنية معينة. ويوجد أختبارات متعددة لأختبار وجود ارتباط ذاتي بين المشاهدات في فترات زمنية جزئية متتالية [42].

وفيما يلي سوف نقدم اختبار داربن واتسون Durbin-Watson test لأختبار وجود ارتباط ذاتي (أي عدم استقلال المشاهدات عن بعضها) أو خلاف ذلك.

إذا فرضنا أن R تشير إلى الارتباط الذاتي بين مشاهدات المتغير الواحد خلال فترة زمنية معينة، وخلال فترة زمنية جزئية ولتكن $[t_0 - t_n]$ أخذت المشاهدات في الفترات الجزئية المتتالية:

$$[t_0 - t_1], (t_1 - t_2), \dots, (t_{n-1} - t_n)$$

على النحو التالي:

$$X_1, X_2, \dots, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$$

ويتم حساب المقياس (الإحصاء) (DW) المرتبط بـ \hat{R} معامل الارتباط الذاتي في العينة)، ويتم إجراء الأختبار على النحو التالي [٧, 45]

$$H_0 : R = 0 \quad (1) \text{ الفرض العدمي (عدم وجود ارتباط ذاتي)}$$

$$H_1 : R \neq 0 \quad \text{الفرض البديل (وجود ارتباط ذاتي)}$$

(٢) نحسب المقياس (DW) على النحو التالي:

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}, \quad 0 < DW < 4 \quad (9.8)$$

(٣) من جدول التوزيع الاحتمالي لـ Durbin-Watson عند مستوي معنوية α وحجم العينة n ، نوجد الحدين d_1, d_2 ثم نحدد مناطق الرفض والقبول كما هو موضح بالشكل التالي.

حيث أن قيمة (DW) ممكن أن تقع في إحدى المناطق التالية:

١- إذا كانت قيمة (DW) بحيث:

$$4 - d_1 < DW < 4 \quad (9.9)$$

أو

$$0 < DW < d_1 \quad (9.10)$$

فهذا يعني رفض الفرض العدمي أي وجود ارتباط ذاتي موجب أو سالب (أو بعبارة أخرى عدم استقلال المشاهدات عن بعضها).

٢- إذا كانت

$$d_2 < DW < 4 - d_2 \quad (9.11)$$

فهذا يعني عدم وجود ارتباط ذاتي، وبالتالي قبول الفرض العدمي.

٣- أما إذا كان

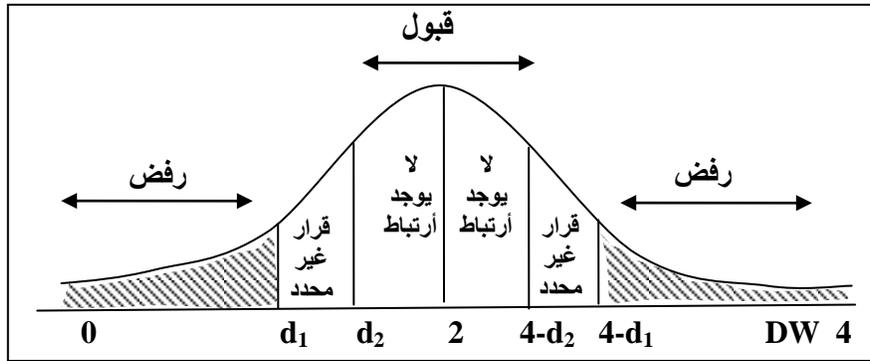
$$d_1 < DW < d_2 \quad (9.12)$$

أو

$$4 - d_2 < DW < 4 - d_1 \quad (9.13)$$

فهذا يعني عدم كفاية البيانات لتحديد هل هناك ارتباط ذاتي أم لا. وفي هذه الحالة يجب أخذ فترة زمنية أطول وزيادة حجم العينة.

شكل (٩-٣): يوضح مناطق اتخاذ القرار



مثال (٩-٣): فيما يلي مشاهدات متتالية لأزمنة الخدمة في أحد المراكز الخدمية تم تسجيلها كل 4 دقائق على التوالي فكانت على النحو التالي:

X_j : 2.0, 2.5, 2.3, 2.2, 2.5, 2.9, 3.0, 3.1, 3.5, 3.9, 4.0,
3.7, 3.9, 3.5, 3.1

أختبر الفرض القائل بعدم وجود ارتباط ذاتي بين مشاهدات العينة باستخدام اختبار دارين واتسون عند درجة ثقة 95%.

الحل: ١- الفرض العدمي (عدم وجود ارتباط) $H_0 : R = 0$

الفرض البديل (وجود ارتباط) $H_1 : R \neq 0$

٢- نكون الجدول التالي.

جدول (٩-٤): يوضح خطوات حساب DW

X_j	$X_j - X_{j-1}$	$(X_j - X_{j-1})^2$	X_j^2
2.0	-----	-----	4
2.5	0.5	0.25	6.25
2.3	-0.2	0.04	5.29
2.2	-0.1	0.01	4.84
2.5	0.3	0.09	6.25
2.9	0.4	0.16	8.41
3.0	0.1	0.01	9.0
3.1	0.1	0.01	9.61
3.5	0.4	0.16	12.25
3.9	0.4	0.16	15.21
4.0	0.1	0.01	16.0
3.7	-0.3	0.09	13.69
3.9	0.2	0.04	15.21
3.5	-0.4	0.16	12.25
3.1	-0.4	0.16	9.61
		$\sum (X_j - X_{j-1})^2 = 1.35$	$\sum X_j^2 = 147.87$

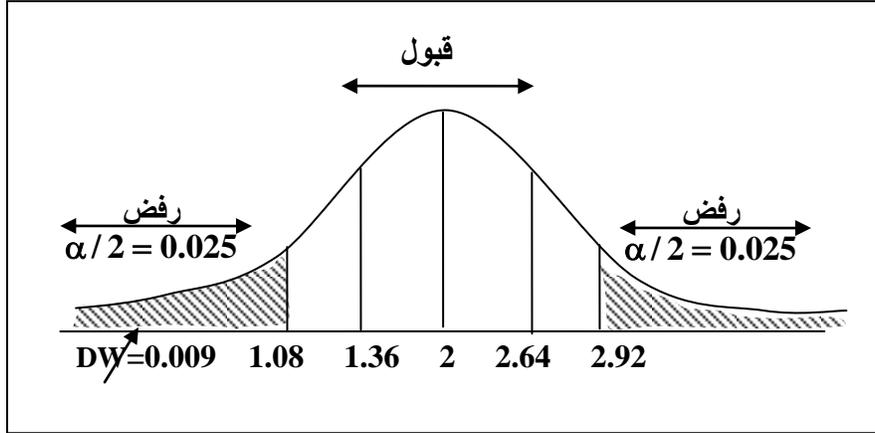
$$DW = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - X_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^n X_j^2} = \frac{1.35}{147.87} = 0.009$$

٣- عند مستوى معنوية 5% وحجم العينة $n = 15$ ، من جدول توزيع داربن واتسون بملحق رقم (٥) نجد أن:

$$d_1 = 1.08 \quad , \quad d_2 = 1.36$$

٤- نحدد مناطق الرفض والقبول كما هو في الشكل التالي.

شكل (٤-٩): يوضح مناطق رفض الفرض العدمي



وبما أن (DW) تقع في منطقة الرفض، إذاً نرفض الفرض العدمي القائل بعدم وجود ارتباط ذاتي بين قيم المشاهدات (أو بعبارة أخرى عدم استقلال المشاهدات عن بعضها)، أي يوجد ارتباط بين المشاهدات وذلك بدرجة ثقة 95%.

(٥-٩) توفيق التوزيعات وأختبارات جودة التوفيق

Fitting Distributions and Goodness of Fitting Tests

من الفصل (٩-٢)، نجد أن المرحلة الرابعة في بناء نموذج الصفوف queueing model، عبارة عن كيفية توفيق (تقدير) التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات في النظام مثل: عدد العملاء الذين يصلون للنظام في وحدة الزمن arrivals number أو الفترة الزمنية بين وصول عميلين على التوالي interarrival time، أو فترة خدمة العميل service time في كل مركز خدمة داخل النظام.

ولتوفيق التوزيع الاحتمالي لمتغير معين ثم اختبار جودة التوفيق نتبع الخطوات التالية
[7 , 45, 65, 80]:

(١) من بند (٥) في المرحلة الثانية بالفصل (٩-٢)، من بيانات العينة للمتغير محل الدراسة يتم إيجاد التوزيع التكراري النسبي ورسمه بيانياً، ومن الشكل يمكن افتراض التوزيع الاحتمالي النظري المناسب المناظر للتوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة، كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

ملحوظة: في حالة عدم إمكانية افتراض توزيع احتمالي نظري مناسب يتم زيادة حجم العينة ثم رسم المنحني التكراري النسبي وبأستخدامه يمكن افتراض توزيع نظري معين مناسب.

(٢) بعد افتراض شكل التوزيع الاحتمالي النظري يتم تقدير معلمات التوزيع الاحتمالي المفترض بأستخدام بيانات العينة بأستخدام أحد طرق التقدير الاحتمالي مثل طريقة العزوم moments method أو طريقة المربعات الصغرى least square method أو طريقة الإمكان الأعظم maximum likelihood method [65,7].

(٣) بعد تقدير معلمات النموذج المفترض، وعند درجة ثقة (أو مستوى معنوية معين) يتم اختبار جودة توفيق النموذج بأحد الأختبارات لجودة التوفيق، وتوجد أختبارات متعددة ومنها:

- اختبار كا^٢ χ^2 test
- اختبار كولموجروف سيمرنوف Kolmogrov-Simrnov test

وفي هذا الفصل سوف نقدم الأختبارين أعلاه.

(٤) إذا تم قبول التوزيع الاحتمالي المفترض بالنسبة لكل متغير من متغيرات النظام محل الدراسة، فإنه يتم استخدام هذه التوزيعات في اختيار نموذج الصفوف وفقاً لخصائص النظام.

أما إذا تم عدم قبول التوزيع الاحتمالي المقدر لأحد المتغيرات، فإنه يتم أخذ عينة أخرى من مشاهدات المتغير بحجم أكبر ويتم إعادة الخطوات من (١-٣).

وسوف نوضح الخطوات السابقة في الفصل التالي من خلال دراسة الحالة التي سوف يتم تقديمها.

(١-٥-٩) اختبار كا^٢ (χ^2)

يشترط استخدام اختبار كا^٢ أن تكون حجم العينة $n \geq 50$ مفردة، كذلك أن تكون عدد المفردات المناظرة لكل فئة f_i بحيث $f_i > 5$ مفردات. ويستخدم هذا الاختبار لأختبار هل التوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة متوافق مع التوزيع الاحتمالي الذي تم توقيفه بدرجة ثقة معينة.

فإذا فرضنا أن $F(X)$ تشير إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة، وأن $F_0(X)$ هي الدالة التراكمية للتوزيع الذي تم توقيفه، وأن X_i تشير إلى مركز الفئة i (أو قيمة المشاهدة i)، f_i تكرار الفئة i حيث $i = 1, 2, \dots, k$.

كذلك إذا فرضنا أن f_i' تشير إلى التكرار المتوقع للفئة i باستخدام التوزيع المفترض، أو بعبارة أخرى:

$$f_i' = P_r(X = x_i) \left(\sum_{i=1}^k f_i \right) \quad (9.14)$$

ولإجراء الأختبار نتبع الخطوات التالية:

$$H_0 : F(X) = F_0(X) \quad (١) \text{ الفرض العدمي}$$

التوزيع النظري المقدر يتفق مع التوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع (التوفيق جيد)

$$H_1 : F(X) \neq F_0(X) \quad \text{الفرض البديل}$$

التوزيع المقدر لا يتوافق مع توزيع المتغير في المجتمع (التوفيق رديء)

(٢) نحسب مقياس الأختبار (الإحصاء) χ^2 على النحو التالي:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'} \quad (9.15)$$

حيث المتغير χ^2 يتبع توزيع كاي^٢ بدرجات حرية h حيث:

$$h = \text{عدد الفئات} - 1 \quad (9.16)$$

(٣) وعند مستوي معنوية α نوجد من جدول χ^2 (ملحق (٣)) عند درجات حرية h

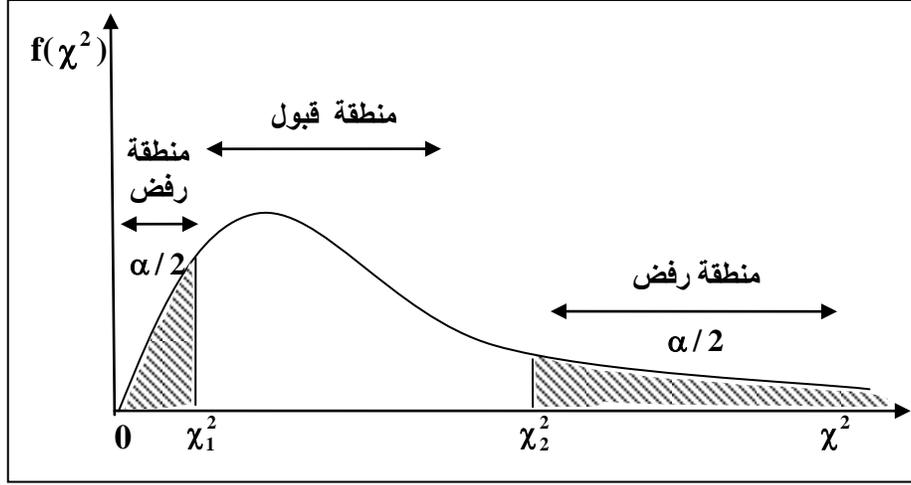
ومستوي المعنوية α يتم تحديد الحدين χ_1^2, χ_2^2 كما هو موضح في الشكل التالي

(٤) إذا كانت χ^2 التي تم حسابها في المعادلة (8.15) تقع في منطقة القبول، نقبل

الفرض العدمي بدرجة ثقة $(1 - \alpha)$ ويعتبر التوفيق جيد.

وسوف نوضح الخطوات أعلاه من خلال المثال التالي [7].

شكل (٥-٩): يوضح مناطق الرفض والقبول



مثال (٤-٩): الجدول التالي يوضح توزيع 200 أسرة حسب عدد الأطفال في الأسرة الواحدة في أحدي المجتمعات العمرانية الحديثة.

جدول (٤-٩): التوزيع التكراري لعدد الأطفال في الأسرة

عدد الأطفال في الأسرة الواحدة	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر (f_i)	31	51	70	32	16	200

المطلوب: (١) أوجد التوزيع التكراري النسبي لعدد الأطفال في الأسرة ثم وض ذلك بيانياً.

(٢) من الشكل البياني في (١)، أفترض توزيع نظري مناسب ثم بأستخدام طريقة العزوم قدر معلمات التوزيع.

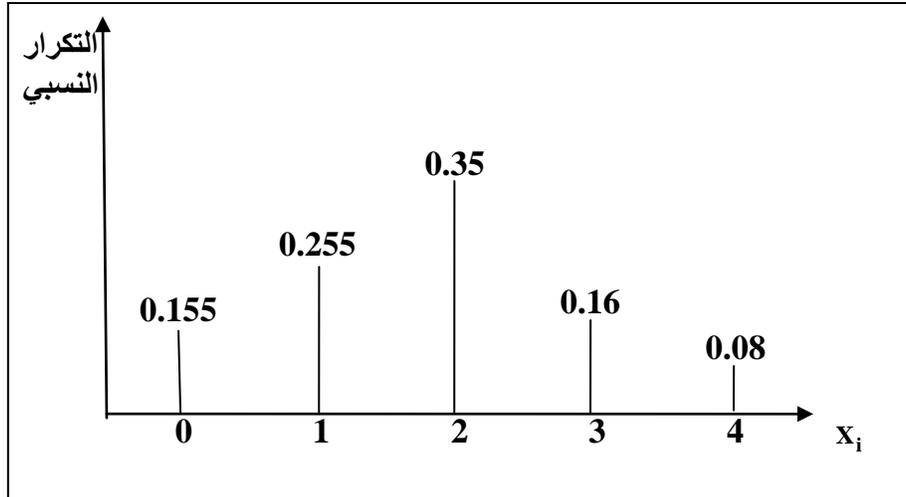
(٣) باستخدام أختبار كا^٢ لجودة التوفيق أختبر الفرض القائل بان التوزيع الاحتمالي لعدد الأطفال في الأسرة الواحدة في المجتمع المسحوب منه العينة متوافق مع التوزيع المقدر في (٢) عند درجة ثقة 95%.

الحل: ١- فيما يلي التوزيع التكراري النسبي والشكل البياني للتوزيع النسبي

جدول (٥-٩): يوضح التوزيع النسبي لعدد الأطفال في الأسرة

عدد الأطفال في الأسرة X_i	0	1	2	3	4	المجموع
التكرار النسبي	0.155	0.255	0.35	0.16	0.08	1.00

شكل (٦-٩): يوضح التوزيع النسبي لعدد الأطفال في الأسرة



من الشكل يمكن افتراض أن التوزيع الاحتمالي للمتغير X_i في المجتمع المسحوب منه العينة يتبع توزيع ذات الحدين بحيث:

$$P_r(X = x_i) = C_{X_i}^n (P)^{x_i} (1-P)^{n-x_i}, \quad x_i = 0,1,2,3,4$$

٢- وبما أن $E(X) = np$ باستخدام طريقة العزوم يمكن إيجاد تقدير المعلمة P وسوف نشير له بالرمز \hat{P} حيث:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i} = n\hat{P}$$

$$1.755 = 4\hat{P} \longrightarrow \hat{P} = 0.439 \approx 0.44$$

٣- ولحساب التكرارات المتوقعة f_i ثم حساب المقياس χ^2 نكون الجدول التالي

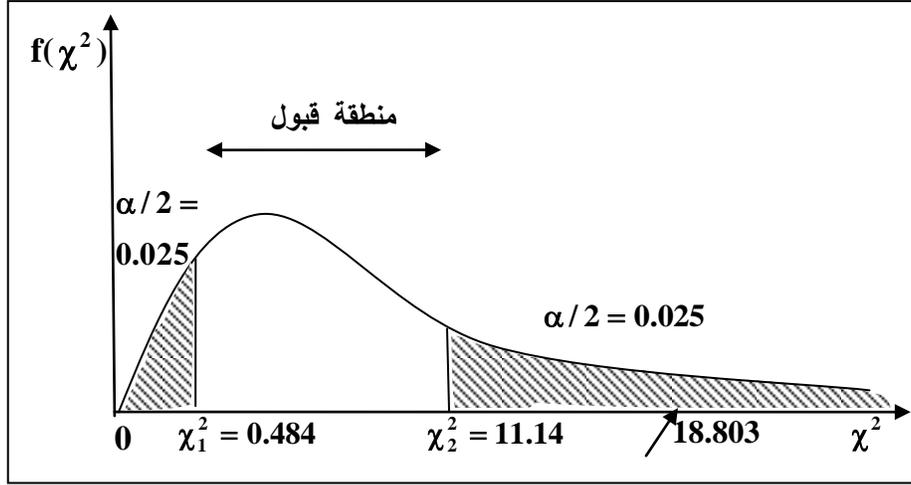
جدول (٦-٨): يوضح خطوات حساب χ^2

X_i	f_i	$P_r(X_i)$	$f_i = P_r(X_i) \sum f_i$	$f_i - f_i$	$\frac{(f_i - f_i)^2}{f_i}$
0	31	0.0983	19.66	11.34	6.54
1	51	0.309	61.8	-10.8	1.88
2	70	0.364	75.8	-2.8	0.093
3	32	0.191	38.2	-6.2	1.006
4	16	0.038	7.6	8.4	9.284
	200	≈ 1.00			18.803

من الجدول أعلاه نجد أن:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_i)^2}{f_i} = 18.803$$

شكل (٧-٩): يوضح مناطق القبول والرفض



٤- من جدول توزيع كاي^٢ بملحق رقم (٣) نجد أن $\chi_1^2 = 0.484$, $\chi_2^2 = 11.14$ عند $\alpha = 0.05$ ودرجات حرية $h = 5 - 1 = 4$

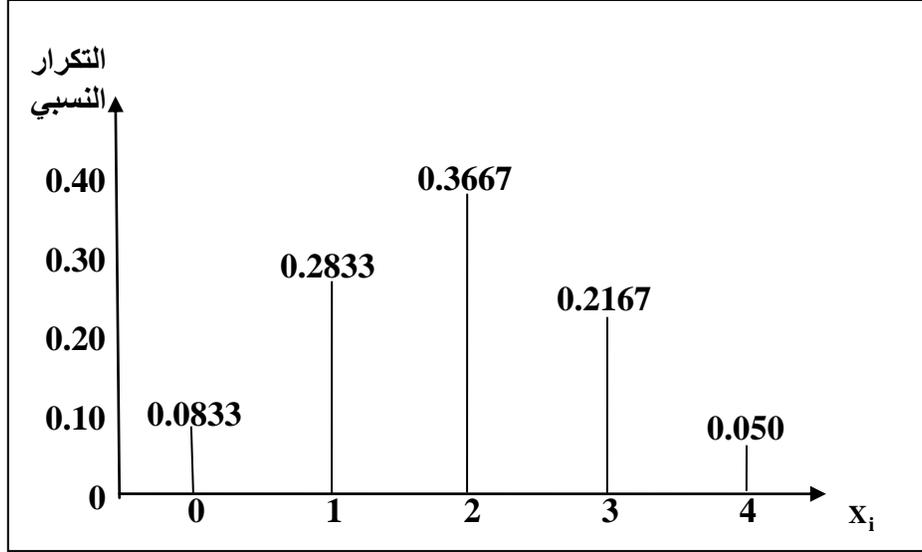
من الشكل نجد أن χ^2 تقع في منطقة الرفض، لذلك نرفض الفرض العدمي القائل بأن التوزيع الاحتمالي المقدر لعدد الأطفال في الأسرة توفيق جيد لتوزيع عدد الأطفال في الأسرة الواحدة في المجتمع المسحوب منه العينة.

لذلك نقوم بزيادة حجم العينة من 200 مفردة إلى 300 مفردة، ثم نقوم بإعادة الخطوات السابقة على النحو التالي. فيما يلي التوزيع التكراري والتكراري النسبي في العينة بحجم $n = 300$

جدول (٧-٩): يوضح التوزيع التكراري النسبي

x_i	0	1	2	3	4	المجموع
(f_i)	25	85	110	65	15	300
التكرار النسبي	0.0833	0.2833	0.3667	0.2167	0.0500	1.00

شكل (٨-٩): يوضح التوزيع التكراري النسبي



من الشكل يمكن أفترض أن التوزيع الاحتمالي لـ x_i يتبع توزيع ذات الحدين بـ

$n = 4$ ، P بحيث:

$$n\hat{P} = \bar{X} \longrightarrow \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 1.84 \longrightarrow \hat{P} = 0.45$$

ثم نكون الجدول التالي

جدول (٨-٩): يوضح حساب χ^2

x_i	f_i	$P_r(x_i)$	$'f_i$	$\frac{(f_i - 'f_i)^2}{'f_i}$
0	25	0.0915	27.45	0.22
1	85	0.2995	71.85	0.511
2	110	0.3675	110.1	0
3	65	0.2002	60.06	0.4077

4	15	0.0410	12.3	0.605
	300	≈ 1.00		1.7437

وعند درجة ثقة 95%، نجد أن χ^2 تقع في منطقة القبول، إذن نقبل الفرض العدمي القائل بأن التوزيع الاحتمالي:

$$P_r(x) = C_x^4 (0.45)^x (0.55)^{4-x}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

توفيق جيد لتوزيع عدد الأطفال في الأسرة الواحدة في المجتمع المسحوب منه العينة بدرجة ثقة 95%.

(٢-٥-٩) أختبار كولموجروف سيمرنوف Kolmogrov-Simrnov test

كما ذكرنا سابقاً أن أختبار كاسا لجودة التوفيق يتطلب أن يكون حجم العينة n بحيث $n \geq 50$ ، كذلك عدد التكرارات في كل فئة يجب أن يزيد عن 5 مفردات. وفي حالة عدم توافر واحد على الأقل من هذين الشرطين يمكن استخدام أختبار لامعني مثل أختبار كولموجروف سيمرنوف.

فإذا فرضنا أن $F(X)$ تشير إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة، كذلك $F_e(X)$ تشير إلى الدالة التراكمية للتوزيع النظري المفترض، كذلك $\hat{F}(X)$ تشير إلى التكرارات النسبية التراكمية من بيانات العينة. وفيما يلي خطوات الأختبار.

$$H_0 : F(X) = F_e(X) \quad \text{الفرض العدمي}$$

التوزيع الاحتمالي النظري المفترض يتفق مع التوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة (التوفيق جيد)

$$H_1 : F(X) \neq F_e(X) \quad \text{الفرض البديل}$$

التوزيع الاحتمالي النظري المفترض لا يتفق مع التوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة (التوفيق رديء)

(٢) إذا فرضنا أن f_i هي التكرار المناظر لمركز الفئة x_i (أو القيمة x_i)، نوجد التكرارات النسبية التراكمية $\hat{F}(X)$ ، كذلك نحسب التكرارات التراكمية $F_e(X)$ باستخدام التوزيع النظري المفترض.

(٣) نحسب المقياس (الإحصاء) K حيث:

$$K = \text{Max.} |\hat{F}(X) - F_e(X)| \quad (9.17)$$

(٤) عند مستوي معنوية α وحجم العينة $n = \sum_i f_i$ نوجد القيمة الحرجة K_n^α من جدول توزيع كولموجوروف سيمرنوف بملحق رقم (٤) ثم نقارن بين K ، K_n^α فإذا كان:

$$K < K_n^\alpha \quad (9.18)$$

نقبل الفرض العدمي، وغير ذلك نرفض الفرض العدمي عند α ، n . وسوف نوضح الخطوات أعلاه من خلال المثال التالي.

مثال (٥-٩): فيما يلي بيانات عدد أعداد المرضى الذين يصلون إلى أحدي العيادات بأحد المراكز الطبية خلال ساعة فترة 30 ساعة متتالية.

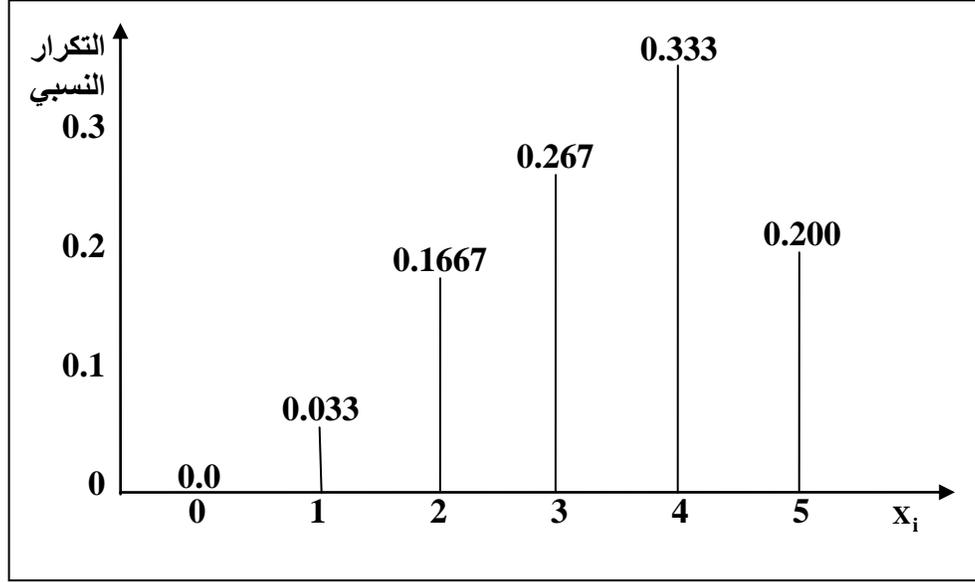
جدول (٩-٩): التوزيع التكراري لعدد المرضى في الساعة

عدد المرضى خلال الساعة (x_i)	0	1	2	3	4	5	المجموع
عدد الساعات (f_i)	0	1	5	8	10	6	30

وفق توزيع احتمالي مناسب لعدد المرضى الذين يصلون إلى العيادة خلال الساعة.

الحل: نوجد التوزيع التكراري النسبي ثم نرسم شكل التوزيع النسبي.

شكل (٩-٩): يوضح التوزيع التكراري النسبي



والجدول التالي يوضح التوزيع التكراري النسبي كذلك التوزيع النسبي التراكمي $\hat{F}(X)$ ، ومن الرسم يتضح أنه يمكن افتراض توزيع بواسون بتوقع λ وبأستخدام طريقة العزوم للتقدير نجد أن:

$$E(X) = \lambda \longrightarrow \lambda = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 3.5$$

جدول (٨-١٠): يوضح حساب المقياس K

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x_i	f_i	التكرار النسبي	$\hat{F}(x_i)$	$f_0(x)$	$F_e(x)$	$ \hat{F}(x_i) - F_e(x) $
0	0	0	0	0.0302	0.030	0.030
1	1	0.033	0.033	0.106	0.1362	0.1032

2	5	0.167	0.200	0.185	0.3212	0.1212 ←
3	8	0.267	0.467	0.216	0.5372	0.0702
4	10	0.333	0.800	0.189	0.7262	0.0738
5	6	0.200	1.000	0.1322	0.8584	0.1416
	30	1		≈ 1		

من الجدول أعلاه نجد أن:

$$K = 0.1212$$

ومن ملحق (٤) نجد أنه عند $\alpha = 0.05$ ، $n = 30$ نجد أن $K_{30}^{(0.05)} = 0.21756$ بالتالي فإن:

$$K = 0.1212 < K_n^\alpha$$

بالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 3.5$ توفيق جيد للتوزيع الاحتمالي للمتغير في المجتمع المسحوب منه العينة.

ملحوظة: حيث تم حساب $f_0(x)$ من دالة الاحتمال

$$f_0(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3.5} (3.5)^x}{x!} , x = 0, 1, 2, \dots \longrightarrow$$

$$f_e(x) = \sum_{t=0}^x \frac{e^{-3.5} (3.5)^t}{t!} , x = 0, 1, 2, \dots$$

Case Study

(٦-٩) دراسة حالة

في هذا الفصل سوف نقدم دراسة حالة لأحد مراكز الأشعة المقطعية بأحدي المحافظات حيث يشتمل على جهاز واحد للأشعة. وترغب إدارة المركز في:

- ١- تقديم دراسة كمية لنظام العمل في المركز من حيث العدد المتوقع للعملاء المترددين على المركز، زمن خدمة العميل على الجهاز، الزمن المتوقع لانتظار العميل،.. الخ.
- ٢- وضع نموذج صف مناسب يمثل النظام.
- ٣- اشتقاق مؤشرات كفاءة النظام بأستخدام النموذج المقترح.
- ٤- تقديم تقرير عن العمل بالمركز لمتخذ القرار في المركز.

لذلك كلفت الإدارة قسم الإحصاء والمتابعة والتخطيط بجمع وتحليل البيانات، ثم بناء نموذج صف مناسب ومنه اشتقاق مؤشرات كفاءة النظام. ولتحقيق هذه الأهداف تم أتباع ما يلي:
أولاً: تقدير التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى المركز، كذلك تقدير توزيع زمن خدمة العميل وذلك من خلال المراحل التالية.

- المرحلة الأولى: ١- نظام الخدمة يتكون من مركز خدمة واحد (جهاز الأشعة).
- ٢- يعمل المركز 12 ساعة عمل في اليوم ويعمل 5 أيام في الأسبوع، وبالتالي فإن المركز يعمل 240 ساعة عمل في الشهر.
- ٣- يصل العملاء إلى المركز مستقلين عن بعض ويتم خدمتهم على الجهاز وفقاً من يأتي أولاً يخدم أولاً - وبعد أنتهاء خدمته يترك المريض المركز فور انتهاء خدمته على الجهاز.

المرحلة الثانية: ١- وفي هذه المرحلة يتم تحديد فترة الدراسة ولتكن بشهر عمل أي 240 ساعة عمل، وخلال هذه الفترة يتم جمع البيانات عن:

أ- عدد العملاء (المرضي) الذين يصلون إلى المركز خلال الساعة وسوف نشير إلى هذا المتغير بالرمز (X)،

ب- زمن خدمة المريض على الجهاز بالدقائق وسوف نشير لهذا المتغير بالرمز (y).

٢- يتم أخذ عينة أو أكثر من العينات العشوائية الطبقيّة حجم كل منها 120 ساعة عمل (حيث تعتبر العينة الطبقيّة أكثر ملائمة في هذه الحالة).

٣- من بيانات العينة يتم تكوين جدول توزيع تكراري لعدد العملاء في الساعة الواحدة كما هو موضح بالجدول التالي.

جدول (٩-١١): التوزيع التكراري لعدد المرضى الذين يصلون إلى المركز خلال الساعة

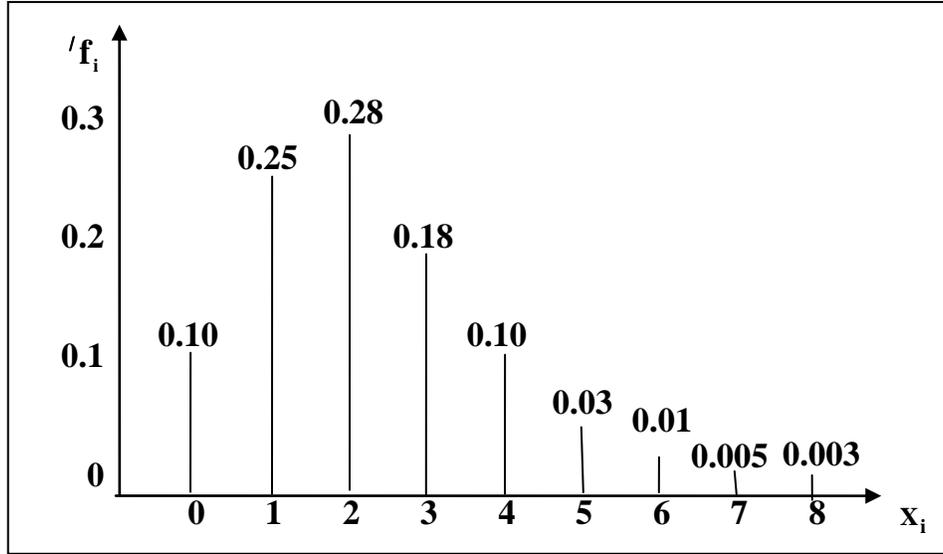
عدد العملاء في الساعة (X)	0	1	2	3	4	5	6	7	المجموع
عدد الساعات f_i	12	30	34	22	12	4	4	2	$\sum f_i = 120$

من الجدول أعلاه نوجد التوزيع التكراري النسبي ونرسم التكرار النسبي المناظر كما هو موضح في الجدول والشكل التالي.

جدول (٩-١٠): التكرار النسبي لعدد العملاء في الساعة

X	التكرار النسبي f_i'
0	0.100
1	0.250
2	0.280
3	0.180
4	0.100
5	0.030
6	0.010
8	0.005
8	0.003
$\sum f_i'$	≈ 1.00

شكل (٩-١٢) التوزيع التكراري النسبي لعدد العملاء في الساعة



٤- من بيانات العينة يتم تكوين التوزيع التكراري لزمان خدمة المريض على الجهاز (y) بالدقائق كما هو موضح بالجدول التالي.

جدول (٩-١١): التوزيع التكراري لزمان خدمة المريض على الجهاز بالدقائق

المدة بالدقائق (y)	0-	5-	10-	15-	20-	25-	30-35	المجموع
عدد المرضى (f_j)	120	75	60	28	10	5	2	$\sum f_j = 300$

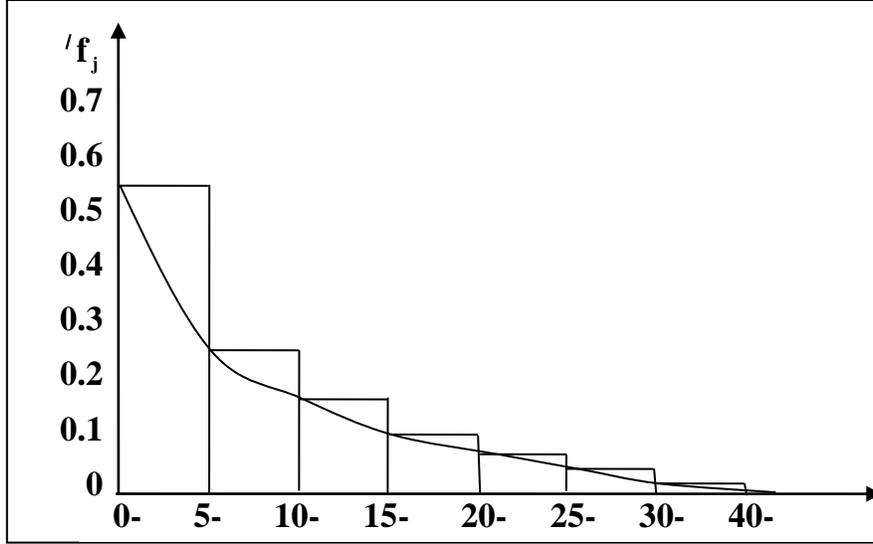
ومن الجدول أعلاه نوجد التوزيع التكراري النسبي والمنحني التكراري النسبي المناظر كما هو موضح بجدول (٩-١١) وشكل (٩-١٣).

المرحلة الثالثة: ١- إجراء اختبارات الأستقرار لكل من المتغيرين X, y خلال فترة الدراسة بأستخدام اختبار **Mann-Whitney-Wilcoxon test** (أنظر الفصل ٨-٣).
 .((٣

جدول (٩-١٢): يوضح التوزيع التكراري النسبي لزمن خدمة العميل بالدقائق

الفئات لـ y بالدقائق	عدد المرضى f_j	مراكز الفئات y_j	التكرار النسبي f_j'
0-	160	2.5	0.533
5-	64	7.5	0.2133
10-	35	12.5	0.1667
15-	20	17.5	0.067
20-	10	22.5	0.0333
25-	6	27.5	0.020
30-35	5	32.5	0.0167
	300		

شكل (٩-١٣): يوضح التوزيع التكراري النسبي لزمن خدمة العميل



المرحلة الرابعة: ١- من الشكل (٩-١٢) يمكن أفترض أن عدد العملاء الذين يصلون إلى المركز خلال ساعة يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ ، وبدالة احتمال:

$$P_r(X_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{X_i}}{X_i!}, \quad X_i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.19)$$

٢- ويمكن تقدير المعلمة λ باستخدام طريقة العزوم [٧] من جدول (٨-١٢) على النحو التالي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i} = \frac{270}{120} = 2.25 \approx 2.3 \longrightarrow \lambda = 2.3$$

٣- ولأختبار جودة توفيق التوزيع في (9.19) عندما $\lambda = 2.3$ ، نستخدم أختبار كولموجروف سيمرنوف Kolmogrov-Simrnov test أنظر الفصل السابق (حيث أن بعض التكرارات أن f_i المناظر لقيم X_i أقل من 5) فإذا أعتبرنا أن $F(X)$ هي دالة التوزيع

التراكمية للمتغير X في المجتمع المسحوب منه العينة، فإنه يتم إجراء الأختبار عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ على النحو التالي:

$$H_0 : F(X) = \sum_{x_i=0}^X \frac{e^{-2.3} (2.3)^{x_i}}{x_i!} \quad \text{أ- الفرض العدمي (التوفيق جيد)}$$

$$H_1 : F(X) \neq \sum_{x_i=0}^X \frac{e^{-2.3} (2.3)^{x_i}}{x_i!} \quad \text{الفرض البديل (التوفيق غير جيد)}$$

ب- نحسب المقياس

$$K = \text{Max.} |F(X) - \hat{F}(X)| = 0.0406 \quad (9.20)$$

حيث $\hat{F}(X)$ هي التكرار النسبي التراكمي كما هو محسوب في الجدول التالي، $F(X)$ هي الدالة التراكمية للتوزيع المفترض.

جدول (٩-١٣): يوضح خطوات حساب K

x_i	f_i	f_i'	$\hat{F}(x_i)$	$F(x_i)$	$ F(x_i) - \hat{F}(x_i) $
0	12	0.100	0.100	0.1003	0.003
1	30	0.250	0.350	0.3309	0.0191
2	34	0.280	0.630	0.5960	0.034
3	22	0.180	0.810	0.7993	0.0107
4	12	0.100	0.910	0.9162	0.0062
5	4	0.030	0.940	0.9700	0.03
6	3	0.010	0.950	0.9906	0.0406 ←
7	2	0.005	1.00	0.9974	0.0026
8	1	0.003	1.00	0.9999	0.0001
	300	≈ 1.00			

ج- ومن جدول توزيع كولموجروف سيمرنوف بملحق رقم (٤) عند $\alpha = 0.05$ نجد أن:

$$K_n^\alpha = K_{120}^{0.05} = 0.124 \quad (\text{أنظر مرجع [62] ص 918})$$

$$K < K_n^\alpha \quad \text{وبما أن}$$

نقبل الفرض العدمي القائل بأن التوفيق جيد بدرجة ثقة 95%.

٤- من الشكل (٩-١٣) يمكن افتراض أن التوزيع الاحتمالي لزمن خدمة العميل y متغير يتبع التوزيع الأسي بتوقع $1/\mu$ ودالة كثافة احتمال $f(y)$ ودالة تراكمية $F(y)$:

$$f(y) = \mu e^{-\mu y}, \quad y > 0 \quad (9.21)$$

حيث $E(y) = 1/\mu$ ، ويمكن تقدير المعلمة μ باستخدام طريقة الأماكن الأعظم [55].

$$\mu = 0.533 \text{ دقيقة/عميل} \quad \text{فوجد أن:}$$

$$\mu = 31.55 \text{ ساعة/عميل} \quad \text{وبالتالي فإن:}$$

$$1/\mu = 1/0.533 = 1.876 \approx 1.9 \text{ دقيقة} \approx 0.0317 \text{ ساعة}$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المفترضة على النحو:

$$f(y) = (0.533) e^{-0.533y}, \quad y > 0 \quad (9.22)$$

ويمكن استخدام اختبار كلاً لجودة التوفيق لتوزيع زمن المريض على الجهاز حيث تتوافر شروط الاختبار السابق ذكرها في الفصل (٨-٥). وفيما يلي خطوات إجراء الاختبار عند درجة ثقة 96%.

$$H_0 : F(y) = 1 - e^{-0.533y} \quad (\text{أ) الفرض العدمي (التوفيق جيد)})$$

الفرض البديل (التوفيق غير جيد) $H_1 : F(y) \neq 1 - e^{-0.533y}$

ب) نقوم بحساب احتمال وجود y في الفئة j وسوف نشير له بالرمز P_j ثم نقوم بحساب التكرارات المتوقعة $'f_j$ المناظرة لكل فئة حيث:

$$P_j = 'f_j \quad (300)$$

والجدول التالي يوضح حساب المقياس χ^2 .

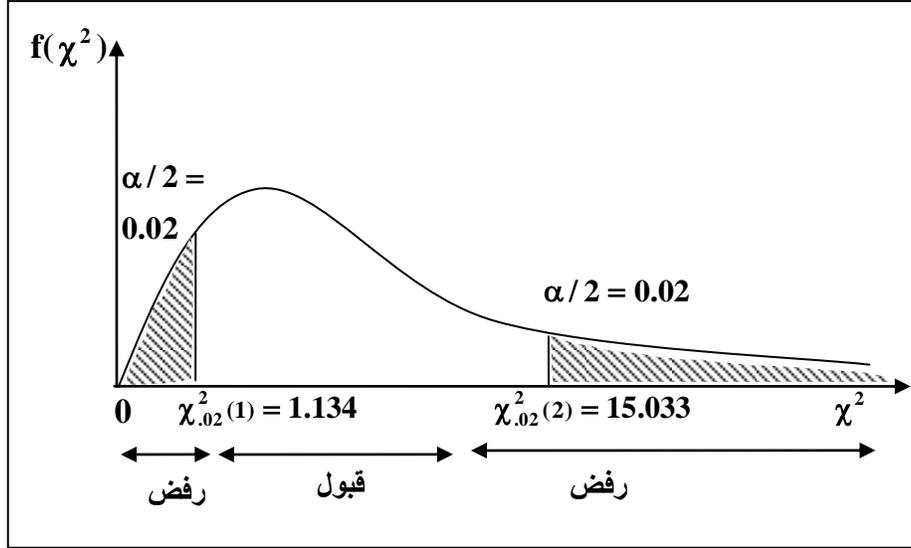
ومن جدول كا^٢ بملحق رقم (٣) عند درجات الحرية 6 ومستوى معنوية 4% نجد أن حدي الثقة:

$$\chi_{0.98}^2(1) = 1.134 \quad , \quad \chi_{0.02}^2(2) = 15.033$$

جدول (٩-٤): يوضح حساب المقياس χ^2

فئات المتغير y	f_j	P_j	$'f_j$	$(f_j - 'f_j)^2$	$\frac{(f_j - 'f_j)^2}{'f_j}$
0-	160	0.5323	159.6300	0.1369	0.00086
5-	64	0.24895	74.685	114.169	1.5286
10-	35	0.11643	34.929	0.00504	0.0001
15-	20	0.05449	16.347	13.3444	0.8163
20-	10	0.025464	7.639	5.5743	0.72971
25-	6	0.01191	3.573	5.8002	1.6485
30-35	5	0.00557	1.671	11.0822	6.632
	300	≈ 1.00			10.5397

شكل (٩-١٤): يوضح مناطق الرفض والقبول للفرض



وبما أن قيمة χ^2 المحسوبة تقع في منطقة القبول

$$1.134 < \chi^2 = 10.5397 < 15.033$$

بالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن زمن خدمة العميل متغير يتبع التوزيع الأسّي بتوقع دقيقة $1/\mu = 1.9$ بدرجة ثقة 96%.

ثانياً: اختيار نموذج صف مناسب ثم إيجاد مؤشرات كفاءة النظام على النحو التالي:

١- من المراحل السابقة يمكن أن يمثل نظام الخدمة أعلاه بنموذج الصفوف $(M/M/1):(FCFS/\infty/\infty)$ (أنظر الفصل (٥-٢) بالباب الخامس)، وبالتالي يمكن الحصول على مؤشرات كفاءة النظام التالية:

٢- بما أن $\lambda = 2.3$ ، $\mu = 31.55$ ، بالتالي:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2.3}{31.55} = 0.073 < 1 \longrightarrow P_0 = (1 - \rho) = 0.93 \quad (١)$$

أ- العدد المتوقع للعملاء في المركز L_s حيث:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.073}{1-0.073} = 0.0787 \approx 1 \text{ عميل} \quad (2)$$

ب- العدد المتوقع للعملاء في الإنتظار L_q حيث:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 0.00575 \approx 0 \text{ عميل} \quad (3)$$

ج- كذلك زمن الإنتظار المتوقع للعميل في النظام W_s حيث:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0.0787}{2.3} = 0.034 \text{ ساعة} \approx 2.1 \text{ دقيقة} \quad (4)$$

د- كذلك زمن الإنتظار المتوقع للعميل قبل الدخول للخدمة W_q حيث:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.00575}{2.3} = 0.0025 \text{ ساعة} \approx 0.15 \text{ دقيقة} \quad (5)$$

ثالثاً: من تحليل النظام (مركز الخدمة أعلاه) نجد:

أ- من (1) إن احتمال وجود النظام بدون عملاء يساوي P_0 حيث $P_0 = 0.93$ ، وهذا يعني أن الجهاز يكون مشغول %7 فقط من وقت عمله.

ب- من (2)،(3) نجد أنه لا يوجد تقريباً إنتظار لأي عميل ولكن بمجرد وصوله يدخل مباشرة على جهاز الخدمة.

ج- من (أ)،(ب) يتضح أن المركز يعمل بنسبة %7 فقط من طاقته ولذا يتطلب الإعلان عن عمل ومكان المركز والخدمات التي يقدمها لإمكانية أستقبال أعداد أكبر من العملاء.

د- يمكن تقديم خدمات أخرى مكتملة لعمل الجهاز الحالي يساعد في عملية جذب عملاء جدد للمركز.

Exercises

(٧-٩) تمارينات

(١-٩): فيما يلي بيانات عن معدلات الميلاد في الآلف (%) خلال الفترة 1990-1999، كذلك خلال الفترة 2000-2009 بأحدي الدول النامية

جدول (١٦-٩): يوضح المعدلات خلال الفترة الأولى

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
المعدل في الآلف (%)	2.1	2.1	2.3	1.9	1.8	2.0	2.1	2.1	2.3	2.5

جدول (١٧-٩): يوضح المعدلات خلال الفترة الثانية

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
المعدل في الآلف (%)	1.5	2.0	2.1	2.3	2.1	1.9	1.8	2.0	2.1	2.2

أختبر أستقرار عملية الميلاد مع الزمن لهذه الدولة بأستخدام أختبار Mann Whitney .Wilcoxon test

(٢-٩): فيما يلي بيانات عن الفترة الزمنية بين وصول عميلين على التوالي (X) إلى أحد أنظمة الخدمة بالدقائق، كذلك زمن خدمة العميل في النظام y بالدقائق أيضاً خلال فترة زمنية معينة.

x: 5, 7, 9, 4, 5, 10, 6, 8, 7, 9, 10, 8, 12, 7, 10
y: 10, 8, 4, 3, 10, 8, 8, 10, 11, 14, 15, 10, 8, 9, 4

١- أستخدم أختبار Spearman's Rank-Correlation test لتحديد أرتباط أو عدم أرتباط x,y.

٢- ثم أستخدم أختبار Durbin-Watson test لأختبار أستقلال مشاهدات كل متغير عن بعضها بالنسبة لكل متغير على حدة.

(٣-٩): في أحد البنوك التجارية يوجد عدد 3 شباك لتعامل مع العملاء بشأن طلب خدمات متعلقة بالسحب والإيداع فإذا كانت الشبائك الثلاثة مستقلة عن بعضها وكذلك متكافئة في الأداء ، بحيث من يصل أولاً يخدم أولاً.

فإذا أخذت إدارة التخطيط عينة من أعداد العملاء في الساعة X كذلك زمن خدمة العميل على الشباك y وأعدت التوزيعات التكرارية الخاصة بكل متغير على حدة كما هو موضح بالجدول التالية.

جدول (٩-١٨): يوضح التوزيع التكراري لعدد العملاء في البنك

عدد العملاء في الساعة X	3	5	7	9	11	المجموع
عدد الساعات	10	20	60	80	30	200

جدول (٩-١٩): يوضح التوزيع التكراري لزمن خدمة العميل بالدقائق

زمن خدمة العميل y بالدقائق	0-	5-	10-	15-	20-	25-30	المجموع
عدد العملاء	100	60	50	30	20	10	270

١- وفق التوزيع الاحتمالي لكل من X, y .

٢- اقترح نموذج صفوف مناسب يصف نظام العمل.

٣- احسب مؤشرات كفاءة النظام.

الباب العاشر

نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

Series Queues (R. Jackson) Models

Introduction	(١-١٠) مقدمة
	(٢-١٠) نموذج الخدمة في مرحلتين
Tow-Phases Queueing Model	
	(٣-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية
K-Phases Queueing Model	
	(٤-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية
K-Phases & Parallel Stations Queueing Model	
Applied Examples	(٥-١٠) أمثلة تطبيقية
Exercises	(٦-١٠) تمارينات

Introduction**(١-١٠) مقدمة**

في الأبواب السابقة تناولنا بعض نماذج الصفوف التي تتم فيها خدمة العميل في مرحلة واحدة وفي مركز خدمة واحد سواء كان النظام يتكون من مركز خدمة واحد أو من عدة مراكز خدمة متوازية ومتكافئة.

ولكن في كثير من الأنظمة الخدمية أو الإنتاجية يتم فيها خدمة العميل في عدة مراكز متتالية كل مركز يؤدي جزء من الخدمة المطلوبة للعميل، وفيما يلي سوف نوضح الخدمة على مراحل متتالية من خلال الأمثلة التالية [٤, 82, 87]:

أولاً: أ- بالنسبة للمسافرين خلال المطارات الجوية حيث يصل المسافر إلى المطار ويبدأ في إجراءات السفر على مراحل متتالية على النحو التالي:

١- وزن الأمتعة (الجزء الأول من الخدمة)،

٢- إنهاء إجراءات الجوازات (الجزء الثاني من الخدمة)،

٣- أخذ الأتوبيس إلى موقف الطائرة لعودها (الجزء الثالث).

وبصعود المسافر الطائرة تنتهي خدمته بالمطار، ونلاحظ أن المراحل السابقة مراحل متتالية وتصاعدية.

ب- في الموانئ البحرية حيث يتم تفريغ وتسليم البضائع من السفينة (أو السفن) إلى أن يتم تسليمها للجهة المستوردة، يمر بالمراحل التالية:

١- تفريغ الشحنة (الجزء الأول من الخدمة)،

٢- تقديم الأوراق الخاصة بالشحنة المطلوب تسليمها إلى الافراج الجمركي (الجزء الثاني من الخدمة) ودفن الرسوم،

٣- فحص الشحنة وأختبار سلامتها (الجزء الثالث من الخدمة)،

٤- تسليم الشحنة للجهة المستوردة (الجزء الرابع من الخدمة)،

٥- نقل الشحنة إلى خارج الميناء بوسائل النقل المختلفة.

ويوجد أمثلة أخرى كثيرة لعدد من الأنظمة الخدمية على مراحل متتالية.

ثانياً: أ- مصنع لتجميع وإنتاج السيارات حيث يتم العمل على النحو التالي:

١- وصول المكونات للمصنع،

٢- اختبار كل مكون في السيارة على حدة،

٣- تجميع السيارات من خلال خط أو أكثر من خطوط الإنتاج،

٤- اختبار السيارة لتحديد جودتها،

٥- نقل السيارات إلى مراكز البيع.

ب- مصنع لإنتاج الأدوية تتم عملية تصنيع أحد المنتجات على النحو التالي:

١- تصنيع المادة الرئيسية في الدواء (أو استيرادها) كذلك المكونات الأخرى،

٢- التعبئة في عبوات، بأحجام ومواصفات معينة،

٣- التغليف لكل عبوة على حدة،

٤- توزيع العبوات على الصيدليات المختلفة لترحها في السوق.

وأمثلة أخرى كثيرة في العديد من الأنظمة الإنتاجية يتم الإنتاج فيها على مراحل متتالية.

وفي حالات كثيرة يحدث تكديس في مرحلة أو أخرى أو جميع المراحل في هذه الأنظمة، وحدوث تكديس في هذه الأنظمة يكون أكثر خطورة وأكبر تكلفة أيضاً [٤، ٣].

وهنا تلعب نظرية الصفوف دور هام في تحديد أسباب التكدس وبالتالي معالجته من خلال إحداث توازن بين الطلب والعرض في كل مرحلة وبالتالي في النظام ككل.

ويعتبر روبرت جاكسون R. Jackson سنة ١٩٥٤ أول من قدم دراسة تحليلية لأنظمة الخدمة على مرحلتين أو ثلاثة مراحل متتالية وفي كل مرحلة مركز خدمة واحد وذلك نتيجة لأبحاثه في مراكز صيانة وإصلاح الطائرات. وفي الفصل التالي سوف نقدم نموذج الخدمة على مرحلتين متتاليتين وبكل مرحلة مركز خدمة واحد، وفي الفصل (١٠-٣) يتم تعميمه على k من المراحل المتتالية.

وفي سنة ١٩٥٦ قدم روبرت جاكسون الحالة العامة، حيث يتم خدمة العميل في k من المراحل المتتالية وبكل مرحلة عدد r_j ، $j=1,2,\dots,k$ من المراكز المتوازية والمتكافئة وسوف نقدم هذا النموذج في الفصل (١٠-٤). ثم نقدم مجموعة من الأمثلة التطبيقية على نماذج روبرت جاكسون في الفصل (١٠-٥).

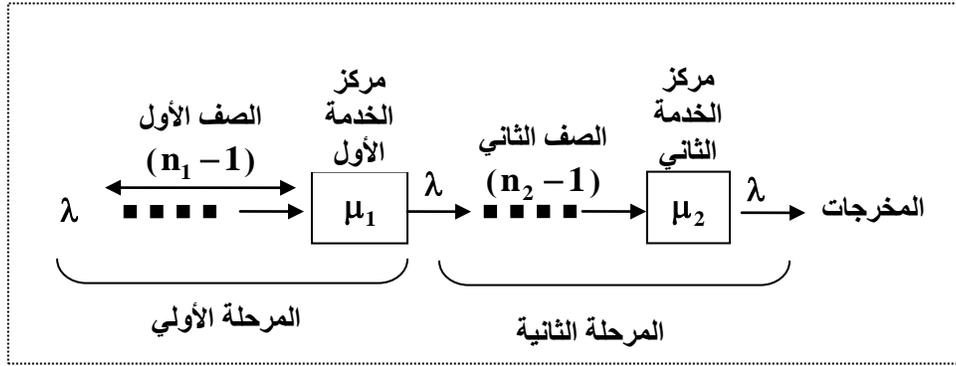
ومنذ سنة ١٩٥٦ وتوالى العديد من الدراسات لأنظمة الخدمة المتتالية. ومن أهم هذه الدراسات الدراسة التي قدمها هنت Hunt سنة ١٩٥٧ حيث قدم نماذج الخدمة المتتالية والمقيدة بعدد محدد من أماكن الانتظار وبالتالي إمكانية حدوث توقف blocking بمراكز الخدمة المتتالية. وفي الباب التالي سوف نتناول بعض هذه الأنظمة التي يحدث فيها توقف blocking في مرحلة أو أكثر.

ومنذ الخمسينات بني على نماذج روبرت جاكسون العديد من الأنواع المختلفة لشبكات الأتصال [105, 52, 33, 26, 20]

(٢-١٠) نموذج الخدمة في مرحلتين Tow-Phases Queueing Model

في هذا الفصل سوف نعتبر نظام الخدمة على مرحلتين متتاليتين ومستقلتين في الخدمة، حيث يصل العميل إلى النظام فإذا وجد مركز الخدمة في المرحلة الأولى غير مشغول فيدخل مباشرة للخدمة (وإذا كان المركز مشغول ينتظر في صف الانتظار) وبانتهاء خدمة العميل في المرحلة الأولى يلتحق بالمرحلة الثانية، فإذا كان مركز الخدمة في المرحلة الثانية غير مشغول دخل مباشرة للخدمة (وإذا كان المركز مشغول ينتظر في صف الانتظار بالمرحلة الثانية) وبانتهاء خدمة العميل في المرحلة الثانية تنتهي خدمته في النظام ويترك النظام على الفور. والشكل التالي يوضح نظام الخدمة في هذه الحالة.

شكل (١-١٠): نظام الخدمة في مرحلتين متتاليتين



فإذا فرضنا أن عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام يمثل متغير يتبع توزيع بواسون بتوقع λ ، وزمن خدمة العميل في المرحلة الأولى والثانية يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1, 1/\mu_2$ على الترتيب. فإذا رمزنا لعدد العملاء في النظام في المرحلتين بالرمز (n_1, n_2) حيث n_1 تشير إلى عدد العملاء في المرحلة الأولى، n_2 عدد العملاء في المرحلة الثانية، $n_1 = 0, 1, 2, \dots; n_2 = 0, 1, 2, \dots$ كذلك سوف نرمز لأحتمال وجود (n_1, n_2) عميل في المرحلتين الأولى والثانية (معاً) في وضع الاستقرار (التوازن) بالرمز $P(n_1, n_2)$.

وفيما يلي سوف نثبت أولاً أن النظام يمثل عملية ماركوف غير الدورية aperiodic وغير قابلة للأختزال irreducible أيضاً (أنظر التعريفات بالفصل (٦-٣) بالباب الثالث).

(١-٢-١٠) خصائص النظام

بما أن عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون فإنه يمكن افتراض أن احتمال وصول العميل للنظام خلال الفترة (Δt) يساوي $\lambda \Delta t + O^*(\Delta t)$ واحتمال عدم وصول أي عميل للنظام خلال نفس الفترة $(1 - \lambda \Delta t - O(\Delta t))$ كذلك احتمال خدمة عميل في المرحلة الأولى $\mu_1 \Delta t + O(\Delta t)$ واحتمال عدم خدمته في المرحلة الأولى $(1 - \mu_1 \Delta t - O(\Delta t))$ كذلك بالنسبة لاحتمال خدمة العميل في المرحلة الثانية $\mu_2 \Delta t + O(\Delta t)$ وعدم خدمته $(1 - \mu_2 \Delta t - O(\Delta t))$.

وفيما يلي نقدم مصفوفة الانتقال (أي الانتقال من حالة إلى حالة أخرى) خلال الفترة (Δt) وسوف نشير لها بالرمز A .

ومن المصفوفة A بالشكل التالي يتضح أن: (١) العناصر على القطر الرئيسي للمصفوفة التي تمثل احتمال البقاء في نفس الحالة بعد (Δt) جميعها قيم موجبة لأنها عبارة عن حاصل ضرب القيم $(1 - \mu_2 \Delta t), (1 - \mu_1 \Delta t), (1 - \lambda \Delta t)$ وهي قيم موجبة، وبالتالي فإن المصفوفة A مصفوفة غير دورية a periodic.

(٢) بالنسبة لجميع حالات النظام (n_1, n_2) ممكن من أي حالة الوصول إلى أي حالة أخرى في عدد محدود finite من الفترات (Δt) ، وبالتالي فإن المصفوفة A مصفوفة غير قابلة للأختزال irreducible matrix (أنظر الفصل (٦-٣))

* وكما سبق تعريف $O^*(\Delta t)$ بأنها جميع الحدود التي تحتوي على $(\Delta t)^n$ ، $n \geq 2$ وسوف نتجاهلها لعدم تأثيرها في وضع الاستقرار.

شكل (٢-١٠): مصفوفة الانتقال للنظام خلال الفترة (Δt)

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(2,0)	(n_1, n_2)
(0,0)	$(1-\lambda\Delta t)$	0	0		$(\lambda\Delta t)$	0	0
(0,1)	$(1-\lambda\Delta t)(\mu_2\Delta t)$	$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$			$(\lambda\Delta t)(\mu_2\Delta t)$		0
(0,2)	0	$(1-\lambda\Delta t)(\mu_2\Delta t)$	$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$		0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(1,0)	0	$(1-\lambda\Delta t)(\mu_1\Delta t)$	0		$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)$				
(2,0)	0	0	0			$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(n_1, n_2)							$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

فإذا اعتبرنا المتجه X متجه صفي عناصره تمثل احتمالات جميع حالات النظام في وضع الأستقرار، من العلاقة (3.26) نجد أن [٤، 48، 93]:

$$XA = X \longrightarrow X(A - I) = 0 \quad (10.1)$$

حيث I تشير إلى مصفوفة الوحدة.

نظرية (١-١٠): إذا اعتبرنا نظام الخدمة أعلاه فإنه في حالة الأستقرار الإحصائي يوجد حل وحيد unique solution لمعادلات الأستقرار في (10.1).

الإثبات: [أنظر مرجع [٤] صفحة ١٦٧].

(٢-٢-١٠) نموذج روبرت جاكسون

بالنسبة لنظام الخدمة أعلاه قدم جاكسون سنة ١٩٥٤ أول نموذج للتوزيع الاحتمالي المستقر لعدد العملاء في النظام، على النحو الموضح في النظرية التالية [4, 78, 91]:

نظرية (٢-١٠): إذا اعتبرنا نظام الخدمة على مرحلتين متتاليتين وبكل مرحلة مركز خدمة واحد بحيث أن زمن الخدمة في كل مرحلة يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1, 1/\mu_2$ على الترتيب وعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ فإن التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء (n_1, n_2) في حالة الأستقرار على النحو التالي:

$$P(n_1, n_2) = \begin{cases} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) & , n_1, n_2 \geq 0, \rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, i = 1,2 \\ 0 & , n_j < 0, j = 1,2 \end{cases} \quad (10.2)$$

$$P(0,0) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \quad , \quad \rho_j = \frac{\lambda}{\mu_j} \quad , \quad j = 1,2$$

الإثبات: ١- بنفس الأسلوب المتبع في الأبواب السابقة نقوم باشتقاق المعادلات التفاضلية في وضع الاستقرار بمعنى $P'(n_1, n_2, t) = 0$ فنحصل على المعادلات التالية:

$$\lambda P(0,0) = \mu_2 P(0,1) \quad , \quad n_1 = n_2 = 0 \quad (10.3)$$

$$(\lambda + \mu_2) P(0, n_2) = \mu_1 P(1, n_2 + 1) + \mu_2 P(0, n_2 + 1) \quad , \quad n_1 = 0, n_2 > 0 \quad (10.4)$$

$$(\lambda + \mu_1) P(n_1, 0) = \mu_2 P(n_1, 1) + \lambda P(n_1 - 1, 0) \quad , \quad n_1 > 0, n_2 = 0 \quad (10.5)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P(n_1, n_2) = \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1) + \lambda P(n_1 - 1, n_2) \quad , \quad n_1, n_2 > 0 \quad (10.6)$$

٢- من المعادلة (10.3) نجد أن:

$$P(0,1) = \frac{\lambda}{\mu_2} P(0,0) = \rho_2 P(0,0) \quad (10.7)$$

ومن المعادلتين (10.4),(10.5) نجد أن:

وجود الحد المحتوي على μ_2 في الطرف الأيمن يوجد الحد المحتوي على λ في الطرف الأيسر، وجود الحد المحتوي على μ_1 في الطرف الأيمن يوجد الحد المحتوي على μ_2 في الطرف الأيسر، وجود الحد المحتوي على λ في الطرف الأيمن يوجد الحد المحتوي على μ_1 في الطرف الأيسر. وبالتالي يمكن افتراض أن الحدود المتناظرة أعلاه متساوية أو بعبارة أخرى:

$$\lambda P(0,n_2) = \mu_2 P(0,n_2 + 1) \quad (10.8)$$

$$\mu_2 P(0,n_2) = \mu_1 P(0,n_2 - 1) \quad (10.9)$$

$$\mu_1 P(n_1,0) = \lambda P(n_1 - 1,0) \quad (10.10)$$

وبالتعويض المتتالي في المعادلة (9.8) بقيم $n_2 = 1,2,\dots$ نجد أن:

$$P(0,n_2) = \rho_2^{n_2} P(0,0) \quad (10.11)$$

وبالتعويض المتتالي في (9.9) ، (9.10) نجد أن:

$$P(n_1,n_2) = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) \quad , \quad n_1, n_2 \geq 0 \quad (10.12)$$

٣- وتحت الفرض أعلاه، وبأستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضي يمكن أثبات أن الحل في (10.12) يحقق المعادلة (10.6) لجميع قيم n_1, n_2 .

وبالتالي فإن الحل في (10.12) يمثل حل لجميع معادلات الأستقرار (10.6)-(10.3) وهو حل وحيد حيث أن مصفوفة الأنتقال لحالات النظام مصفوفة غير دورية وغير قابلة للأختزال aperiodic and irreducible matrix.

٤- وبما أن $\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P(n_1, n_2) = 1$ بالتالي فإن:

$$P(0,0) \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \rho_2^{n_2} = \frac{P(0,0)}{[(1-\rho_1)(1-\rho_2)]} = 1 \longrightarrow$$

$$P(0,0) = (1-\rho_1)(1-\rho_2) \quad (10.13)$$

توزيع المخرجات

التوزيع الاحتمالي للمخرجات output distribution في المرحلة الأولى هو التوزيع الاحتمالي لمدخلات input distribution للمرحلة الثانية. وقد أثبت بيرك Burk سنة ١٩٥٦ أن تيار المخرجات لنظام $(M/M/C):(FcFs/\infty/\infty)$ له نفس التوزيع الاحتمالي لتيار المدخلات وبنفس المعلمة في وضع الاستقرار. وبما أن نظام الخدمة في المرحلة الأولى للنظام موضع الدراسة هو $(M/M/1):(FcFs/\infty/\infty)$ بالتالي يكون تيار المخرجات وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ أيضاً [٤، Page257, 93]. وبالمثل بالنسبة لتيار المخرجات في المرحلة الثانية.

نتيجة (١-١٠): يمكن الحصول على التوزيع الهامشي لعدد العملاء في المرحلة j على النحو التالي:

$$P(n_1) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2) = \rho_1^{n_1} (1-\rho_1) \quad (10.14)$$

كذلك

$$P(n_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2) = \rho_2^{n_2} (1-\rho_2) \quad (10.15)$$

من (9.14),(9.15) نجد أن المتغيرين n_1, n_2 مستقلين، حيث:

$$P(n_1, n_2) = P(n_1) P(n_2) \quad (10.16)$$

(٣-٢-١٠) مؤشرات كفاءة النظام

١- العدد المتوقع للعملاء في النظام (L_S)

$$\begin{aligned}
L_S &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + n_2) P(n_1, n_2) \\
&= (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + n_2) \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \\
&= \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2)} \quad (10.17)
\end{aligned}$$

٢- العدد المتوقع للعملاء في المرحلة (j) ، $j = 1, 2$:

$$L_{Sj} = \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j P(n_j) = \frac{\rho_j}{(1 - \rho_j)} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.18)$$

٣- العدد المتوقع للعملاء في الأنتظار في المرحلة (j) (في الصف j):

$$\begin{aligned}
L_{qj} &= \sum_{n_j=1}^{\infty} (n_j - 1) P(n_j) = \sum_{n_j=1}^{\infty} (n_j - 1) \rho_j^{n_j} (1 - \rho_j) \\
&= \frac{\rho_j^2}{(1 - \rho_j)} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.19)
\end{aligned}$$

٤- الزمن المتوقع للعميل في المرحلة (j) (في الصف والخدمة)

$$W_{Sj} = \frac{L_{Sj}}{\lambda} = \frac{\rho_j / (1 - \rho_j)}{\lambda} = \frac{\rho_j}{\lambda (1 - \rho_j)} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.20)$$

٥- الزمن المتوقع للعميل في الصف j :

$$W_{qj} = \frac{L_{qj}}{\lambda} = \frac{\rho_j^2}{\lambda (1 - \rho_j)} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (10.21)$$

ومما هو جدير بالذكر أن أزمنة الأنتظار في الصفوف المتتالية تمثل متغيرات غير مستقلة، فإذا رمزنا إلى مجموعة أزمنة الأنتظار في الصفوف بالرمز W_q فإن [93]:

$$W_q \neq \sum_{j=1}^2 W_{qj} \quad (10.22)$$

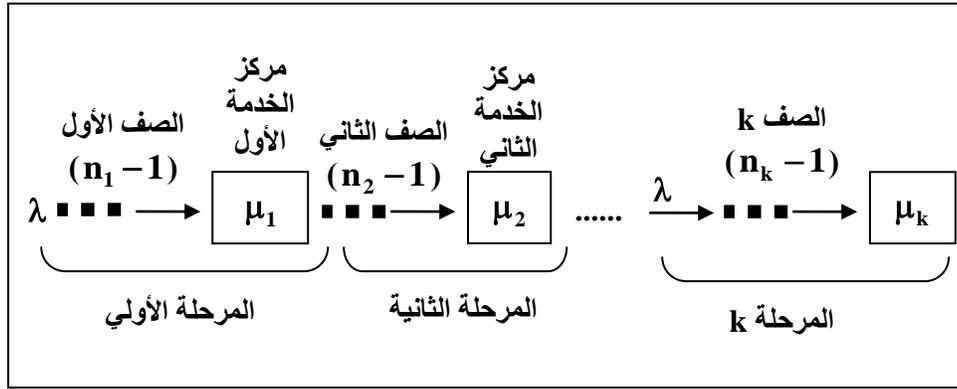
وفي الفصل التالي سوف نقدم نموذج الخدمة في k من المراحل المتتالية، $k > 2$ وبكل مرحلة مركز خدمة واحد وهو عبارة عن الحالة العامة للنموذج في مرحلتين.

(٣-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية

K-Phases Queueing Model

إذا اعتبرنا أن خدمة العميل تتم على k من المراحل المتتالية، $k > 2$ وفي كل مرحلة مركز خدمة واحد، حيث أن تيار المدخلات يتبع التوزيع الآسي بتوقع λ وأزمنة الخدمة وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_j$ ، $j = 1, 2, \dots, k$. والشكل التالي يوضح مراحل النظام.

شكل (٢-١٠): نظام k من المراحل المتتالية وبكل مرحلة مركز خدمة واحد



ويعتبر هذا النظام حالة أعم من النظام في الفصل السابق من حيث عدد مراحل الخدمة المتتالية بدلاً من مرحلتين. والنظام في هذا الفصل يمثل نظام ماركوف أيضاً وبمصفوفة إنتقال غير دورية aperiodic وغير قابلة للأختزال irreducible أيضاً (أنظر الفصل السابق).

فإذا فرضنا أن (n_1, n_2, \dots, n_k) تمثل حالات النظام $n_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$. وأن $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ تشير إلى احتمال وجود عدد n_1, n_2, \dots, n_k في المراحل الأولى، الثانية،، المرحلة k في وضع الأستقرار.

نظرية (٣-١٠): إذا اعتبرنا نظام الخدمة أعلاه فإن:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_k) &= \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \dots (1 - \rho_k) \\ &= \prod_{j=1}^k \rho_j^{n_j} (1 - \rho_j) , \rho_j = \frac{\lambda}{\mu_j} < 1, n_j \geq 0 \quad (9.23) \end{aligned}$$

الإثبات: بنفس الأسلوب المستخدم في إثبات نظرية (٢-٩).

نتيجة (٢-١٠): يمكن الحصول على التوزيع الهامشي $P(n_j)$ لعدد العملاء في المرحلة j على النحو:

$$\begin{aligned} P(n_j) &= \sum_i \sum_{i \neq j} \dots \sum_i P(n_1, n_2, \dots, n_k) \\ &= \rho_j^{n_j} (1 - \rho_j) , j = 1, 2, \dots, k , n_j \geq 0 \quad (10.24) \end{aligned}$$

كذلك يمكن إثبات أن العدد المتوقع للعملاء في النظام L_S على النحو:

$$\begin{aligned} L_S &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} (n_1 + n_2 + \dots + n_k) P(n_1, n_2, \dots, n_k) \\ &= \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2)} + \dots + \frac{\rho_k}{(1 - \rho_k)} = \sum_{j=1}^k \frac{\rho_j}{(1 - \rho_j)} \quad (10.25) \end{aligned}$$

حيث أن العدد المتوقع للعملاء في المرحلة (j) على النحو:

$$L_{Sj} = \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j P(n_j) = \frac{\rho_j}{(1 - \rho_j)} , \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.26)$$

وبالتالي فإن الزمن المتوقع للعميل في المرحلة (j) (في طابور الأنتظار والخدمة):

$$W_{Sj} = \frac{L_{Sj}}{\lambda} = \frac{\rho_j}{\lambda (1 - \rho_j)} , \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.27)$$

كذلك زمن الأنتظار المتوقع للعميل في المرحلة (j) (في الصف):

$$W_{qj} = \frac{L_{qj}}{\lambda} = \frac{\rho_j^2}{\lambda(1-\rho_j)}, \quad j=1,2,\dots,k \quad (10.28)$$

وفي الفصل التالي سوف نقدم الحالة العامة التي قدمها روبرت جاكسون سنة ١٩٥٦ حيث قدم نظام الخدمة على عدد من المراحل المتتالية k، k > 2 من المراحل المتتالية وبكل مرحلة عدد $r_j > 1$ ، $j=1,2,\dots,k$ من مراكز الخدمة المتوازية. وبالتالي تعتبر النماذج في (٣-١٠)، (٢-١٠)، حالات خاصة من هذه الحالة العامة.

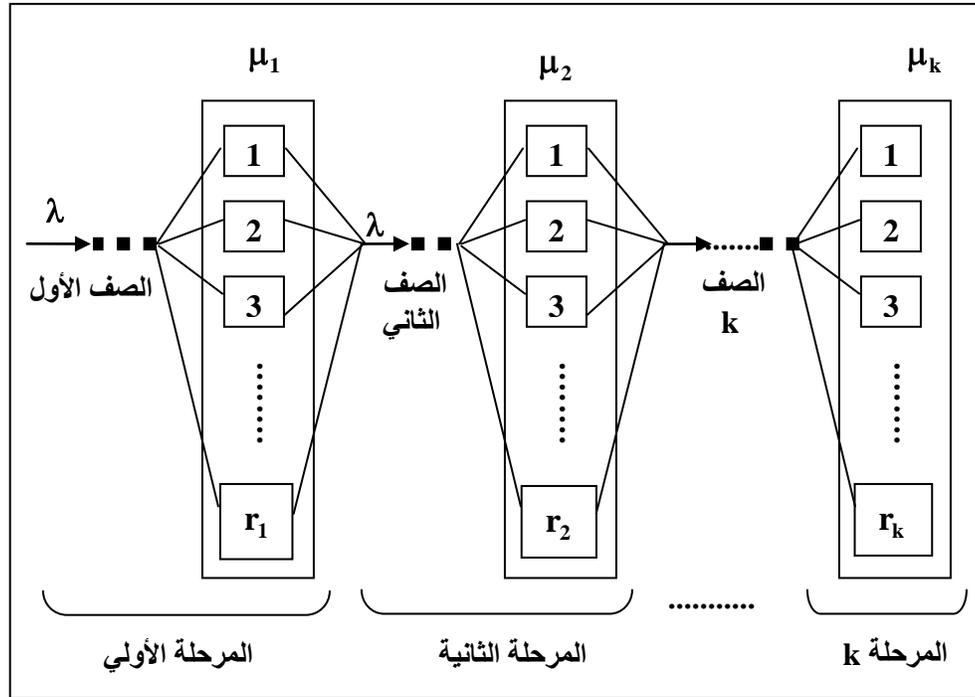
(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

(٤-١٠) نموذج K من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية

K-Phases & Parallel Stations Queueing Model

إذا أعتبرنا النظام في الفصل السابق حيث تتم خدمة العميل من خلال عدد k من المراحل المتتالية وفي كل مرحلة مركز خدمة واحد، وفي هذا الفصل سوف نعتبر وجود عدد r_j من مراكز الخدمة المتكافئة والمتوازية في المرحلة j لجميع قيم r_j وزمن الخدمة في كل منها يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_j$ بالنسبة لكل مركز من المراكز r_j ، كذلك عدد العملاء الذين يصلون إلى النظام يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بتوقع λ . والشكل التالي يوضح مراحل النظام، ومما هو جدير بالذكر أن طابور الصف في أي مرحلة غير محدود

شكل (٣-١٠): نظام الخدمة ذات المراحل المتتالية ومراكز الخدمة المتوازية بكل مرحلة



(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

في سنة ١٩٥٦ قدم روبرت جاكسون نموذج للتوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في المراحل المختلفة للنظام وسوف نشير له بالرمز $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots, n_k)$ في حالة الاستقرار عندما $\rho_j = \lambda / r_j \mu_j < 1$.

ومما هو جدير بالذكر أن حالات النظام $(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_k)$ ، $n_j = 0, 1, 2, \dots$ ، عبارة عن حالات غير دورية aperiodic وغير قابلة للأختزال irreducible أيضاً، وبالتالي في حالة وجود حل لمعادلات الاستقرار فإنه يعتبر حل وحيد كما سبق تقديم ذلك في الأبواب السابقة.

نظرية (٤-١٠): بالنسبة للنظام أعلاه نجد أن [49, 48]:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_k) = \begin{cases} \prod_{j=1}^k A_j^{-1} b[n_j] , & n_j \geq 0 , j = 1, 2, \dots, k \\ 0 & , n_j < 0 , j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (10.29)$$

$$b[n_j] = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} (r_j \rho_j)^{n_j} , & n_j < r_j , j = 1, 2, \dots, k \\ \frac{1}{r_j} (r_j \rho_j)^{r_j} (\rho_j)^{n_j - r_j} , & n_j \geq r_j , j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (10.30)$$

$$b[n_j] = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} (r_j \rho_j)^{n_j} , & n_j < r_j , j = 1, 2, \dots, k \\ \frac{1}{r_j} (r_j \rho_j)^{r_j} (\rho_j)^{n_j - r_j} , & n_j \geq r_j , j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (10.31)$$

$$\rho_j = \frac{\lambda}{r_j \mu_j} < 1 , \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.32)$$

$$A_j = \sum_{n_j=0}^{r_j-1} \frac{1}{n_j!} (r_j \rho_j)^{n_j} + \frac{(r_j \rho_j)^{r_j}}{r_j! (1 - \rho_j)} \quad (10.33)$$

الإثبات: ١- بما أن عدد العملاء الذين يصلون للنظام وفقاً لتوزيع بواسون، بالتالي فإنه يمكن افتراض أن احتمال وصول عميل خلال الفترة (Δt) يساوي:

$$\lambda \Delta t + O^*(\Delta t) \quad (10.34)$$

(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

٢- كذلك إذا وجد عدد n_j عميل في المرحلة j (منهم r_j في الخدمة، وعدد $(n_j - r_j)$ في الأنتظار في الصف رقم j ، $n_j \geq r_j$) فإن أحتمال خدمة عميل في هذه المرحلة خلال الفترة Δt

$$n_j \mu_j (\Delta t) + O^*(\Delta t) \quad , \quad n_j < r_j \quad (10.35)$$

$$r_j \mu_j (\Delta t) + O^*(\Delta t) \quad , \quad n_j \geq r_j \quad (10.36)$$

٣- وبتكوين المعادلات التفاضلية $P^1(n_1, n_2, \dots, n_k, t)$ في وضع الأستقرار (التوازن) عندما $P^1(n_1, n_2, \dots, n_k, t) = 0$ نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \sum_{j=1}^k \delta(n_j) a(n_j) \mu_j) P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots, n_k) = \\ & \sum_{j=1}^k \delta(n_j + 1) a(n_j + 1) \mu_j P(n_1, n_2, \dots, n_j + 1, n_{j+1} - 1, n_{j+2}, \dots, n_k) \\ & + \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots, n_k) \quad , \quad n_j \geq 0 \quad , \quad j = 2, 3, \dots, k \quad (10.37) \end{aligned}$$

حيث:

$$\delta(n_j) = \begin{cases} 1 & , \quad n_j \neq 0 \\ 0 & , \quad n_j = 0 \end{cases} \quad (10.38)$$

$$a(n_j) = \begin{cases} n_j & , \quad n_j < r_j \\ r_j & , \quad n_j \geq r_j \end{cases} \quad (10.39)$$

وبالتعويض المتتالي بقيم n_j نلاحظ ما يلي:

أ- وجود الحد المحتوي على μ_k في الطرف الأيمن، وجود الحد المحتوي على λ في الطرف الأيسر،

(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

ب- وجود الحد المحتوي على μ_{j-1} في الطرف الأيمن وجد الحد المحتوي على μ_j في الطرف الأيسر،

ج- وجود الحد المحتوي على λ في الطرف الأيمن، وجود الحد المحتوي على μ_1 في الطرف الأيسر، وبالتالي يمكن افتراض أن:

$$\lambda P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \delta(n_k + 1) a(n_k + 1) \mu_k P(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k + 1) \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} \delta[n_j] a(n_j) \mu_j P(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_k) = \\ \delta(n_{j-1} + 1) a(n_{j-1} + 1) P(n_1, n_2, \dots, n_{j-1} + 1, n_j - 1, n_{j+1}, n_{j+2}, \dots, n_k) \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\delta(n_1) a(n_1) \mu_1 P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, \dots, n_k) \quad (10.42)$$

وتحت هذا الفرض والتعويض المتتالي بالقيم المختلفة لـ n_j ، بحيث $n_j \geq 0$ ، وهذا الحل يعتبر حل وحيد unique solution حيث أن النظام يمثل عملية ماركوف ذات الحالات غير الدورية وغير المختزله.

حالة خاصة: إذا فرضنا أن $r_j = 1$ لجميع قيم $j = 1, 2, \dots, k$ بالتعويض في (10.31) - (10.33) نجد أن:

$$b[n_j] = \rho_j (\rho_j)^{n_j - 1} = \rho_j^{n_j}$$

$$A_j = (1 - \rho_j)^{-1}$$

وبالتعويض في (10.29) نجد أن:

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \prod_{j=1}^k \rho_j^{n_j} (1 - \rho_j)$$

(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في (10.23).

نتيجة (٣-١٠): إذا رمزنا لأحتمال وجود n_j عميل في المرحلة j بالرمز $P(n_j)$ فإن:

$$P(n_j) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_i=0}^{\infty} \sum_{n_{i+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^k A_j^{-1} b[n_j] \right\} = A_j^{-1} b[n_j] \quad (10.43)$$

وبالتالي فإن

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \prod_{j=1}^k P(n_j) \quad (10.44)$$

ومن (10.44) يتضح أن عدد العملاء في أي مرحلة من المراحل المتتالية تمثل متغيرات عشوائية مستقلة إحصائياً [93, 48]. وفيما يلي سوف نقدم أهم مؤشرات كفاءة النظام على النحو التالي:

١- العدد المتوقع للعملاء في المرحلة j : إذا رمزنا للعدد المتوقع للعملاء في المرحلة j بالرمز E_{1j} فإن:

$$\begin{aligned} E_{1j} &= \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j P(n_j) \\ \text{وبالتالي} \quad &= \sum_{n_j=1}^{r_j-1} \frac{n_j (r_j \rho_j)^{n_j}}{n_j! A_j} + \sum_{n_j=r_j}^{\infty} \frac{n_j (r_j \rho_j)^{r_j} \rho_j^{(n_j-r_j)}}{r_j! A_j} \\ &= A_j^{-1} \left\{ \left[\sum_{n_j=1}^{r_j-1} (r_j \rho_j)^{n_j} / (n_j - 1)! \right] + (r_j \rho_j)^{r_j} \rho_j / r_j! (r_j \rho_j)^2 \right\} \quad (10.45) \end{aligned}$$

لي فإن عدد العملاء في النظام E_1 على النحو:

$$E_1 = \sum_{j=1}^k E_{1j} \quad (10.46)$$

(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

٢- الزمن المتوقع لوجود العميل في المرحلة j : إذا رمزنا للزمن المتوقع لوجود العميل في المرحلة j (في الخدمة والانتظار) بالرمز T_{1j} فإن

$$T_{1j} = \frac{E_{1j}}{\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.47)$$

وبالتالي الزمن المتوقع لوجود العميل في النظام (الخدمة والانتظار):

$$T_1 = \frac{E_1}{\lambda} \quad (10.48)$$

٣- العدد المتوقع للعملاء في الانتظار (في الصف) في المرحلة j : إذا رمزنا للعدد المتوقع للعملاء في الصف j بالرمز E_{2j} فإن:

$$E_{2j} = \sum_{n_j=r_j}^{\infty} (n_j - r_j) P(n_j), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.49)$$

$$= \sum_{n_j=r_j}^{\infty} (n_j - r_j) [b[n_j] A_j^{-1}]$$

$$= P(r_j) [\rho_j / (1 - \rho_j)^2] \quad (10.50)$$

وبالتالي فإن الزمن المتوقع لانتظار العميل في الصف j على النحو:

$$T_{2j} = \frac{E_{2j}}{\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10.51)$$

٤- العدد المتوقع لمراكز الخدمة غير المشغولة في المرحلة j: إذا رمزنا لعدد المراكز غير المشغولة المتوقع في المرحلة j بالرمز E_{3j} فإن:

$$E_{3j} = \sum_{n_j=0}^{r_j-1} (r_j - n_j) P(n_j) = A_j^{-1} \left[\sum_{n_j=0}^{r_j-1} (r_j - n_j) (r_j \rho_j)^{n_j} / n_j \right] \quad (10.52)$$

(٤-١٠) نموذج k من المراحل المتتالية ذات المراكز المتوازية الباب العاشر: نماذج الصفوف المتتالية (نماذج روبرت جاكسون)

وبالتالي فإن متوسط المدة المتوقعة التي يكون فيها المركز في المرحلة j غير مشغول وسوف نرسم لها بالرمز T_{3j} حيث:

$$T_{3j} = \frac{E_{3j}}{r_j} \text{ وحدة زمنية}$$

وفي الفصل التالي سوف نقدم عدد من الأمثلة التطبيقية للنموذج المقدم في هذا الفصل والحالات الخاصة منه في الفصلين السابقين مع توضيح كيفية الحصول على مؤشرات كفاءة النظام للنظام في كل مثال.

Applied Examples

(٥-١٠) أمثلة تطبيقية

تطبيق (١): مطبعة لطباعة الكتب يصل لها الكتب بمعدل متوسط 4 كتب شهرياً. وتتم عملية الطباعة والتجليد على مرحلتين متتاليتين، حيث تتم عملية الطباعة للكتب بمعدل متوسط 5 كتب شهرياً، وتتم عملية التجليد بمعدل متوسط 6 كتب شهرياً.

المطلوب: ١- أرسم نظام العمل بالمطبعة موضح عليه المعدلات المتوسطة.

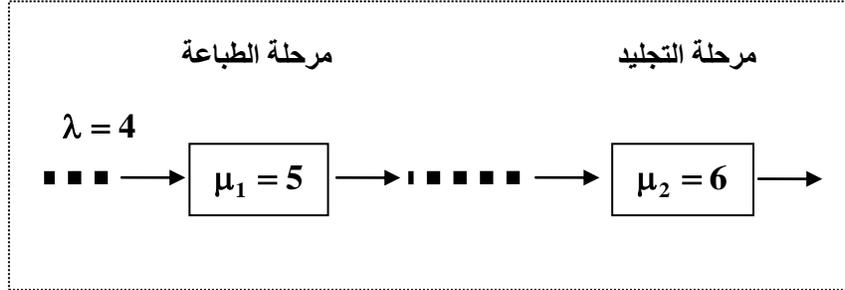
٢- كون نموذج صفوف مناسب.

٣- أوجد احتمال عدم وجود كتب في الطباعة أو مرحلة التجليد أو في كلاهما

٤- أوجد العدد المتوقع للكتب في الطبعة في أحد الشهور.

الحل: ١- الشكل التالي يوضح نظام الطباعة والتجليد في المطبعة

شكل (١٠-٤) يوضح مرحلتي الطباعة والتجليد



٢- يمكن أن يمثل النظام بالنموذج (10.2) بحيث:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{4}{5} = 0.800 \quad , \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{4}{6} = 0.667$$

وبالتالي فإن:

$$P_r(n_1, n_2) = (0.8)^{n_1} (0.667)^{n_2} (0.0666)$$

حيث

$$P(0,0) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = (1 - 0.8)(1 - 0.667) = 0.0666$$

٣- أحتمال عدم وجود كتب في مرحلة الطباعة أو مرحلة التجليد أو في كلاهما

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_2=1}^{\infty} P_r(0, n_2) + \sum_{n_1=1}^{\infty} P_r(n_1, 0) + P(0,0) \\ &= (0.0666) \left[\frac{0.667}{1 - 0.667} \right] + (0.0666) \left[\frac{0.8}{1 - 0.8} \right] + (0.0666) \\ &= 0.1334 + 0.268 + 0.0666 = 0.46 \end{aligned}$$

٤- العدد المتوقع للكتب في المطبعة في أحد الشهور E حيث:

$$\begin{aligned} E &= E(n_1 + n_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_1 + n_2) P_r(n_1, n_2) \\ &= P(0,0) \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2}{(1 - \rho_2)(1 - \rho_1)^2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)^2} \right\} \\ &= 0.0666 \left\{ \frac{0.533}{0.0133} + \frac{0.533}{0.0222} \right\} \\ &= 0.0666 \{ 40.06 + 24.01 \} = 4.27 \text{ كتاب} \end{aligned}$$

تطبيق (٢): مركز طبي للعظام يتم فيه خدمة المريض على ٣ مراحل متتالية: المرحلة الأولى يتم فيه الكشف على المصاب حيث يوجد عدد ٢ عيادة للكشف وتحديد الأشعة المطلوبة، والمرحلة الثانية يتم فيها عمل الأشعة للمصاب حيث يوجد جهازين متكافئين للأشعة، والمرحلة الثالثة استلام الأشعة والتقرير المرفق من المركز، حيث يقوم باستخدام الأشعة وكتابة التقرير فني متخصص. فإذا كان نظام العمل بالمركز من يصل أولاً يخدم أولاً، والمعدل المتوسط لوصول المصابين 10 مصاب في الساعة، والزمن المتوقع للكشف

على المصاب 1/6 ساعة، والزمن المتوقع لعمل الأشعة يساوي 1/6 ساعة، والزمن المتوقع لتسليم المصاب الأشعة 1/11 ساعة.

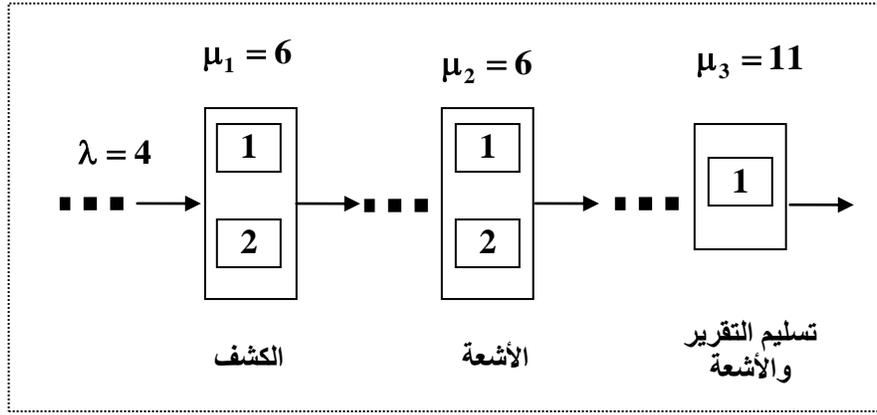
المطلوب: ١- وضع بيانياً نظام العمل بالمركز.

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد المصابين بالمركز $P_r(n_1, n_2, n_3)$.

٣- أوجد $P_r(n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 0)$

الحل:

شكل (٥-١٠) يوضح مراحل خدمة المريض بالمركز الطبي



في هذه الحالة يمكن استخدام النموذج في الفصل (٤-١٠) حيث:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{r_1 \mu_1} = \frac{10}{2(6)} = \frac{10}{12}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{r_2 \mu_2} = \frac{10}{2(6)} = \frac{10}{12}, \quad \rho_3 = \frac{10}{11}$$

$$A_1 = \left\{ 1 + 2\rho_1 + \frac{2\rho_1^2}{(1-\rho_1)} \right\} = \left\{ 1 + 2(10/12) + \frac{2(10/12)^2}{1-(10/12)} \right\} = 11$$

$$A_2 = \left\{ 1 + 2\rho_2 + \frac{2\rho_2^2}{(1-\rho_2)} \right\} = \left\{ 1 + 2(10/12) + \frac{2(10/12)^2}{1-(10/12)} \right\} = 11$$

$$A_3 = \left\{ \frac{1}{1-\rho_3} \right\} = \frac{1}{1-(10/11)} = 11$$

$$P_r(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{1}{11} \right)^3 \prod_{j=1}^3 b[n_j] \quad , \quad n_j \geq 0$$

حيث:

$$b[n_j] = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} (r_j \rho_j)^{n_j} & , \quad n_j < r_j \\ \frac{1}{r_j!} (r_j \rho_j)^{r_j} (\rho_j)^{n_j-r_j} & , \quad n_j \geq r_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_r(3,1,0) &= \left(\frac{1}{11} \right)^3 \left[\frac{1}{2!} (2\rho_1)^2 (\rho_1) \right] \left[\frac{1}{1!} (2\rho_2) \right] \left[\rho_3^0 \right] \\ &= (0.0007)(1.1574)(1.667) = 0.00135 \end{aligned}$$

-٣

Exercises

(٦-١٠) تمرينات

(١-١٠) أعتبر نظام الخدمة في الفصل (٢-١٠)، فإذا أشرنا إلى زمن الأنتظار في الصف الأول بالرمز V_1 وفي الصف الثاني بالرمز V_2 .

أثبت أن: ١- المتغيرات V_1, V_2 متغيرين غير مستقلين.

أثبت أن: ٢- $E(V_1 + V_2) \neq E(V_1) + E(V_2)$

(٢-١٠) أعتبر النظام في الفصل (٣-١٠). والمطلوب: ١- أشتق المعادلات التفاضلية للتوزيع الاحتمالات لحالات النظام في حالة الأستقرار (التوازن).

٢- أثبت أن حالات النظام غير دورية وغير قابلة للأختزال أيضاً.

٣- أوجد العدد المتوقع للعملاء في النظام (الخدمة والأنتظار معاً).

٤- أوجد العدد المتوقع للعملاء في الأنتظار في جميع المراحل.

(٣-١٠) أعتبر النظام في العمل (٣-١٠). أثبت أن عدد العملاء في كل مرحلة j مستقل عن عدد العملاء في أي مرحلة أخرى $k, j = 1, 2, \dots, k$.

(٤-١٠) في أحد أنظمة الخدمة للمرور لترخيص السيارات الملاكي لاستخراج رخصة جديدة أو تجديد رخصة، يتم الاستخراج أو التجديد وفقاً للمراحل المتتالية التالية: المرحلة الأولى: يوجد شباكين يقوم صاحب السيارة (أو من ينوب عنه) بشراء استمارات الترخيص من أحد الشباكين وإستيفاء الاستمارات فإذا كان زمن شراء الاستمارات المتوقع في الشباك الواحد دقيقة واحدة، حيث يمثل زمن الشراء من الشباك متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/60$ (ساعة).

المرحلة الثانية: يوجد 3 شبابيك من خلالها يتم أستلام الاستمارات بعد إستيفاءها وتحديد قيمة الرسوم والمخالفات للمالك وتحصيلها. فإذا كان زمن التسليم وتحصيل المخالفات في الشباك الواحد يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع $(1/40)$ ساعة.

المرحلة الثالثة: يوجد ماكينتين لأستخراج كروت الرخص حيث يمثل زمن أستخراج الكرت من الماكينة متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع (1/60) ساعة.

المرحلة الرابعة: يتم تسليم كروت الرخص للمالك (للسيارات) من خلال 3 شبابيك حيث أن زمن أستلام المالك للرخصة يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع (1/50) ساعة. وبمجرد أستلام المالك للرخصة يتم خروج المالك من نظام المرور. حيث يصل العملاء إلى المرور وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع (100) عميل في الساعة.

المطلوب: ١- وضح نظام الخدمة من خلال شكل بياني يوضح المراحل المتتالية.

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي المستقر روبرت جاكسون لنظام خدمة المرور.

٣- أوجد العدد المتوقع للعملاء في يوم عمل (10 ساعات عمل).

٤- أوجد العدد المتوقع لمراكز الخدمة غير المشغولة.

(١٠-٥) في أحد مصانع تجميع الغسالات الأتوماتيكية، يتم التجميع والأختبار على مرحلتين متتاليتين، في المرحلة الأولى يتم التجميع، حيث زمن تجميع الغسالة يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الآسي بتوقع 1/10 يوم عمل.

والمرحلة الثانية يتم أختبار الغسالة، حيث يمثل زمن الأختبار للغسالة متغير عشوائي أيضاً يتبع التوزيع الآسي بتوقع 1/20 يوم عمل.

فإذا كانت مكونات الغسالة تصل إلى المصنع وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع 8 غسالات (مكونات الغسالات) في اليوم.

والمطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي المستقر لنظام الخدمة في هذا المصنع.

٢- أوجد العدد المتوقع للغسالات المنتهي تجميعها وأختبارها في اليوم.

٣- أوجد احتمال تعطل المركز (بمعني خلو المصنع من الغسالات التي يتم تجميعها وأختبارها).

الباب الحادي عشر

نماذج الصفوف المتتالية مع حدوث رفض أو توقف

Series Queueing Models with Rejection or Blocking

Introduction	(١-١١) مقدمة
Queueing Model with Rejection	(٢-١١) نموذج الرفض
Queueing Model with Blocking	(٣-١١) نموذج التوقف
Applied Examples	(٤-١١) أمثلة تطبيقية
Exercises	(٥-١١) تمارينات

Introduction

(١-١١) مقدمة

في الباب السابق تناولنا بشيء من التفصيل بعض أنظمة الخدمة المتتالية لروبوت جاكسون تحت افتراض عدم وجود أي قيد على [48]:

- عدد العملاء في النظام،
- عدد العملاء في الأنتظار (في صف الأنتظار).

ولكن في كثير من أنظمة الخدمة المتتالية يوجد بها كثير من القيود يجب أن تأخذ في الاعتبار عند بناء التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام.

وفي هذا الباب سوف نقدم بعض النماذج لجاكسون أيضاً في الحالات التالية:

أولاً: وجود قيد على عدد العملاء في النظام. فإذا وصل عدد العملاء إلى العدد المحدد يتم رفض خدمة أي عميل يصل بعد ذلك، وهذا يترتب عليه ضياع فرص خدمة كان يمكن أن يؤديها النظام. وتسمى هذه بأنظمة الرفض ومن أمثلة هذه الأنظمة نظام الخدمة في الفنادق، المطاعم، المستشفيات، المسارح، الخ.

مما يترتب عليه ضياع إيرادات كان ممكن أن يحققها النظام.

ثانياً: وجود قيد على عدد العملاء في الصفوف المتتالية أعتبار من الصف في المرحلة الثانية، ونتيجة وجود هذا القيد يعني إذا أنتهت خدمة العميل في أي مرحلة (j) ولم يجد مكان في صف الأنتظار في المرحلة التالية (j+1) حيث يكون مركز الخدمة (أو مراكز الخدمة) في هذه المرحلة مشغول فإنه ينتظر داخل مركز الخدمة في المرحلة (j) التي أنهت خدمته ويسبب أنسداد أو توقف مركز الخدمة في المرحلة (j) عن العمل، ويسمي النظام في هذه الحالة بنظام التوقف، وقد يحدث التوقف في أكثر من مرحلة.

ويترتب على التوقف خسائر لتوقف بعض مراكز الخدمة عن العمل. ومن أمثلة هذه الأنظمة تفريغ البضائع على الأرصفة في الموانئ وعدم السحب في التوقيت المناسب،

كذلك في المصانع حيث يتم الإنتاج علي مراحل متتالية، كذلك في المستشفيات حيث تتم خدمة المريض على مراحل متتالية مثل الكشف، التحاليل، الإشاعات، وجود مكان في الرعاية المراكز (أو العمليات)، الخ.

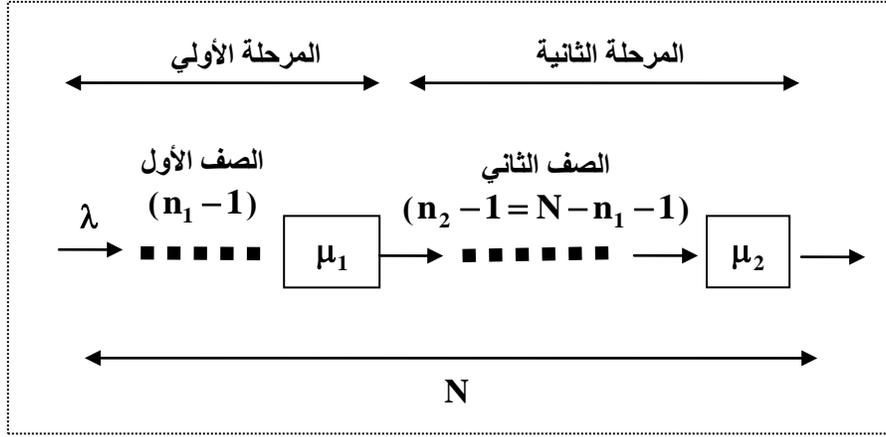
وتعتبر أنظمة الرفض أو التوقف من الأنظمة الأكثر تعقيداً في تحليلها، حيث أن نظام التشغيل في كل مرحلة مرتبط بالمرحلة الأخرى.

وفي هذا الباب سوف نقدم النماذج المتتالية على مرحلتين، وفي كل مرحلة مركز خدمة واحد.

Queueing Model with Rejection (٢-١١) نموذج الرفض

إذا اعتبرنا نظام الخدمة على مرحلتين المقدم في الفصل (٢-٩) حيث تتم الخدمة على مرحلتين متتاليتين وفي كل مرحلة مركز خدمة واحد ووصول العملاء وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ والخدمة وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1, 1/\mu_2$ على الترتيب، ولكن سوف نفترض أن أقصى عدد للعملاء في النظام (في الخدمة والانتظار) يساوي N أو بعبارة أخرى $n_1 + n_2 \leq N$ والشكل التالي يوضح النظام.

شكل (١-١١): نظام خدمة على مرحلتين متتاليتين مقيد بـ N من العملاء



وإذا وصل عدد العملاء في النظام N فإنه يتم رفض خدمة أي عميل آخر يصل إلى النظام.

نظرية (١-١١): التوزيع الاحتمالي المستقر للنظام أعلاه على النحو:

$$P(n_1, n_2) = \begin{cases} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0), & 0 \leq n_1 + n_2 \leq N, \quad n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N \\ \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} < 1, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} < 1 \\ 0, & n_1 + n_2 > N \end{cases} \quad (11.1)$$

(٢-١١) نموذج الرفض الباب الحادي عشر: نماذج الصفوف المتتالية مع حدوث رفض أو توقف

$$P(0,0) = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(1-\rho_1^{N+1})-\rho_2(1-\rho_1)(\rho_2^{N+1}-\rho_1^{N+1})} \quad (11.2)$$

الإثبات: بنفس أسلوب الإثبات للنظريات في الفصل (٢-١٠)، حيث يمكن الحصول على $P(0,0)$ من المعادلة التالية:

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N P(0,0) \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} = 1$$

نتيجة (١-١١): عندما $N \rightarrow \infty$ نجد أن:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P(0,0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(1-\rho_1^{N+1})-\rho_2(1-\rho_1)(\rho_2^{N+1}-\rho_1^{N+1})} \\ &= (1-\rho_1)(1-\rho_2) \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي سبق الحصول عليها في العلاقة (9.2) بالفصل (٢-٩) عندما لا يوجد قيد على عدد العملاء.

نتيجة (٢-١١): يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في كل مرحلة على حدة على النحو التالي:

$$P(n_1) = \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) = \frac{\rho_1^{n_1} (1-\rho_2^{N-n_1+1})}{(1-\rho_2)} P(0,0) \quad (11.3)$$

$$P(n_2) = \sum_{n_1=0}^{N-n_2} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) = \frac{\rho_2^{n_2} (1-\rho_1^{N-n_2+1})}{(1-\rho_1)} P(0,0) \quad (11.4)$$

ومن (11.3),(11.4) نجد أن:

$$P(n_1, n_2) \neq P(n_1) P(n_2) \quad (11.5)$$

من العلاقة (11.5) نجد أن عدد العملاء في المرحلة الثانية غير مستقل إحصائياً عن عدد العملاء في المرحلة الأولى [٤].

وفيما يلي سوف نقدم أهم مؤشرات قياس كفاءة النظام.

١- إذا فرضنا أن Y تشير إلى احتمال رفض خدمة عميل فإن:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{n_1=0}^N P(n_1, N-n_1) = \sum_{n_1=0}^N \rho_1^{n_1} \rho_2^{N-n_1} P(0,0) \\ &= \left[\frac{\rho_2^{N+1} - \rho_1^{N+1}}{\rho_2 - \rho_1} \right] P(0,0) \end{aligned} \quad (11.6)$$

٢- إذا رمزنا للعدد المتوقع للعملاء في المرحلة (j) بالرمز E_{1j} ، $j=1,2$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \sum_{n_1=0}^N n_1 P(n_1) = \sum_{n_1=0}^N n_1 \left\{ \frac{\rho_1^{n_1} (1 - \rho_2^{N-n_1+1})}{(1 - \rho_2)} \right\} P(0,0) \\ &= \frac{P(0,0)}{(1 - \rho_2)} \left\{ \left[\frac{\rho_1 (1 - \rho_1^N) - N(1 - \rho_1) \rho_1^{N+1}}{(1 - \rho_1)^2} \right] - \rho_2^{N+1} \sum_{n_1=0}^N \frac{n_1}{\rho_2^{n_1}} \right\} \\ E_{12} &= \sum_{n_2=0}^N n_2 P(n_2) = \sum_{n_2=0}^N n_2 \left\{ \frac{\rho_2^{n_2} (1 - \rho_1^{N-n_2+1})}{(1 - \rho_1)} \right\} P(0,0) \\ &= \frac{P(0,0)}{(1 - \rho_1)} \left\{ \left[\frac{\rho_2 (1 - \rho_2^N) - N(1 - \rho_2) \rho_2^{N+1}}{(1 - \rho_2)^2} \right] - \rho_1^{N+1} \sum_{n_2=0}^N \frac{n_2}{\rho_1^{n_2}} \right\} \end{aligned}$$

٣- إذا رمزنا للعدد المتوقع للعملاء في الصف (j) بالرمز E_{2j} ، $j=1,2$ على النحو التالي:

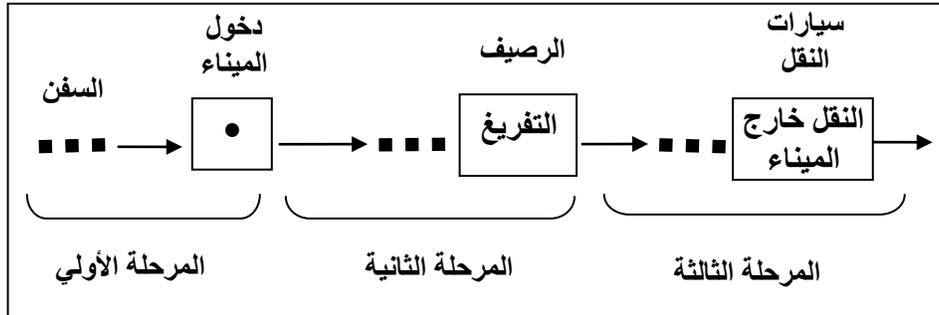
$$\begin{aligned} E_{21} &= \sum_{n_1=1}^N (n_1 - 1) P(n_1) = \sum_{n_1=1}^N (n_1 - 1) \left\{ \frac{\rho_1^{n_1} (1 - \rho_2^{N-n_1+1})}{(1 - \rho_2)} \right\} P(0,0) \\ E_{22} &= \sum_{n_2=1}^N (n_2 - 1) P(n_2) = \sum_{n_2=1}^N (n_2 - 1) \left\{ \frac{\rho_2^{n_2} (1 - \rho_1^{N-n_2+1})}{(1 - \rho_1)} \right\} P(0,0) \end{aligned}$$

Queueing Model with Blocking (٣-١١) نموذج التوقف

في بعض الأنظمة التي تتم الخدمة فيها على مراحل متتالية تنتهي خدمة العميل في مرحلة معينة ولتكن (j) ولا يوجد مكان للانتظار في الصف في المرحلة (j+1) فيظل داخل مركز الخدمة المنتهية الخدمة فيه بالمرحلة (j) وهو منتهي خدمته مما يؤدي لتوقف مركز الخدمة في المرحلة (j) عن أداء الخدمة، وهذا ما يسمى بحالة التوقف blocking. وهذا التوقف لا يؤثر على الأداء في المرحلة (j) فقط ولكن يؤثر على نظام الخدمة ككل، ومن أمثلة هذه الأنظمة ما يلي:

(١) في أحد الموانئ البحرية، إذا فرضنا أن السفن المحملة بنوعية معينة من البضائع (مثل الأخشاب) يتم تفريغها على رصيف معين وبعد التفريغ يتم نقل البضائع المفرغة خارج الميناء، فإذا لم يتم نقل البضائع من على الرصيف فور تفريغها فإنها تظل على الرصيف وتمنع دخول أي سفينة أخرى على الرصيف للتفريغ، والشكل التالي يمثل المراحل المتتالية لتفريغ ونقل البضائع خارج الميناء.

شكل (١١-٢): مراحل تفريغ ونقل البضائع خارج الميناء

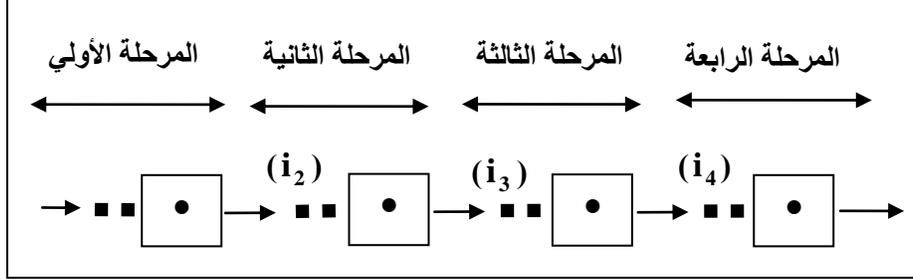


(٢) في أحد المراكز الإنتاجية يقوم بإنتاج منتج معين على 4 مراحل متتالية، واعتبار من المرحلة الثانية عدد الأماكن المخصص للانتظار للوحدات في المرحلة (j) عدد

(٣-١١) نموذج التوقف الباب الحادي عشر: نماذج الصفوف المتتالية مع حدوث رفض أو توقف

محدد يساوي i_j بحيث $i_j = i_2, i_3, i_4$ وبالتالي ممكن حدوث توقف في المرحلة الأولى أو الثانية أو الثالثة كما هو موضح في الشكل التالي.

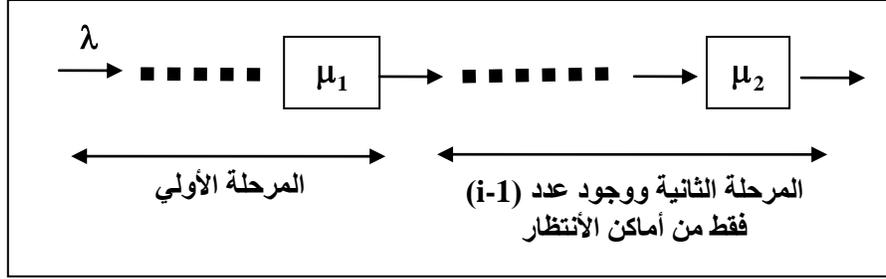
شكل (٣-١١): نظام خدمة على مراحل متتالية وفراغ الأنتظار محدد في بعض المراحل



وفي هذا الفصل سوف نعتبر نظام الخدمة على مرحلتين متتاليتين وبكل مرحلة مركز خدمة حيث يصل العملاء إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ والخدمة وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1, 1/\mu_2$ على التوالي، كذلك أقصى عدد من العملاء في المرحلة الثانية يساوي (i) ، وبالتالي فإن أقصى عدد من أماكن الأنتظار يساوي $(i-1)$ ، فإذا أنتهي خدمة عميل في المرحلة الأولى وكان عدد العملاء في المرحلة الثانية يساوي (i) في هذه الحالة يظل العميل المنتهي خدمته في المركز بالمرحلة الأولى ويحدث توقف لمركز الخدمة blocking حتى تنتهي خدمة عميل بالمرحلة الثانية.

فإذا أشرنا لأحتمال وجود (n_1, n_2) بالمرحلتين الأولى والثانية بالرمز $P(n_1, n_2)$ كذلك الرمز $P(n_1^*, i)$ يشير إلى وجود n عميل في المرحلة الأولى منهم عميل منتهي $n_1 \geq 1$ خدمته في المركز بالمرحلة الأولى وعدد $(n_1 - 1)$ في الأنتظار ووجود عدد (i) عميل في المرحلة الثانية، والشكل التالي يوضح النظام.

شكل (١١-٤): نظام الخدمة على مرحلتين وحدث توقف بالمرحلة الأولى



نظرية (٢-١١): إذا فرضنا نظام خدمة على مرحلتين متتاليتين وبكل مرحلة مركز خدمة واحد وزمن الخدمة في كل مركز متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1, 1/\mu_2$ على التوالي، كذلك يصل العملاء إلى النظام وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع λ فإن التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في النظام في وضع الاستقرار على النحو التالي [93,4]:

$$P(n_1, n_2) = \begin{cases} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) , & n_1 + n_2 > 0 , 0 < n_2 \leq i \\ \rho_1^{n_1^* - 1} \rho_2^{i+1} P(0,0) , & n_1^* \geq 1 , n_2 = i \end{cases} \quad (11.7)$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} < 1 , \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} < 1$$

$$P(0,0) = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1-\rho_2^{i+1}) - (1-\rho_2)\rho_2^{i+1}} \quad (11.8)$$

الإثبات: بنفس الأسلوب المستخدم في الباب السابق والفصول السابقة بهذا الباب.

في هذا الباب نجد أن المعادلات التفاضلية على النحو التالي:

$$P'(n_1, n_2, t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, t) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, t) \longrightarrow$$

وفي وضع الاستقرار الإحصائي نجد أن:

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2) = \lambda P(n_1 - 1, n_2) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1) \quad , n_1 + n_2 > 0 , n_2 < i \quad (11.9)$$

بالمثل:

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, i) = \lambda P(n_1 - 1, i) + \mu_1 P(n_1 + 1, i - 1) + \mu_2 P((n_1 + 1)^*, i) \quad , n_1 + n_2 > 0 , n_2 = i \quad (11.10)$$

من المعادلة (11.8) يمكن افتراض ما يلي:

$$\left. \begin{aligned} \lambda P(n_1, n_2) &= \mu_2 P(n_1, n_2 + 1) \\ \mu_1 P(n_1, n_2) &= \lambda P(n_1 - 1, n_2) \\ \mu_2 P(n_1, n_2) &= \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

كذلك من المعادلة (11.9) يمكن افتراض أن:

$$\left. \begin{aligned} \lambda P(n_1, i) &= \mu_2 P((n_1 + 1)^*, i) \\ \mu_1 P(n_1, i) &= \lambda P(n_1 - 1, i) \\ \mu_2 P(n_1, i) &= \mu_1 P(n_1 + 1, i - 1) \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

وكما ذكرنا في الباب السابق فإن النظام يمثل نظام ماركوف بحالات غير دورية وaperiodic وغير قابلة للأختزال irreducible، وبأستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضي يمكن أثبات أن:

$$P(n_1, n_2) = \begin{cases} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) \quad , n_1 + n_2 > 0 \quad , 0 < n_2 \leq i \\ \rho_1^{n_1 - 1} \rho_2^{i+1} P(0,0) \quad , n_1^* \geq 1 \quad , n_2 = i \end{cases}$$

وبما أن:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^i P(n_1, n_2) + \sum_{n_1^*=1}^{\infty} P(n_1^*, i) = 1 \longrightarrow$$

$$P(0,0) \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \left[\frac{1-\rho_2^{i+1}}{1-\rho_2} \right] + \rho_2^{i+1} / (1-\rho_1) \right\} = 1 \longrightarrow$$

$$P(0,0) = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1-\rho_2^{i+1}) + (1-\rho_2) \rho_2^{i+1}} \quad (11.13)$$

نتيجة (٤-١١): عندما $n_2 = i \rightarrow \infty$ فإن:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(0,0) = (1-\rho_1)(1-\rho_2) \quad (11.14)$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في الفصل (٢-١٠).

نتيجة (٣-١١): من العلاقة (11.7) يمكن الحصول على التوزيع الهامشي لعدد العملاء في كل مرحلة على النحو التالي:

$$P(n_1) = \begin{cases} \sum_{n_2=0}^i P(n_1, n_2) = \rho_1^{n_1} \left[\frac{1-\rho_2^{i+1}}{1-\rho_2} \right] P(0,0) \\ P(n_1^*) = \rho_1^{n_1^*-1} \rho_2^{i+1} P(0,0) \end{cases} \quad (11.15)$$

كذلك:

$$\begin{aligned} P(n_2) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) + \sum_{n_1^*=1}^i \rho_1^{n_1^*-1} \rho_2^{i+1} P(0,0) \\ &= \rho_2^{n_2} P(0,0) \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} + \rho_2^{i+1} P(0,0) \sum_{n_1^*=1}^i \rho_1^{n_1^*-1} \\ &= \frac{\rho_2^{n_2}}{(1-\rho_1)} P(0,0) + \frac{\rho_2^{i+1} (1-\rho_2^i)}{(1-\rho_1)} P(0,0) \\ &= \frac{\rho_2^{n_2}}{(1-\rho_1)} P(0,0) + C \end{aligned} \quad (11.16)$$

حيث:

$$C = \frac{\rho_2^{i+1} (1 - \rho_1^i)}{(1 - \rho_1)} P(0,0) \longrightarrow$$

$$P(n_1, n_2) \neq P(n_1) P(n_2) \quad (11.17)$$

ومما سبق يتضح أن احتمال حدوث توقف في المرحلة الأولى يساوي B حيث:

$$B = \sum_{n_1^*=1}^{\infty} P(n_1^*) = \sum_{n_1^*=1}^i \rho_1^{n_1^*-1} \rho_2^{i+1} P(0,0) = P(0,0) \frac{\rho_2^{i+1} (1 - \rho_1^i)}{(1 - \rho_1)} \quad (11.18)$$

وفيما يلي نقدم بعض مؤشرات النظام، على النحو التالي:

١- إذا أشرنا إلى العدد المتوقع في المرحلة الأولى بدون حدوث توقف بالرمز E_{11} والعدد المتوقع في المرحلة الثانية بالرمز E_{12} والعدد المتوقع لحدوث توقف بمركز الخدمة في المرحلة الأولى بالرمز E_{11}^* على النحو التالي:

$$E_{11} = \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1 P(n_1) = P(0,0) \left\{ \frac{\rho_1 (1 - \rho_2^{i+1})}{(1 - \rho_2) (1 - \rho_1)^2} \right\} \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} E_{12} &= \sum_{n_2=1}^i n_2 P(n_2) \\ &= \sum_{n_2=1}^i n_2 \left\{ \frac{\rho_2^{n_2}}{(1 - \rho_1)} P(0,0) + C \right\} \\ &= \frac{\rho_2 (1 - \rho_2^{i-1}) - i \rho_2^{i+1} (1 - \rho_2)}{(1 - \rho_1) (1 - \rho_2)^2} P(0,0) + \frac{i(i+1) C}{2} \end{aligned} \quad (11.20)$$

كذلك:

$$\begin{aligned}
 E_{11^*} &= \sum_{n_1^*=1}^{\infty} n_1^* P(n_1^*) = \sum_{n_1^*=1}^{\infty} n_1^* \rho_1^{n_1^*-1} \rho_2^{i+1} P(0,0) \\
 &= P(0,0) \left\{ \frac{\rho_2^{i+1}}{(1-\rho_2)^2} \right\} \quad (11.21)
 \end{aligned}$$

٢- إذا أشرنا إلى العدد المتوقع للعملاء في الأنتظار في المرحلة الأولى والثانية بالرمز E_{22}, E_{21} , على الترتيب، فإن:

$$\begin{aligned}
 E_{21} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1-1) P(n_1) + \sum_{n_1^*=1}^{\infty} (n_1^*-1) P(n_1^*) \\
 &= \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1-1) \rho_1^{n_1} \left[\frac{1-\rho_2^{i+1}}{1-\rho_2} \right] P(0,0) + \sum_{n_1^*=1}^{\infty} (n_1^*-1) \rho_1^{n_1^*-1} \rho_2^{i+1} P(0,0) \\
 &= \frac{\rho_1^2 (1-\rho_2^{i+1})}{(1-\rho_1)^2 (1-\rho_2)} P(0,0) + \rho_2^{i+1} P(0,0) \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2} \\
 &= \frac{P(0,0)}{(1-\rho_1)^2} \left\{ \frac{\rho_1^2 (1-\rho_2^{i+1})}{(1-\rho_2)} + \rho_1 \rho_2^{i+1} \right\} \quad (11.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{22} &= \sum_{n_2=1}^i (n_2-1) P(n_2) = \sum_{n_2=1}^i (n_2-1) \left[\frac{\rho_2^{n_2}}{(1-\rho_1)} P(0,0) + C \right] \\
 &= \frac{P(0,0)}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)^2} \left[\rho_2^2 (1-\rho_2^{i+1}) - (i-1) \rho_2^{i+1} (1-\rho_2) \right] \\
 &\quad + \frac{i(i+1)C}{2} \quad (11.23)
 \end{aligned}$$

Applied Examples

(٤-١١) أمثلة تطبيقية

تطبيق (١-١١): في أحد المراكز الطبية للعلاج بالإشعاع حيث يوجد به جهاز للعلاج بالإشعاع، فإذا كان المرضى المطلوب علاجهم بالإشعاع يصلون للمركز وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع $\lambda = 9$ مريض في الساعة حيث يتم تسجيل المريض وحالته أولاً ثم ينتظر حتى يفرغ الجهاز من مريض سابق (أو يدخل مباشرةً على الجهاز بعد التسجيل في حالة عدم وجود مريض على الجهاز) فإذا كان معدل تسجيل المرضى في الساعة $\mu_1 = 12$ ومعدل خدمة المريض في الساعة $\mu_2 = 10$ ، فإذا كان أقصى عدد من المرضى يمكن خدمتهم في المركز في الساعة 10 مرضى في الساعة.

فإذا كان زمن خدمة المريض في التسجيل أو على الجهاز يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي.

المطلوب: ١- حدد نظام الخدمة بالإشعاع في المركز ووضح ذلك بيانياً.

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد المرضى في المركز (في مرحلة التسجيل ومرحلة العلاج معاً).

٣- أوجد العدد المتوقع للمرضى في اليوم إذا كان يوم العمل 10 ساعات متصلة.

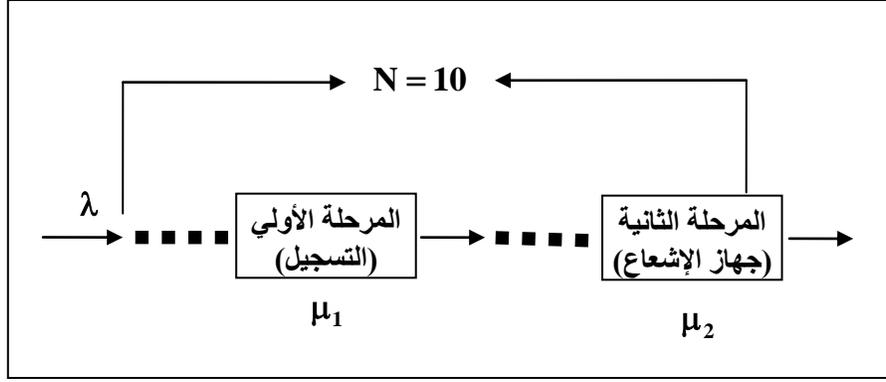
٤- أوجد احتمال رفض خدمة مريض في ساعة معينة، كذلك أوجد عدد المرضى المتوقع الممكن رفضهم خلال الساعة كذلك خلال يوم عمل.

الحل: ١- يمثل النظام نظام خدمة على مرحلتين المرحلة الأولى يتم التسجيل للمريض والمرحلة الثانية أعلاه جرعة الإشعاع، كذلك يمثل النظام نظام رفض التسجيل لأي عميل في أي ساعة عميل إذا وصل عدد العملاء إلى $N = 10$ والشكل التالي يوضح النظام.

٢- ويمكن تمثيل النظام بنموذج الرفض في الفصل (١١-٢) حيث:

$$N = 10, \quad \lambda = 9, \quad \mu_1 = 12, \quad \mu_2 = 10 \longrightarrow$$
$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{9}{12} = 0.75, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{9}{10} = 0.9 \longrightarrow$$

شكل (٥-١١): نظام خدمة على مرحلتين مع حدوث رفض لاستقبال بعض المرضى



$$\begin{aligned}
 P(0,0) &= \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(1-\rho_1^{N+1})-\rho_2(1-\rho_1)(\rho_2^{N+1}-\rho_1^{N+1})} \\
 &= \frac{(1-0.75)(1-0.9)(0.9-0.75)}{(0.9-0.75)[1-(0.75)^{11}]-0.9(1-0.75)[0.9^{11}-0.75^{11}]} \\
 &= \frac{(0.25)(0.1)(0.15)}{(0.15)(0.957765)-(0.9)(0.15)(0.27158)} \\
 &= \frac{0.00375}{0.1070015} = 0.035
 \end{aligned}$$

ويصبح التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في المرحلة الأولى والمرحلة الثانية (n_1, n_2) على النحو التالي:

$$P_r(n_1, n_2) = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) = (0.035)(0.75)^{n_1} (0.9)^{n_2}, \quad n_1 + n_2 \leq 10$$

٣- العدد المتوقع للمرضى في الساعة يساوي $E(n_1 + n_2)$ بحيث:

$$\begin{aligned}
 E(n_1 + n_2) &= \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + n_2) P(n_1, n_2) \\
 &= \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + n_2) \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P(0,0) \\
 &= P(0,0) \sum_{n_1=0}^{10} n_1 \rho_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{10-n_1} n_2 \rho_2^{n_2} \\
 &= (0.035) \left\{ \sum_{n_1=0}^{10} n_1 \rho_1^{n_1} \left[\frac{\rho_2(1-\rho_2^{10-n_1})}{(1-\rho_2)^2} - \frac{10-n_1}{1-\rho_2} \rho_2^{10-n_1} \right] \right\} \\
 &= (0.035) \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2 (1-\rho_1^9) - (1-\rho_1)(10\rho_1^{11})}{(1-\rho_2)(1-\rho_1)^2} - \frac{10\rho_2^{11}}{\rho_2(1-\rho_2)} \right\} \\
 &\approx 12 \text{ مريض}
 \end{aligned}$$

وبما أن العدد المتوقع في الساعة يساوي تقريباً 12 مريض، بالتالي يكون العدد المتوقع في يوم العمل:

$$12 \times 10 = 120 \text{ مريض}$$

وبما أن النظام يتسع لـ 10 مرضى في الساعة، بالتالي يتوقع فقد 20 مريض في اليوم يتم رفض خدمتهم.

٤- احتمال رفض خدمة مريض يساوي Y حيث:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sum_{n_1=0}^N P(n_1, N-n_1) = \left[\frac{\rho_2^{N+1} - \rho_1^{N+1}}{\rho_2 - \rho_1} \right] P(0,0) \\
 &= \frac{(0.9)^{11} - (0.75)^{11}}{0.9 - 0.75} (0.035) = 0.063 \\
 &\approx 0.06 = 6\%
 \end{aligned}$$

وهذا يعني أنه يتوقع رفض خدمة نسبة 6% من العملاء الذين يصلون إلى النظام نتيجة لوجود حد أعلى لعدد العملاء في النظام.

تطبيق (١١-٢): إذا كان الحجز على إحدى الطائرات التي تقلع من مطار القاهرة إلى مطار هيزرو بلندن في تاريخ معين في توقيت معين يتم قبل تاريخ الإقلاع بأسبوع بمعدل حجز $\lambda = 170$ في الأسبوع تصل وفقاً لتوزيع بواسون، وبالنسبة للحاجزين يتم تأكيد الحجز قبل إقلاع الطائرة بيوم واحد على الأقل، فإذا كان زمن الحجز للعميل وزمن تأكيد الحجز يمثلان متغيران عشوائيين وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1 = 1/175$, $1/\mu_2 = 1/178$ (أسبوع).

فإذا كان عدد المقاعد في الطائرة للعملاء 150 مقعد فقط تحت افتراض أولوية تأكيد الحجز وفقاً لأولوية الحجز.

المطلوب: ١- وضح بيانياً نظام الحجز والتأكيد على الحجز.

٢- مثل النظام بنموذج مناسب.

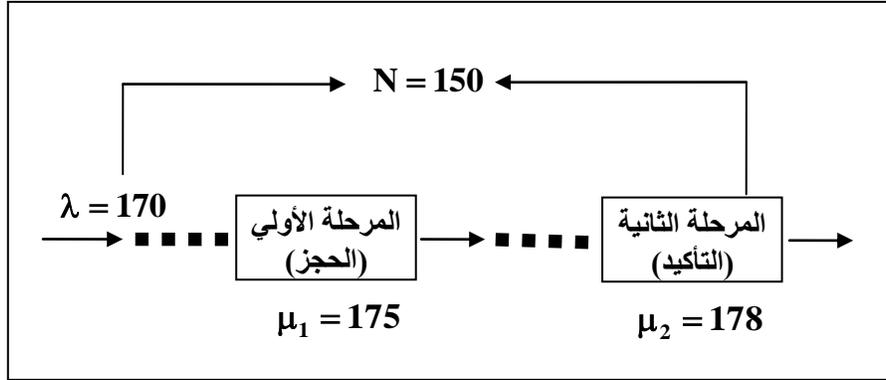
٣- أوجد احتمال حجز 80 فرد وتأكيد حجز 20 عميل.

٤- أوجد احتمال رفض حجز عميل خلال الأسبوع.

٥- أوجد المعدل الفعلي للحجز.

الحل: ١- الشكل التالي يمثل نظام الحجز والتأكيد على الطائرة.

شكل (١١-٦): يوضح الحجز والتأكيد على إحدى الطائرات



٢- يمكن تمثيل النظام بالنموذج في الفصل (١١-٢) بحيث:

$$\lambda = 170 \quad , \quad \mu_1 = 175 \quad , \quad \mu_2 = 178 \longrightarrow$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = 0.97 \quad , \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = 0.96$$

$$\begin{aligned} P(0,0) &= \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(1-\rho_1^{N+1})-\rho_2(1-\rho_1)(\rho_2^{N+1}-\rho_1^{N+1})} \\ &= \frac{(1-0.97)(1-0.96)(0.96-0.97)}{(0.96-0.97)(1-0.97^{151})-(0.96)(1-0.97)(0.96^{151}-0.97^{151})} \\ &= \frac{(0.03)(0.04)(-0.01)}{(-0.01)(0.99)-(0.03)(0.95)} = \frac{-0.00001}{-0.0334} = 0.0004 \end{aligned}$$

ويصبح التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء في المرحلة الأولى والمرحلة الثانية (n_1, n_2) على النحو التالي:

$$P(n_1, n_2) = (0.97)^{n_1} (0.96)^{n_2} (0.0004) \quad , \quad n_1 + n_2 \leq 150$$

-٣

$$\begin{aligned} P(n_1 = 80, n_2 = 20) &= (0.97)^{80} (0.96)^{20} (0.0004) \\ &= (0.088)(0.442)(0.0004) = 0.00002 \end{aligned}$$

٤- احتمال رفض خدمة عميل Y حيث:

$$\begin{aligned} Y &= \left[\frac{\rho_2^{N+1} - \rho_1^{N+1}}{\rho_2 - \rho_1} \right] P(0,0) \\ &= \left[\frac{(0.96)^{151} - (0.97)^{151}}{0.96 - 0.97} \right] (0.0004) = 0.0032 \end{aligned}$$

٥- المعدل الفعلي للحجز λ_{eff} حيث:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - Y) = 170(1 - 0.0032) = 169.5 \approx 170$$

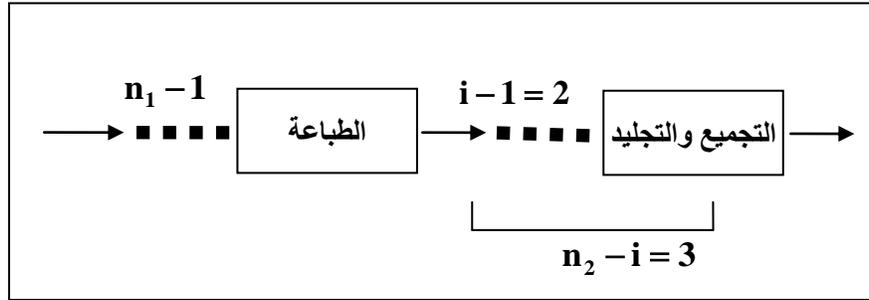
تطبيق (١١-٣): مطبعة لطباعة الكتب الخارجية لطلاب المرحلة الثانوية بحيث تصل الطلبات لطباعة الكتب وفقاً لتوزيع بواسون بتوقع $\lambda = 3$ (ثلاث كتب في الأسبوع). فإذا كانت عملية الطباعة تتم على مرحلتين المرحلة الأولى يتم فيها طباعة الكتاب والمرحلة الثانية يتم فيها تجميع وتجليد الكتاب، فإذا كان زمن الطباعة بالمرحلة الأولى وزمن التجميع والتجليد بالمرحلة الثانية وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_1 = 1/5, 1/\mu_2 = 1/4$ (أسبوع) على الترتيب. فإذا كانت المساحة المتاحة للكتب المطبوعة وفي انتظار التجليد تستوعب عدد 2 كتاب على الأكثر.

المطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الكتب في المرحلتين الأولى والثانية.

٢- أوجد احتمال حدوث توقف في المرحلة الأولى.

الحل: الشكل التالي يوضح النظام محل الدراسة

شكل (١١-٧): يوضح عدد الكتب في الانتظار للطباعة أو التجليد



$$\lambda = 3 \quad , \quad \mu_1 = 5 \quad , \quad \mu_2 = 4 \quad , \quad i = 3 \longrightarrow$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad , \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{3}{4} = 0.75 \longrightarrow$$

من المعادلة (11.8) نجد أن:

$$\begin{aligned} P(0,0) &= \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(1-\rho_2^{i+1})+(1-\rho_2)\rho_2^{i+1}} \\ &= \frac{(1-0.6)(1-0.75)}{[1-(0.75)^4]+(1-0.75)(0.75)^4} = 0.13 \end{aligned}$$

١- وبأستخدام نظرية (١١-٢) نجد أن:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2) &= \begin{cases} (0.6)^{n_1} (0.75)^{n_2} (0.13) , & n_1 + n_2 > 0 , 0 < n_2 \leq 3 \\ (0.6)^{n_1^*-1} (0.75)^4 (0.3) , & n_1^* \geq 1 , n_2 = 3 \end{cases} \\ P(n_1^*, i) &= \end{aligned}$$

٢- من المعادلة (10.18) نجد أن احتمال حدوث تكديس B حيث:

$$B = P(0,0) \left[\frac{\rho_2^{i+1} (1-\rho_1^i)}{(1-\rho_1)} \right] = (0.13) \left[\frac{(0.75)^4 (1-0.6^3)}{(1-0.6)} \right] = 0.081 \approx 0.08$$

تطبيق (١١-٤): في أحدي المواني البحرية خصص رصيف لتفريغ السفن التي تحمل مواد صلبة (مثل الخشب، الحديد، ... الخ). حيث تصل السفينة محملة بالشحنة لتفريغها على الرصيف (وإذا كان الرصيف مشغول بشحنة سابقة لم يتم سحبها فإنها تنتظر لحين خلو الرصيف ليتم تفريغ الشحنة عليه).

فإذا كان العدد المتوقع لوصول السفن إلى الرصيف λ (يومياً/سفينة $\lambda = 3$) وفقاً لتوزيع بواسون، وزمن الخدمة على الرصيف (زمن تفريغ الشحنة) وزمن نقلها إلى خارج الميناء وفقاً للتوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_2 = 1/4$, $1/\mu_1 = 1/4$ (يوم).

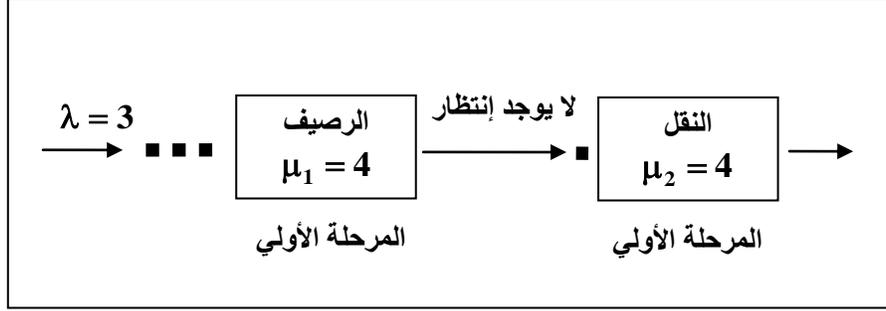
المطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السفن في الإنتظار أو الخدمة.

٢- أوجد العدد المتوقع للسفن لتفريغها ونقلها خارج الميناء .

الحل: ١- يمكن تمثيل النظام بنموذج الخدمة في الفصل (٣-١١) حيث:

$$i=1, \lambda=3, \mu_1=4, \mu_2=4 \longrightarrow \rho_1=\rho_2=\frac{3}{4}=0.75$$

شكل (٨-١٠): نموذج التفريغ والنقل خارج الميناء



$$P(0,0) = \frac{(1-0.75)(1-0.75)}{[1-(0.75)^2] + (1-0.75)(0.75)^2} = 0.1072$$

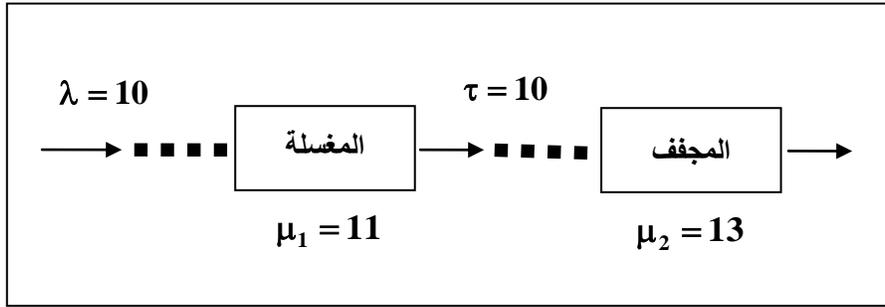
$$P(n_1,0) = \begin{cases} (0.75)^{n_1} (0.1072) & , n_1 \geq 1, n_2 = 0 \\ (0.75)^{n_1^*-1} (0.75)^2 (0.1072) & , n_1^* \geq 1, n_2 = 1 \end{cases}$$

٢- العدد المتوقع للسفن في الإنتظار والخدمة

$$\begin{aligned} E(n_1 + n_2) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} (n_1 + n_2) P(n_1, n_2) \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1 P(n_1, 0) + \sum_{n_1^*=0}^{\infty} (n_1^* + 1) P(n_1^*, 1) \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1 (0.75)^{n_1} (0.1072) + \sum_{n_1^*=1}^{\infty} (n_1^* + 1) (0.75)^{n_1^*-1} (0.0603) \\ &= (12)(0.1072) + (0.0603)[20] = 2.5 \approx 3 \text{ سفينة/يومياً} \end{aligned}$$

تطبيق (١١-٥): مغسلة لغسيل السجاد بحيث تتم عملية التنظيف للسجاد على مرحلتين، المرحلة الأولى غسيل السجاد، والمرحلة الثانية تجفيفها من خلال مجفف كهربائي. بحيث تتسع ماكينة الغسيل لسجادة واحدة في نفس الوقت كذلك المجفف. والشكل التالي يوضح ذلك بحيث أقصى عدد للسجاد المغسول وفي التجفيف أو في الإنتظار للتجفيف يساوي 10 سجاجة فقط والشكل التالي يوضح ذلك.

شكل (١١-٩)



المطلوب: ١- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السجاد في المغسلة أو الإنتظار والعدد في المجفف والإنتظار.

٢- أحتمال تعطل ماكينة الغسيل لعدم وجود مكان في إنتظار التجفيف.

الحل:

$$i = 10, \quad \lambda = 10, \quad \mu_1 = 11, \quad \mu_2 = 13 \longrightarrow$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{10}{11} = 0.9091, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{10}{13} = 0.7692$$

بالتالي فإن:

$$P(n_1, n_2) = \begin{cases} (0.9091)^{n_1} (0.7692)^{n_2} P(0,0), & n_1 + n_2 > 0, \quad 0 < n_2 \leq 10 \\ (0.9091)^{n_1^* - 1} (0.7692)^{i+1} P(0,0), & n_1^* \geq 1, \quad n_2 = i \end{cases}$$

$$P(0,0) = \frac{(1-0.9091)(1-0.7692)}{[1-(0.7692)^{11}] + (1-0.7692)(0.7692)^{11}} = 0.02192$$

٢- احتمال تعطل ماكينة الغسيل لعدم وجود مكان في الإنتظار يساوي B حيث:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n_1^*=1}^{\infty} P_r(n_1^*, i) = P(0,0) \left[\frac{\rho_2^{i+1}(1-\rho_1^i)}{(1-\rho_1)} \right] \\ &= (0.02192) \left[\frac{(0.7692)^{11}(1-0.9091^{10})}{(1-0.9091)} \right] = 0.0083 \end{aligned}$$

Exercises

(٥-١١) تمرينات

(١-١١): أعتبر نموذج الرفض في الفصل (٢-١١) مع وجود عدد K من المراحل المتتالية بدلاً من مرحلتين بحيث زمن الخدمة في كل مرحلة متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_j$ ، $j=1,2,\dots,k$ وأقصى عدد من العملاء في النظام يساوي N ويتم رفض خدمة أي عميل إذا وصل عدد العملاء في النظام N .

المطلوب: ١- كون معادلات الأستقرار لعدد العملاء في النظام.

٢- أوجد التوزيع الأحمالي $(P_r(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_k))$.

٣- أوجد التوزيع الهامشي لعدد العملاء في المرحلة (j) .

٤- أوجد العدد المتوقع للعملاء في النظام.

٥- أوجد أحتمال رفض خدمة عميل.

(٢-١١): أعتبر نموذج التوقف في الفصل (٣-١١) بحيث يوجد 3 مراحل متتالية للخدمة بحيث يمكن حدوث توقف في المرحلتين الأولى والثانية، حيث أماكن الإنتظار في المرحلة الثانية عدد محدد يساوي $(i_2 - 1)$ وعدد أماكن الإنتظار في المرحلة الثالثة يساوي $(i_3 - 1)$ وزمن الخدمة في كل مرحلة يمثل متغير يتبع التوزيع الآسي بتوقع $1/\mu_j$ ، $j=1,2,3$.

المطلوب: ١- كون معادلات الأستقرار لعدد العملاء في النظام.

٢- أوجد التوزيع الهامشي في كل مرحلة.

٣- أوجد أحتمال توقف في المرحلتين الأولى والثانية معاً.

الباب الثاني عشر
نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية
**Queueing Models and Optimization
Techniques**

Introduction	(١-١٢) مقدمة
	(٢-١٢) نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية
Queueing Models and Optimization Techniques	
	(٣-١٢) بعض نماذج الأمثلية
Some Optimization Models	
Exercises	(٤-١٢) تمرينات

Introduction**مقدمة (١-١٢)**

وكما قدمنا سابقاً أن أول دراسة علمية لأنظمة الصفوف الدراسية التي قدمها إيرلنج سنة ١٩٠٩ ومنذ ذلك التاريخ كان إيرلنج حريص على تحسين ورفع كفاءة أنظمة الصفوف في الشركة التي كان يعمل بها. وقد قُدمت العديد من الدراسات لتحسين كفاءة أنظمة الصفوف منه ومن آخرين.

ولكن منذ سنة ١٩٥٠ حيث بدأ التطور الكبير لأساليب الأمثلية **optimization techniques** وبصفة خاصة أساليب البرمجة الرياضية **mathematical programming techniques** مما أدى إلى استخدام هذه الأساليب في تصميم وتحسين أداء أنظمة الصفوف وبصفة خاصة بعد توافر برامج الحزم الجاهزة لأستخدام أساليب الأمثلية في حل المشاكل القرارية ذات الحجم الكبير.

وفي الفصل التالي سوف نشير إلى أهم الدراسات التي أستخدمت أساليب الأمثلية في تصميم وتحسين كفاءة أنظمة الصفوف

كذلك في هذا الباب سوف نقدم بعض الأمثلة المقترحة لأستخدام أساليب البرمجة الرياضية في تصميم بعض أنظمة الصفوف أو في تحسين كفاءة الأداء بالنسبة لأنظمة المقدمة في هذا الكتاب، مع توضيح ذلك من خلال بعض الأمثلة التوضيحية.

ويتطلب أستخدم أساليب البرمجة الرياضية في تحسين كفاءة أنظمة الصفوف الموجودة أو تصميم أنظمة جديدة الأمام الجيد بأساليب البرمجة الرياضية وبصفة خاصة أساليب البرمجة غير الخطية، والطرق المختلفة لحل نماذج البرمجة غير الخطية.

(٢-١٢) نماذج الصفوف وأساليب الأمثلية

Queueing Models and Optimization Techniques

ومنذ أن قدم إيرلنج أول دراسة لأنظمة الصفوف وكان دائم العمل على تحسين أنظمة التليفونات في الشركة التي كان يعمل بها. وفي سنة ١٩٢٤ قدم أول دراسة لتحديد العدد الأمثل للخطوط channels التي يتم فتحها بهدف تخفيض احتمال فقد العملاء كما في نموذج $(M/M/C):(FcFs/N/\infty)$ السابق تقديمه في الباب الخامس حيث حقق هذا الهدف من خلال الرسوم البيانية التي توضح العلاقة بين P_N وكل من μ, C, N [28,27,78,76].

كذلك قدم آخرين عدة دراسات للوصول إلى المؤشرات المثلى لبعض الأنظمة من خلال الرسوم البيانية ومنها الدراسة التي قدمها Cooper سنة ١٩٨١، كذلك الرسومات التي قدمها كل من Hillier and Lieberman سنة ١٩٨٦.

ولكن نظراً لاستخدام الكمبيوتر - فأصبح لضرورة لاستخدام الرسوم البيانية وبصفة خاصة في وجود حزم البرامج الجاهزة لأساليب الأمثلية، فأصبح من اليسير تطبيق أساليب الأمثلية لتحسين وتصميم أنظمة الصفوف [22,25].

وفي الفصول التالية سوف نقدم بعض الأمثلة لنماذج الأمثلية وطرق حلها بالنسبة لبعض أنظمة الصفوف.

ويعتبر Brighan سنة ١٩٥٥ من أوائل من استخدم أساليب البرمجة الرياضية في تحديد العدد المتوقع الأمثل للعاملين في مصانع الطائرات عند تصميم النظام وتحسين كفاءة النظام أيضاً [78].

كذلك سنة ١٩٥٨ قدم Morse نموذج برمجة غير خطي يهدف لتحقيق التوازن بين تكلفة الخدمة وتكلفة رفض خدمة بعض العملاء في النظام $(M/M/1):(FcFs/N/\infty)$. وفي الفصل (١١-٣) سوف نقدم نموذج عبارة عن تطوير لنموذج Morse.

وفي سنة ١٩٩٩ قدم Kurt خوارزم للحصول على أقل تكلفة لخط إنتاج يتم فيه الإنتاج على مراحل متتالية مع تحقيق أعلى إنتاجية وأقل احتمال للتعطل [73, 46].

وفي سنة ٢٠٠٨ صنف Narayan مجالات استخدام أساليب الأمثلية بالنسبة لأنظمة الصفوف إلى ثلاث مجالات [78] على النحو:

١- استخدام أساليب الأمثلية للحصول على المؤشرات المثلي لأداء النظام،

٢- استخدام أساليب الأمثلية في تحديد التصميم الأمثل optimal design بالنسبة لأنظمة التي يتم التخطيط لإنشائها،

٣- استخدام أساليب الأمثلية في حل بعض مشاكل الإدارة للأنظمة وحل مشاكل المراقبة control problems.

ونتيجة لاستخدام الكمبيوتر على نطاق واسع ووجود حزم البرامج الجاهزة لحل مشاكل البرمجة الرياضية، فأنتشر تطبيق أساليب الأمثلية لأنظمة الصفوف.

ففي سنة ٢٠١٢ قدم Gerasimov بعض نماذج الأمثلية في تحديد المعدلات المثلي لشبكات الكمبيوتر التي تمثل أنظمة صفوف متتالية بهدف تحقيق التوازن في الشبكة [40].

كذلك في سنة ٢٠١٤ قدم كل من Xiaoming and Yifen He بعض نماذج الأمثلية في تحديد أنواع وأوقات وسائل الإعلام المستخدمة [108, 109].

وفي الفصل التالي سوف نقدم بعض الأمثلة لتطبيق أساليب الأمثلية في تحسين كفاءة مؤشرات أداء النظام أو تحديد التصميم الأمثل لنظام جديد.

(١٢-٣) بعض نماذج الأمثلية Some Optimization Models

عادةً بالنسبة للأنظمة الخدمية أو الإنتاجية يرغب متخذ القرار في رفع كفاءة الأداء بالنظام أو التوسع في النظام بهدف الوصول إلى أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.

كذلك عند تصميم نظام جديد يكون من الأهمية لمتخذ القرار تحديد المعدلات المثلي للأداء التي تحقق له أكبر عائد أو أقل تكلفة. وبالتالي يمكن استخدام أساليب البرمجة الرياضية للوصول إلى هذه الأهداف.

وفي هذا الفصل سوف نقدم بعض الأمثلة لنماذج البرمجة غير الخطية التي يمكن باستخدامها تحقيق الأهداف السابق ذكرها، وذلك من خلال تقديم بعض نماذج الأمثلية والتي يمكن تطويرها فيما بعد، كذلك إعطاء بعض الأمثلة لتطبيق هذه النماذج [٨، ٩].

(١٢-٣-١) نموذج تعظيم الربح

إذا اعتبرنا نظام الخدمة $(M/M/1):(FcFs/N/\infty)$ ويرغب متخذ القرار في تحديد القيمة المثلي لكل من N, μ التي تحقق أقصى ربح ممكن حيث يفترض أن متوسط معدل وصول العملاء إلى النظام λ في وحدة الزمن معلومة، كذلك G هي الإيراد العائد من خدمة عميل، E هي تكلفة مركز الخدمي في وحدة الزمن. فإنه يمكن تحقق الهدف من خلال نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

أوجد كل من N, μ التي تجعل:

$$\text{Max. } Z = G \lambda [1 - P_N] - E = G \lambda \left[\frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \right] - E \quad (12.1)$$

$$\text{S.T.} \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (12.2)$$

والنموذج أعلاه يمكن حله باستخدام طريقة لأجرائج [٨]. وسوف نوضح بناء نموذج البرمجة من خلال المثال التالي.

مثال (١٢-١): أعتبر مثال (٥-٣) بالبواب الخامس، فإذا كان مدير المركز يتوقع زيادة متوسط معدل وصول المرضى λ من 9 إلى 15 مريض في اليوم.

ويرغب في تحديد القيم المثلي لكل من N, μ التي تجعل الربح اليومي أكبر ما يمكن حيث أن تكلفة المركز اليومية $E = 10,000$ والإيراد من خدمة مريض واحد $G = 2,000$.

المطلوب: ١- بناء نموذج برمجة لتحقيق هدف متخذ القرار.

٢- حل النموذج وتحديد القيم المثلي Z^*, N^*, μ^* .

الحل: ١- أوجد N, μ التي تجعل:

$$\text{Max. } Z = 30,000 \left[\frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \right] - 10,000$$

$$\text{S.T. } \rho < 1$$

وبحل النموذج باستخدام طريقة لأجرائج نجد أن:

$$\text{جنيه } Z^* \approx 15,372.87, \quad N^* = 5, \quad \rho^* = 0.97$$

$$\therefore \hat{\rho} = \frac{\lambda}{\mu^*} \longrightarrow \mu^* = 15.5$$

(١٢-٣-٢) نموذج تصغير التكلفة

في كثير من الأنظمة يمثل زمن الانتظار المتوقع للعميل في النظام تكاليف غير مباشرة على النظام، فإذا اعتبرنا النظام $(M/M/1):(FcFs/\infty/\infty)$ ويرغب متخذ القرار في تحديد μ التي تجعل زمن انتظار العميل المتوقع أقل ما يمكن.

مثال (١٢-٢): أعتبر مثال (٥-١) بالبواب الخامس، إذا حدث تزايد لمتوسط معدل وصول السيارات إلى المحطة من $\lambda = 5$ إلى 10 في الساعة، وتزايد زمن انتظار السيارة حتى الدخول للخدمة تمثل تكلفة غير مباشرة على المحطة. ويرغب متخذ القرار في زيادة معدل الخدمة μ بحيث يكون زمن الانتظار المتوقع أقل ما يمكن.

ويمكن صياغة هذه المشكلة كنموذج برمجة غير خطية على النحو التالي:

أوجد μ بحيث:

أوجد قيمة ρ التي تجعل

$$\text{Min. } Z = W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{10(1-\rho)}$$

$$\text{S.T. } \rho < 1$$

الحل: باستخدام طريقة لأجرانج أيضاً نحصل على القيمة المثلى لـ ρ وبالتالي لـ μ ، حيث أن:

$$\rho^* = 0.6 \longrightarrow \mu^* = 16.5 \text{ ساعة / سيارة}$$

Exercises

(٤-١٢) تمرينات

(١-١٢): أعتبر تمرينات (٧-٥)،

١- أعتبر النظام في (٢-٥)، كون نموذج برمجة مناسب لإيجاد μ بحيث يكون P_0 أقل ما يمكن.

٢- أعتبر النظام في (٤-٥)، كون نموذج لتحديد μ التي تجعل العدد المتوقع للعملاء في النظام أكبر ما يمكن.

٣- أعتبر النظام في (٦-٥) أوجد العدد الأمثل للأرصفة بحيث يكون زمن إنتظار السفينة أقل ما يمكن.

(٢-١٢): أعتبر تمرينات (٥-٨)،

١- أعتبر النظام في (٥-٨)، أوجد قيم λ_1, λ_2 التي تجعل W_q أقل ما يمكن.

٢- أعتبر النظام في (٦-٨)، أوجد القيمة المثلي لـ μ التي تجعل W_q أقل ما يمكن.

٣- أعتبر النظام في (٩-٨)، إذا كان متخذ القرار يرغب في تحديد القيمة المثلي لـ μ بحيث يكون العدد المتوقع للعملاء في النظام أكبر ما يمكن.

(٣-١٢): أعتبر تمرينات (٥-١٠)،

١- أعتبر النظام في (٤-١٠)، أوجد قيمة μ التي تجعل العدد المتوقع للمراكز غير المشغولة أقل ما يمكن.

٢- أعتبر النظام في (٥-١٠)، أوجد قيمة μ التي تجعل العدد المتوقع للغسالات التي يتم تجميعها أكبر ما يمكن.

(٤-١٢): أعتبر النظام في الفصل (٢-١١)، أوجد قيمة μ_1, μ_2 التي تجعل احتمال رفض خدمة عميل أقل ما يمكن باستخدام أسلوب البرمجة.

(٥-١٢): أعتبر النظام في الفصل (٣-١١)، كون نموذج برمجة مناسب الذي يجعل احتمال حدوث التوقف في المرحلة الأولى أقل ما يمكن.

الباب الثالث عشر

أسلوب المحاكاة وأنظمة الصفوف

Simulation Technique and Queueing Systems

Introduction	مقدمة (١-١٣)
Simulation Technique	أسلوب المحاكاة (٢-١٣)
Monte Carlo Method	طريقة المونت كارلو (٣-١٣)
Generation of Random Variates	توليد قيم المتغير العشوائي (٤-١٣)
Application	تطبيق (٥-١٣)

Introduction**مقدمة (١-١٣)**

في الأبواب السابقة تناولنا بشيء من التفصيل بعض نماذج الصفوف في شكل نماذج رياضية تصف السلوك الاحتمالي للنظام، وتتميز هذه النماذج بما يلي:

- ١- تصيغ العلاقات بين عناصر النظام بطريقة واضحة ومفهومة.
- ٢- باستخدامها يمكن اشتقاق مؤشرات كفاءة النظام ومتابعته والتحكم فيه.
- ٣- أنه يمكن ربط هذه النماذج بأساليب الأمثلية والتي يمكن بذلك الوصول إلى أفضل القرارات المتعلقة بالنظام.

ولكن في كثير من الأنظمة الفعلية يكون من الصعب في بعض الحالات وقد يكون من المستحيل في بعض الحالات الأخرى اشتقاق نماذج رياضية، ومن هذه الحالات:

- ١- الأنظمة المعقدة بحيث يكون من الصعب صياغة العلاقات بين عناصرها صياغة رياضية.
 - ٢- عدم توافر بعض أو كل الشروط التي تخضع لها النماذج الرياضية والسابق تناولها في الأبواب السابقة.
 - ٣- الأنظمة التي تعتمد على الزمن حيث تتغير خصائص عناصر النظام وفقاً للزمن.
- في واحدة على الأقل من الحالات أعلاه نلجأ إلى أسلوب المحاكاة وهو أسلوب عددي تجريبي، لذلك فإن نتائج المحاكاة لا تضمن لنا الحصول على حلول مثلى ولكنها توصلنا إلى حلول تقريبية.

وتوجد طرق مختلفة لأساليب المحاكاة من أهمها وأكثرها شيوعاً طريقة المونت كارلو Monte Carlo method. وسوف نتناولها بشيء من التفصيل في هذا الباب.

Simulation Technique

(٢-١٣) أسلوب المحاكاة

المحاكاة هي وضع شبيه للنظام دون المساس بالنظام الفعلي. وأساليب المحاكاة هي مجموعة من الأساليب بأستخدامها يوضع شبيه للنظام الفعلي دون المساس به.

وأستخدمت أساليب المحاكاة من قديم الزمن. فقد بدأت بمشاهدة العالم الرياضي لاجندر **Legendary** لتحركات سكير يحاول الوصول إلى نقطة معينة في أقصر طريق، حيث يمكن تمثيل هذه المشكلة بجسم يتحرك من نقطة ثابتة في حركة عشوائية ومنها يمكن معرفة أقصر مستقيم يصل من النقطة الثابتة إلى النقطة المراد الوصول إليها. وقد سميت هذه المشكلة بمشكلة السير العشوائي **random walk problem** (السابق تناولها في الباب الثالث)، وتنطبق هذه المشكلة على حركة النيوترونات بعد انبعاثها من مصدر معين وقد توصل إلى ذلك كل من **Fermi، Ulam، Van Neuman** وذلك عند حسابتهم المرتبطة بتكوين القنابل الذرية [12، 64].

ونموذج المحاكاة **simulation model** هو عبارة عن تصميم يتضمن عناصر النظام والعلاقات بينها وتتبع سلوك النظام عند تغير قيم العناصر المختلفة للنظام. لذلك يعرف البعض نموذج المحاكاة بأنه تجربة إحصائية مثل العالم الروسي **Mavumu, U.** [86, 87].

وتنقسم أنواع نماذج المحاكاة إلى ثلاثة أنواع هي:

١- النماذج النسبية (القياسية) **Analogue Models**.

٢- النماذج المتصلة (المستمرة) **Continuous Models**.

٣- النماذج المتقطعة **Discrete Models**.

والنماذج النسبية تتمثل في إحلال النظام الأصلي بنسبة منه سهله التناول مثل التجارب الكيميائية أو الفيزيائية، الخ.

أما النماذج المتصلة والمتقطعة فهي تختلف عن النماذج النسبية في أنها نماذج رياضية، حيث يتم صياغة العلاقات والتفاعلات بين مكونات النظام في صورة علاقات رياضية **mathematical relationships**.

والنماذج المتصلة تمثل النظام خلال فترة زمنية يمكن خلالها تغير خصائص النظام الذي يتم محاكاته. أما النماذج المتقطعة فهي تمثل (تحاكي) النظام في نقط زمنية معينة، وتعتبر النماذج المتقطعة هي النماذج الأكثر شيوعاً.

وبالنسبة لجميع أنواع نماذج المحاكاة يعتمد تصميمها وتشغيلها **running** على محلل النظام وقدرته على أن يتضمن النموذج العناصر الهامة والمؤثرة في النظام الفعلي.

وكما ذكرنا سابقاً فإن النتائج المستخلصة من نموذج المحاكاة تعتبر نتائج تجربة إحصائية لذلك لا بد أن يلحقها الأختبارات الإحصائية المناسبة.

ويلعب الكمبيوتر دور هام ورئيسي في تصميم وتشغيل نماذج المحاكاة، فقد قُدمت العديد من حزم البرامج الجاهزة التي يمكن باستخدامها تصميم وتشغيل نماذج المحاكاة مثل: **SLAM , SIMSCRIPTII.5 , SIMAN , GPSS/H** [63, 64].

Monte Carlo Method (١٣-٣) طريقة المونت كارلو

تعتبر طريقة المونت كارلو أحدي طرق أساليب المحاكاة المستخدمة في دراسة الأنظمة التي تتضمن عنصر واحد على الأقل من عناصر النظام يمثل متغير عشوائي. ويمكن تلخيص خطوات استخدام طريقة المونت كارلو في الخطوات التالية [١٢، 103]:

الخطوة (١): دراسة النظام وتحديد عناصره الرئيسية كذلك العناصر المؤثرة فيه بطريقة مباشرة أو غير مباشرة وتحديد العلاقات بين هذه العناصر.

الخطوة (٢): تصميم نموذج يتضمن العناصر أعلاه ويعكس طبيعة العلاقات بينها والتسلسل المنطقي لهذه العلاقات.

الخطوة (٣): اختيار مجموعة من قواعد التشغيل (البدائل الممكنة).

الخطوة (٤): اختيار مجموعة من القيم تمثل كل عنصر من عناصر النظام وتحديد التأثير الناشئ من علاقات هذه العناصر مع بعضها على النظام.

الخطوة (٥): قياس الأداء الكلي للنظام وفقاً للمقياس التي يضعها متخذ القرار.

الخطوة (٦): اختيار مجموعة جديدة من القيم لكل عنصر من عناصر النظام وتكرار التجربة (أي تكرار الخطوات (٤)، (٥)).

الخطوة (٧): تكرار الخطوة (٦) عدد مناسب من المرات في ظل البيانات المتاحة.

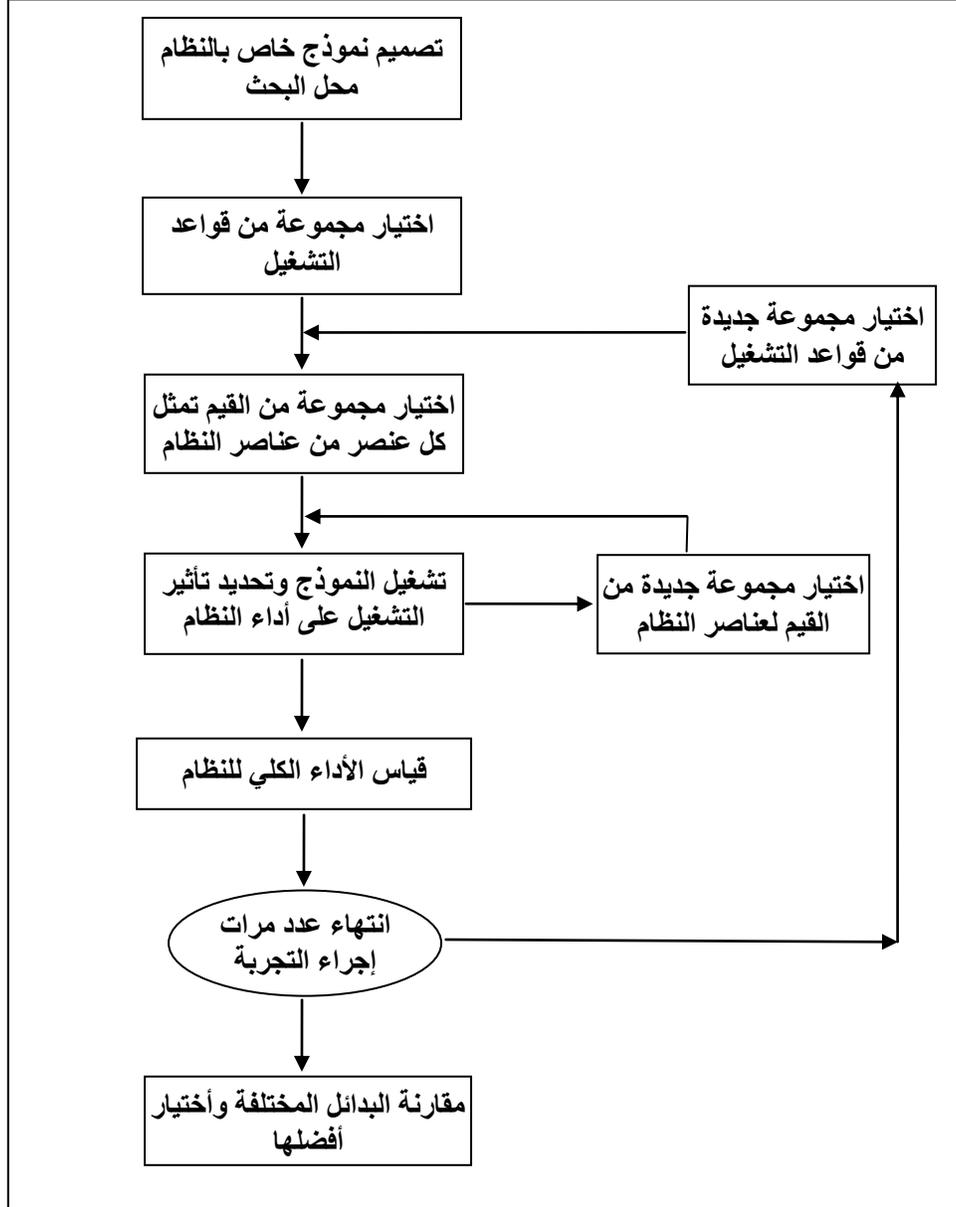
الخطوة (٨): اختيار مجموعة جديدة من قواعد التشغيل وتكرار الخطوات من (٤) - (٧).

الخطوة (٩): مقارنة النتائج وفقاً لقواعد التشغيل المستخدمة واختيار أفضلها.

الخطوة (١٠): إجراء الأختبارات الإحصائية المناسبة للنتائج.

ويمكن تلخيص الخطوات السابقة في الشكل التالي.

شكل (١-١٣): يوضح خطوات تصميم وتشغيل نموذج المحاكاة



وسوف نوضح الخطوات أعلاه من خلال المثال التالي:

مثال (١٣-١): إذا فرضنا مركز لصيانة الآلات يعمل عدد 10 ساعات في اليوم، ويرغب صاحب المركز في تحديد عدد العمال بالمركز بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن.

فإذا كان متوسط معدل وصول الآلات المعطلة إلى المركز آلة واحدة في الساعة وأن وقت صيانة الآلة يحدد عشوائياً برمي قطعة عملة، فإذا ظهر الوجه H فإن زمن صيانة الآلة يساوي ساعة وإذا ظهر الوجه T فإن زمن صيانة الآلة يساوي 1.5 ساعة.

فإذا اعتبرنا X هو زمن الصيانة فإن:

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ إذا ظهر الوجه H} \\ 1.5 & , \text{ إذا ظهر الوجه T} \end{cases}$$

فإذا كان زمن الأنتظار للآلة قبل دخولها للصيانة تمثل تكلفة بحيث تكلفة الساعة الواحدة C_1 وتكلفة العامل الواحد في اليوم C_2 . وبالتالي تكون التكلفة الكلية في يوم العمل C بحيث:

$$C = C_1T + C_2K$$

حيث T هو مجموع أزمنة الأنتظار خلال يوم العمل، K تشير إلى عدد العمال.

والجدول التالي (١٢-١) يوضح محاكاة النظام في حالة عامل واحد للصيانة وأجراء تجربة واحدة في كل حالة وجود 10 مشاهدات في التجربة، ومن الجدول نجد أن $T = 15$.

فإذا كانت جنيته $C_1 = 30$ وتكلفة العميل جنيته $C_2 = 100$ في اليوم. وتكون التكلفة الكلية C في هذه الحالة:

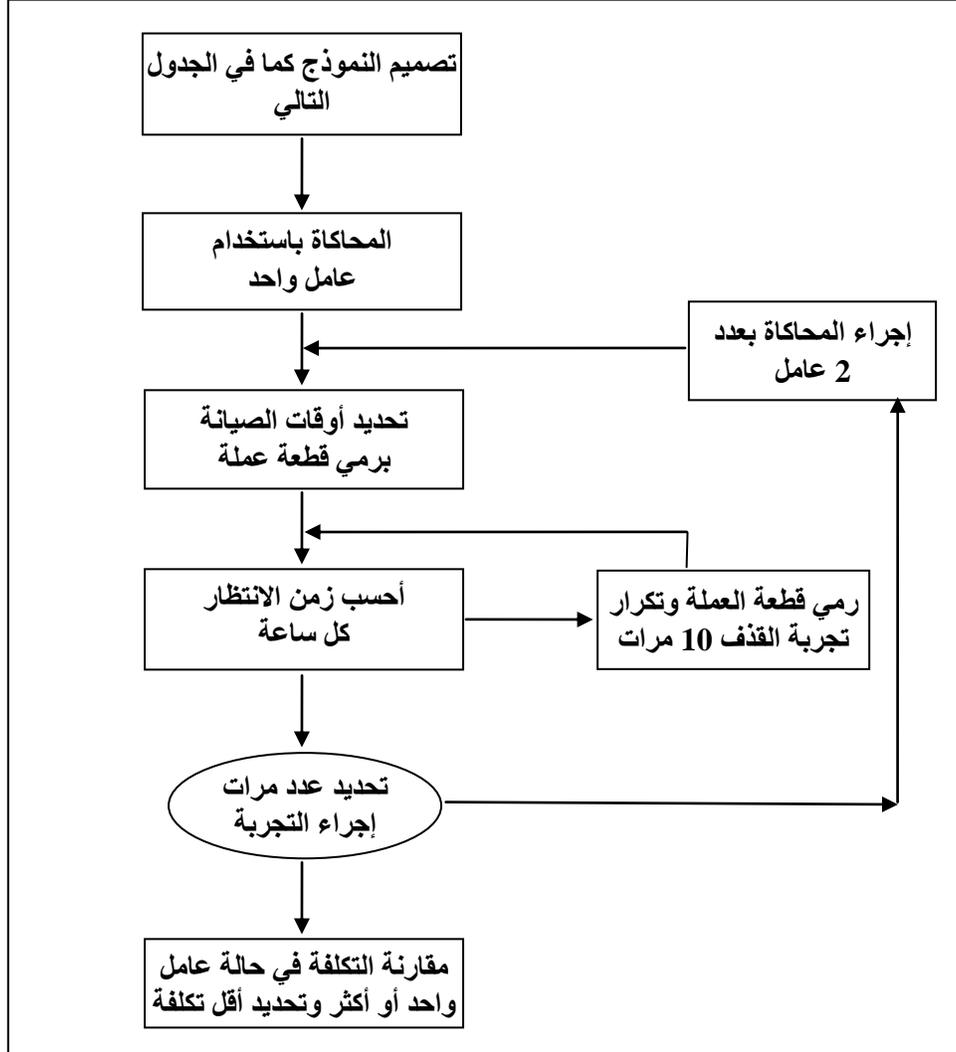
$$C = 30(15) + 100(1) = 450 + 100 = 550 \text{ جنيته} \quad (1)$$

ثم تصميم نموذج في حالة وجود عدد 2 من العمال كما في الجدول (١٢-٢). فنجد أن التكلفة الكلية:

$$C = 30(0) + 100(2) = 200 \text{ جنيه} \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أنه أفضل لصاحب المركز وجود 2 عامل بدلاً من عامل واحد.

شكل (١٣-٢): يوضح خطوات تصميم وتشغيل نموذج المحاكاة



جدول (١٣-١): يوضح تصميم وتشغيل نموذج محاكاة لمركز الصيانة بعامل واحد
(البديل الأول)

عدد ساعات العمل (التشغيل)	رقم العطل	نتائج قذف قطعة العملة	زمن الصيانة X	زمن بدأ الصيانة	زمن نهاية الصيانة	فترة الأنتظار للآلة
1	1	T	1.5	1	2.5	0
2	2	T	1.5	2.5	4.0	0.5
3	3	H	1	4.0	5.0	1.0
4	4	H	1	5.0	6.0	1.0
5	5	T	1.5	6.0	7.5	1.0
6	6	T	1.5	7.5	9.0	1.5
7	7	T	1.5	9.0	10.5	2.0
8	8	H	1	10.5	11.5	2.5
9	9	T	1.5	11.5	1.0	2.5
10	10	H	1	1.0	2.0	3.0
أجمالي أزمنة الأنتظار						15

ملحوظة: في هذا المثال تم إجراء تجربة واحدة بالنسبة لكل بديل، ولكن من الضروري إجراء عدد من التجارب بالنسبة لكل بديل يتم تحديدها مسبقاً.

فإذا أشرنا للتكلفة الكلية في التجربة رقم i بالرمز $C^{(i)}$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ، ثم نحسب متوسط التكلفة بالنسبة لبديل ما ونرمز له بالرمز \bar{C} حيث:

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n C^{(i)}}{n}$$

جدول (١٣-٢): يوضح تصميم وتشغيل نموذج محاكاة لمركز الصيانة بعاملين

عدد ساعات التشغيل	رقم العطل	نتائج القذف	زمن الصيانة X	زمن بداية الخدمة		زمن نهاية الخدمة		زمن أنتظار الآلة
				العامل (1)	العامل (2)	العامل (1)	العامل (2)	
1	1	T	1.5	1		2.5		0
2	2	T	1.5		2		3.5	0
3	3	H	1	3		4		0
4	4	H	1		4		5	0
5	5	T	1.5	5		6.5		0
6	6	T	1.5		6		7.5	0
7	7	T	1.5	7		8.5		0
8	8	H	1		8		9	0
9	9	T	1.5	9		10.5		0
10	10	H	1		10		11	0
أجمالي أزمنا الأنتظار								0

حجم التجربة وعدد مرات إجراء التجربة: المقصود هنا بحجم التجربة هو عدد المشاهدات في التجربة، ففي المثال السابق نجد أن حجم العينة 10 مشاهدات.

ومما لا شك فيه أنه كلما زاد عدد المشاهدات زادت درجة الثقة في النتائج التي نحصل عليها، ولكن كلما زاد حجم التجربة كلما زادت التكلفة والوقت [٥، ٧]. وعادةً يترك حجم التجربة وعدد مرات إجراء التجربة للباحث أو القائم على التحليل بناءً على ما يلي:

١- تكلفة إجراء كل تجربة من جمع بيانات وتشغيلها على الكمبيوتر.

٢- عدد البدائل المتاحة التي يحاكي تحتها النظام.

٣- مدى احتياج الجهة المسئولة عن البحث إلى دقة النتائج، فمثلاً في أبحاث الفضاء لا تأخذ التكلفة في الاعتبار نظراً لأهمية النتائج.

وفي التطبيقات العملية يُفضل ألا تقل عدد مشاهدات التجربة عن 500 مشاهدة ولا يزيد عن 10,000 مشاهدة.

ومما سبق يتضح أن دراسة النظام الذي يتكون من بعض العناصر العشوائية يتطلب معرفة دقيقة لعدد كبير من قيم المتغيرات العشوائية، وعادةً هذا العدد من القيم يكون غير متوافر ولكن غالباً يكون السلوك الاحتمالي للمتغير العشوائي (التوزيع الاحتمالي للمتغير) معلوم، وبالتالي يمكن باستخدام التوزيع الاحتمالي الحصول على عدد كبير من قيم المتغير وتسمى هذه العملية بعملية توليد قيم المتغير العشوائي **generation random variates**، وسوف نتناول هذه العملية بالتفصيل في الفصل التالي.

(٤-١٣) توليد قيم المتغير العشوائي

Generation of Random Variates

بما أن طريقة المونت كارلو تعتمد على حجم العينة (التجربة) وعدد مرات إجراء التجربة بالنسبة لكل بديل، ولكن في معظم الحالات لم تتوافر هذه البيانات عن المتغيرات العشوائية ولكن عادةً يكون معلوم السلوك الاحتمالي للمتغيرات العشوائية متمثلة في التوزيعات الاحتمالية لهذه المتغيرات.

وباستخدام الدالة العكسية للدالة التراكمية للمتغير العشوائي يمكن الحصول على القيم المختلفة للمتغير [٦].

وفيما يلي نقدم النظرية التي تثبت أن الدالة التراكمية للمتغير العشوائي تمثل متغير يتبع التوزيع المنتظم المتصل.

نظرية (١-١٣): إذا فرضنا أن $F(X)$ هي دالة التوزيع التراكمية للمتغير X ، فإن المتغير Y حيث:

$$Y = F(X) \quad , \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (1.131)$$

يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم $uniform\ distribution$ خلال الفترة $0 \leq Y \leq 1$ ، حيث تمثل $F^{-1}(X)$ الدالة العكسية للدالة التراكمية $F(X)$.

الإثبات: إذا فرضنا أن $G(y)$ هي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y خلال الفترة $0 \leq Y \leq 1$ فإن:

$$\begin{aligned} G(y) &= P_r[Y \leq y] = P_r[F(X) \leq y] \\ &= P_r[X \leq F^{-1}(y)] = F(F^{-1}(y)) = y \end{aligned} \quad (13.2)$$

فإذا فرضنا أن $g(y)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير y فإن

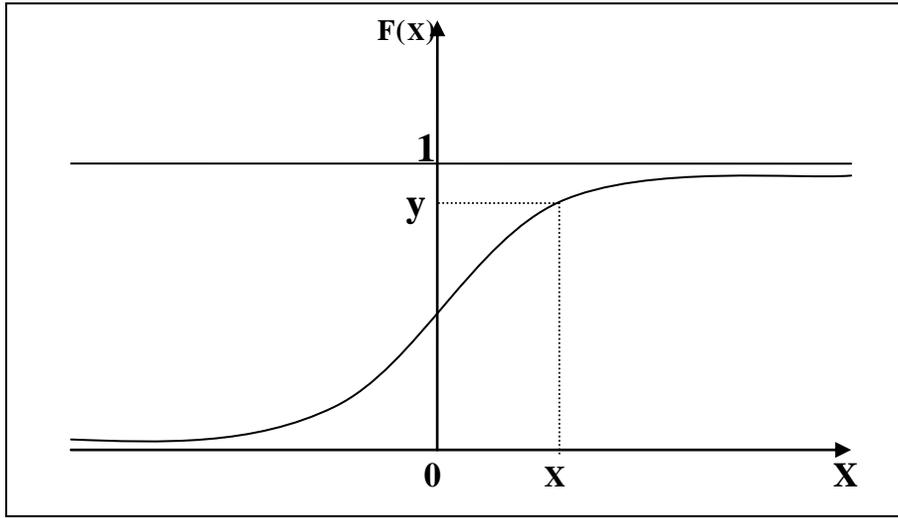
$$g(y) = \frac{d G(y)}{d y} = 1 \quad (13.3)$$

وبالتالي فإن المتغير Y متغير يتبع التوزيع المنتظم خلال الفترة $0 \leq Y \leq 1$. ويسمى y بالعدد العشوائي ($0 \leq y \leq 1$) وبالتالي عند قيم معينة لـ y فإنه يمكن إيجاد قيمة X من العلاقة:

$$X = F^{-1}(y) \quad (13.4)$$

والشكل التالي يوضح العلاقة (12.4).

شكل (٣-١٣): يوضح قيم X المختلفة عند قيم معينة لـ $F(X)$



جدول الأعداد العشوائية: تم تصميم جدول فيه القيم المختلفة خلال الفترة $[0,1]$ وفقاً للتوزيع المنتظم، بحيث:

١- لكل عدد نفس الفرصة في الظهور (وبالتالي تكون العينة (التجربة) المسحوبة من قيم المتغير عينة عشوائية بسيطة [٨]).

٢- الأعداد بشكل متتابع (وفقاً للعمود أو الصف) أعداد مستقلة وغير مترابطة بالمعني الإحصائي [٧،٥].

وملحق رقم (٦) يوضح جزء من جداول الأعداد العشوائية.

وفيما يلي سوف نقدم بعض الصياغات الرياضية للدالة $F^{-1}(y)$ لتوليد قيم المتغير العشوائي X بالنسبة لبعض التوزيعات الاحتمالية النظرية والتوزيعات التجريبية (التكرارية) أيضاً.

(١٣-٤-١) التوزيعات النظرية

فيما يلي سوف نقدم كيفية توليد قيم المتغيرات التي تتبع التوزيعات التالية:

١- التوزيع الآسي

٢- توزيع جاما

٣- التوزيع الطبيعي

أولاً: التوزيع الآسي

إذا كان المتغير X متغير يتبع التوزيع الآسي فإن:

$$y = F(X) = 1 - e^{-\lambda X} \quad (13.5)$$

حيث y هو العدد العشوائي من الجدول بملحق (٦) فإن:

$$X = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) \quad (13.6)$$

ولكن في بعض الحالات يكون الحصول على الصياغة الرياضية للدالة العكسية F^{-1} لدالة التوزيع التراكمية معقد أو غير ممكن (عندما تكون العلاقة ليست واحد-واحد (one-to-one relationship) في هذه الحالات نلجأ إلى بعض طرق التحويل كما سوف نوضح ذلك بالنسبة لتوزيع جاما والتوزيع الطبيعي.

ثانياً: توزيع جاما Gamma distribution

إذا كان المتغير X متغير يتبع توزيع جاما بمعلمات n, λ فإنه يمكن كتابة X

على النحو:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

حيث X_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الآسي بمعلمة λ . وبالتالي يمكن استخدام العلاقة (12.6) لحساب X ، وتسمى هذه الطريقة بالطريقة التجميعية convolution method، وبالتالي لحساب قيمة واحدة لـ X يتطلب حساب عدد n من القيم العشوائية للمتغير الذي يتبع التوزيع الآسي. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (١٣-٢): إذا كان X متغير يتبع توزيع جاما بمعلمات $n = 3, \lambda = 1$. والمطلوب حساب قيمتين للمتغير X .

الحل: من ملحق رقم (٦) وبأستخدام عناصر العمود رقم (١) نجد أن:

$$y_1 = 0.10480 \quad , \quad y_2 = 0.22368 \quad , \quad y_3 = 0.24130$$

$$y_4 = 0.42167 \quad , \quad y_5 = 0.37570 \quad , \quad y_6 = 0.77921$$

إذا فرضنا أن القيمة الأولى لـ X هي X^* وبأستخدام y_1 إلى y_3 فإن:

$$\begin{aligned} X^* &= X_1 + X_2 + X_3 \\ &= (0.110708122) + (0.02262195) + (0.2761488366) \\ &= 0.410 \end{aligned}$$

كذلك إذا فرضنا أن القيمة الثانية لـ X هي X^{**} وبأستخدام y_4 إلى y_6 فإن:

$$\begin{aligned} X^{**} &= X_1^1 + X_2^1 + X_3^1 \\ &= (0.547610639) + (+0.47112426) + (1.5105432255) \\ &= 2.529 \end{aligned}$$

ثالثاً: التوزيع المعتاد (الطبيعي) Normal distribution

إذا فرضنا المتغيرات y_1, y_2, \dots, y_n متغيرات مستقلة كل منها يتبع التوزيع المنتظم المتصل في الفترة $[0,1]$ ، وبافتراض أن المتغير T بحيث:

$$T = \sum_{i=1}^n y_i \quad (13.7)$$

فإن:

$$E(T) = \sum_{i=1}^n E(y_i) = \frac{n}{2} \quad (13.8)$$

$$\text{Var}(T) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(y_i) = \frac{n}{12} \quad (13.9)$$

ووفقاً لنظرية النزعة المركزية central limit theorem فإن المتغير T يقترب من

التوزيع المعتاد بتوقع $\frac{n}{2}$ وتباين $\frac{n}{12}$ ، وبالتالي فإن المتغير Z حيث:

$$Z = \frac{T - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \quad (13.10)$$

متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسي standard normal بتوقع صفر وتباين يساوي واحد.

وبالتالي فإذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين σ^2 فإن:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z = \frac{T - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \quad (13.11)$$

حيث n عدد الأعداد العشوائية، وبالتالي فإن:

$$X = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \left(T - \frac{n}{2}\right)$$

وبافتراض $n = 12$ فإن:

$$X = \mu + \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} y_i - 6 \right) \quad (13.12)$$

ملحوظة: وبالتالي لحساب قيمة واحدة لـ X يتطلب استخدام 12 عدد عشوائي

مثال (١٣-٣): باستخدام جداول الأعداد العشوائية أحسب قيمتين للمتغير X حيث X متغير يتبع التوزيع المعتاد بحيث $\sigma = 2$, $\mu = 5$.

الحل: فيما يلي الأعداد العشوائية المستخدمة

$$\begin{array}{l} \text{لحساب } X_1 \left\{ \begin{array}{l} 0.10480 \quad 0.15011 \quad 0.0153 \quad 0.02011 \quad 0.81647 \quad 0.91646 \\ 0.91291 \quad 0.9070 \quad 0.22363 \quad 0.46573 \quad 0.25595 \quad 0.85393 \end{array} \right. \\ \text{لحساب } X_2 \left\{ \begin{array}{l} 0.69179 \quad 0.14194 \quad 0.6259 \quad 0.36207 \quad 0.20969 \quad 0.9957 \\ 0.30995 \quad 0.89198 \quad 0.27982 \quad 0.53402 \quad 0.93965 \quad 0.34095 \end{array} \right. \end{array}$$

بما أن:

$$X = \mu + \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} y_i - 6 \right)$$

وبالتالي القيمة الأولى لـ X ولتكن X_1

$$X_1 = 5 + 2(5.642 - 6) = 4.284$$

$$X_2 = 5 + 2(6.324 - 6) = 5.648$$

(١٣-٤-٢) التوزيعات التجريبية (التراكمية) cumulative distributions

في بعض الحالات يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير غير معلوم أو الدالة العكسية لدالته التراكمية F^{-1} غير معلوم الصياغة الرياضية لها. ومثل ذلك عند تصميم بعض الأنظمة الجديدة، ولكن يكون متاح لدينا توزيع تكراري للمتغير يمثل العمود الأول فيه فئات

المتغير X والعمود الثاني تكرارات المتغير المناظر للفئة، حيث يفترض أن المتغير X موزع داخل الفئة الواحدة توزيع منتظم.

فإذا فرضنا أن (X_{i-1}, X_i) هي الفئة رقم i ، P_i تشير إلى التكرار التراكمي النسبي المناظر للفئة i ، فإنه يمكن الحصول على قيم X داخل الفئة i من العلاقة التالية:

$$X = X_i - \left[\frac{P_i - y}{P_i - P_{i-1}} \right] (X_i - X_{i-1}) \quad (13.13)$$

حيث y عدد عشوائي (أنظر ملحق (٦)).

وفيما يلي سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (١٣-٤): الجدول التكراري يوضح مدة إصلاح الآلات التي تصل إلى مركز خدمة معين بالساعات.

فئات مدة الإصلاح بالساعات	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	Σ
التكرارات الآلات	2	3	8	16	14	12	8	5	3	1	1	73

أوجد: ١ - قيمتين للمتغير X في الفئة الثانية (8-9).

٢ - قيمتين للمتغير X في الفئة (16-17).

الحل: نكون الجدول التالي الذي يعطي التكرارات التراكمية النسبية (P_i) .

١ - بما أن:

$$X = X_i - \left[\frac{P_i - y}{P_i - P_{i-1}} \right] (X_i - X_{i-1})$$

وباستخدام الأعداد العشوائية التالية:

$$y_1 = 0.04111, \quad y_2 = 0.03249, \quad y_3 = 0.97992, \quad y_4 = 0.98011$$

جدول (١٣-٣): يوضح التكرارات التراكمية النسبية

i	الفئات بالساعات	التكرارات	التكرارات	(P _i) التكرارات التراكمية البيئية
1	7-8	2	2	2/73=0.02738
2	8-9	3	2+3=5	5/73==0.06849
3	9-10	8	5+8=13	13/73=0.17808
4	10-11	16	13+16=29	29/73=0.39726
5	11-12	14	29+14=43	43/73=0.58904
6	12-13	12	43+12=55	55/73=0.75343
7	13-14	8	55+8=63	63/73=0.86301
8	14-15	5	63+5=68	68/73=0.93151
9	15-16	3	68+3=71	71/73=0.97260
10	16-17	1	71+1=72	72/73=0.98630
11	17-18	1	72+1=73	73/73=1.000

$$x_1 = 9 - \left[\frac{0.06849 - 0.04111}{0.06849 - 0.02738} \right] (9 - 8) = 9 - 0.68 = 8.32 \text{ ساعة}$$

$$x_2 = 9 - \left[\frac{0.06849 - 0.03249}{0.06849 - 0.02738} \right] (9 - 8) = 9 - 0.900 = 8.1 \text{ ساعة}$$

-٢

$$x_3 = 17 - \left[\frac{0.9863 - 0.97992}{0.9863 - 0.97260} \right] (17 - 16) = 17 - 0.27 = 16.73 \text{ ساعة}$$

$$x_4 = 17 - \left[\frac{0.9863 - 0.9801}{0.9863 - 0.97260} \right] (17 - 16) = 17 - 0.26 = 16.74 \text{ ساعة}$$

Application

(٥-١٣) تطبيق

في هذا الفصل سوف نقدم مثال تطبيقي لأستخدام طريقة المونت كارلو في بناء وتشغيل نموذج المحاكاة ثم بعض أختبارات الفروض الإحصائية لنتائج التجارب.

المثال: إذا فرضنا أنه يراد أنشأ محطة خدمة سيارات (لتمويل السيارات بالبنزين مثلاً). ومن الدراسات عن المنطقة التي سوف تنشأ فيها المحطة أتضح ما يلي:

- الفترة بين وصول سيارتين متتاليتين للتمويل يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 5$ (بالدقائق) وتباين $\sigma_1^2 = 9/16$.
- كذلك زمن خدمة السيارة بالمحطة يمثل متغير معتاد أيضاً بتوقع $\mu_2 = 5$ (دقائق) وتباين $\sigma_2^2 = 1/4$.
- عندما تصل السيارة للمحطة فأنها تبحث عن نقطة خدمة (طلبة بنزين) غير مشغولة فتدخل عليها، فإذا لم تجد تقف في صف الأنتظار لانتهاء أحدى الطلبات للدخول عليها.

ويرغب متخذ القرار في ما يلي: ١- تحديد أفضل عدد لنقاط الخدمة (الطلبات).

٢- تحديد متوسط زمن أنتظار السيارة بالمحطة بدرجة ثقة 95%.

٣- تحديد طول الصف (الطابور) للأنتظار.

وذلك من خلال بناء نموذج محاكاة مناسب.

الحل: يمكن حل المثال أعلاه في عدد k من المراحل حيث $k = 1, 2, \dots$ ويتوقف عدد المراحل k على التكلفة المادية والوقت والذي يحدده متخذ القرار بمعاونة محلل النظم. والمراحل مراحل تكرارية الأختلاف بين كل مرحلة وأخرى في أختيار قواعد التشغيل، ففي هذا المثال تعتبر قواعد التشغيل هي عدد الطلبات بمعنى في المرحلة الأولى نقدم النموذج بطلبة واحدة والمرحلة الثانية بعدد 2 طلبة.

المرحلة الأولى

في هذه المرحلة نعتبر أنه يوجد بالمحطة طلبية واحدة.

خطوة (١): نحدد عدد المشاهدات في التجربة وعدد التجارب، ففي هذا المثال سوف نعتبر عدد المشاهدات 15 مشاهدة وعدد التجارب في كل مرحلة 2.

خطوة (٢): باستخدام جدول الأعداد العشوائية يتم توليد قيم متغيرات الفترة الزمنية بين وصول سيارتين وسوف نرمز له بالرمز X_i ، وزمن خدمة السيارات وسوف نشير له بالرمز y_i حيث $i = 1, 2, 3, \dots, 15$.

خطوة (٣): نكون الجدول التالي الذي يوضح التجربة رقم (١) على النحو التالي:

١- العمود رقم (1) يعطي رقم وصول السيارات.

٢- العمود رقم (2) تم الحصول عليه من العلاقة (12.6) لتوليد قيم المتغير العشوائي للفترة بين وصوليين (X_i) (حيث X_i متغير يتبع التوزيع الآسي).

٣- العمود رقم (3) يتم تكوينه من العمود رقم (2) حيث:

$$X_i^1 = \sum_{j=1}^{i-1} X_j \quad (13.14)$$

٤- العمود رقم (4) يمثل زمن دخول السيارة للخدمة حيث:

$$X_i^{11} = \begin{cases} X_i^1 & \text{إذا كانت الطلبية غير مشغولة} \\ Z_{i-1} & \text{إذا كانت الطلبية مشغولة} \end{cases}$$

٥- العمود رقم (5) يمثل زمن أنتظار السيارة رقم i حيث:

$$W_i = X_i^{11} - X_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

جدول (١٣-٤): يوضح التجربة الأولى في مرحلة وجود طلبية واحدة

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
رقم الوصول	الفترة الزمنية بين سيارتين بالدقائق X_i	زمن وصول السيارة للمحطة X_i^1	زمن دخول السيارة للخدمة X_i^{11}	زمن الأنتظار للسيارة قبل الخدمة W_i	طول الصف L_i	الفترة الزمنية لخدمة السيارة y_i	زمن إنتهاء خدمة السيارة Z_i
(i)							
0	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1	3.845	3.845	3.845	0	0	4.965	8.810
2	5.636	9.486	9.481	0	0	5.007	14.488
3	6.909	16.390	16.390	0	0	4.369	20.754
4	2.630	19.020	20.754	1.734	1	7.320	28.074
5	3.410	22.430	28.074	5.644	1	8.870	36.944
6	4.420	26.850	36.944	10.094	2	6.430	43.374
7	3.100	29.950	43.374	13.424	2	9.270	52.644
8	2.930	32.880	52.644	19.764	3	6.370	59.014
9	5.101	37.981	59.514	21.033	3	8.4110	68.425
10	2.001	39.982	68.425	28.443	4	5.011	74.436
11	4.001	43.983	74.436	30.453	4	10.151	84.687
12	3.500	47.4830	84.687	34.204	5	9.718	94.405
13	2.7918	50.2754	94.4050	43.775	5	5.001	99.4060
14	5.2221	55.497	99.406	43.909	6	8.111	107.517
15	3.5010	58.998	107.517	48.519	7	4.121	111.638
			$\sum_{i=1}^{15}$	300.996	43		

٦- العمود رقم (6) يمثل طول الصف بوصول السيارة رقم (i) وسوف نشير له بالرمز L_i حيث يتم الحصول عليه بمقارنة عناصر العمود (3) بعناصر العمود (8)، أو عناصر العمود (3) بعناصر العمود (4) المناظرة لها.

٧- العمود رقم (7) يمثل زمن خدمة السيارة y_i حيث يتم تحديد عناصره باستخدام العلاقة (12.6) في توليد قيم المتغير y (حيث y_i متغير يتبع التوزيع الآسي أيضاً).

٨- العمود رقم (8) يمثل زمن إنتهاء خدمة السيارة بالمحطة وخروج السيارة، وسوف نشير له بالرمز Z_i حيث:

$$Z_i = X_i^{||} + y_i \quad (13.15)$$

خطوة (٤): من الجدول يتم حساب:

١- متوسط زمن إنتظار السيارة قبل الدخول للخدمة بالتجربة (1)

$$\bar{W}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{15} W_i}{n} = \frac{300.996}{15} = 20.07 \text{ دقيقة} \quad (1)$$

٢- متوسط طول الصف عند وصول العميل رقم (i) فإن

$$\bar{L}_1 = \frac{\sum L_i}{n} = \frac{43}{15} = 2.87 \approx 3 \text{ سيارات} \quad (2)$$

خطوة (٥): نقوم بإجراء التجربة الثانية بطلمبة واحدة أيضا ونكون الجدول التالي (مع مراعاة استخدام أعداد عشوائية أخرى وأشتقاق قيم أخرى لـ X_i, y_i).

من الجدول نجد أن:

$$\bar{W}_2 = \frac{103.9}{15} = 6.93 \text{ دقيقة} \quad (3)$$

$$\bar{L}_2 = \frac{36}{15} = 2.4 \approx 2 \text{ سيارة} \quad (4)$$

جدول (٥-١٣): يوضح التجربة الثانية بظلمة واحدة

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
رقم الوصول (i)	الفترة الزمنية بين سيارتين بالدقائق X_i	زمن وصول السيارة للمحطة X_i'	زمن دخول السيارة للخدمة X_i''	زمن الأنتظار للسيارة قبل الخدمة W_i	طول الصف L_i	الفترة الزمنية لخدمة السيارة y_i	زمن إنتهاء خدمة السيارة Z_i
1	4.03	4.03	4.03	0	0	3.06	7.09
2	2.35	6.36	7.09	0.73	1	3.24	10.33
3	1.60	7.48	10.33	2.85	1	2.74	13.07
4	2.78	10.76	13.07	2.31	1	3.52	16.59
5	2.59	13.76	16.59	2.83	1	3.40	19.99
6	3.54	16.89	19.99	3.10	1	4.03	24.02
7	2.21	19.10	24.02	4.92	2	3.14	27.16
8	1.54	20.64	27.16	6.52	2	2.68	29.84
9	1.99	22.63	29.84	7.21	3	3.50	33.34
10	1.01	23.64	33.34	9.70	4	3.91	37.25
11	2.01	25.65	37.25	11.60	4	4.01	41.26
12	2.05	27.70	41.26	13.56	4	4.11	45.37
13	3.50	31.20	45.37	14.17	4	2.99	48.36
14	3.91	35.11	48.36	13.25	4	2.11	50.47
15	4.21	39.32	50.47	11.15	4	3.50	53.97
$\sum_{i=1}^{15}$				103.9	36		

خطوة (٦): من (1),(3) نجد ان المتوسط العام لزمن أنتظار السيارة \bar{W} حيث:

$$\bar{W} = \frac{\bar{W}_1 + \bar{W}_2}{2} = \frac{20.67 + 6.93}{2} = 13.8 \text{ دقيقة} \quad (5)$$

كذلك من (4),(2) نجد ان المتوسط العام لطول الصف \bar{L} حيث:

$$\bar{L} = \frac{\bar{L}_1 + \bar{L}_2}{2} = \frac{2.87 + 2.4}{2} = 2.64 \approx 3 \text{ سيارات} \quad (6)$$

خطوة (٧): من الجدولين السابقين يمكن إيجاد تباين كل من W ، L في العينتين وليكن S_L^2 ، S_W^2 حيث:

$$S_W^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (W_i - \bar{W})^2}{n-1} = \frac{5861.85}{29} = 202.13$$

$$S_L^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (L_i - \bar{L})^2}{n-1} = \frac{103.334}{30-1} = 3.56$$

ملحوظة: تم حساب S_L^2 ، S_W^2 بملحق رقم (٨).

خطوة (٨): تحديد فترة الثقة وأختبارات الفروض الإحصائية لهذه المرحلة على النحو التالي.

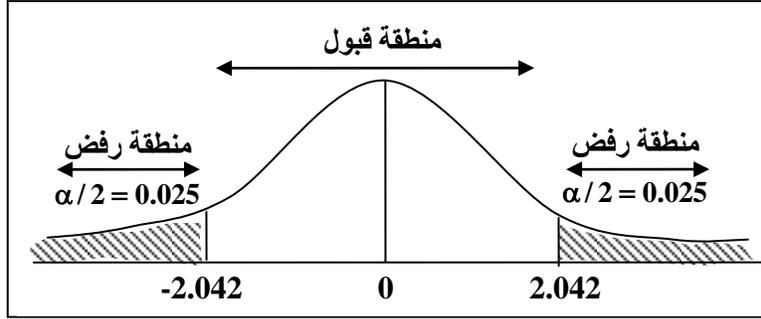
١- فترة الثقة لمتوسط زمن أنتظار السيارة في الصف μ_W بحيث:

$$\bar{W} - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_W^2}{n-1}} \leq \mu_W \leq \bar{W} + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_W^2}{n-1}}$$

$$13.8 - 2.042(2.64) \leq \mu_W \leq 13.8 + 2.042(2.64)$$

$$8.41 \leq \mu_W \leq 17.25$$

حيث تم حساب $t_{\alpha/2}$ من جدول توزيع أستيودنت بملحق (٧) عند درجات حرية $(n-1) = 29$.

شكل (١٣-٤): يوضح قيم الحدود $t_{\alpha/2}$ 

وبالتالي فإن القيمة المتوسطة لزمان أنتظار السيارة قبل الدخول للخدمة تقع في الفترة [8.41-17.25] وذلك بدرجة ثقة 95%.

٢- بالمثل بالنسبة لفترة الثقة لتوقع طول الصف μ_L نجد أن:

$$\bar{L} - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_L^2}{n-1}} \leq \mu_L \leq \bar{L} + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_L^2}{n-1}}$$

$$2.64 - 2.042(0.37) \leq \mu_L \leq 2.64 + 2.042(0.37)$$

$$1.89 \leq \mu_L \leq 3.40$$

$$2 \leq \mu_L \leq 3$$

وبالتالي فإن القيمة المتوقعة لعدد السيارة في الأنتظار تقع بين 2 أو 3 سيارات وذلك بدرجة ثقة 95%.

كذلك يمكن إجراء أختبارات فروض إحصائية عن كل من μ_W, μ_L كما سوف نوضح فيما يلي:

٣- بالنسبة لأختبار الفرض الإحصائي عن μ_W على النحو:

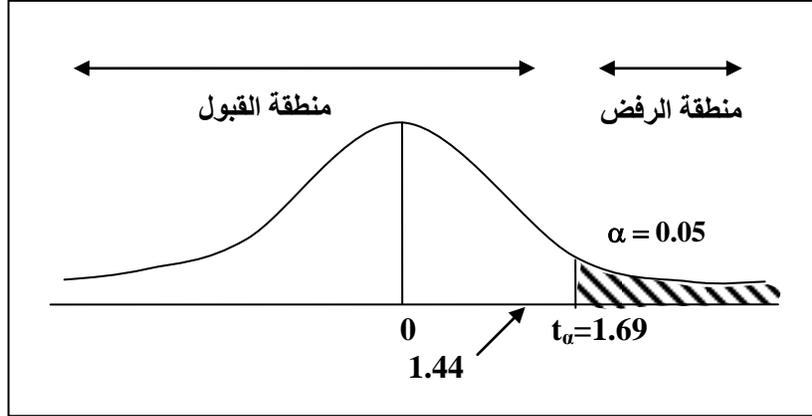
$$H_0 : \mu_W = 10 \quad \text{الفرض العدمي}$$

$$H_1 : \mu_W > 10$$

الفرض البديل

وعند درجة ثقة 95% وبأستخدام توزيع أستيودنت (t) فإن منطقة الرفض ومنطقة القبول كما هو موضح بالشكل التالي.

شكل (١٣-٤): يوضح منطقة الرفض للفرض العدمي



نحسب المقياس

$$t = \frac{\bar{W} - \mu_W}{\sqrt{\frac{S_W^2}{n-1}}} = \frac{13.8 - 10}{2.64} = +1.44$$

وبما أن $t = 1.44$ فإنها تقع في منطقة القبول، بالتالي نرفض الفرض البديل القائل بأن متوسط زمن الإنتظار أكبر من 10 دقائق وذلك بدرجة ثقة 95%.

كذلك بالنسبة لطول الصف، فإن:

$$H_0 : \mu_L = 3$$

الفرض العدمي

$$H_1 : \mu_L > 3$$

الفرض البديل

نحسب المقياس

$$t = \frac{\bar{L} - \mu_L}{\sqrt{\frac{S_L^2}{n-1}}} = \frac{2.64 - 3}{0.37} = -0.97$$

وبما أن $t = 0.97$ فإنها تقع في منطقة القبول، بالتالي نرفض الفرض البديل القائل بأن طول الطابور أكبر من 3 سيارات وذلك بدرجة ثقة 95%.

المرحلة الثانية

في هذه المرحلة نستخدم عدد 2 طلمبة بنزين بدلاً من طلمبة واحدة، ويتم حساب L_i, W_i في ل تجربة. وفيما يلي نقدم الجدولين التاليين التجربة (٣)، (٤).

جدول (١٣-٦) يوضح التجربة (٣) في وجود عدد 2 طلمبة، وجدول (١٢-٧) يوضح التجربة (٤) في وجود عدد 2 طلمبة أيضاً.

من التجربة (٣) نجد أن:

$$\bar{W}_1 = \frac{26.4}{15} = 1.76 \quad , \quad \bar{L}_1 = \frac{9}{15} = 0.6$$

من التجربة (٤) نجد أن:

$$\bar{W}_2 = \frac{0.28}{15} = 0.02 \quad , \quad \bar{L}_2 = \frac{1}{15} = 0.07$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{W} = \frac{1.76 + 0.02}{2} = 0.89 \quad , \quad \bar{L} = \frac{0.6 + 0.07}{2} = 0.34$$

وبنفس الأسلوب في المرحلة الأولى يمكن تحديد فترات الثقة وأختبارات الفروض بالنسبة لكل من μ_W, μ_L .

جدول (١٣-٦): يوضح التجربة رقم (٣) بطلمبتين

رقم الوصول (i)	الفترة بين وصولين متتاليين (X_i)	زمن وصول السيارة للمحطة (X_i')	زمن الدخول للخدمة (X_i'')		زمن الانتظار (W_i)	طول الصف (L_i)	زمن الخدمة (y_i)	زمن إنتهاء خدمة السيارة Z_i		
			ظلمية (١)	ظلمية (٢)				ظلمية (١)	ظلمية (٢)	
			1	3.845				3.845	3.845	—
2	5.636	9.981	9.481		0	0	5.007	14.488		
3	6.909	16.389	16.389		0	0	4.364	20.753		
4	2.630	19.019		19.019	0	0	7.320		26.336	
5	3.410	22.429	22.429	22.429	0	0	8.870	31.299		
6	4.420	26.849		26.949	0	0	6.430		33.279	
7	3.100	29.949	31.299		1.350	1	9.270	40.569		
8	2.930	32.879		33.279	1.400	1	6.370		39.649	
9	1.220	34.099		39.649	4.550	1	4.301		43.950	
10	1.930	36.029		40.569	4590	1	4.931		45.500	
11	2.410	38.439	40.569		2.130	1	5.071	45.640		
12	2.530	40.969		45.500	4.031	1	8.101		53.601	
13	3.201	44.170		45.640		1	6.501	52.141		
14	3.501	47.671	52.141		5.470	1	3.201	55.342		
15	3.001	50.672		53.601	2.929	1	4.001		57.602	
Σ					26.4	9				

جدول (٧-١٣): يوضح التجربة رقم (٤) بطلمبتين

رقم الوصول (i)	الفترة بين وصوليين متتاليين (X_i)	زمن وصول السيارة للمحطة (X_i')	زمن الدخول للخدمة (X_i'')		زمن الانتظار (W_i)	طول الصف (L_i)	زمن الخدمة (y_i)	زمن إنتهاء خدمة السيارة Z_i	
			ظلمية (١)	ظلمية (٢)				ظلمية (١)	ظلمية (٢)
			1	4.03				4.030	4.03
2	2.35	6.380		6.38	0	0	3.240		9.62
3	1.60	7.980	7.98		0	0	3.520	10.72	
4	2.78	10.760	10.76		0	0	3.400	14.28	
5	2.59	13.350		13.35	0	0	4.030		16.75
6	3.59	16.890	16.89		0	0	3.140	20.92	
7	2.21	19.100		19.10	0	0	2.680		22.24
8	1.54	20.640	20.92		0.28	1	4.010	23.20	
9	1.801	22.441		22.441	0	0	3.111	25.552	
10	2.501	24.942		24.98	0	0	3.001		27.943
11	2.001	26.943	26.943		0	0	2.401	29.344	
12	3.202	30.145		30.145	0	0	3.001	33.146	
13	4.100	34.245		34.245	0	0	2.901		37.146
14	2.001	36.246	36.246		0	0	4.321	40.567	
15	3.521	39.767		39.767	0	0	4.501		44.268
Σ					0.28	1			

Taylor Expansion

ملحق (١): مفكوك تيلور

أولاً: إذا فرضنا أن $f(x)$ دالة في متغير واحد x فإن:

$$f(x) = \sum_{k=0} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots \quad (1)$$

فإنه يمكن تقريب $f(x)$ في شكل كثيرة حدود عبارة عن متسلسلة القوى في $(x-c)$ وتكون المتسلسلة تقاربية عندما $x \in (c-r, c+r)$ حيث r تمثل نصف قطر التقارب $\text{radius convergence}$. وتتقارب المتسلسلة من الدالة $f(x)$ تقارب مطلق عندما $x \in (c-r, c+r)$ ، وبالتالي فإنه في الفترة $(c-r, c+r)$ فإن:

$$f(x) = \sum_{k=0} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots \quad (2)$$

كذلك:

$$f'(x) = \sum_{k=1} a_k k (x-c)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{k=2} a_k k(k-1)(x-c)^{k-2} \\ &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-c) + 4 \cdot 3a_4(x-c)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{k=3} a_k k(k-1)(k-2)(x-c)^{k-3} \\ &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-c) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x-c)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

وعندما $x=c$ فإن:

$$f(c) = a_0$$

$$f'(c) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(c) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! a_2$$

$$f'''(c) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3! a_3$$

⋮
⋮
⋮

$$f^{(k)}(c) = k! a_k \quad (6)$$

وبالتالي فإن:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \quad (8)$$

وتسمى المتسلسلة في (8) بمفكوك متسلسلة تيلور Taylor series expansion [٨] نسبة إلى عالم الرياضيات Brook Taylor (١٦٨٥-١٧٣١) الذي قام باشتقاق الدالة $f(x)$ في الصياغة (8).

والحالة الخاصة من مفكوك تيلور عندما $c = 0$ قدمها عالم الرياضيات مكلورين

Colin Maclaurin (١٦٩٨-١٧٤٦) فتصبح الدالة $f(x)$ على النحو:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) x^3 + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

مثال (١): أوجد مفكوك تيلور للدالة:

$$f(x) = e^x$$

حول $x = 0$ أي عندما $c = 0$

بما أن:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(k)}(x) = e^x$$

وبما أن مفكوك تيلور:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

ثانياً: إذا كانت الدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دالة في عدد n من المتغيرات فإنه يمكن إعادة كتابتها في شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية حول النقطة $X = C$ حيث X, C متجهين على النحو:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X = C) + \nabla f(C)(X - C) + \frac{1}{2}(X - C)^T H|_C (X - C) \quad (10)$$

حيث:

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_n} \right] \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{C}} \quad (11)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{C}} \quad (12)$$

حيث المصفوفة \mathbf{H} هي المصفوفة الهيسينية كذلك المتجه

$$(\mathbf{X} - \mathbf{C}) = [(x_1 - c_1), (x_2 - c_2), \dots, (x_n - c_n)]_{1,n} \quad (13)$$

مثال (٢): إذا فرضنا أن الدالة $f(x_1, x_2)$ بحيث:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_1 e^{x_2}$$

أوجد تقريب $P(\mathbf{X})$ حول النقطة $(x_1 = 1, x_2 = 1)$

الحل:

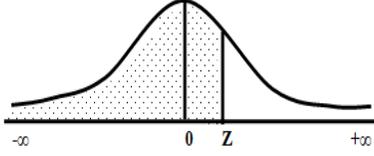
$$(\mathbf{X} - \mathbf{C}) = [(x_1 - 1) \quad (x_2 - 1)]^T = \begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\mathbf{X}) = [(10x_1 + 3e^{x_2}) \quad (3x_1 e^{x_2})] \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{C}} = [(18.155) \quad (8.155)]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10 & 3e^{x_2} \\ 3e^{x_2} & 3x_1 e^{x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 10 & 8.155 \\ 8.155 & 8.155 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_2) &= f(\mathbf{X} = \mathbf{C}) + \nabla f(\mathbf{C})(\mathbf{X} - \mathbf{C}) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{C})^T \mathbf{H}|_{\mathbf{C}} (\mathbf{X} - \mathbf{C}) \\
 &= 13.155 + [18.155 \quad 18.155]_{1,2} \begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 1) \end{bmatrix}_{2,1} + \\
 &\quad [(x_1 - 1) \quad (x_2 - 1)]_{1,2} \begin{bmatrix} 10 & 8.155 \\ 8.155 & 8.155 \end{bmatrix}_{2,2} \begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 1) \end{bmatrix}_{2,1} \\
 &= 10 x_1^2 + 8.155 x_2^2 - 18.155 x_1 - 24.465 x_2 + \\
 &\quad 16.310 x_1 x_2 + 21.310
 \end{aligned}$$

ملحق (٢) : الأاحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسي (Z)



$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7701	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8284	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

ملحق (٢): الأاحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسي

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9498	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9888	.9842	.9846	.9856	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.989	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

ملخص لبعض القيم الحرجة لـ (Z) والقيم المناظرة لها لـ F(Z)

Z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
F(Z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	.99995	.999995

ملحق (٣) : الأاحتمالات التراكمية لمتغير كا^٢

$$F(u) = \int_0^u \frac{X^{(n-2)/2} e^{-X/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} dX$$



F/n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	.04393	.03157	.03982	.03993	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.67	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	17.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.4	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.4	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8

F n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
16	5.14	8.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

Catherine (1941): "Tables of the Chi-Square Distribution", Biometrika, Val.32.

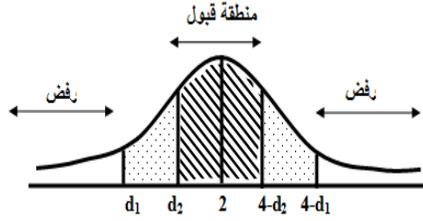
ملحق (٤): القيم الحرجة لـ k_m^α لاختبار كولموجروف-سيمرونوف

ملحق (٤): القيم الحرجة لـ k_m^α لاختبار كولموجروف-سيمرونوف

$n \backslash \alpha$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.40000	0.95000	0.97500	0.99000	0.995000
2	0.68377	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900
4	0.44265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661
7	0.38148	0.43607	0.4842	0.53844	0.57581
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179
9	0.33910	0.38796	0.43001	0.47960	0.51332
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45662	0.48893
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762
15	0.26588	0.30397	0.33760	0.37713	0.40420
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086
18	0.29360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
19	0.23735	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241
21	0.22617	0.25858	0.28724	0.32104	0.34427
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	0.19032	0.21756	0.2417	0.27023	0.28987

هذا الجدول جزء من جداول القيم الحرجة لاختبار كولموجروف - سيمرونوف [٧، 61].

ملحق (٥): التوزيع الأحمالي لدارين واتسون (D)



الجدول يعطى جزء من توزيع D حيث يعطى

قيم d_1, d_2 عند درجات الحرية ومستوى معنوية α

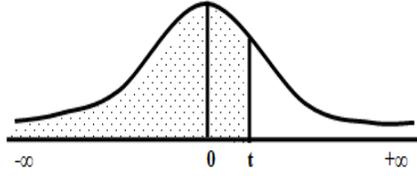
[٧، 61].

N	α	0.05		0.025		0.01	
		d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15		1.08	1.36	0.95	1.23	0.81	1.07
16		1.10	1.37	0.98	1.24	0.84	1.09
17		1.13	1.38	1.01	1.25	0.87	1.10
18		1.16	1.39	1.03	1.26	0.90	1.12
19		1.18	1.40	1.06	1.28	0.93	1.13
20		1.20	1.41	1.08	1.29	0.95	1.15
21		1.22	1.42	1.10	1.30	0.97	1.16
22		1.24	1.43	1.12	1.31	1.00	1.17
23		1.26	1.44	1.14	1.32	1.02	1.19
24		1.27	1.45	1.16	1.33	1.04	1.20
25		1.29	1.46	1.18	1.34	1.05	1.21
26		1.30	1.47	1.19	1.35	1.07	1.22
27		1.32	1.48	1.21	1.36	1.09	1.23
28		1.33	1.49	1.22	1.37	1.10	1.24

Random Numbers

ملحق (٦): الأعداد العشوائية

رقم العمود رقم الصف	1	2	3	4	5	6
1	0.10480	0.15011	0.01536	0.020111	0.81647	0.91646
2	0.22368	0.46573	0.025595	0.85393	0.309955	0.89198
3	0.24130	0.48360	0.022527	0.97265	0.76393	0.64809
4	0.42167	0.93093	0.06243	0.61680	0.07856	0.16376
5	0.37570	0.39975	0.81837	0.16656	0.06121	0.91782
6	0.77921	0.06907	0.11008	0.42751	0.27756	0.53498
7	0.99562	0.72905	0.56420	0.69994	0.98872	0.31016
8	0.96301	0.91977	0.05463	0.07972	0.18876	0.20922
9	0.89579	0.14342	0.63661	0.10281	0.17453	0.18103
10	0.85475	0.36857	0.43342	0.53988	0.53060	0.59533
11	0.2818	0.69578	0.88231	0.33276	0.70997	0.79936
12	0.63553	0.40961	0.48235	0.03427	0.49626	0.69445
13	0.09429	0.93969	0.52636	0.92737	0.88979	0.33488
14	0.10365	0.61129	0.87529	0.85689	0.48237	0.52267
15	0.07119	0.97336	0.71048	0.08178	0.77233	0.13916
16	0.51085	0.12765	0.51821	0.51259	0.77452	0.16308
17	0.02369	0.21382	0.52404	0.60268	0.80368	0.19885
18	0.01011	0.54092	0.33362	0.9404	0.31273	0.04146
19	0.52162	0.53916	0.46369	0.58586	0.23216	0.14513
20	0.07056	0.97628	0.33787	0.09998	0.42698	0.06691



ملحق (٧) : توزيع ستودنت (t)

يعطي الجدول قيمة المتغير X بمعلومية α وعدد

درجات الحرية n، حيث: $\alpha = (-\infty < X < t)$

α N	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.750	.700	.600	.550
1	63.66	31.88	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4	4.70	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.14	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127

ملحق (٨): حساب تباين العينة

في هذا الملحق تم حساب S_L^2 ، S_W^2 بالفصل (١٢-٥).

أولاً: لحساب S_W^2 نكون الجدول التالي.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
W_i	$(W_i - \bar{W})$	$(W_i - \bar{W})^2$	W_i	$(W_i - \bar{W})$	$(W_i - \bar{W})^2$
0	-13.8000	190.44	0	-13.800	190.44
0	-13.8000	190.44	0.73	-13.07	170.83
0	-13.800	190.44	2.85	-10.95	119.90
1.734	-12.066	145.59	2.310	-9.756	95.18
5.644	-8.166	66.68	2.83	-10.97	120.34
10.094	-3.706	13.73	3.10	-10.70	114.49
13.424	-0.376	0.14	4.92	-8.88	78.85
19.764	+5.964	35.67	6.52	-7.28	52.99
21.033	+8.833	78.02	7.52	-6.28	39.44
28.443	+15.443	238.49	9.70	-4.10	16.81
30.453	+16.653	277.32	11.60	-1.20	1.44
34.204	+20.404	416.32	13.60	-0.20	0.04
43.775	+29.975	898.50	14.17	+0.37	0.14
43.909	+30.109	906.55	13.25	-.55	0.30
48.519	+34.719	1205.40	11.15	-2.65	7.02
	Σ	4853.64		Σ	1008.21

ومن الجدول نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{30} (W_i - \bar{W})^2 = 4853.64 + 1008.21 = 5861.85$$

$$S_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (W_i - \bar{W})^2}{n-1} = \frac{5861.85}{29} = 202.13 \longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{S_w^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{202.13}{29}} = 2.64$$

ثانياً: لحساب S_L^2 نكون الجدول التالي.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
L_i	$(L_i - \bar{L})$	$(L_i - \bar{L})^2$	L_i	$(L_i - \bar{L})$	$(L_i - \bar{L})^2$
0	-2.64	6.97	0	-2.64	6.97
0	-2.64	6.97	1	-1.64	2.79
0	-2.64	6.97	1	-1.64	2.79
1	-1.64	2.79	1	-1.64	2.79
1	-1.64	2.79	1	-1.64	2.79
2	-0.64	0.41	1	-1.64	2.79
2	-0.64	0.41	2	-0.64	0.41
3	+0.36	0.13	2	-0.64	0.41
3	+0.36	0.13	3	0.36	0.13
4	1.36	1.85	4	1.36	1.85
4	1.36	1.85	4	1.36	1.85
5	2.36	5.57	4	1.36	1.85
5	2.36	5.57	4	1.36	1.85
6	3.36	11.29	4	1.36	1.85
7	4.36	19.01	6	3.36	11.29
Σ		72.71	Σ		42.41

$$S_L^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (L_i - \bar{L})^2}{n-1} = \frac{72.71 + 42.41}{29} = 3.97 \longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{S_L^2}{n-1}} = 0.37$$

ملحق (٩): التكامل العددي

يمكن إيجاد تكامل الدالة بأحد قواعد التكامل العدد التالية، حيث يمكن تحويل اشارة التكامل إلى اشارة مجموع بأحد القواعد التالية:

mid-point rule

١- قاعدة النقطة المتوسطة

trapezodal rule

٢- قاعدة شبيه المنحرف

Simpson's rule

٣- قاعدة سيميوزن

وتحويل اشارة التكامل للدالة إلى اشارة مجموع باستخدام إحدى القواعد أعلاه يعطي قيمة تقريبية لتكامل الدالة

فإذا أعتبرنا قاعدة النقطة المتوسطة فان [98]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x \quad (1)$$

حيث c_i تمثل نقطة متوسطة في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، $f(c_i)$ هي قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة c_i ، حيث

$$c_i = \frac{1}{2}[x_{i-1} + x_i] , i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

كذلك إذا فرضنا تقسيم مساحة التكامل إلى عدد n من الأعمدة فان :

$$\Delta z = \frac{b - a}{n}$$

في سنة ١٩٨٤ أثبت Stiel أن :

$$\int_a^b f(x)dg(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \quad (3)$$

حيث $f(x), g(x)$ دوال حقيقية في المتغير x

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (4)$$

كذلك أثبت أن الفرق بين التكامل والمجموع في (3) مقدار صغير جدا في كثير من الحالات
يؤول إلى ϵ حيث :

$$\epsilon \rightarrow 0$$

وفيما يلي سوف نوضح تحويل عملية التكامل لعملية المجموع في (3) ، من خلال تقديم
الحل التفصيلي لمثال (٧-١) على النحو التالي:

أولاً: إذا فرضنا أن عدد الفترات الجزئية للفترة t تساوي 10 فترات ($n=10$) على النحو
التالي:

$$a = 2 < t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = 12$$

$$c_j = \frac{x_1 + c_{j+1}}{2}, j = 0, 1, \dots, 10$$

$$t_0 = 2, t_1 = 3, t_2 = 4, \dots, t_{11} = 12$$

$$c_1 = 2.5, c_2 = 3.5, c_3 = 4.5, \dots, c_{10} = 11.5$$

ثانياً :

$$\begin{aligned}
k_i &= \frac{1}{i!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i d\left(\frac{t}{b-a}\right) \\
&\approx \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^{10} e^{-\lambda c_j} (\lambda c_j)^i \left[\frac{c_{j+1}}{b-a} - \frac{c_j}{b-a}\right] \\
&= \frac{1}{i! (b-a)} \sum_{j=1}^{10} e^{-\lambda c_j} (\lambda c_j)^i [c_{j+1} - c_j] \quad (5)
\end{aligned}$$

ثالثاً :

$$\begin{aligned}
k_0 &\approx \frac{1}{0! (12-2)} \{e^{-2.5\lambda} (2.5\lambda)^0 [3.5 - 2.5] \\
&\quad + e^{-3.5\lambda} (3.5\lambda)^0 [4.5 - 3.5] \\
&\quad + \dots e^{-11.5\lambda} (11.5\lambda)^0 [11.5 - 10.5]\} \\
&= \frac{1}{10} \{e^{-2.5(5)} + e^{-3.5(5)} + e^{-4.5(5)} + \dots + e^{-11.5(5)}\} = 0.00000038
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &\approx \frac{1}{1! (12-2)} \sum_{j=1}^{10} e^{-\lambda c_j} (\lambda c_j) [c_{j+1} - c_j] \\
&= \frac{1}{10} \{e^{-\lambda c_0} (\lambda c_0) + e^{-\lambda c_1} (\lambda c_1) + e^{-\lambda c_2} (\lambda c_2) + \dots + e^{-\lambda c_{10}} (\lambda c_{10})\} \\
&= \frac{1}{10} \{e^{-2.5(5)} (2.5(5)) + e^{-3.5(5)} (3.5(5)) + e^{-3.5(5)} (3.5(5)) + \dots \\
&\quad + e^{-11.5(5)} (11.5(5))\} \\
&= \frac{1}{10} \{0.000047 + 0.00000044 + 0.000000008 + \dots\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \{0.00005\} = 0.000005$$

$$k_2 \approx \frac{1}{2!(12-2)} \sum_{j=1}^{10} e^{-\lambda c_j} (\lambda c_j)^2 [c_{j+1} - c_j]$$

$$= \frac{1}{20} \{e^{-2.5(5)} (2.5(5))^2 + e^{-3.5(5)} (3.5(5))^2 + e^{-3.5(5)} (3.5(5))^2 + \dots + e^{-11.5(5)} (11.5(5))^2\}$$

$$= \frac{1}{20} \{0.00058 + 0.0000077 + 0.0000000038 + \dots\}$$

$$= \frac{1}{20} \{0.00059\} = 0.00003$$

المصطلحات

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
absorbing barriers	٩١	حواجز ماصة
advanced Markovian queueing models	١٨٧	نماذج الصفوف المتقدمة لماركوف
analogue models	٣٢٢	النماذج النسبية (القياسية)
aperiodic (non-periodic)	٢٦٦، ٩٩، ٢٥٩ ٢٩٣، ٢٧٠	غير دورية
aperiodic and irreducible matrix	٢٦٢	مصفوفة غير دورية وغير قابلة للأختزال
arrival distribution (or inter arrival)	١١٨، ١٢٢	التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون إلى النظام (أو الفترة بين وصوليين)
arrivals number	٢٢٩ ، ٢١٢	عدد العملاء الذين يصلون للنظام
arrivals process	٢١٥	عملية وصول العملاء إلى النظام
auto-correlation (or serial correlation)	٢٢٤	ارتباط ذاتي
basic axioms	١٢١	بديهيات أساسية
Bernoulli-process	٨٢	عملية برنولي
birth and death processes	٢٤	عمليات الميلاد والوفاة

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
bivariate probability distribution	٥٤ ، ٣٧	التوزيع الأحمالي الثنائي
bivariate state	٢٠١	الحالة الثنائية
blocking	٢٩١، ٢٩٠، ٢٥٧	توقف
branch of applied probability theory	٢٣	فرع من فروع نظرية الاحتمالات التطبيقية
central limit theorem	٣٣٥	نظرية النزعة المركزية
certain conditions	١٠٣	شروط معينة
channels	٣١٢	الخطوط
characteristic equation	١٩٦	المعادلة المميزة
characteristic function	٤٣	الدالة المميزة
chi-square test	٢٣٠	أختبار كا ^٢
collection of data	٢٩	جمع البيانات
composite arrival rate	١٨٨	معدل الوصول المجمع
conditional distribution	٥٤	التوزيع الشرطي
congestion problems	٢٠	مشاكل التكدس
continuous models	٣٢٢	النماذج المتصلة (المستمرة)
continuous time	١٠٢	زمن متصل
control problems	٣١٣	مشاكل المراقبة

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
convolution method	٣٣٤	الطريقة التجميعية
cumulant generating function	٤٣	الدالة المولدة للتراكومات
cumulants	٤٣	التراكومات
cumulative distributions	٣٣٦	التوزيعات التجريبية (التراكمية)
customers (items)	١١٤	عملاء (وحدات)
descriptive and analytical statistics	٢٨	الإحصاء الوصفي والتحليلي
design & control systems	٣١	تصميم ومراقبة الأنظمة
deterministic	١١٩	غير عشوائية (يقينية)
deterministic models	٨٢	النماذج اليقينية
difference equations	٦٠	معادلات الفروق
differential difference equations	١٢٤، ١٠٦، ٧٠، ٣٧	معادلات الفروق التفاضلية
discrete	٨٤	متقطعة
discrete models	٣٢٢	النماذج المتقطعة
discrete states	١٠٢	حالات متقطعة
discrete time	١٠٢	زمن (أو خطوات) متقطع
distribution of arrivals	١٢٣	التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء الذين يصلون للنظام

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
distribution of departures	١٢٧	التوزيع الاحتمالي لعدد العملاء المنتهى خدمتهم
distribution of service times	١٢٩	التوزيع الاحتمالي لأزمنة الخدمة
distribution selection	٣٠	اختيار التوزيع
Durbin-Watson test	٢٢٥	أختبار داربن واتسون
effective arrival rate	١٤٨	المعدل الفعلي لوصول العملاء إلى النظام
equilibrium probabilities	٩٤	احتمالات التوازن أو الاستقرار
ergodic process	٩٩	عملية عامة
ergodic chain	٩٩	متسلسلة عامة
Erlang Distribution	٦٨ ، ٦٧	توزيع إيرلنج
event	١٠٢ ، ٤٩	الحدث
exist	٨٥ ، ٤٠	موجود
expected number of idle servers	١٥١	العدد المتوقع لمراكز الخدمة غير العاملة (المعطلة)
exponential distribution	١٢٩ ، ٢٤	التوزيع الآسي
families	٨٢	عائلات
finite	٢٥٩	محدود

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
first come – first served	١١٦ ، ١١٩	من يأتي أولاً يخدم أولاً
first difference	٧٠	الفرق الأول
fitting the probability distributions	٣٠	توفيق التوزيعات الاحتمالية
form	٢٥	صيغة
function theoretical techniques	٢٥	الأساليب الدالية النظرية
gamma distribution	٣٣٣	توزيع جاما
general distribution	١١٩	توزيع عام
general service discipline	١١٩ ، ١٤٢	نظام الدخول للخدمة نظام عام
generating function	٣٨ ، ٧٢	الدالة المولدة
generation random variates	٣٣٠ ، ٣٣١	توليد قيم المتغير العشوائي
geometric distribution	٤٥	التوزيع الهندسي
geometric transform	٣٩	التحويل الهندسية
goodness fit tests	٢١٤	أختبارات جودة التوفيق
higher transition probabilities	٩١	احتمالات الانتقال الأعلى
homogeneity	١٠٤	التجانس
identically and independently distributed (i.i.d)	٥٠ ، ١٢١	مستقلة ولكل منها نفس التوزيع الاحتمالي

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
imbedded Markov chain	٢٥	سلسلة ماركوف الماصة
independence	١٠٣	الاستقلال
infinite	١٢٠	غير محدود
infocommunication networks	٢٦	شبكات الاتصال المعلوماتية
information	٢٧	المعلومات
initial distribution	٩٤ ، ٨٩	التوزيع المبدئي
input distribution	٢٦٣	التوزيع الاحتمالي للمدخلات
interarrival time	٢٢٩ ، ٢١٢ ، ١١٥	الفترة الزمنية بين وصوليين متتالية
inter-departures time	١١٥	الفترة الزمنية بين خروج عميلين متتاليين
intermediate state	٩٢	حالة وسيطة
invariant	٨٥	غير متغيرة
irreducible	٢٦٦ ، ٩٧ ، ٢٥٩ ، ٢٩٣ ، ٢٧٠	غير قابلة للأختزال
irreducible matrix	٢٥٩ ، ٩٧	مصفوفة غير قابلة للأختزال
joint probability distribution	٥٤	التوزيع الاحتمالي المشترك
jumps	١٠٢	القفزات
Kolmogrov-Simrnov test	٢٤٥ ، ٢٣٦ ، ٢٣٠	أختبار كولموجروف سيمرنوف

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
Laplace transform	٦٠ ، ٣٧	تحويله لابلاس
last come – first served (LcFs)	١١٩ ، ١١٧	من يأتي أخيراً يخدم أولاً
least square method	٢٢٩ ، ٢١٣	طريقة المربعات الصغرى
limiting behavior	٩٧	السلوك النهائي
limiting distribution	١٠٩	التوزيع النهائي
linearity property	٦١	الخاصية الخطية
marginal distribution	٥٤	التوزيع الهامشي
Markov chain	٨٨	سلسلة ماركوف
Markov matrix	٨٩	مصفوفة ماركوف
Markov processes	٨٨ ، ٨١	عمليات ماركوف
mathematical induction	١٣٧ ، ٧٢	الاستنتاج الرياضي
mathematical modeling	٢٥	النمذجة الرياضية
mathematical models	١١٥	النماذج الرياضية
mathematical programming	٢٧	البرمجة الرياضية
mathematical programming techniques	٣١١	أساليب البرمجة الرياضية
mathematical relationships	٣٢٣	علاقات رياضية

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
mathematical tools	٢٦	الأدوات الرياضية
mathematically exact	٢٣	صحيح رياضياً
maximum likelihood method	٢٢٩ ، ٢١٤	طريقة الأماكن الأكبر
maximum number of customers allowed in the system	١١٥	الحد الأقصى لعدد العملاء في النظام
maximum queue length	١٤٧	أقصى عدد في الصف
modern information technology	٢٦	تكنولوجيا المعلومات الحديثة
moment generating function	٤٠	الدالة المولدة للعزوم
moments method	٢٢٩ ، ٢١٣	طريقة العزوم
Monte Carlo method	٣٢٤ ، ٣٢١	طريقة المونت كارلو
mutually exclusive	٩٢	حالات متنافية
mutually exclusive ways	٤٩	عدة طرق متنافية
non-homogeneous	٨٨	غير متجانسة
nonhomogenous linear difference equations	١٩٧	معادلات فروق خطية غير متجانسة
non-null	١٠١ ، ٩٩	موجودة (ليست غير موجودة)
nonparameteric techniques	٢٧	الأساليب غير المعلمية

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
nonparametric tests	٢١٣	الأختبارات اللامعلمية
nonstationary	٢٩	غير المستقرة
nonstationary processes	٢١٥	عمليات غير مستقرة
normal distribution	٣٣٥	التوزيع المعتاد (الطبيعي)
null	٩٩	غير موجودة
numerical techniques	٢٦	الأساليب العددية
one-to-one relationship	٣٣٣	العلاقة واحد-واحد
operating characteristics	١٢٠	خصائص تشغيل النظام
operators	١٩٦	المؤثرات
optimal design	٣١٣	التصميم الأمثل
optimization problem	٢٤	مشكلة أمثلية
optimization techniques	٣١١ ، ٢٧ ، ١٩	أساليب الأمثلية
output distribution	٢٦٣	التوزيع الاحتمالي للمخرجات
parallel stations	١١٦ ، ١١٤	المراكز المتوازنة
parameters	٣٠	معلمات
partial differential equations	٧٣	معادلات التفاضل الجزئي
Partical	٨٦	جزئي

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
performance measures	٣١	مؤشرات الإنجاز
Periodic	٩٨	دورية
persistent (recurrent)	١٠١ ، ٩٩	دائمة
persistent or recurrent	٩٨	متكررة أو دائمة
Poisson distribution	١١٩ ، ١٢٥ ، ٤١ ، ٢٤	توزيع بواسون
Poisson processes	٨١ ، ٨٥ ، ١٠٢	عمليات بواسون
population (calling source)	١١٥	المجتمع (مصدر الاستدعاء للعملاء)
Position	٨٦	موقع
possible states	٨٤	الحالات الممكنة
postulates	١٠٣	فروض
Priorities	١١٧	أولويات
probabilistic approach	٢٥	أسلوب احتمالي
probabilistic models	٨٢	النماذج الاحتمالية
probabilistic structure	٨٥	البناء الاحتمالي
probabilities theory	٣٧	نظرية الاحتمالات
probability generating function	٣٩	الدالة المولدة للأحتمالات

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
pure birth process	١٢٣	عملية الميلاد الخام
pure death process	١٢٧	عملية الوفاة الخام
queueing analysis	٢٥ ، ١٥	تحليل الصفوف
queueing model	٢٢٩ ، ٢١٤	نموذج الصفوف
queueing model with blocking	٢٩٠	نموذج الصف مع حدوث توقف
queueing model with rejection	٢٨٧	نموذج الصف مع حدوث رفض
queueing processes	٢١٥	عمليات الصفوف
queueing System	١١٤	نظام الصف
queueing theory	٨١ ، ٣٧ ، ٢٣	نظرية الصفوف
radius convergence	٣٥١	نصف قطر التقارب
random move	٨٦	حركة عشوائية
random variable	١١٥	متغير عشوائي
random walk problem	٣٢٢	مشكلة السير العشوائي
recurrent	١٠٩	ممكنة الرجوع
regeneration points	٢٥	نقط الانبعاث (التجديد)
regularity	١٠٤	الانتظام
rejected systems	١٤٧	أنظمة الرفض

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
renewal theory	٢٦	نظرية التجديد
roots	١٩٦	الجزور
Rouche's theorem	١٩٦	نظرية رويتش
running	٣٢٣	تشغيل
scale property	٦٢	خاصية التدرج
service (or departure) dist.	١١٨	التوزيع الاحتمالي لزمن الخدمة (أو أزمنا الخروج)
service discipline	١٧٠ ، ١١٥	نظام الدخول للخدمة
service in random order	١١٩	الدخول للخدمة بأمر عشوائي
service process	٢١٥	عملية خدمة العملاء
service station (channels)	١١٥	عدد مراكز الخدمة
service time	٢٢٩ ، ٢١٢ ، ١١٥	زمن خدمة العميل
simple random walk process	٨٦	عملية المشي العشوائي البسيطة
simulation model	٣٢٢	نموذج المحاكاة
simulation technique	٣٢٢، ٢٦، ٢٧، ٢١٤	أسلوب المحاكاة
singular integral equations	٢٥	المعادلات التكاملية الشاذة
space	٨٢	المكان

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
Sperman's Rank-correlation	٢٢١	معامل ارتباط سبيرمان للرتب
standard normal	٣٣٥	المعتاد القياسي
stationary	٢٩	المستقرة
stationary process	٩٤ ، ٨٥	عملية مستقرة
stationary process of order n	٨٥	عملية مستقرة من الترتيب n
stationary transition probabilities	٨٨	أحتمالات انتقال مستقرة
statistical equilibrium	٢٤	الاستقرار الإحصائي
steady state	١٣٦، ١٣٥، ١٢١ ١٩٥، ١٤٣، ١٤٢، ١٣٧	حالة الأستقرار (الحالة الدائمة)
stochastic processes	٨٢ ، ٢٩ ، ٢٥	العمليات العشوائية
stochastic processes theory	٨١ ، ١٩	نظرية العمليات العشوائية
suitable initial conditions	٧٢	الشروط المبدئية الملائمة
system's behavior	١٢٠	سلوك النظام
Taylor expansion	٣٥١	مفكوك تيلور
Taylor series expansion	٣٥٢	مفكوك متسلسلة تيلور
telecommunication	٢٥	الاتصالات عن بعد
telephone engineering	٢٤	هندسة التليفونات
tests for independence	٢٢١ ، ٢٩	أختبارات الأستقلال

المصطلح باللغة الإنجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
tests for stationary	٢١٥ ، ٢٩	أختبارات الأستقرار
time	٨٥ ، ٨٢	الزمن
tow-phases queueing model	٢٥٨	نموذج الخدمة في مرحلتين
traffic process	٢٤	عملية المرور
traffic Theory	٢٥	نظرية المرور
transient or nonrecurrent	٩٨	مؤقتة أو غير متكررة
transient state	١٢١	الحالة غير المستقرة (أو المتنقلة)
transition probability matrix	٨٩	مصفوفة الانتقال الاحتمالية
transitions	٨٢	الانتقالات
translation property	٦١	خاصية الترجمة (النقل)
truncated Poisson distribution	١٢٨	توزيع بواسون المبتور
uniform distribution	٣٣١	متغير عشوائي منتظم
unique solution	٢٧٢، ٧٢، ٢٦٠	حل وحيد
waiting lines (queues)	٢٠	صفوف (طوابير) الانتظار
waiting system	١١٤	نظام الانتظار
waiting time and number of calls	٢٣	أزمنة الانتظار لمكالمات التليفونات وعدد المكالمات التليفونية

أولاً: المراجع العربية

- [١] إبراهيم عبدالواحد نائب، أنعام عبدالمنعم (٢٠٠١): "نظرية القرارات: نماذج واساليب كمية محسوبة" دار وائل للنشر، عمان، المملكة الأردنية.
- [٢] سيد رمضان (٢٠٠١): "برمجة تعدد الأهداف العشوائية لتطوير بعض أنظمة بواسون للصفوف مع التطبيق على قطاع التعليم في مصر" رسالة دكتوراه، قسم الإحصاء، كلية التجارة، جامعة بنها، مصر
- [٣] عزه عبدالنبي (١٩٧٦): "مشكلة تكديس ميناء الاسكندرية والعوامل المباشرة والغير مباشرة المؤثرة على تدفق وسحب البضائع" بحث دبلوم معهد التخطيط القومي، القاهرة، مصر
- [٤] عفاف الدش (١٩٧٩): "أنظمة الخدمة على مراحل متتالية والتخطيط في قطاع النقل البحري" رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة القاهرة، مصر.
- [٥] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الإحصاء التطبيقي - الجزء الأول (الإحصاء الوصفي)" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.
- [٦] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية الأساليب - التطبيق - استخدام الحزم الرياضية" الجزء الأول، الطبعة الأولى، المكتبة الأكاديمية بالدقي، القاهرة، مصر.
- [٧] عفاف الدش (٢٠١٠): "الإحصاء التطبيقي - الجزء الثاني (الاستدلال الإحصائي)" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.
- [٨] عفاف الدش (٢٠١٢): "بحوث العمليات وأخذ القرارات" الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" المكتبة الأكاديمية بالدقي، القاهرة، مصر.

- [٩] عفاف الدش (٢٠١٣): "بحوث العمليات وأتخاذ القرارات" الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف" المكتبة الأكاديمية بالدقي، القاهرة، مصر.
- [١٠] محرم وهبه محمود (١٩٧٤): "مشكلة غرامات التأخير" مجلة بحوث النقل البحري، الأكاديمية العربية للنقل البحري، العدد الثاني.
- [١١] نجيب محمد عبدالله سيف (٢٠٠٣): "دراسة إحصائية لتسرب الطلاب في مرحلة التعليم الأساسي بالجمهورية اليمنية" رسالة ماجستير، قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة عين شمس، القاهرة، مصر.
- [١٢] يوسف نصر الدين (١٩٧٤): "نظرية الصفوف في تنظيم وتخطيط حركة النقل البحري" مجلة بحوث النقل البحري، الأكاديمية العربية للنقل البحري، العدد الثاني.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- [13] Adan, I. and Resing (2015): "Queueing Systems" Dep. Of Math. And Comp. Sc. , Eindhoven University of Technology, Netherlands.
- [14] Allach, H. and Bergendah, G. Editors (1997): "Production Theory and It's Applications" Proceeding of a workshop.
- [15] Asmussen, S. and Rubinstein, R. (1992): "The Efficiency and Heavy Traffic Properties of The Score Function Method in Sensitivity Analysis of Queueing Models" Advances of Applied Probability, 24(1) Page 172-201.

- [16] Atkinson, B. (1969): "A Note on A Queueing Optimization Problem" School of Mathematical Sciences Univ. of London.
- [17] Bhat, U. and shalaby, M. (1979): "Approximation Techniques in The Solution of Queueing Problems" Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 26, N.2
- [18] Blanchord, B. and Fabrycky, W. (2010): "Systems Engineering and Analysis" Fourth Edition, Pearson International Edition, London.
- [19] Borovkov, A. (1976): "Stochastic Processes in Queueing Theory" Springer-Verlag, New York.
- [20] Brethauer, K. (2000): "Optimal Service and Arrival Rates In Jackson Queueing Networks" John Wiley & Sons. Inc.
- [21] Cohen, J. (2008): "Some Aspects of Queueing Theory" Statistica Neerlandica, Online, 29, Apr.
- [22] Cohen, J. and Boxma, O. (1989): "A Survey of The Evolution of Queueing Theory' Statistica Neerlandica, Vol. 39, N. 2, PP. 143-158
- [23] Cox, D. and Lewis (1966): The Statistical Analysis of Series of Events" Methuen, London.

-
- [24] Cox, D. and Miller, H. (1965): "The Theory of Stochastic Processes" Methuen & COLTD, London.
- [25] Crabill (1972): "Optimal Control of A Service Facility with Variable Exponential Service Times and Constant Arrival Rate" Mang. Sci., 18, 560-566.
- [26] Crabill, T., Gross, D., and Magazine, M. (1977): "A Classified bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues" O.R.25, PP.219-232
- [27] Dallery and Stecke (1990): "One Optimal Allocation of Servers and Workloads In Closed Queueing Network" O. R. 38, 694-703.
- [28] Dar liou, C. (2013): "Optimization Analysis of Controlling Arrivals in The Queueing System With Single Working Vacation Using Particle Swarm Optimization" 4th International Conference, IC-SI, Harbin, China, Proceeding Part 1
- [29] Editedly Albach and Bergendahl (1977): "Production Theory and Its Applications" Proceeding of A Workshop, Springer- Verlag, Berlin.
- [30] El-Dash, A. (1990): "Two Probabilistic Models for Solving an Inventory Oxygen Problem" J. Opl. Res. Soc, Vol. 40, No. 11, U.K.D. PP. 961-969

-
- [31] El-Dash, A. and Abo-El-Hadid, S. (2013): "Nonparametric $(M/G/1):(FcFs/\infty/\infty)$ Queueing System" The Egyptian Statistical Journal, Vol. 57, No.1, PP. 44-63, ISSR, Cairo University.
- [32] El-Dash, A. and Abo-El-Hadid, S. (2013): "Simulation Study for Nonparametric $(M/G_k/k):(FcFs/\infty/\infty)$ Queueing Models" The Egyptian Statistical Journal, Vol. 57, No. 2, PP. 25-52.
- [33] El-Dash, A. and Elshair, S. (2000): "Two Tandem Queueing Models With Flowing Out For Some Customers" The Annual International Conference of Statistics, Computer Modeling in Human & Social Sciences, Faculty of The Economic, Cairo University.
- [34] El-Dash, A. and Fouad, A. (2002): "Exacts Approximate Markov Binomial Probability Distribution" Statistics and Commerce & Economic Applications Conference, Commerce Faculty, Helwan University, Cairo, Egypt.
- [35] El-Dash, A. and Girgis, F. (1997): "The Conditional Probability Distribution of Recalling Level of Events Given A Certain Reference Period"
- [36] El-Dash, A. and Others (1991): "Tandem Queueing System With Preemptive Priorities" Proceeding of the Fourth ORMA Conference, Vol. 1, PP. 197-213

-
- [37] El-Dash, A. Kandil, A., and Girgis, F. (1997): "Markovian Binomial Probability Distribution And It's Applications in The Education Sector" Education Conference, Commerce Faculty, Banha University, Cairo, Egypt, Page 473-494
- [38] Erlang, A. (1909): "The Theory of Probabilities and Telephone Conversation" *Nyt Tidsskrift Matematik*, Series B, 20: 33-39.
- [39] Fry, T. (1928): "Probability and It's Engineering Uses" D. Van Nostrand, Princeton, N.J.
- [40] Gerasimov, A. (2012): "Optimization and balancing of Open, Closed and Mixed Multiclass Queueing Networks" *Doklody Mathematics*, Vol. 85, No. 1, PP. 93-97.
- [41] Gross, D. and Harris, C. (1998): "Fundamentals of Queueing Theory" Third Edition, Wiley Series in Probability and Statistics, New Delhi.
- [42] Gregory, B. (1988): A Geometric interpretation of the Riemann-Stieltjes Integral. *American Mathematical Monthly*, 95(5).
- [43] Hallander, M.; Wolfe, D. and Chicken, E. (2013): "Non-parametric Statistical Methods" John Wiley.

-
- [44] Harishchandra and Rao (1988): "A Note On The Statistical Inference On The Traffic Intensity Parameters In $M/E_k/1$ Queue" *Sankhya*, A 50, 144-148.
- [45] Haviv, M. (2013): "Queues: A Course In Queueing Theory" *International Series in Operations Research & Management Science*, Springer Science, New York.
- [46] Heinz, K. (1994): "Statistics for Business and Economics" Harper Collins College Publishers, USA.
- [47] Heyman (1968): "Optimal Operating Policies $M/G/1$ Queueing Systems" *O. R.*, 16, 362-382.
- [48] Jackson, R. (1954): "Queueing Systems with Phase Type Service" *O. R. Qnast*, Vol. 5, No. 4.
- [49] Jackson, R. (1956): "Random Queueing Processes with Phase-Type Service" *Vol. Statist. Soc., Ser. B*, Vol. 18, No.1.
- [50] Jackson, R. (1965): "The Ergodicity of Series Queues with General Priorities" *Annals of Math. Statist.*, Vol. 36.
- [51] Jackson, R. (1966): "On The Correlation Structure of the Departure Process of the $M/E/1$ Queue" *J. R. Statist. Soc.*, Vol. 28.

-
- [52] Jain, S. (1991): "Comparison of Confidence Intervals of Traffic Intensity For $M/E_k/1$ Queueing Systems" *Statistical Papers, Statistis che Hette*, Springer-Verlag, 167-174.
- [53] John, N. Daigle (2005): "Queueing Theory With Application To Packet Telecommunications" Springer
- [54] Kendal, D. (1951): "Some Problems In The Theory of Queues" *J. R. Stat. Sic., B*, 13.
- [55] Kendall and Stuart (1973): "The Advanced Theory of Statistics" Vol.2, Charles Griffin & Company Limited, London.
- [56] Kendall and Stuart (1976): "The Advanced Theory of Statistics" Vol. 3, Charles Griffin & Company Limited, London.
- [57] Kendall and Stuart (1997): "The Advanced Theory of Statistics" Vol. 1, Charles Griffin & Company Limited, London.
- [58] Kendall, D. (1953): "Stochastic Processes Occurring In The Theory of Queues and Their Analysis by The Method of The Imbedded Markov Chain" *Ann. Math. Stat. J.* PP. 338-353.

-
- [59] Kendall, D. (2012): "Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications" Online Wiley.
- [60] Klen, C. and Gruver, W. (2014): "Optimal Control of Markovian Queueing Systems" Wiley Online Library.
- [61] Kosten, L. (1942): "Over Blok Keringsen Wachtproblemen" Ph.D. Thesis, T. H. Delft, in Dutch.
- [62] Koziol and Named (1979): "Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics" Wiley, New York
- [63] Lapin, L. (1994): "Quantitative Methods For Business Decisions - With Cases" Sixth Edition, the Dryden Press, New York.
- [64] Lavenberg, S. (1983): "Computer Performance Modeling Handbook" Academic Press, New York.
- [65] Law and Kelton (1991): "Simulation Modeling Analysis" 2nded, McGraw-Hill, New York.
- [66] Lee, A. (1968): "Applied Queueing Theory" Macmillan, London.
- [67] Lewis, P. (1966): "A Computer Program for the Statistical Analysis of Events" IBM Systems Journal, Vol. 5, No. 4.

- [68] Lewis, P. A. (1972): "Stochastic Point Processes" John Wiley & Sons, New York, 1-54.
- [69] Liliana, B.; Viswanathan, A. and Selvamuthu, D. (2012): "Introduction To Probability and Stochastic Processes with Applications" Online Wiley.
- [70] Lipsky (2009): "Queueing Theory A Linear Algebraic Approach" Second Edition, Springer, New York.
- [71] Liu; Yao and Neuts (1990): "Analysis and Optimization of A Multistage Inventory Queue System" Mang. Sci., 50, 365-380.
- [72] Mehravari, N. (1999): "Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering" Online: 27Dec.
- [73] Melhi, J. (2000): "Stochastic Processes" Wiley Eastern Limited, New York.
- [74] Mirzoakhmedov, F. (1990): "An Optimization Problem in Queueing Theory and A Numerical Solution Method" Plenum Publishing Corporation.
- [75] Mood, A. and Other (1974): "Introduction to The Theory of Statistics" Third Edition, International Student Edition, London.

-
- [76] Moore, S. (1975): "Approximating the Behavior of Non-Stationary Single Server Queues" *Operations Res.*, 23, 1011-1032.
- [77] Nader, M. (1999): "Queueing Theory, Teletraffic Theory, Network of Queues" *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, Online: 27 Dec.
- [78] Nan, X., Hes, Y. Guan, L. (2014): "Queueing Model Based Resource Optimization for Multimedia Cloud" *J. Visual Communications IMAGE*, 25, PP. 928-942.
- [79] Narayan, B. (2015): "A Introduction to Queueing Theory – Modeling and Analysis in Applications" *Second Edition*, Springer Science, New York.
- [80] Narayan, B. and Shalaly, M. (1979): "Approximation Techniques in The Solution of Queueing Problems" *Navel Research Logistics Quarterly*, Vol. 26, N. 2.
- [80] Naryan, B. (2008): "A Introduction to Queueing Theory – Modeling and Analysis in Applications" *Birkhäuser*, Berlin
- [82] Naryan, D. (2009): "Decision Problem in Queueing Theory" *Springer*.

-
- [83] Newel (1982): "Applications of Queueing Theory" Chapman and Hall, London.
- [84] Nita, H. and Others (2007): "Operations Research" Prentice-Hall of India, New Delhi.
- [85] Owen, D. (1962): "Handbook of Statistical Tables" Polo Alto, London.
- [86] Page, E. (1972): "Queueing Theory in OR" Butterworth, London.
- [87] Prabhu (1987): "Bibliography of Books and Survey Papers On Queueing Systems: Theory and Applications" Queueing Systems, 2, 393-398.
- [88] Prabhu, N. (1987): "A bibliography of Books and Survey Papers on Queueing Systems: Theory and Applications, Queueing Systems" 1: 1-4
- [89] Prablau, N. (1997): "Foundations Queueing Theory" Springer.
- [90] Purvis, K. (2011): "Performance Optimization Using A Constrained Model" J. of Network and Computer Applications.
- [91] Randolph, N. (1995): "Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory: The Mathematics of

computer Performance Modeling “Springs Science+ Business Media. LLC

- [92] **Reich, E. (1957): "Waiting Times Queues are in Tandem" Annals of Math. Statist. Vol. 28.**
- [93] **Reich, E. (1963): "Note On Queues In Tandem" Annals of Math. Statist. Vol. 34.**
- [94] **Rubinstein, R. (1997): "Optimization of Computer Simulation Models With Rare Events" European J. of O.R.**
- [95] **Saaty, T. (1961): "Elements of Queueing Teory" McGraw Hill, New York.**
- [96] **Saaty, T. (1966): "Seven More Years of Queues" Naval Research Logistics Quarterly, Vol.13, No.4**
- [97] **Sauer, C. and Mac Nair, E. (1983): "Simulations of Computer Communications Systems" Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NI).**
- [98] **Smith, M., Gruz, F. and Wornsel, V. (2010): "Optimal Server Allocation In General, Finite, Multi-Server Queueing Network" Appl. Stoch. Models Bus. Ind. 26: 705-736.**
- [99] **Smith,R. and Minton,R. (2007): Calculus Third Edition Mcgrow. Hill international Edition, New Delhi.**

-
- [100] Sobel (1974): "Optimal Operation of Queues" **Mathematical Methods In Queueing Theory**, (Ed. A. B. Clarke), Proceedings of Conference at Western Michigan Univ., Springer-Verlag, New York.
- [101] Starosel' Skii, V. (1967): "The Problem of The Optimization of Some Queueing Systems" **Kibernetike**, Vol. 3, No. 3.
- [102] Starosel, S. (1967): "The Problem of The Optimization of Some Queueing Systems" **Kibernetika**, Vol. 3, No. 3, PP. 47-52.
- [103] Stewart, J. W. (1994): "Numerical Methods for Computing Stationary Distributions of Finite Irreducible Markov Chains" **Dep. Of Computer Science**, North Carolina State Univ., USA.
- [104] Stidham and Prabhu (1974): "Optimal Control of Queueing Systems" **Mathematical Methods In Queueing Theory**, (Ed. A. B. Clarke), Proceed.
- [105] Sztrik, J. (2015): "Basic Queueing Theory" **University of Dchrecen**, Faculty of Informatics.
- [106] Taha, H. (1971): "Operations Research: An Introduction" **Second Edition**, Macmillan Publishing Co., INC., New York.

-
- [107] Thagorajan and Harris (1979): "Statistical Tests for Exponential Service from M/G/1 Waiting Time Data" Nav. Logist. Quart., 26, 511-520.
- [108] Tien Van and Other (2016): "Queueing Theory and Network Applications" Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer Cham, New York.
- [109] Van, D. and Other (2016): "Queueing Theory and Network Applications" Advances in Intelligent Systems and Computing 383, Springer International Publishing Switzerland.
- [110] Vericourt, Karaesmen and Dallery (2002): "Optimal Stock Allocation for A Capacitated Supply System" Mang. Sci., 48, 1486-1501.
- [111] Xiaoming, N. and Yideng, H. (2014): "Queueing Model Based Resource Optimization for Multimedia Cloud" Science Direct.
- [112] Uirtam. "queuing theory/ the M/G/1"
- [113] Xiaoming, W. and Yifeng, H. (2014): "Queueing Model Based Resource Optimization for Multimedia Cloud" Science Direct.

- [114] Zaher, A. (1974): "On The Loss System M/M/C In Queueing Theory and its Simulations" A Master Thesis, Dep. Of Statistics, Economics & Political Sciences Faculty, Cairo University, Egypt.
- [115] Wikipedia. "pollaczek-khinchine formula" 7/06/2023

كتب للمؤلفة

- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات - الجزء الثالث: "البرمجة الأاحتمالية" (سنة ٢٠١٥م) - المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير - الدقي - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات - الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف" (سنة ٢٠١٣م) - المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير - الدقي - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات - الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" (سنة ٢٠١٢م) - المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير - الدقي - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية (سنة ٢٠٠٩م) - المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير - الدقي - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- استخدام الحزم الجاهزة TORA - Maple - SPSS (سنة ٢٠٠٨م) - بالاشترك مع آخرين - جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي - جامعة حلوان - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- الإحصاء التطبيقي - الجزء الثاني: "الإستدلال الإحصائي" (سنة ٢٠٠٦م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي - جامعة حلوان - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- الإحصاء التطبيقي - الجزء الأول: "الإحصاء الوصفي" (سنة ٢٠٠٠م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي - جامعة حلوان - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- رياضيات الاستثمار (سنة ٢٠٠٠م) - جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي - جامعة حلوان - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- الرياضيات وصناعة القرارات (سنة ١٩٩٦م) الطبعة الثانية - مكتبة عين شمس - شارع القصر العيني - القاهرة - جمهورية مصر العربية.
- نماذج الانحدار (سنة ١٩٩٠م) الطبعة الثانية - مكتبة عين شمس - شارع القصر العيني - القاهرة - جمهورية مصر العربية.