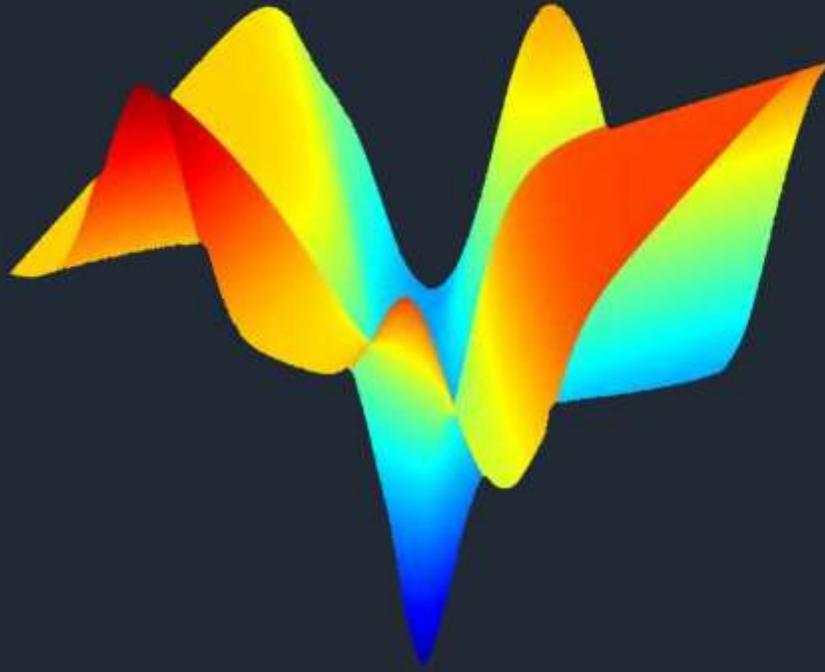


الطبعة الأولى

٢٠٢٢ م / ١٤٤٣ هـ

أساليب البرمجة غير الخطية

Non Linear Programming Techniques



الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذة بحوث العمليات و الإحصاء

أساليب البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming Techniques

الطبعة الاولى

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذة بحوث العمليات والاحصاء

ورئيس قسم الرياضيات والاحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقا

كلية التجارة وإدارة الاعمال - جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الاكاديمية

شارع التحرير - الدقي - القاهرة

٢٠٢٢/هـ ١٤٤٣ م

أساليب البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming Techniques

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذة بحوث العمليات والاحصاء

ورئيس قسم الرياضة والاحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقا

كلية التجارة وإدارة الاعمال – جامعة حلوان

جميع حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة للمؤلفة

وطبقا للقانون فإنة لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب، او إعادة طبعة، او تصويره، او اختزان مادته العلمية بأية صورة دون موافقة كتابية من المؤلفة

الطبعة الأولى: سنة شوال ١٤٤٣هـ / مايو ٢٠٢٢م

رقم الإيداع: ٢٢٥٨٩٣ / ٢٠٢٢م

الترقيم الدولي: ٦-١٤٣٨-٩٤-٩٧٧-٩٧٨

الموقع الإلكتروني: <http://www.dr-afafeldash.com>

البريد الإلكتروني: afafeldach@gmail.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

{ أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ
زَبَدًا رَابِيًا وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاءَ حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ
زَبْدٌ هِمْ مِثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ
جُفَاءً وَأَمَّا مَا يَنْفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الْأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ
اللَّهُ الْأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآية ١٧)

الفهرس

الموضوع	الصفحة
مقدمة	٨
الجزء الأول: الأساليب التقليدية لحل نماذج البرمجة غير الخطية	
الباب الأول: طرق تيلور لتقريب الدوال	
١-١) مقدمة	١٣
٢-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال في متغير واحد	١٤
٣-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال متعددة المتغيرات	١٥
الباب الثاني: طرق حل المعادلات غير الخطية	
١-٢) مقدمة	٢٢
٢-٢) المعادلة غير الخطية	٢٩
٣-٢) طرق الحل التحليلية	٣٠
٤-٢) طرق الحل العددية (الحلول التقريبية)	٣١
٥-٢) طريقة نيوتن رافسون	٣٤
الباب الثالث: مشاكل البرمجة غير الخطية	
١-٣) مقدمة	٤٠
٢-٣) امثلة لمشاكل البرمجة غير الخطية	٤٤
٣-٣) تصنيف نماذج البرمجة غير الخطية	٥٠
٤-٣) خصائص الحل	٥١
٥-٣) تمرينات	٥٢
الباب الرابع: طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة	
١-٤) مقدمة	٥٨
٦١	٥٩

٦٢	(٢-٤) تعريفات ونظريات
٧٢	(٣-٤) نماذج البرمجة غير المقيدة
٧٤	(٤-٤) شروط الأمثلية
٧٧	(٥-٤) طرق الحل المعتمدة على المشتقات
٧٧	(١-٥-٤) طريقة الاتجاهات
٨٤	(٢-٥-٤) طريقة نيوتن رافسون
٨٨	(٦-٤) طرق الحل المباشرة (لا تعتمد على المشتقات التفاضلية)
٨٨	(١-٦-٤) طريقة القفز العشوائي
٩١	(٢-٦-٤) طريقة البحث أحادي المتغير
٩٦	(٧-٤) تمارينات
٩٨	الباب الخامس: طرق حل النماذج المقيدة
٩٩	(١-٥) مقدمة
١٠٠	(٢-٥) تصنيف النماذج
١٠٢	(٣-٥) طريقة لاجرانج
١٠٧	(٤-٥) شروط كارش-كون-توكر
١١٣	(٥-٥) طريقة نيوتن رافسون
١١٩	(٦-٥) طريقة المستوى القاطع
١٢٧	(٧-٥) تمارينات
الجزء الثاني: أساليب البرمجة الهندسية	
١٣١	الباب السادس: نماذج البرمجة الهندسية
١٣٢	(١-٦) مقدمة
١٣٤	(٢-٦) بعض المفاهيم الأساسية

١٣٨.....	(٣-٦) نماذج البرمجة الهندسية ذات الحدود الموجبة
١٣٩.....	(٤-٦) نماذج البرمجة الهندسية العامة
١٤١.....	الباب السابع: طرق حل النماذج الهندسية ذات الحدود الموجبة
١٤٢.....	(١-٧) مقدمة
١٤٣.....	(٢-٧) النموذج الهندسي غير المقيد
١٤٤.....	(٣-٧) طريقة الاوزان النسبية المثلى
١٤٩.....	(٤-٧) الطريقة البديلة
١٥٤.....	(٥-٧) النموذج الهندسي المقيد
١٦٣.....	الباب الثامن: طرق حل النموذج الهندسي العام
١٦٤.....	(١-٨) مقدمة
١٦٥.....	(٢-٨) النموذج العام
١٦٧.....	(٣-٨) الطريقة البديلة للحل
١٨٠.....	(٤-٨) طريقة التكتيف الجزئي
١٨٧.....	(٥-٨) طريقة التكتيف الكلى
١٩٨.....	المصطلحات
٢٠١.....	المراجع

مقدمة

تمثل البرمجة غير الخطية أحد فروع البرمجة الرياضية Mathematical Programming الهامة، ويرجع ذلك للأسباب التالية:

- كثير من المشاكل الفعلية تصاغ في شكل نماذج برمجة غير خطية،
 - كثير من فروع البرمجة الرياضية الأخرى مثل البرمجة الاحتمالية probabilistic programing، البرمجة الصحيحة، integral programing، ... الخ تصاغ النماذج في شكل نماذج برمجة غير خطية، ويتم حلها باستخدام أساليب البرمجة غير الخطية،
 - يوجد عديد من فروع الرياضيات التطبيقية applied mathematics الأخرى مثل تصميم تجارب design experiments، الإحصاء التطبيقي applied statistics (التقديرات – اختبارات الفروض)، الاقتصاد القياسي econometrics، ... الخ تكون النماذج المرتبطة بها نماذج برمجة غير خطية.
- ويمكن تقسيم أساليب البرمجة غير الخطية الى قسمين هما:

القسم الأول: الأساليب التقليدية

وسوف نتناول اهم هذه الأساليب التقليدية في الجزء الأول من هذا الكتاب

القسم الثاني: أساليب البرمجة الهندسية

وهي أساليب لحل النماذج غير الخطية أيضا، وهي تعتبر احدث من الأساليب التقليدية حيث قدمت لأول مرة سنة ١٩٦٢ عندما قدم Duffin النظرية البديلة للنماذج غير الخطية. ثم توال بعد ذلك كثير من الدراسات النظرية والتطبيقية لهذه الأساليب وسوف نتناول في الجزء الثاني من هذا الكتاب البرمجة الهندسية واهم اساليبها.

والمستهدفون من هذا الكتاب طلاب مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا في التخصصات المختلفة (الرياضيات – الإحصاء – الاقتصاد – علوم الحاسب – ... الخ).

ويحتوي الكتاب على ثمانية أبواب على النحو التالي

الجزء الأول

الأساليب التقليدية لحل نماذج البرمجة غير الخطية

الباب الأول تحت عنوان: طريقة تيلور لتقريب الدوال.

ونظر لان كثير من الطرق العددية لحل المعادلات وحل النماذج غير الخطية، يعتمد على تقريب الدوال، لذلك فقد قدمنا في الباب الأول طرق تيلور لتقريب الدوال أحادية المتغير univariate function او الدوال متعددة المتغيرات multi-variable function، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب الثاني تحت عنوان: طرق حل المعادلات غير الخطية

وحل النماذج غير الخطية تحليليا او عدديا يتطلب الالمام الجيد بطرق حل المعادلات. لذلك في هذا الباب نقدم بعض الطرق التحليلية والعددية لحل المعادلات، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب الثالث تحت عنوان: مشاكل البرمجة غير الخطية

وفى هذا الباب نقدم بعض المشاكل التطبيقية التي يمكن صياغتها في شكل نماذج برمجة غير خطية، بالإضافة الى تقديم تصنيف لهذه النماذج، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب الرابع تحت عنوان: طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة

وفى هذا الباب نقدم اهم التعريفات والنظريات التي بنيت عليها طرق الحل المعتمدة على المشتقات التفاضلية كذلك بعض اهم الطرق المباشرة التي لا تعتمد على المشتقات، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة والتمرينات

الباب الخامس تحت عنوان: طرق حل النماذج غير الخطية المقيدة

ويتضمن هذا الباب نماذج البرمجة غير الخطية ذات القيود (خطية او غير خطية) فقدما اهم طرق الحل لهذا النوع من النماذج، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الجزء الثاني

أساليب البرمجة الهندسية

الباب السادس تحت عنوان: نماذج البرمجة الهندسية

وفى هذا الباب نقدم اهم المفاهيم الأساسية للبرمجة الهندسية ثم نقدم الأنواع المختلفة للنماذج الهندسية، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة.

الباب السابع تحت عنوان: طرق حل النماذج الهندسية ذات الحدود الموجبة

وفى هذا الباب نقدم طرق حل النماذج ذات الحدود الموجبة غير المقيدة والمقيدة أيضا مثل طريقة الاوزان النسبية المثلى والطريقة البديلة، بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة.

الباب الثامن تحت عنوان: طرق حل النموذج الهندسي العام

وفى هذا الباب يتم تقديم النماذج العامة signomial models وطرق حلها باستخدام الطريقة البديلة وطرق التكتيف الجزئي والتكتيف الكلى ايضا، هذا بالإضافة الى مجموعة من الأمثلة.

كذلك نقدم قائمه بالمصطلحات المستخدمة باللغتين العربية والإنجليزية، قائمه بالمراجع العربية والأجنبية المستخدمة ايضا.

وأخيرا ارجو من الله عز وجل ان يجد القارئ العربي في هذا الكتاب لبنه من لبنات البناء، عسى ان نجد من المتخصصين العرب من يقدم اسهاماته في هذا الفرع من العلوم الهامة.

والله ولى التوفيق

المؤلفة

ا.د عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء

قسم الرياضة والاحصاء

كلية التجارة – جامعة حلوان

القاهرة – مايو ٢٠٢٢ / شوال ١٤٤٣

الجزء الأول

الأساليب التقليدية لحل نماذج البرمجة غير الخطية

Classical Techniques for Solving Non-linear Programming Model

الباب الأول: طرق تيلور لتقريب الدوال

Taylor's Approximation Methods to Functions

- Introduction (١-١) المقدمة
- (٢-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال في متغير واحد
- Taylor's Approximation Methods for Univariate Function
- (٣-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال متعددة المتغيرات
- Taylor's Approximation Methods for Multi-variable Function
- الباب الثاني: طرق حل المعادلات غير الخطية

Solutions Methods for Nonlinear Equations

- Introduction (١-٢) المقدمة
- Nonlinear Equation (٢-٢) المعادلة غير الخطية
- Analytical Solution Methods (٣-٢) طرق الحل التحليلية
- Numerical Solution Methods (٤-٢) طرق الحل العددية (الحلول التقريبية)
- Newton-Raphson Method (٥-٢) طريقة نيوتن رافسون
- الباب الثالث: مشاكل البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming (Non-LP) Problems

- Introduction (١-٣) المقدمة
- Examples of (Non-LP) problems (٢-٣) أمثلة لمشاكل البرمجة غير الخطية
- (٣-٣) تصنيف نماذج البرمجة غير الخطية
- Classification of (Non-LP) Models
- Properties of Solution (٤-٣) الخصائص الحل
- Exercises (٥-٣) تمارين

الباب الرابع: طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة

Solution Methods of Unconstrained Nonlinear Programming Models

Introduction	(١-٤) المقدمة
Definitions and Theorems	(٢-٤) تعريفات ونظريات
Unconstrained Programming Models	(٣-٤) نماذج البرمجة غير المقيدة
Optimization Conditions	(٤-٤) شروط الأمثلية
Differentiable Methods	(٥-٤) طرق الحل المعتمدة على المشتقات
Directions Method	(١-٥-٤) طريقة الاتجاهات
Newton-Raphson Method	(٢-٥-٤) طريقة نيوتن رافسون
	(٦-٤) طرق الحل المباشرة (لا تعتمد على المشتقات التفاضلية)
Direct Methods (do not require the derivatives)	
Random Jumping Method	(١-٦-٤) طريقة القفز العشوائي
Univariate Search Method	(٢-٦-٤) طريقة البحث أحادي المتغير
Exercises	(٧-٤) تمارينات

الباب الخامس: طرق حل النماذج المقيدة

Solutions Methods of Constrained Models

Introduction	(١-٥) المقدمة
Classification Models	(٢-٥) تصنيف النماذج
Lagrange Methods	(٣-٥) طريقة لاجرانج
	(٤-٥) شروط كارش-كون-توكر
Karsh-Kuhn-Tucker (KKT) Conditions	
Newton-Raphson Method	(٥-٥) طريقة نيوتن-رافسون
Cutting Plane Method	(٦-٥) طريقة المستوى القاطع
Exercises	(٧-٥) تمارينات

الباب الأول

طرق تيلور لتقريب الدوال

Taylor's Approximation Methods To Functions

Introduction

(١-١) المقدمة

(٢-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال في متغير واحد

Taylor's Approximation Methods for Univariate Function

(٣-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال متعددة المتغيرات

Taylor's Approximation Methods for Multi-variable Function

Introduction

(١-١) مقدمة

في كثير من نماذج البرمجة غير الخطية وبصفة خاصة النماذج غير الممهدة (المقصود هنا بغير ممهدة أن الدوال في النموذج دوال غير خطية معقدة) يتطلب تقريب بعض الدوال، كما سوف نوضح ذلك في الأبواب ٣، ٤، ٥.

لذلك في هذا الباب سوف نقدم طرق تيلور لتقريب الدوال الرياضية في متغير واحد أو عدة متغيرات.

كذلك نقدم عدد من الأمثلة العددية التوضيحية بالإضافة الى مجموعة من التمرينات.

(٢-١) طريقة تيلور لتقريب الدوال في متغير واحد

Taylor's Approximation Methods to Univariate Function

بروك تيلور Brook Taylor هو عالم رياضيات إنجليزي عاش في الفترة (١٦٨٥-١٧٣١) حيث قدم العديد من الأبحاث في التكامل وإسهامات متعددة في الاحتمالات، وتعتبر نظرياته في تقريب الدوال أكثر أعماله انتشاراً وتطبيقاً [33].

متسلسلة تيلور Taylor Series

إذا فرضنا أن متسلسلة القوى $f(x)$ متسلسلة تقاربية، $a \leq x \leq b$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - c)^k \\ &= b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \dots + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

والدالة $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل من أى ترتيب، فإن:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(x - c)^{k-1} = b_1 + 2b_2(x - c) + 3b_3(x - c)^2 \\ &\quad + 4b_4(x - c)^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(k - 1)(x - c)^{k-2} = 2b_2 + 3.2b_3(x - c) \\ &\quad + 4.3b_4(x - c)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(k - 1)(k - 2)(x - c)^{k-3} = 3.2 b_3 \\ &\quad + 4.3.2 b_4(x - c) + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

وعندما $x = c$ فإن:

$$f(c) = b_0, \quad f'(c) = b_1, \quad f''(c) = 2! b_2, \quad f^{(3)}(c) = 3! b_3, \dots$$

وبصفة عامة، المشتقة من الترتيب k عند c :

$$f^{(k)}(c) = k! b_k \quad (1.5)$$

وبالتالي فإن:

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

وبالتعويض في (1.1) ب (1.6) نحصل على متسلسلة تيلور (أو مفكوك تيلور) على النحو:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k \quad (1.7)$$

ويمكن إعادة كتابة الدالة في (1.7) على النحو التالي:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

وتعتبر الدالة P_n كثيرة حدود من الدرجة n ، وتمثل الدالة $R_n(x)$ دالة في x من درجة أعلى من n وتسمى الحد الباقي أو خطأ التقريب $\text{approximated error}$.

والدالة P_n تمثل دالة تقريبية للدالة $f(x)$ ويرمز لذلك ب

$$P_n \approx f(x) \quad (1.8)$$

وتقرأ " P_n " كثيرة حدود من الدرجة n تقريب للدالة غير الخطية $f(x)$.

وقد أثبت تيلور أن الدالة $P_n(x)$ دالة تقاربية للدالة $f(x)$ كذلك الباقي $R_n(x)$ دالة تقاربية $\text{convergent function}$ وتؤول الى الصفر حيث

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (1.9)$$

كما توضح ذلك النظريتين التاليتين:

نظرية (١-١): إذا فرضنا أن الدالة $f(x)$ دالة متصلة وقابلة للتفاضل من الترتيب $(n + 1)$ في الفترة $[a < x < b]$ ، وأن $f(x) \approx P_n(x)$ ، فإن خطأ التقريب $R_n(x)$ على النحو التالي:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}, x < z < c \quad (1.10)$$

الاثبات: أنظر مرجع [33].

نظرية (٢-١): إذا فرضنا أن الدالة $f(x)$ دالة متصلة قابلة للتفاضل من أى ترتيب في الفترة $[a < x < b]$ ، فإن مفكوك تيلور $P_n(x)$ حول $x = c$ يتقارب converges للدالة $f(x)$ لجميع قيم x .

الاثبات: أنظر مرجع [35] صفحة 675, 682.

ويعتبر عالم الرياضيات الأسكتلندي كولن ماكلورين Colin Maclaurin (١٧٤٦-١٦٩٨) أول من أقترح، أنه يمكن ايجاد تقريب لتيلور حول نقطة الأصل $(c = 0)$ [45].

ويصبح مفكوك ماكلورين على النحو التالي:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (1.11)$$

مثال (١-١): إذا فرضنا أن $f(x) = e^x$

١. أوجد مفكوك تيلور من الدرجة الأولى، والثانية، والثالثة حول $x = 0$ كتقريب $P_n(x)$

للدالة $f(x)$ في الفترة $[-2 < x < 4]$

٢. وضح ذلك بيانيا

٣. أوجد خطأ التقريب في كل حالة.

الحل:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k$$

وبما أن

$$f^{(1)}(0) = e^x = 1, f^{(2)}(0) = 1, f^{(3)}(0) = 1$$

وبالتالي فإن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

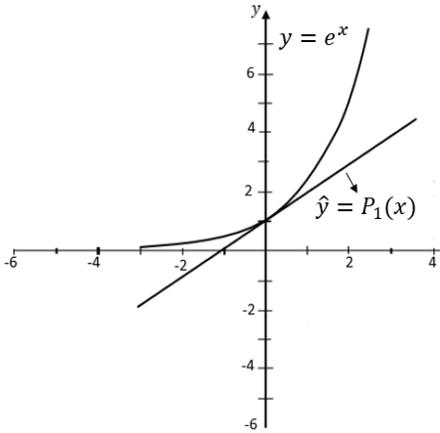
وبالتالي فإن:

$$\hat{y} = P_1(x) = 1 + x,$$

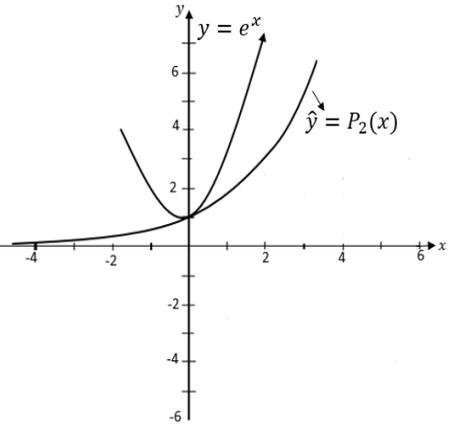
$$\hat{y} = P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = \frac{1}{2}(2 + 2x + x^2),$$

$$\hat{y} = P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} = \frac{1}{6}(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$$

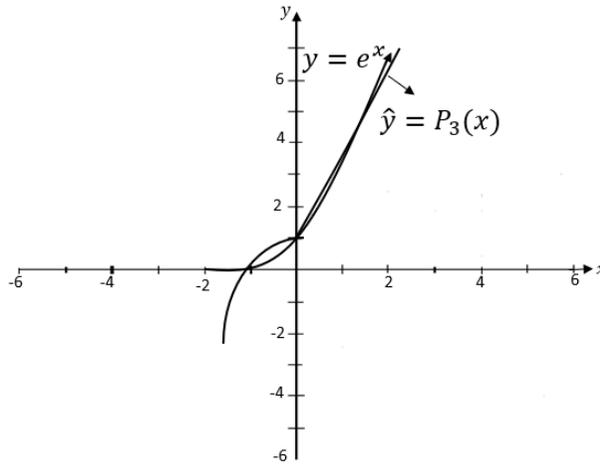
حيث \hat{y} تشير الى الدالة التقريبية.



شكل (١-١)



شكل (٢-١)



شكل (٣-١)

ويتضح من الشكل (١-١) - (٣-١) خلال الفترة $[-2 < x < 4]$ كلما زادت n اقتربت P_n من الدالة الفعلية $f(x)$ ، فنجد أن الدالة التقريبية $P_3(x)$ أقرب ما يمكن من الدالة الفعلية $y = e^x$.

٣. أوجد $R(x)$ عندما $x = -1$

$$R_1(-1) = e^{-1} - [1 - 1] = 0.36786$$

$$R_2(-1) = e^{-1} - \left[1 - 1 + \frac{1}{2}\right] = 0.132121$$

$$R_3(-1) = e^{-1} - \left[1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6}\right] = 0.03455$$

يتضح أن $R_1(x) > R_2(x) > R_3(x)$.

مثال (٢-١): أعتبر الدالة $f(x) = e^{2x}$

١. أوجد مفكوك تيلور من الدرجة الثانية عندما $c = 1$.

٢. أوجد الباقي $R(x)$.

الحل: بما أن

$$f(x) = e^{2x} \rightarrow f^{(0)}(c) = e^{2x} = e^2$$

$$f^{(1)}(c) = 2e^{2x} = 2e^2, \quad f^{(2)}(c) = 4e^2$$

$$P_2(x) = f^{(0)}(c) + f^{(1)}(c)(x - c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - c)^2$$

$$= e^2 + 2e^2(x - 1) + \frac{1}{2}(4e^2)(x - 1)^2$$

$$= e^2\{1 + 2(x - 1) + 2(x^2 - 2x + 1)\}$$

$$= e^2\{1 - 2x + 2x^2\} = 7.39 - 14.78x + 14.78x^2$$

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$= e^{2x} - [7.39 - 14.78x + 14.78x^2]$$

وعند $x = -1$

$$R_2(-1) = e^{-2} - [7.39 - 14.78(-1) + 14.78] = -36.81$$

مثال (٣-١): أوجد تقريب ماكلورين للدالة $f(x)$ من الدرجة الثانية

$$f(x) = \ln(2 + x)$$

ثم أوجد خطأ التقريب عندما $x = 1$.

الحل:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$P_2(x) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)(x) + \frac{1}{2}f^{(2)}(0)(x)^2$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2$$

$$= 0.6932 + 0.50x - 0.125x^2$$

$$\because R_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$= \ln(2 + x) - [0.6932 + 0.50x - 0.125x^2]$$

$$R_2(1) = 1.098612 - 1.0682 = 0.$$

تمرين (١-١)

[1] أوجد مفكوك ماكلورين للدوال التالية

$$1. f(x) = e^{2x} \quad , \quad 2. f(x) = e^{-x}$$

$$3. f(x) = \ln(1 + x) \quad , \quad 4. f(x) = \ln(x)$$

$$5. f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad 6. f(x) = \frac{1}{(1-x)}$$

[2] أوجد مفكوك تيلور للدوال التالية حول النقط المناظرة وحدد الفترة ل

x التي تكون فيها الدالة $P_n(x)$ تقاربية

$$1. f(x) = e^{x-1}, c = 1 \quad , \quad 2. f(x) = e^{-x}, c = 2$$

$$3. f(x) = \ln(x), c = e \quad , \quad 4. f(x) = \frac{1}{x}, c = -1$$

[3] أستخدم مفكوك تيلور من الدرجة الثالثة لتقريب الدوال التالية ثم أوجد

خطأ التقريب عند $x = 0, 1, 2$.

$$1. f(x) = e^x, c = 0 \quad , \quad 2. f(x) = \ln(1 + x), c = 3$$

$$3. f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, c = 1 \quad , \quad 4. f(x) = e^{2x-1}, c = 1$$

$$5. f(x) = \ln(2x + 1)^2, c = 0$$

$$6. f(x) = e^{2x} - x, c = 1$$

$$7. f(x) = e^{-x}, c = 0 \quad , \quad 8. f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, c = 2$$

$$9. f(x) = \sqrt{x+1}, c = 8 \quad , \quad 10. f(x) = \sqrt[3]{x+1}, c = 7$$

(٣-١) طريقة تيلور التقريبية للدوال متعددة المتغيرات

Taylor's Approximate Method for Multi-variate Function

في الفصل السابق تم تقديم نظريات تيلور للدالة في متغير واحد. وفي هذا الفصل سوف نقدم تيلور للدالة في عدة متغيرات.

فاذا فرضنا أن الدالة $f(x)$ دالة متعددة المتغيرات في n من المتغيرات ومتصلة في الفترة T وكذلك النقطة a بحيث $a \in [0, T]$ حيث

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

فأنه يمكن كتابة الدالة $f(x)$ كمتسلسلة لانهاية على النحو التالي [23, 45]:

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^{(\alpha)}f(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha} \quad (1.12)$$

حيث تشير $D^{(\alpha)}$ الى مصفوفة المشتقات الجزئية من الترتيب α
حيث

$$D^{(\alpha)}f(a) = \left[\frac{\partial^{(\alpha)}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]_{x=a}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (1.13)$$

ونلاحظ أن

$$1) D^{(0)}f(a) = f(a)$$

$$2) D^{(1)}f(a) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]_{x=a}$$

$$3) D^{(2)}f(a) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=a} = H|_{x=a}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

حيث H تشير الى المصفوفة الهيسينية Hessian Matrix

$$4) D^{(\alpha)}f(a) = D[D^{(\alpha-1)}f(x)]|_{x=a} \quad (1.14)$$

نظرية (٣-١): إذا فرضنا أن $f(x)$ دالة متصلة في عدد n من المتغيرات وقابلة للتفاضل في الفترة T فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\alpha=0}^k \frac{D^{(\alpha)}f(a)}{\alpha!} (x-a) + \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} h_{\alpha}(x) (x-a)^{\alpha} \\ &= P_k(x) + \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} h_{\alpha}(x) (x-a)^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.15)$$

حيث $P_k(x)$ تشير الى الدالة التقريبية من الدرجة k كتقريب للدالة $f(x)$ ، وتسمى الدالة $\sum_{\alpha=k+1}^{\infty} h_{\alpha}(x) (x-a)^{\alpha}$ بمستوى الخطأ أو خطأ التقريب عند النقطة a حيث

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} h_{\alpha}(x) (x-a)^{\alpha} \quad (1.16)$$

الأثبت: أنظر مرجع رقم [11].

ويمكن كتابة الدالة التقريبية $P_k(x)$ في الشكل التالي أيضا

$$\begin{aligned} P_k(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i^{\alpha_1} \partial x_j^{\alpha_2} \partial x_r^{\alpha_3}} (x_i - a_i)^{\alpha_1} (x_j - a_j)^{\alpha_2} (x_r - a_r)^{\alpha_3} \right] \\ &\dots + \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{t=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_k^{\alpha_k}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \dots \right. \\ &\quad \left. (x_k - a_k)^{\alpha_k} \right] \\ &\quad \sum_{r=1}^k \alpha_r = k \end{aligned} \quad (1.17)$$

حالات خاصة

الحالة الأولى: (١) إذا فرضنا الدالة $f(x_1, x_2)$ دالة في متغيرين x_1, x_2 ودالة متصلة فإن تقريب الدالة $f(x_1, x_2)$ عند النقطة $a = [a_1, a_2]$ من الدرجة الثانية على النحو التالي:

$$P_2(x) = f(a) + \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} (x_2 - a_2) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} (x_1 - a_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} (x_2 - a_2)^2 \right] \quad (1.18)$$

(٢) كذلك تقريب $f(x_1, x_2)$ من الدرجة الثالثة يكون على النحو التالي:

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2) + \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2^2} (x_1 - a_1) (x_2 - a_2)^2 + \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^3} (x_1 - a_1)^3 + \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2^3} (x_2 - a_2)^3 \right] \quad (1.19)$$

الحالة الثانية:

(١) إذا فرضنا الدالة $f(x_1, x_2, x_3)$ دالة متصلة والنقطة $a = [a_1, a_2, a_3]$ تقع في فترة التقريب، والدالة التقريبية من الدرجة الثانية باستخدام مفكوك تيلور حول النقطة (a) سوف نشير له بالرمز T_2 على النحو التالي:

$$T_2 = f(a) + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \right] \quad (1.20)$$

(٢) كذلك الدالة التقريبية للدالة $f(x_1, x_2, x_3)$ في (1.20) فان التقريب من الدرجة الثالثة وسوف نشير له بالرمز T_3 لنفس النقطة (a) على النحو التالي:

$$T_3 = T_2 + \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2) \right] + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2^2} (x_1 - a_1) (x_2 - a_2)^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^3} (x_1 - a_1)^3 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2^3} (x_2 - a_2)^3 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_3^3} (x_3 - a_3)^3 \right] \right\} \quad (1.21)$$

مثال (٤-١): إذا فرضنا ان الدالة المتصلة

$$f(x_1, x_2) = e^{2x_1 + x_2}$$

١. أوجد تقريب تيلور من الدرجة الثانية عند النقطة $a = [1, 1]$ ثم أوجد خطأ التقريب عندما $(x_1 = 0, x_2 = 1)$.
٢. أوجد تقريب تيلور من الدرجة الثالثة حول النقطة $a = [1, 1]$ ثم أوجد خطأ التقريب عندما $(x_1 = 0, x_2 = 1)$.
٣. قارن بين خطأ التقريب في (١) و (٢).

الحل:

(١) إذا أشرنا الى الدالة التقريبية من الدرجة الثانية بالرمز $P_2(x)$. ومن العلاقة (1.18) نجد ان:

$$T_2(x) = f(a) + \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} (x_2 - a_2) \right] \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} (x_1 - a_1)^2 + \frac{2 \partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - a_1) (x_2 - a_2) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} (x_2 - a_2)^2 \right]$$

وبما أن

$$f(a) = e^{2+1} = 20.086, \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = 2e^{2x_1 + x_2} = 40.172$$

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = e^{2x_1+x_2} = 20.086, \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} = 4e^{2x_1+x_2} = 80.344$$

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} = e^{2x_1+x_2} = 20.086,$$

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} = 2e^{2x_1+x_2} = 40.172$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(a) + \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} (x_2 - a_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} (x_1 - a_1)^2 + \frac{2 \partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} (x_2 - a_2)^2 \right] \\ &= 20.086 + [40.172(x_1 - 1) + 20.086(x_2 - 1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [80.344(x_1 - 1)^2 + 2(40.172)(x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ &\quad + 20.086(x_2 - 1)^2] \\ &= 40.172 x_1^2 + 10.043 x_2^2 + 40.172 x_1 x_2 - 80.344 x_1 - 40.172 x_2 + \\ &\quad 50.215 \quad (1) \end{aligned}$$

٢- خطأ التقريب عند $(x_1 = 0, x_2 = 1)$

$$\begin{aligned} R_2(x) &= f(x_1, x_2) - P_2(x) \\ &= e - 2.0086 = 0.70968 \cong 0.71 \quad (2) \end{aligned}$$

(٢) من (1.20) نجد أن تقريب تيلور من الدرجة الثالثة T_3 على النحو التالي:

$$T_3 = T_2 + \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2^2} (x_1 - a_1) (x_2 - a_2)^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^3} (x_1 - a_1)^3 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2^3} (x_2 - a_2)^3 \right] \right\}$$

وبما أن

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^3} &= 8e^{2x_1+x_2} = 8(e^3) = 160.6843 \\ \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_2^3} &= e^{2x_1+x_2} = e^3 = 20.0856 \\ \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 2e^{2x_1+x_2} = 2(e^3) = 40.1711 \\ \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= 4e^{2x_1+x_2} = 80.3422 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

وبالتعويض بالقيم (4) في (3) نجد أن:

$$T_3 = \{40.172 x_1^2 + 10.043 x_2^2 + 40.172 x_1 x_2 - 80.344 x_1 \\ - 40.172 x_2 + 50.215\} \\ + \{[40.1711(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)] \\ + [20.0855(x_1 - 1)(x_2 - 1)^2] + [26.614(x_1 - 1)^3] \\ + [3.3476(x_2 - a_2)^3]\}$$

$$T_3 = -40.1699 + 26.7807 x_1^3 + 3.3476 x_2^3 - 80.342 x_1^2 - 20.081 x_2^2 \\ + 40.171 x_1^2 x_2 + 20.087 x_2^2 x_1 - 40.171 x_1 x_2 \\ - 220.942 x_1 - 70.3 x_2$$

وعندما $x_1 = 0, x_2 = 1$ فإن

$$T_3 = -40.1699 + 0 + 3.3476 - 0 - 20.081 + 0 + 20.087 - 0 - 0 - 70.3 = -107.117$$

$$R_3(x) = e^{2+1} - (T_3) = 20.086 + 107.117 = 127.203 \quad (5)$$

يتضح من خطأ التقريب في (2)، (5) أن تقريب الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أفضل من التقريب من الدرجة الثالثة حيث إن $R_2 < R_3$.

تمرين (٢-١)

[1] أوجد مفكوك ماكلورين للدوال التالية

$$1. f(x_1, x_2) = e^{x_1 - 2x_2}, \quad 2. f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2 x_3 + 1}$$

$$3. f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + 2) \ln(x_2 + x_3 + 1)$$

$$4. f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}, \quad 5. f(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 + x_2 + 10)^2}$$

$$6. f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2 + 4}$$

[2] أستخدم مفكوك تيلور من الدرجة الثانية للدوال التالية حول النقاط المناظرة. ثم أوجد خطأ التقريب النقطة المبدئية x^0 حيث $x^0 = (x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1)$

$$1. f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}, \quad c = (1, 1)$$

$$2. f(x_1, x_2) = e^{2x_1 + x_2} x_1, \quad c = (0, 1)$$

$$3. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^4, \quad c = (0, 1, 0)$$

$$4. f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}, \quad c = (1, 1)$$

$$5. f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 + x_2 + x_3}, \quad c = (1, 1, 1)$$

$$6. f(x_1, x_2) = \ln(2x_1 + x_2), \quad c = (1, 2)$$

الباب الثاني

طرق حل المعادلات غير الخطية

Solution Methods for Nonlinear Equations

Introduction	(١-٢) المقدمة
Nonlinear Equation	(٢-٢) المعادلة غير الخطية
Analytical Solution Methods	(٣-٢) طرق الحل التحليلية
Numerical Solution Methods	(٤-٢) طرق الحل العددية (الحلول التقريبية)
Newton-Raphson Method	(٥-٢) طريقة نيوتن رافسون

Introduction**(١-٢) المقدمة**

تتطلب دراسة وحل نماذج البرمجة غير الخطية المعرفة الجيدة بطرق حل أنظمة المعادلات غير الخطية وخصائصها وخصائص الحلول التي يتم الحصول عليها.

لذلك في هذا الباب سوف تقدم بعض طرق حل المعادلات غير الخطية تحليليا analytical solution او عدديا numerical solution.

ففي الفصل (٢-٣) تقدم إحدى الطرق الجبرية لحل المعادلات من الدرجة n . وفي الفصل (٢-٤) تقدم إحدى الطرق لحل المعادلات عدديا، والحصول على حلول تقريبية approximate solutions.

ثم نقدم في الفصل (٢-٥) نظام المعادلات غير الخطية وطريقة حله باستخدام طريقة نيوتن – رافسون.

هذا بالإضافة الى تقديم وحل عدة أمثلة توضيحية، ومجموعة من التمرينات المتنوعة أيضا.

Nonlinear Equation**(٢-٢) المعادلة غير الخطية**

إذا اعتبرنا $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة n فإن:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

أو

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad , n \geq 1 \quad , a_n \neq 0 \quad (2.1)$$

ويقال المعادلة من الدرجة n ، $n \geq 1$ إذا كان:

$$f(x) = 0$$

أو

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \quad , a_n \neq 0 \quad (2.2)$$

وحل المعادلة (2.2) يعنى ايجاد قيم x التي تحقق المعادلة ولتكن القيم الحقيقية r_1, r_2, \dots, r_n وتسمى r_i بجذور roots المعادلة (2.2).

وفيما يلي سوف نقدم حل المعادلة عندما $n = 1$ فى أولاً، كذلك حل المعادلة عندما $n = 2$ فى ثانياً. وفى الفصل التالى سوف نقدم طريقة تكرارية لحل المعادلة عند أى قيمة صحيحة ل n ، $n \geq 1$.

أولاً: إذا اعتبرنا أن $n = 1$ ، فتكون المعادلة خطية على النحو التالى:

$$a_0 + a_1x = 0$$

وفى هذه الحالة تكون قيمة x التي تحقق المعادلة ولتكن r_1 على النحو التالى:

$$r_1 = \frac{-a_0}{a_1} \quad (2.3)$$

مثال (٢-١): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة التالية:

$$2x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{8}{2} = 4$$

ثانياً: إذا اعتبرنا أن $n = 2$ ، فتكون المعادلة من الدرجة الثانية على النحو التالي:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \quad (2.4)$$

وبما أن $n = 2$ ، فإنه يوجد قيمتين ل x ولتكن r_1, r_2 كل منهما يحقق المعادلة بحيث:

$$r_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad (2.5)$$

$$r_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad (2.6)$$

مثال (٢-٢): أوجد جذور المعادلة التالية:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

من المعادلة نجد أن: $a_0 = 2, a_1 = -3, a_2 = 1$

$$r_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

مثال (٣-٢): أوجد قيم x التي تحقق المعادلة التالية:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 5$$

$$r_1 = \frac{-(3) - \sqrt{9 - 4(-2)(5)}}{2(5)} = \frac{-3 - 7}{10} = -1$$

$$r_2 = \frac{-(3) + \sqrt{9 - 4(-2)(5)}}{2(5)} = \frac{-3 + 7}{10} = \frac{2}{5}$$

مما سبق يتضح أن حل المعادلة من الدرجة الأولى والثانية بسيط كما في (2.3)، (2.5)، (2.6)، أما عندما تكون درجة المعادلة n بحيث $n \geq 3$ ، فإنه يوجد أكثر من طريقة يمكن الحصول بها على جذور المعادلة، كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية.

تمرين (٢-١)

أوجد حل المعادلات التالية:

$$1) 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$2) x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$3) 4x^2 - 100 = 0$$

$$4) \sqrt{3} x^2 + 7x - 5 = 0$$

$$5) x^2 - \sqrt{5} x + 10 = 0$$

$$6) 10x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$7) e^2 x^2 - e x - 20 = 0$$

$$8) \sqrt{8} x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$9) [\ln(5)] x^2 - 2x - 20 = 0$$

Analytical Solution Methods**(٣-٢) طرق الحل التحليلية**

ويمكن حل المعادلة من الدرجة $n \geq 1$ فى الصيغة التالية:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0, a_n \neq 0 \quad (2.7)$$

بأحد الطرق الجبرية لحل المعادلات غير الخطية فنحصل على القيم الصحيحة للجذور exact roots، وفى هذا الفصل سوف تقدم إحدى الطرق الجبرية التكرارية للحل. كذلك يوجد طرق عددية يمكن باستخدامها الحصول على الحلول (الجذور) التقريبية approximate roots، سوف نقدمها فى الفصل التالي.

ولتقديم الطريقة الجبرية، سوف نقدم أولاً بعض النظريات التي تعتمد عليها الطريقة.

نظرية (١-٢): إذا اعتبرنا المعادلة (2.7) حيث يمثل الطرف الأيسر كثيرة حدود من الدرجة n ، $n \geq 1$ ، وإذا افترضنا أن القيمة M تساوى أكبر قيمة من القيم التالية [23,10]:

$$\frac{|a_0|}{|a_n|}, \frac{|a_1|}{|a_n|}, \dots, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \quad (2.8)$$

فإن قيم x التي تحقق المعادلة أعلاه (جذور المعادلة) تقع داخل الفترة

$$[-(M + 1), (M + 1)]$$

وتسمى هذه النظرية بحدود كوشي Couchy Bounds

الأثبات: أنظر مرجع [10].

مثال (٤-٢): أعتبر المعادلة التالية من الدرجة الرابعة على النحو:

$$4x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x - 6 = 0$$

أوجد قيم x التي تحقق المعادلة (جذور المعادلة).

الحل

$$a_4 = 4, a_3 = 8, a_2 = -2, a_1 = -12, a_0 = -6$$

$$\frac{|a_0|}{|a_4|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \frac{|a_1|}{|a_4|} = \frac{12}{4} = 3, \quad \frac{|a_2|}{|a_4|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|a_3|}{|a_4|} = \frac{8}{4} = 2$$

وبالتالي فإن: $M = 3$ ، وقيم x الحقيقية التي تحقق المعادلة تقع داخل الفترة:

$$[-(3 + 1), (3 + 1)] = [-4, 4] \quad (2.9)$$

نظرية (٢-٢): إذا فرضنا المعادلة من الدرجة n ، $n \geq 1$ ، والمقادير التالية $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ قيم صحيحة. فإن القيم r التي تحقق المعادلة على النحو التالي:

$$r = \pm \frac{p}{q} \quad (2.10)$$

حيث p تشير الى أحد مكونات factors المقدار الثابت a_0 ، q تشير الى أحد مكونات المقدار الثابت a_n .

وبالتالي فإن قيم r التي تحقق المعادلة تمثل بعض عناصر الفئة $\left\{ \pm \frac{p}{q} \right\}$.

الاثبات: أنظر مرجع [10].

مثال (٥-٢): أعتبر مثال (٤-٢)، فنجد أن المعادلة من الدرجة الرابعة $n = 4$ ، كذلك نجد أن مكونات الثابت a_0 هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

كذلك مكونات الثابت a_4 هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

وبالتالي فإن

$$\left\{ \pm \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{2}{4}, \pm \frac{3}{1}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{6}{1}, \pm \frac{6}{2}, \pm \frac{6}{4} \right\}$$

$$\left\{ \pm \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 6 \right\}$$

نظرية (٣-٢): إذا فرضنا أن $d(x), p(x)$ كثيرتي حدود غير صفريّة حيث درجة $p(x)$ أكبر من درجة $d(x)$. فإنه يوجد كثيرتي حدود $q(x), r(x)$ وحيدة unique بحيث:

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x) \quad (2.11)$$

حيث $r(x) = 0$ أو كثيرة حدود بدرجة أقل من كثيرة الحدود $d(x)$. وتسمى هذه النظرية بنظرية قسمة كثيرة الحدود polynomial division. وتسمى $p(x)$ المقسوم dividend وتسمى $d(x)$ المقسوم عليه divisor، وكثيرة الحدود $q(x)$ خارج القسمة quotient، وكثيرة الحدود $r(x)$ بالباقي remainder.

الأثبات: أنظر مرجع [10].

وهذه النظرية تفيد أنه يمكن وضع كثيرة الحدود من درجة معينة في صورة كثيرات حدود من درجات أقل.

مثال (٦-٢): أعتبر مثال (٥-٢) فإن:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x - 6 = 0 \\ &= (x + 1)(4x^3 + 4x^2 - 6x - 6) = 0 \end{aligned}$$

ف نجد ان $q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 6x - 6$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أقل من درجة $f(x)$ والمقسوم عليه $d(x) = (x + 1)$ ، $r(x) = 0$.

نظرية (٤-٢): إذا فرضنا أن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، $n \geq 1$ ، فإن $f(x) = 0$ لها على الأكثر n قيمة من القيم الحقيقية التي تحقق المعادلة $f(x) = 0$.

الأثبات: أنظر مرجع [10] صفحة 264.

مثال (٧-٢): إذا فرضنا أن

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

معادلة من الدرجة الثالثة فنجد أن قيم x التي تحقق المعادلة هي

$$x = 1, x = 1$$

الطريقة التكرارية لأيجاد جذور المعادلة

إذا اعتبرنا المعادلة التالية من الترتيب n ، $n \geq 1$ ، $a_n \neq 0$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

ولأيجاد قيم x التي تحقق المعادلة (جذور المعادلة) ولتكن r_1, r_2, \dots, r_n نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى:

١. تحديد قيم المقادير الثابتة $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ فإذا كانت قيم صحيحة حقيقية
٢. تحديد مكونات a_0, a_n .
٣. نوجد فئة القيم r ، $r = \left\{ \pm \frac{p}{q} \right\}$

الخطوة الثانية: ١. نختار أي قيم الفئة r التي تحقق المعادلة ولتكن r_1

٢. بقسمة طرفي المعادلة أعلاه على $(x - r_1)$ فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه على النحو التالي (أنظر نظرية ٦-٢)

$$(x - r_1) \underbrace{(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1})}_{q_1(x)} = 0 \quad (2.11)$$

نجد أن $q_1(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $(n - 1)$

الخطوة الثالثة: ١. نكرر الخطوة الأولى والثانية بالنسبة للمعادلة

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) = 0 \quad (2.12)$$

٢. نوجد فئة القيم $r' = \left\{ \pm \frac{p'}{q'} \right\}$ ، وبأختيار قيمة منها تحقق المعادلة $(٢, ١٢)$ ولتكن القيمة r_2 ، وبقسمة $q(x)$ على $(x - r_2)$ نجد أن المعادلة $(٢, ١١)$ يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$(x - r_1)(x - r_2) \underbrace{(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2})}_{q_2(x)} = 0$$

الخطوة الرابعة: ١. نكرر الخطوات أعلاه حتى نحصل على

$$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_{n-2}) \underbrace{(c'_0 + c'_1x + c'_2x^2)}_{q_3(x)} = 0$$

٢. يتم حل المعادلة $q_3(x) = 0$ باستخدام القانون في (2.5) ، (2.6) فنحصل على الجذرين

$\cdot \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$

مثال (٨-٢): أعتبر المعادلة التالية من درجة $n = 4$:

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30 = 0$$

أوجد جذور المعادلة.

الحل:

$$a_0 = -30, a_1 = 31, a_2 = 5, a_3 = -7, a_4 = 1 \quad -1$$

٢- نوجد الفئة r حيث:

$$r = \left\{ \pm \frac{p}{q} \right\} = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5 \}$$

إذا فرضنا $r_1 = 1$ وبالتعويض في الطرف الأيسر للمعادلة ب $x = 1$ فنجد أن $r_1 = 1$ تحقق المعادلة، وبالتالي يمكن وضع المعادلة على النحو التالي:

$$(x - 1) \underbrace{(x^3 - 6x^2 - x + 30)}_{q_1(x)} = 0 \quad (1)$$

٣- وبالنسبة لكثيرة الحدود $q_1(x)$ من الدرجة $n = 3$ نجد أن

$$b_0 = 30, b_1 = -1, b_2 = -6, b_3 = 1$$

$$r = \left\{ \pm \frac{p}{q} \right\} = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5 \} \quad (2)$$

٤- نجد أن $r_2 = 5$ تحقق المعادلة $q_1(x) = 0$ ، وبالتالي يمكن وضع المعادلة (١) على الشكل التالي:

$$(x - 1) \underbrace{(x - 5)(x^2 - 6x)}_{q_2(x)} = 0 \quad (3)$$

٥- يمكن حل المعادلة $q_2(x) = 0$ بنفس الأسلوب أعلاه أو باستخدام القانون في (2.5)، (2.6) نجد أن:

$$r_3 = \frac{-(-1) - \sqrt{1 - 4(-6)(1)}}{2(1)} = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2$$

$$r_4 = \frac{-(-1) + \sqrt{1 - 4(-6)(1)}}{2(1)} = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$$

وبالتالي تصبح المعادلة في شكلها التالي:

$$(x - 1)(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0$$

تمرين (٢-٢)

حل المعادلات التالية:

- 1) $x^3 - 2x^2 + x - 10 = 0$
- 2) $x^6 - x^4 + 2x^2 = 0$
- 3) $5x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 10 = 0$
- 4) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 5 = 0$
- 5) $x^5 - 2x^3 - 20 = 0$
- 6) $2x^6 + 4x^4 - 2x^2 = 0$
- 7) $3x^5 - 2x^4 - x^3 = 0$
- 8) $x^{12} - x^8 + 2x^4 = 0$
- 9) $10x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 10x - 20 = 0$
- 10) $10x^5 - 20x^3 - 200 = 0$

Numerical Solution Methods**(٤-٢) طرق الحل العددي**

توجد طرق مختلفة لإيجاد حلول تقريبية للمعادلة غير الخطية منها طريقة القطع secant method وطريقة نيوتن Newton method. وفيما يلي سوف نقدم طريقة نيوتن.

طريقة نيوتن: تعتبر طريقة تكرارية بسيطة وتكراراتها x_0, x_1, x_2, \dots تقاربية [29,8].

إذا اعتبرنا $f(x)$ دالة غير خطية متصلة وقابلة للتفاضل بحيث:

$$f(x) = 0 \quad (2.13)$$

فأنه يمكن تقريب الدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ (أنظر الباب الأول)، بالتالي فإنه يمكن تقريب المعادلة (2.13) الى معادلة خطية على النحو التالي:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

أو

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.14)$$

كذلك

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_2)}$$

⋮

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.15)$$

وفي كل خطوة نحسب مستوى الخطأ ϵ_i حيث:

$$\epsilon_i = |x_i - x_{i-1}|, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

وعندما $\epsilon_i = 0$ فهذا يعنى أن $x_i = x_{i-1}$ وتمثل إحدى الجذور التقريبية للمعادلة

$$.f(x) = 0$$

مثال (٩-٢): أوجد تقريب لأحد جذور المعادلة التالية باستخدام طريقة نيوتن عند النقطة المبدئية

$$x_0 = 1.5 \text{ initial point}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

الحل:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

نكون الجدول التالي الذي يوضح قيم x_n عند $n = 0, 1, 2, \dots$

جدول (١-٢): يوضح التكرارات لطريقة نيوتن

n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_n	$\epsilon_n = x_{n+1} - x_n $
0	0.3750	-0.250	1.5	
1	0	2	3	1.5
2	0	2	3	0

من الجدول: نجد أن طريقة نيوتن تتقارب بسرعة بعد عدد ٢ تكرار iterations .

٢- بالتعويض ب $x = 3$ فى المعادلة أعلاه نجد أن $x = 3$ تحقق المعادلة.

مثال (١٠-٢): أوجد تقريب لأحد جذور المعادلة التالية باستخدام طريقة نيوتن عند $x_0 = 2$

$$f(x) = x^6 - x - 1 = 0$$

الحل:

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

بما أن

$$f'(x) = 6x^5 - 1$$

كذلك

نكون الجدول التالي:

جدول (٢-٢): يوضح الخطوات التكرارية لإيجاد جذور المعادلة

N	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	ϵ_n $= x_n - x_{n-1} $
0	2.0	61.0	131.0	-
1	1.53435	10.5373	50.02388	0.4655
2	1.32418	3.06698	23.42791	0.21017
3	1.19327	0.69363	13.51593	0.13091
4	1.14195	0.07565	10.65163	0.05132
5	1.13485	0.001295	10.29389	0.0071
6	1.13472	0.0000425	10.28742	0.00013
7	1.13472	0.0000425	10.28742	0
8	1.13472	0.0000425	10.28742	0

من الجدول يتضح أن القيمة التقريبية للجذر تساوى 1.13472.

تمرين (٢-٣)

باستخدام طريقة نيوتن، أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

- 1) $x^4 - 2x^3 + 2x + 10 = 0$, $x_0 = 1$
- 2) $\ln(x) + 3x - 10 = 0$, $x_0 = 3.5$
- 3) $e^{5x} + 4x - 50 = 0$, $x_0 = 10$
- 4) $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x_0 = 0.6$
- 5) $x^3 + 7x^2 - 2x + 10 = 0$, $x_0 = -3$
- 6) $e^{2x} + x - 10 = 0$, $x_0 = 1.5$
- 7) $\ln(2x) + 3x - 9 = 0$, $x_0 = 3.0$

- 8) $\ln(x^2) - 12 = 0$, $x_0 = e^4$
- 9) $5x^4 - 3x^2 + x - 10 = 0$, $x_0 =$
- 10) $e^{-2x} + x^2 - 100 = 0$, $x_0 = 3.5$
- 11) $x^5 - 7x^4 - 10 = 0$, $x_0 = 0.2$
- 12) $e^{3x+1} + 5x - 100 = 0$, $x_0 = 2$
- 13) $\ln(x + 5) - 7x = 0$, $x_0 = 4$
- 14) $7x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$, $x_0 = 1.5$
- 15) $x^3 - e^{2x} - 5 = 0$, $x_0 = 1$

(٥-٢) طريقة نيوتن-رافسون لحل نظام المعادلات غير الخطية

Newton Raphson Method for Solving Nonlinear System Equations

إذا فرضنا وجود عدد n من المعادلات غير الخطية المستقلة، والقابلة للتفاضل في عدد n من المجاهيل، على النحو التالي:

$$f_i(x) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

حيث X متجه في n من المجاهيل.

وتوجد طرق عديدة مختلفة لحل نظام المعادلات غير الخطية المستقلة، وتعتبر طريقة نيوتن-رافسون من أهم الطرق التقريبية لحل نظام المعادلات غير الخطية. وتعتبر طريقة نيوتن-رافسون تعميم لطريقة نيوتن السابق تقديمها.

تعتمد طريقة نيوتن-رافسون على تقريب المعادلات غير الخطية الى معادلات خطية ثم حلها باستخدام طرق حل المعادلات الخطية (مثل التعويض أو كرامر أو معكوس المصفوفة).

فإذا فرضنا X^k تشير الى المتجه x عند النقطة رقم k $X^k = [X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k]$ وبأستخدام مفكوك تيلور (أنظر الباب الأول) نجد أن:

$$f_i(x) \cong f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k) (x - x^k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

حيث $\nabla f_i(x^k)$ تشير الى متجه المشتقات الأولى للمجاهيل X_j ، $j = 1, 2, \dots, n$ عند القيم x^k للدالة رقم (i) ، وبالتالي فإن:

$$f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k)(x - x^k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

وإذا فرضنا أن المتجه العمودي A_k حيث:

$$A_k = [f_1(x^k), f_2(x^k), \dots, f_n(x^k)]' \quad (2.19)$$

كذلك إذا فرضنا المصفوفة B_k حيث:

$$B_k = \left[\frac{df_i(x)}{dx_j} \Big|_{x=x^k} \right]_{n,n} \quad (2.20)$$

وبالتعويض في (2.15) نجد أن

$$A_k + B_k(x - x^k) = 0 \quad (2.21)$$

وتحت افتراض أن المعادلات $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ معادلات مستقلة فإن المصفوفة B_k مصفوفة غير شاذة nonsingular matrix ومعكوسها B_k^{-1} مصفوفة غير شاذة أيضا [32].

وبضرب طرفي المعادلة (2.21) في المصفوفة B_k^{-1} .

$$x^{k+1} = x^k - B_k^{-1}A_k \quad (2.22)$$

ومن المعادلة (2.22) فإننا نحصل على النقطة x^{k+1} عن طريق النقطة x^k . فإذا رمزنا للنقطة المحددة مبدئياً initial point بالرمز x^0 ، وبالتعويض في (2.22) نحصل على النقطة $x^{(1)}$ أي بعد تطبيق العلاقة (2.22) أول مرة، ويتكرر الأجراء عدد (k) من المرات نحصل على x^{k+1} حيث:

$$x^{k+1} = x^k - B_k^{-1}A_k \quad (2.23)$$

وينتهي الأجراء والحصول على الحل التقريبي للمعادلات يساوي x^{k+1} عندما

$$x^{k+1} = x^k$$

أو بعبارة أخرى

$$\epsilon_k = |x^{k+1} - x^k| \cong 0 \quad (2.24)$$

ومما سبق يمكن تلخيص خطوات الحل فيما يلي:

خوارزم (٢-٢):

١. نفرض أن k تشير إلى رقم التكرار iteration، $k = 1, 2, \dots, m$ ، وافرض المعيار ϵ .

٢. نحسب النقطة x^k (حيث x^0 تشير إلى النقطة المبدئية الافتراضية)، وبالتعويض في $f_i(x)$

ب x^k يتم حساب A_k

٣. إيجاد المصفوفة B_k حيث

$$B_k = \left[\frac{df_i(x)}{dx_j} \right]_{x=x^k}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

٤. إيجاد المصفوفة B_k^{-1} (معكوس المصفوفة B_k)

٥. حساب النقطة x^{k+1} حيث:

$$x^{k+1} = x^k - B_k^{-1} A_k$$

٦. نختبر النقطة x^{k+1} ، إذا كان:

(١) $x^{k+1} \approx x^k$ ينتهي الأجراء وتكون النقطة x^{k+1} هي نقطة الحل التقريبية.

(٢) $x^{k+1} \not\approx x^k$ ، $k < m$ ، نضع $k = k + 1$ ونذهب الى الخطوة (٢).

مثال (٢-١١): إذا فرضنا أن نظام المعادلات:

$$y e^x - 2 = 0$$

$$x^2 + y - 4 = 0$$

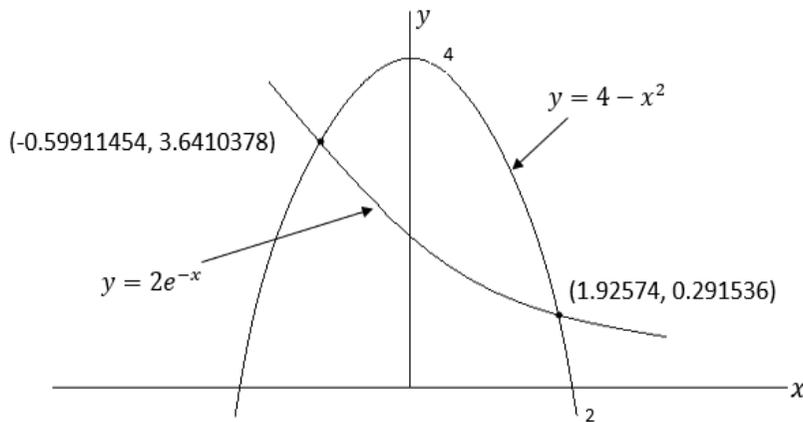
١. أرسم المعادلتين أعلاه

٢. أعتبر نقطة الحل المبدئية $x^0 = [-0.6, 3.7]$ ، أوجد الحل التقريبي للمعادلات.

٣. أعتبر نقطة الحل المبدئية $x^0 = [1.9, 0.4]$ ثم أوجد الحل

الحل:

١- الشكل التالي يوضح المعادلتين أعلاه



$$\epsilon = [0.00001, 0.000001]' , x^0 = [-0.6, 3.7]' \text{ بما أن } -٢$$

أولاً:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.0306031 \\ 0.06 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} y e^x & e^x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن المصفوفة B مصفوفة غير شاذة nonsingular

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2.0306 & 0.548812 \\ -1.2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3718613415 & -0.20408197 \\ 0.4462336 & 0.75510164 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - B_0^{-1}A_0 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 3.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.000865 \\ 0.0589622 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.599135 \\ 3.6410372 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\epsilon^1 = |x^1 - x^0| = \left| \begin{bmatrix} -0.599135 \\ 3.6410372 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.6 \\ 3.7 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{bmatrix} 0.000665 \\ 0.05876 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ثانياً:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.00002718 \\ -0.00000005177 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.999973141 & 0.54928656 \\ -1.19827 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7523882 & -0.4507881 \\ 0.2066411 & 0.37619913 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = x^1 - B_1^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} -0.599135 \\ 3.6410372 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.00002046 \\ -0.00000005636 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.59911454 \\ 3.641037856 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^1 = |x^2 - x^1| = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00000005 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أذن النقطة x^2 هي نقطة حل تقريبي.

٣- إذا فرضنا أن نقطة الحل المبدئية $x^0 = [1.9, 0.4]$

وباستخدام نفس الخطوات في (٢) نجد أن:

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1.92672 \\ 0.28844 \end{bmatrix}, \quad \epsilon^1 = \begin{bmatrix} 0.02672 \\ 0.11156 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1.92572 \\ 0.291533 \end{bmatrix}, \quad \epsilon^2 = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.00309 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} 1.92574 \\ 0.291536 \end{bmatrix}, \quad \epsilon^3 = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.000003 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن النقطة x^3 نقطة حل تقريبي أخرى.

تمرين (٢-٤)

باستخدام طريقة نيوتن-رافسون، حل المعادلات التالية عند نقطة مبدئية مناسبة:

$$1. \quad x_1^2 - 2x_2^2 - 20 = 0, \quad x_0 = (x_1 = 3, x_2 = 4.5)$$

$$e^{x_1+x_2} - 5x_2 - 40 = 0$$

$$2. \quad \ln(x_1x_2) + \ln(x_1) = 3, \quad x_0 = (x_1 = 0.5, x_2 = 0.5)$$

$$\ln(x_1x_2) + \ln(3x_2) = 5$$

$$3. \quad x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 4 = 0, \quad x_0 = (x_1 = 1.5, x_2 = 1.5)$$

$$x_1^3 + 7x_2 - 10 = 0$$

$$4. e^{2x_1 - x_2} - 30 = 0 \quad , x_0 = (x_1 = 2.1, x_2 = 1.1)$$

$$5x_1 + 3x_2 - 20 = 0$$

$$5. x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2 - 100 = 0 \quad , x_0 = (x_1 = 0.5, x_2 = 0.5)$$

$$\ln(x_1 + x_2) - 7x_1x_2 + 30 = 0$$

$$6. e^{x_1 + x_2 + x_3} - 7x_1^2 - 5x_2^2 = 0 \quad , x_0 = (x_1 = 3.5, x_2 = 4.2)$$

$$e^{2x_1 - x_2} + 5x_1 + 8x_2 - 100 = 0$$

$$7. \ln(x_1 - x_2 + x_3) - 2x_1x_2 = 0$$

$$, x_0 = (x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1)$$

$$x_1^5 + x_2^4 - 2x_1x_2 - 50 = 0$$

$$8. 3x_1^2 - 4x_2 - 2 = 0 \quad , x_0 = (x_1 = 1, x_2 = 0.5)$$

$$\ln(x_1) + 3x_2 - 4 = 0$$

$$9. x_1x_2 - 5x_1 + x_2 = 0 \quad , x_0 = (x_1 = 1.5, x_2 = 1.5)$$

$$4x_1^2 + 2x_2^2 - 5 = 0$$

الباب الثالث

مشاكل البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming (Non-LP) Problems

Introduction

(١-٣) مقدمة

(٢-٣) أمثلة لمشاكل البرمجة غير الخطية

Examples of (Non-LP) problems

(٣-٣) تصنيف نماذج البرمجة غير الخطية

Classification of (Non-LP) Models

Properties of Solution

(٤-٣) خصائص الحل

Exercises

(٥-٣) تمارينات

Introduction

(١-٣) مقدمة

كثير من المشاكل الفعلية يمكن صياغتها في شكل نماذج برمجة غير خطية. لذلك في هذا الباب سوف نتناول أمثله لبعض المشاكل التي يتم صياغتها في شكل نماذج برمجة غير خطية، حيث يتم تقسيم هذه النماذج الى نماذج غير مقيدة unconstrained models ونماذج مقيدة constrained models كما سوف نوضح في الفصل (٢-٣). وفي الفصلين (٣-٣)، (٤-٤) نقدم تصنيف لهذه النماذج وأهم خصائصها وبعض الطرق الممكن استخدامها لحلها وخصائص الحل أيضا هذا بالإضافة الى العديد من الأمثلة والتمرينات.

(٢-٣) أمثلة لمشاكل البرمجة غير الخطية

Examples of (Non-LP) Problems

مثال (١-٣): تقوم إحدى الشركات بإنتاج منتج معين، فإذا كانت الكمية المطلوبة تمثل دالة تسمى بدالة الطلب على المنتج $f(x)$ ، حيث x تشير إلى سعر بيع الوحدة (بالجنيه).

ومن بيانات السنوات السابقة قدرت إدارة الأحصاء دالة الطلب $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x) = x^2 - 70x + 1225$$

فإذا كان المطلوب تحديد السعر x الذي يجعل الكمية المطلوبة أقل ما يمكن.

في هذه الحالة يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة غير خطية غير مقيد على النحو التالي:

أوجد قيمة x التي تجعل

$$\text{Min. } f(x) = x^2 - 70x + 1225 \quad (3.1)$$

مثال (٢-٣): شركة تنتج بطاريات السيارات فإذا كان احتمال صلاحية البطارية دالة في عمر

$$p(t) = f(t) = e^{-0.25t}, \quad t > 0$$

حيث t تشير إلى عمر البطارية بالسنوات، تشير إلى احتمال صلاحية البطارية عند العمر t . فإذا كان المطلوب تحديد عمر البطارية التي يكون عندها الاحتمال $p(t)$ أكبر ما يمكن.

في هذه الحالة يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة غير خطية غير مقيد على النحو التالي:

$$\text{Max. } f(x) = e^{-0.25t}, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

مثال (٣-٣): تعلن إحدى شركات إنتاج نوع معين من المنتجات من منتجاتها، ووجدت الشركة

أن عدد الوحدات المباعة دالة في عدد الإعلانات عن المنتج في التليفزيون والراديو. فإذا قدرت

الشركة عدد الوحدات المباعة كدالة في عدد الإعلانات في التليفزيون x_1 ، وعدد الإعلانات في

الراديو x_2 . فإذا كان الإعلان الواحد في التليفزيون يكلف الشركة 50,000 جنيه وفي الراديو

10,000 جنيه وترغب الشركة في تحديد عدد الإعلانات السنوي في التليفزيون والراديو بحيث

يكون عدد الوحدات المباعة أكبر ما يمكن.

فإذا قدرت الشركة عدد الوحدات المباعة $f(x_1, x_2)$ كدالة في عدد الإعلانات السنوية في

التليفزيون والراديو على النحو التالي:

$$f(x_1, x_2) = 50,000 x_1 + 100,000 x_2 - 20x_1^2 - 30x_2^2$$

حيث تشير $f(x_1, x_2)$ لعدد الوحدات المباعة سنويا. كذلك المتاح في الميزانية السنوية للإعلانات $10(10)^6$ جنيه، كذلك ترغب الشركة أن يكون عدد الإعلانات في التليفزيون أكبر من عدد الإعلانات في الراديو والمطلوب تحديد x_1, x_2 بحيث تكون عدد الوحدات المباعة أكبر ما يمكن.

في هذه الحالة يمكن صياغة هذه المشكلة على النحو التالي:

أوجد x_1, x_2 التي تجعل

$$\text{Max. } f(x_1, x_2) = 50,000 x_1 + 100,000 x_2 - 20x_1^2 - 30x_2^2 \quad (3.3)$$

S.T.

$$50,000 x_1 + 10,000 x_2 \leq 10(10)^6 \quad (3.4)$$

$$x_1 > x_2 \quad (3.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3.6)$$

والنموذج أعلاه (3.6) – (3.3) يمثل نموذج برمجة غير خطية مقيدة بالقيود (3.6) – (3.4).

مثال (٤-٣): إذا كانت دالة المنفعة $f(x_1, x_2)$ utility function في إحدى القطاعات دالة في سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتج ونشير لها بالرمز x_1 وعدد ساعات التشغيل ونشير لها بالرمز x_2 على النحو التالي:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{2x_1+3x_2-5}$$

فإذا كان المطلوب إيجاد السعر x_1 وعدد ساعات التشغيل x_2 التي تجعل المنفعة أكبر ما يمكن، بحيث لا تقل سعر الوحدة عن 5 جنيهات وعدد ساعات التشغيل لا تزيد عن 100 ساعة.

في هذه الحالة يمكن صياغة هذه المشكلة على النحو التالي:

أوجد x_1, x_2 التي تجعل

$$\text{Max. } f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{2x_1+3x_2-5} \quad (3.7)$$

S.T.

$$x_1 \geq 5 \quad (3.8)$$

$$x_2 \leq 100 \quad (3.9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3.10)$$

من الأمثلة السابقة يتضح أنه يمكن تقسيم نماذج البرمجة غير الخطية الى نماذج غير مقيدة كما في المثال (١-٣) النموذج (3.1) وفي المثال (٢-٣) النموذج (3.2)، ونماذج مقيدة بمعنى دالة الهدف تخضع لعدة قيود كما في المثال (٣-٣) نموذج (3.3)-(3.6) وفي مثال (٤-٣) نموذج (3.7)-(3.10).

وفي الفصل التالي تقدم الصياغة العامة للنماذج غير المقيدة والنماذج المقيدة.

(٣-٣) تصنيف نماذج البرمجة غير الخطية

Classification of (Non-LP) Models

وبصفة عامة يمكن تصنيف نماذج البرمجة غير الخطية الى قسمين [5,8,20,17]:

القسم الأول: النماذج غير المقيدة Unconstrained Models

القسم الثاني: النماذج المقيدة Constrained Models

أولاً: النماذج غير المقيدة: النموذج عبارة عن دالة غير خطية $f(x)$ يكون المطلوب تحديد قيم x التي تجعل الدالة نهائية صغرى (أو عظمى).

فإذا فرضنا أن $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ تشير الى متجه المتغيرات القرارية، $f(x)$ دالة غير خطية في المتغيرات القرارية فيصبح النموذج على النحو التالي:
أوجد قيم X التي تجعل:

$$\text{Min (or Max) } z = f(x) \quad (3.11)$$

وعندما تكون الدالة $f(x)$ دالة غير خطية ومحدبة convex (أو مقعرة concave)، فإنه بحل النموذج يتم الحصول على الحل الأمثل المطلق global solution [29,33].

أما في الحالة عندما تكون الدالة $f(x)$ ليست مقعرة أو محدبة فإن معظم الحلول للنموذج (3.11) تكون حلول مثلى نسبية (local (or relative) optimum solution).

وتسمى طرق حل النماذج غير المقيدة بطرق الأمثلية غير المقيدة unconstrained optimization methods ويمكن تقسيم طرق حل هذه النماذج الى مجموعتين [29]:

المجموعة الأولى: تعتمد على المشتقات التفاضلية للدالة $f(x)$ مثل:

(١) طريقة الاتجاهات، (٢) طريقة نيوتن، (٣) طريقة الانحدار المترافق، (٤) بعض طرق البرمجة الهندسية ... الخ.

وسوف نتناول في الباب التالي الطريقة (١)، والطريقة (٢) بالتفصيل في الفصلين (٤-٥)، (٤-٦). أما بعض طرق البرمجة الهندسية فسوف نتناولهما في البابين ٧، ٨.

المجموعة الثانية: وهي الطرق المباشرة التي لا تعتمد على المشتقات للدالة $f(x)$ مثل [29,41].

(١) طريقة البحث المباشر، (٢) طريقة البحث أحادي المتغير، (٣) بعض طرق البرمجة الهندسية، ... الخ.

وفى الباب التالي سوف نتناول الطريقة (١)، (٢) فى الفصل (٤-٦) والطرق الهندسية تقدم فى الباب ٧، ٨.

ثانياً: النماذج المقيدة: النموذج المقيد هو عبارة عن دالة هدف يراد تعظيمها أو تصغيرها بحيث تخضع لعدد من القيود فى شكل متساويات أو متباينات. ويصاغ النموذج المقيد على النحو التالي:

$$\text{Min (or Max) } z = f(x) \quad (3.12)$$

$$\text{S.T. } g_i(x) = \text{or } \geq \text{or } \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.13)$$

حيث $f(x)$ دالة فى المتغيرات القرارية، $g_i(x)$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ دوال فى X أيضاً، ويكون النموذج نموذج برمجة غير خطية عندما يكون واحد على الأقل من $f(x)$ أو $g_i(x)$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ دالة غير خطية فى المتغيرات X .

وعندما تكون الدالة $f(x)$ دالة محدبة (أو مقعرة)، والدوال $g_i(x)$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ كذلك القيود (3.13) تمثل فئة محدبة فأن النموذج (3.13)، (3.12) نموذج محدب وبالتالي يتم الحصول على الحل الأمثل المطلق للنموذج [33, 34]. وفيما عدا ذلك يتم الحصول على الحل الأمثل النسبي.

ومما هو جدير بالذكر أنه فى كثير من الحالات يتم تحويل النماذج المقيدة الى نماذج غير مقيدة [33, 38] كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الباب الخامس.

ويمكن تقسيم طرق حل النماذج المقيدة الى مجموعتين أيضاً [29, 34]:

المجموعة الأولى: الطرق التي تعتمد على المشتقات التفاضلية مثل:

١- طريقة لاجرانج ٢- شروط كارش-كون-توكر KKT

وكثير من هذه الطرق يتم تحويل النموذج المقيد الى نموذج غير مقيد. وفى الباب الخامس سوف نتناول بالتفصيل بعض هذه الطرق.

المجموعة الثانية: الطرق التي لا تعتمد على المشتقات التفاضلية [18, 21, 33] مثل:

١- طريقة نيوتن رافسون ، ٢- طريقة المستوى القاطع

٣-

وفي الباب الخامس سوف نتناول بالتفصيل الطرق (١)، (٢) في الفصول (٥-٥)، (٥-٦).

Properties of Solution**(٤-٣) خصائص الحل**

فى الفصل السابق تناولنا أنواع نماذج البرمجة غير الخطية وذكر بعض طرق الحل. وكما ذكرنا سابقا فإن حل النموذج يعنى تحديد قيم المتغيرات القرارية X التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن (أو أقل ما يمكن).

وتتوقف الطريقة التي تستخدم لحل النموذج على خصائصها. كذلك يتوقف نوع الحل الذي يتم الوصول اليه على الطريقة المستخدمة.

وعند استخدام الطرق التحليلية analytical methods لحل النماذج كما فى بعض الحالات التي تستخدم فيها بعض الطرق التي تعتمد على المشتقات التفاضلية فأنا نحصل على حلول صحيحة exact solutions [19, 27, 33].

ولكن فى كثير من الحالات التي تستخدم فيها الطرق التي لا تعتمد على المشتقات التفاضلية تستخدم فيها الطرق العددية numerical methods، ويتم الحصول على حلول تقريبية approximate solutions [32].

وتبنى الطرق العددية على نظريات التقارب Theorems of Convergence، وفى بعض الحالات قد لا يتم حدوث تقارب عند بعض النقط المبدئية initial points [43] كما سوف نوضح ذلك فى البابين التاليين.

وقد أدى التطور الكبير فى تصميم وتشغيل برامج الحاسب ووجود حزم البرامج الجاهزة الى حل النماذج غير الخطية على نطاق واسع باستخدام الطرق العددية وأجراء اختبارات التقارب بالنسبة للمشاكل المعقدة وذات الحجم الكبير [37, 34].

Exercises

(٥-٣) تمرينات

[١] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة.

- ١- يمكن تحويل النموذج غير الخطي المقيد الى نموذج غير مقيد.
- ٢- دائما حل النموذج المحدب يعطى حل أمثل مطلق.
- ٣- دائما حل النموذج المقيد يعطى حل أمثل نسبي.
- ٤- دائما حل النموذج غير المقيد يعطى حل أمثل نسبي.
- ٥- النموذج المحدب دائما نموذج خطي.
- ٦- فى النموذج المقيد دائما فئة القيود فئة محدبة.
- ٧- يمكن تحويل النموذج غير المقيد الى نموذج مقيد.
- ٨- جميع طرق حل النماذج غير الخطية تعتمد على المشتقات التفاضلية.
- ٩- تستخدم شروط (KKT) فى حالة وجود قيود فى شكل متباينات.
- ١٠- تستخدم طريقة لاجرانج فى حالة وجود قيود فى شكل متساويات.

[٢] حدد أي الفئات التالية فئة محدبة ووضح ذلك بيانيا.

$$(i) \begin{aligned} 5x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(ii) \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

[٣] أختبر الدوال التالية من حيث التحدب أو التقعير:

$$(i) F(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$$

$$(ii) F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$(iii) F(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2 + 1)$$

$$(iv) F(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$(v) F(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{\sum_i x_i}$$

$$(vi) F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(\sum_{i=1}^n x_i)$$

الباب الرابع

طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة

Solution Methods of Unconstrained Nonlinear Programming Models

Introduction	(١-٤) المقدمة
Definitions and Theorems	(٢-٤) تعريفات ونظريات
	(٣-٤) نماذج البرمجة غير المقيدة
Unconstrained Programming Models	
Optimization Conditions	(٤-٤) شروط الأمثلية
Differentiable Methods	(٥-٤) طرق الحل المعتمدة على المشتقات
Directions Method	(١-٥-٤) طريقة الاتجاهات
Newton-Raphson Method	(٢-٥-٤) طريقة نيوتن رافسون
	(٦-٤) طرق الحل المباشرة (لا تعتمد على المشتقات التفاضلية)
Direct Methods (do not require the derivatives)	
Random Jumping Method	(١-٦-٤) طريقة القفز العشوائي
Univariate Search Method	(٢-٦-٤) طريقة البحث أحادي المتغير
Exercises	(٧-٤) تمارينات

Introduction

(١-٤) المقدمة

فى الباب السابق تناولنا بشيء من التفصيل مشاكل البرمجة غير الخطية، وكيفية بناء (صياغة) نماذج البرمجة غير الخطية المناسبة وأنواع هذه النماذج وخصائصها. وفى هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية غير المقيدة. ويمكن تقسيم هذه الطرق الى:

قسم (١): طرق تحليلية analytical methods تعطى حلول صحيحة exact solutions تعتمد على شروط الأمثلية وتستخدم عندما تكون معادلات الاستقرار stationary equations ممهدة smoothed equations يمكن حلها تحليليا، وسوف نتناول ذلك فى الفصل (٤-٤). ولكن فى معظم الحالات يكون من الصعب، بل من غير الممكن حل معادلات الاستقرار غير الممهدة تحليليا لذلك نلجأ لطرق الحل العددية (الحلول ال approximate methods). وتنقسم الطرق التقريبية الى قسمين:

قسم (٢): طرق عددية تقريبية لتعطى حلول تعتمد على المشتقات التفاضلية وهي ما سوف نتناوله فى الفصل (٥-٤).

قسم (٣): وطرق عددية أيضا تعطى حلول تقريبية أيضا، ولكن لا تعتمد على المشتقات وتسمى بالطرق المباشرة. وسوف نتناولها فى الفصل (٦-٤).

Definitions and Theorems

(٢-٤) تعريفات ونظريات

تعريف (١-٤): التوليفة المحدبة Convex Combination [1, 39]

إذا فرضنا وجود عدد k من النقط المختلفة في n من المحاور n -dimensions، وتشير $X^{(i)}$ الى النقطة رقم (i) حيث:

$$X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}) \quad , i = 1, 2, 3, \dots, k$$

إذا فرضنا النقطة X^* ($X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$) بحيث:

$$X^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i X^{(i)} \quad , 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad , \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad (4.1)$$

فإن النقطة X^* تسمى توليفة خطية محدبة linear convex combination.

مثال (١-٤): إذا فرضنا النقط التالية:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , X^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , X^{(3)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كذلك المعلمة λ parameter بحيث:

$$\lambda_1 = 0.2 \quad , \lambda_2 = 0.5 \quad , \lambda_3 = 0.3$$

فإن النقطة $X^{(4)}$ حيث $X^{(4)}$ على النحو التالي:

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} X_1^{(4)} \\ X_2^{(4)} \\ X_3^{(4)} \end{bmatrix} = 0.2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.3 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1.2 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

تمثل توليفة خطية في النقط $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$.

تعريف (٢-٤): الفئة المحدبة Convex Set [1, 39]

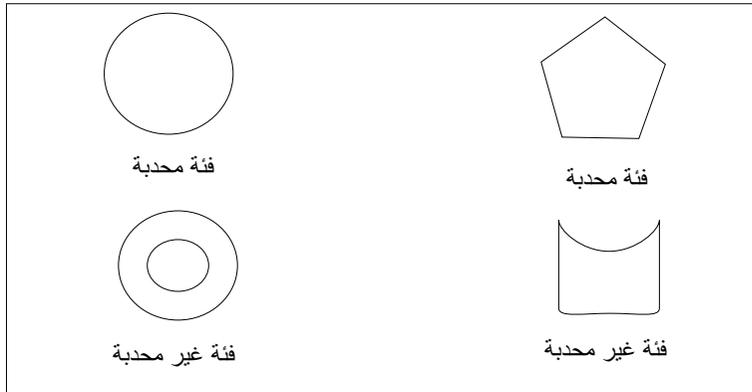
إذا كانت الفئة C معرفة في n محور فإنه يقال إن الفئة C فئة محدبة إذا كانت كل نقطة تقع على الخط الواصل بين أي نقطتين مختلفتين في الفئة C تقع في الفئة C أيضا. ويمكن تعريف ذلك رياضيا على النحو التالي:

إذا اعتبرنا النقطة X^* توليفة خطية محدبة، فإن:

$$X^* = \lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)} \quad , 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad (4.2)$$

حيث $X^{(1)}, X^{(2)} \in C$ فإن $X^* \in C$ أيضا. والشكل التالي يوضح ذلك.

شكل (١-٤): يوضح بعض الفئات المحدبة وغير المحدبة



نظرية (١-٤): إذا فرضنا أن C_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ عدد من الفئات المحدبة convex sets، فإن الفئة C بحيث C تمثل فئة التقاطع للفئات C_i

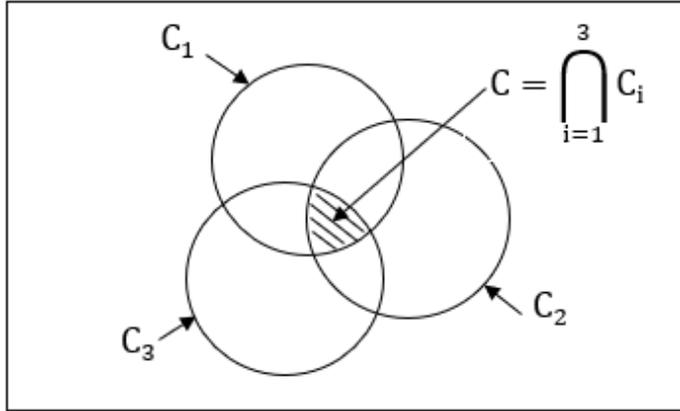
$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (4.3)$$

فئة محدبة أيضا.

الاثبات: انظر المرجع رقم [18,10]

مثال (٢-٤): أعتبر الفئات المحدبة C_1, C_2, C_3 والشكل التالي يوضح فئة التقاطع C وهي فئة محدبة ايضاً.

شكل (٢-٤): يوضح فئة التقاطع المحدبة C



تعريف (٣-٤): النقط العظمى والصغرى **Maximum and Minimum points**

[1, 26]

تسمى النقطة الطرفية X_0 extreme point نقطة نهاية عظمى إذا كان:

$$f(X_0 + h) \leq f(X_0) \quad (4.4)$$

بحيث $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]$ والقيمة المطلقة ل h_j بمعنى $|h_j|$ صغيرة جداً لجميع عناصر $h_j, j = 1, 2, \dots, n$.

كذلك تسمى النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى، إذا كان:

$$f(X_0 + h) \geq f(X_0) \quad (4.5)$$

والنقط الطرفية العظمى أو الصغرى قد تكون نقط طرفية نسبية (local (relative) points، أي بالنسبة للنقط المجاورة لها من جهة اليمين أو من جهة اليسار، وقد تكون نقط طرفية مطلقة (global (absolute) points، إذا كانت بالنسبة للفترة المعرفة فيها الدالة $f(X)$.

فإذا اعتبرنا k هي الفئة التي تشتمل جميع النقط الطرفية النسبية العظمى، والفئة k' تشتمل جميع النقط الطرفية النسبية الصغرى.

وتعتبر النقطة $(X_j, f(X_j))$ نقطة نهاية عظمى مطلقة إذا كان:

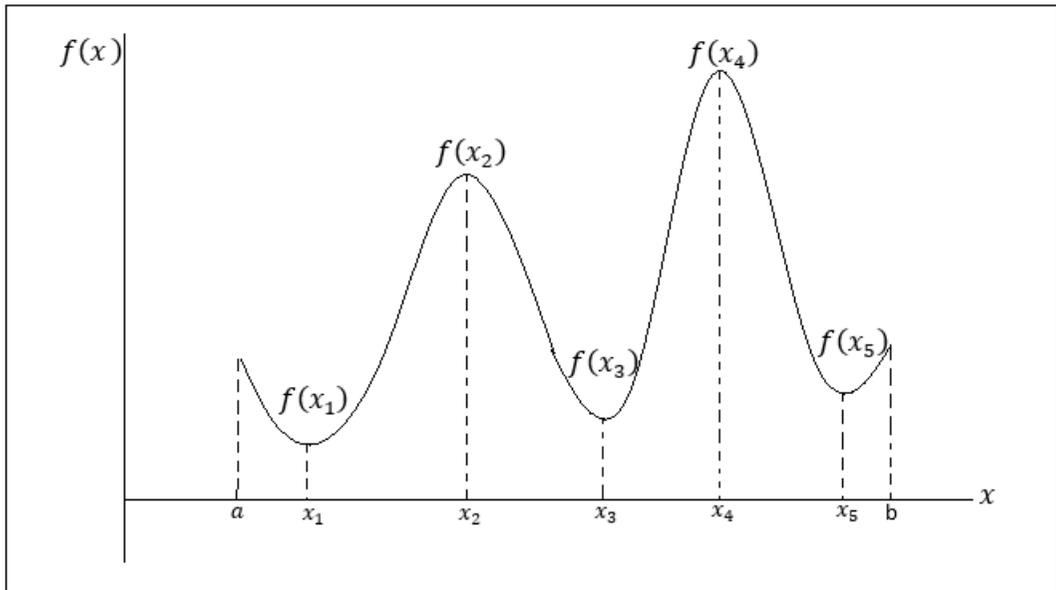
$$f(X_j) = \text{Max. } \{ f(X_j), \text{ for all } X_j \in k \} \quad (4.6)$$

كذلك النقطة $(X_c, f(X_c))$ نقطة نهاية صغرى مطلقة إذا كان:

$$f(X_c) = \text{Min. } \{ f(X_c), \text{ for all } X_c \in k' \} \quad (4.7)$$

مثال (٣-٤): إذا اعتبرنا الدالة $f(X)$ دالة في متغير واحد X كما هو موضح بالشكل التالي:

شكل (٣-٤): يوضح النقاط الطرفية للدالة $f(X)$ النسبية والمطلقة



من الشكل، نجد أنه خلال الفترة $[a, b]$ فإن:

$$k = \{(X_2, f(X_2)), (X_4, f(X_4))\}$$

$$k' = \{(X_1, f(X_1)), (X_3, f(X_3)), (X_5, f(X_5))\}$$

من تعريف النقط العظمى والصغرى المطلقة أعلاه نجد أن النقطة $(X_4, f(X_4))$ نهاية عظمى مطلقة حيث:

$$f(X_4) = \text{Max. } \{ f(X_2), f(X_4) \}$$

كذلك نجد أن النقطة $(X_1, f(X_1))$ نهاية صغرى مطلقة حيث:

$$f(X_1) = \text{Min.} \{f(X_1), f(X_3), f(X_4)\}$$

تعريف (٤-٤): الدوال المقعرة والمحدبة Concave and Convex Functions

إذا اعتبرنا أن C فئة محدبة convex set والدالة $f(X)$ دالة معرفة على الفئة C فإنه يقال ان الدالة $f(X)$ دالة مقعرة إذا كانت النقطتين المختلفتين $X^{(1)}, X^{(2)} \in C$ ، بحيث [33]:

$$f(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) \leq \lambda f(X^{(1)}) + (1 - \lambda) f(X^{(2)}),$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4.8)$$

كذلك يقال إن الدالة $t(X)$ دالة محدبة convex إذا كان:

$$t(X) = -f(X) \quad (4.9)$$

حيث ان الدالة $f(X)$ دالة مقعرة.

مثال (٤-٤): حدد نوع كل دالة من الدوال التالية من حيث التحذب convex والتقعير concave عند النقط المناظرة:

1) $F(X) = 10 X^2 - 2$, $X^{(1)} = 7$, $X^{(2)} = 10$, $\lambda = 0.2$

2) $F(X_1, X_2) = 5X_1 + 2X_2$,

$$X^{(1)} = [2, 11]^T, \quad X^{(2)} = [0, 3]^T, \quad \lambda = 0.3$$

3) $F(X_1, X_2) = 10 - X_1^2 - 5X_2^2$,

$$X^{(1)} = [0, 0]^T, \quad X^{(2)} = [1, 2]^T, \quad \lambda = 0.4$$

الحل:

$$\begin{aligned} 1) F(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) &= F(0.2 (7) + 0.8 (10)) \\ &= F(9.4) = 881.6 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lambda F(X^{(1)}) + (1 - \lambda) F(X^{(2)}) &= 0.2(488) + 0.8(998) \\ &= 896 \end{aligned} \quad (2)$$

من (١)، (٢) يتضح ان الدالة $F(X)$ دالة محدبة.

$$2) F(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) = F\left(0.3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.7 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2.1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 0.6 \\ 2.4 \end{bmatrix}\right) = 7.8 \quad (3)$$

$$\lambda F(X^{(1)}) + (1 - \lambda) F(X^{(2)}) = 0.3(12) + 0.7(6) = 7.8 \quad (4)$$

من (3)، (4) يتضح ان الدالة $F(X_1, X_2)$ دالة محدبة.

3)

أولاً:

اختبار التحذب

$$\begin{aligned} F(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) &= F\left(0.4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}\right) = 2.44 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda F(X^{(1)}) + (1 - \lambda) F(X^{(2)}) &= 0.4(10) + 0.6(-11) \\ &= -2.6 \quad (6) \end{aligned}$$

من (5)، (6) نجد ان الدالة $f(X_1, X_2)$ دالة غير محدبة

ثانياً: اختبار تقعر الدالة

نوجد الدالة $K(X_1, X_2)$ حيث $K(X_1, X_2) = -F(X_1, X_2)$

بالتالي فإن:

$$K(X_1, X_2) = -10 + X_1^2 + 5X_2^2 \quad (7)$$

ثم نختبر تحذب الدالة $K(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} K(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda) X^{(2)}) &= K\left(0.4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = K\left(\begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}\right) \\ &= -10 + (0.6)^2 + 5(1.2)^2 = -2.44 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\lambda K(X^{(1)}) + (1 - \lambda) K(X^{(2)}) = 0.4(-10) + 0.6 = 11 \quad (9)$$

من (8)، (9) نجد ان الدالة $K(X_1, X_2)$ دالة محدبة، وبالتالي فإن الدالة $F(X_1, X_2)$ دالة مقعرة.

نظرية (٢-٤): إذا اعتبرنا الدوال $f_i(X)$ دوال محدبة $i = 1, 2, \dots, n$ معرفة على الفئة المحدبة C فإن الدالة $F(X)$ بحيث:

$$F(X) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(X) \quad , \quad a_i \geq 0 \quad (4.10)$$

دالة محدبة ايضا.

الأثبات: مرجع رقم [10].

نظرية (٣-٤): إذا اعتبرنا الدوال $k_j(X)$ دوال مقعرة $j = 1, 2, \dots, m$ معرفة على الفئة المحدبة C فإن الدالة $K(X)$ بحيث:

$$K(X) = \sum_{j=1}^m b_j k_j(X) \quad , \quad b_j \geq 0 \quad (4.11)$$

دالة مقعرة أيضا.

الأثبات: مرجع [10] صفحة.

وتوجد بعض الخصائص للدالة المقعرة characterizations of concavity، وفي النظريتين التاليتين بعض أهم هذه الخصائص.

نظرية (٤-٤): إذا افترضنا ان $f(X)$ دالة في المتغير X وقابلة للتفاضل في الفترة I فإن الدالة $f(X)$ تكون دالة محدبة convex function في الفترة I إذا وإذا فقط:

$$f(X) \geq f(Y) + f'(Y) (X - Y) \quad , \quad X, Y \in I \quad (4.12)$$

الأثبات: أنظر المرجع رقم [21]

ملحوظة (١): يلاحظ أن قيمة تفاضل الدالة $f'(Y)$ غير متناقصة -monotonically non-decreasing .

نظرية (٥-٤): إذا افترضنا ان $f(X)$ دالة في المتغير X وقابلة للتفاضل في الفترة I فإن الدالة $f(X)$ تكون دالة مقعرة concave function في الفترة I إذا وإذا فقط:

$$f(X) \leq f(Y) + f'(Y) (X - Y) \quad , \quad X, Y \in I \quad (4.13)$$

الأثبات: أنظر المرجع رقم [21]

ملحوظة (٢): أيضا يلاحظ أن قيمة تفاضل الدالة $f'(Y)$ غير متزايد -monotonically non-increasing.

تعريف (٥-٤): إذا فرضنا أن الدالة $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ دالة متصلة وقابلة للتفاضل من الترتيب الأول والثاني، فإن مصفوفة المشتقات من الترتيب الثاني ونرمز لها بالرمز H :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{n,n} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right], i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

حيث H مصفوفة متماثلة من الترتيب $(n \times n)$ وتسمى بالمصفوفة الهيسينية Hessian matrix نسبة الى عالم الرياضيات الحسن ابن الهيثم.

تعريف (٦-٤): المصفوفة الهيسينية عند النقطة x_0 تسمى:

١. مصفوفة تامة الإيجاب positive definite إذا كانت جميع المحددات على القطر الرئيسي للمصفوفة principal minor determinants موجبة.
٢. مصفوفة تامة السالبة negative definite إذا كانت المحددات على القطر الرئيسي أشارتها $(-1)^i$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ، وتشير i الى ترتيب المحدد.
٣. خلاف ١، ٢ تكون المصفوفة $H|_{x_0}$ غير محددة indefinite.

مثال (٥-٤): حدد نوع المصفوفة الهيسينية $H|_{x_0}$ التالية:

$$1) H_1|_{x_0} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

نجد أن أشارات المحددات على القطر الرئيسي على النحو التالي:

$$M_1 = |-7| = -7 \quad \rightarrow \quad -$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +7 \quad \rightarrow \quad +$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow -$$

وبما أن قيم المحددات لها الأشارات $(-, +, -)$ وفقا للتعريف في (٢)

أذن المصفوفة $H_1|_{x_0}$ تامة السالبة.

$$2) H_2|_{x_0} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = |3| = 3 \rightarrow +$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow +$$

أذن المصفوفة $H_2|_{x_0}$ تامة الأيجاب.

$$3) H_3|_{x_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = |-1| = -1 \rightarrow -$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow -$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +2 \rightarrow +$$

أذن المصفوفة $H_3|_{x_0}$ غير محددة.

نظرية (٦-٤): إذا فرضنا أن الدالة $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ دالة قابلة للتفاضل، والمصفوفة

الهيسينية لها H ، وإذا فرضنا أن X^* نقطة أستقرار للدالة $f(X)$ فإن:

١- النقطة X^* تكون لها نهاية عظمى إذا كانت $H|_{x^*}$ تامة السالبة.

٢- النقطة X^* تكون لها نهاية صغرى إذا كانت $H|_{x^*}$ تامة الأيجاب.

٣- النقطة X^* تكون نقطة أنقلاب إذا كانت $H|_{x^*}$ غير محددة.

الأثبت: أنظر المرجع رقم [41]

تمرين (١-٤)

[١] حدد انواع كل دالة من الدوال التالية من حيث التحديب أو التقعير أو غير ذلك

1) $F(X) = X^2$, $X > 0$

2) $F(X) = X^4 + 10$, $X \in R$

3) $F(X) = e^X$, $X > 0$

4) $F(X) = e^{-2X}$, $X > 0$

[٢] إذا فرضنا النقاط التالية

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, X^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أوجد نقطة، نقطتين تمثل كل واحد توليفة خطية في $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$.

[٣] أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدوال التالية وحدد أي النهايات نسبية وأيها مطلقة

1) $F(X) = X^2 - 25$

2) $F(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$

3) $F(X) = X^4 - 5X^2 + 4$

[٤] أوجد المصفوفة الهيسينية H لكل دالة من الدوال التالية ثم حدد نوعها (تامة الإيجاب، تامة

السالبة، غير معرفة) عند نقط الاستقرار

1) $F(X) = X_1^2 - 5X_2 + 10X_1X_2$

2) $F(X) = X_1^3 - 2X_2^2 + 5X_1 + 2X_2 + 100$

[٥] حدد نقط النهايات العظمى والصغرى للدوال التالية:

1) $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 10$

2) $F(x_1, x_2) = -9x_1^2 - 4x_2^2 + 12x_1x_2 + 25$

3) $F(x_1, x_2) = x_1^5 + x_2^3 - 2x_1x_2 + 10$

4) $F(x_1, x_2) = 10x_1^3 + 2x_2^2 - 5x_1x_2$

Unconstrained Programming Models نماذج البرمجة غير المقيدة (٣-٤)

وكما ذكرنا فى الباب السابق أن نماذج البرمجة غير المقيدة تأخذ الصياغة التالية:

$$\text{Min. (or Max.) } Z = f(X) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.14)$$

حيث X متجه فى المتغيرات X_j حيث $j = 1, 2, \dots, n$.

وحل النموذج يعنى تحديد النقط الطرفية للدالة $f(X)$ التى تكون عندها الدالة $f(X)$ نهاية صغرى (أو عظمى).

وللحصول على النقط الصغرى (أو العظمى) لابد من توافر شروط معينة تسمى بالشروط الضرورية والكافية. لذلك سوف نقدم هذه الشروط بالتفصيل فى الفصل التالى.

ويمكن عن طريق الشروط الضرورية والكافية تحديد النقط الصغرى (أو العظمى) فى حالة المشاكل السلسة (الممهدة) smoothed problems ولكن فى حالة المشاكل غير السلسة وذات الحجم الكبير أيضا أو تكون الدالة $f(X)$ دالة غير متصلة، فى هذه الحالات نحتاج الى طرق أخرى للحصول على النقط الصغرى (أو العظمى). لذلك قدمت عديد من الطرق لحل هذه النماذج. ويمكن تقسيم هذه الطرق الى قسمين:

القسم الأول: طرق تعتمد على المشتقات

القسم الثانى: طرق لا تعتمد على المشتقات وتسمى بالطرق المباشرة ايضا

القسم الأول: وتوجد طرق متعددة تعتمد على المشتقات التفاضلية مثل [29, 33]:

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1 . طريقة الاتجاهات | Directions method |
| 2 . طريقة نيوتن رافسون | Newton-Raphson Method |
| 3 . طرق البرمجة الهندسية | Geometric programming methods |
| 4 . طريقة الانحدار المترافق | Conjugate gradient method |

وفى الفصل (٤-٥) سوف نقدم بالتفصيل طريقة الاتجاهات وطريقة نيوتن رافسون.

القسم الثانى: وتوجد طرق متعددة أيضا تعتمد على البحث المباشر ولا تعتمد على المشتقات التفاضلية للدالة $f(X)$ مثل [12, 18, 29]:

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1 . طرق البحث العشوائى | Random search methods |
|------------------------|-----------------------|

٢. طرق البحث أحادية المتغير Univariate methods
٣. طرق البحث عن النمط Pattern search methods

وفى الفصل (٤-٦) سوف نقدم طريقة البحث العشوائي وطريقة البحث عن النمط. ويتوقف اختيار طريقة حل النموذج على خصائص النموذج. كما سوف نوضح ذلك فى الفصول التالية.

شكل (٤-٤): يوضح تقسيم بعض طرق حل النماذج غير المقيدة وفقا لتوافر المشتقات

طرق حل النماذج غير المقيدة

القسم الثانى

طرق لا تعتمد على التفاضل

١- طرق البحث العشوائي

٢- طرق البحث احادية المتغير

٣- طرق البحث عن النمط

:

:

القسم الأول

طرق تعتمد على التفاضل

١- طريقة الاتجاهات

٢- طريقة نيوتن

٣- طرق البرمجة الهندسية

٤- طريقة الانحدار المترافق

:

Optimization Conditions**(٤-٤) شروط الأمثلية**

وكما ذكرنا سابقا أن دراسة الطرق المختلفة لحل نموذج البرمجة غير المقيدة أو المقيدة يتطلب أولا عرض شروط الأمثلية الضرورية والكافية للحصول على نقط الاستقرار stationary points (نقط الاستقرار هي النقط الطرفية الصغرى والعظمى والانقلاب).

وفيما يلي نقدم النظريات التي تعطى الشروط الضرورية necessary conditions والشروط الكافية sufficient conditions التي يجب توافرها في النقط الطرفية للدالة $f(X)$.

نظرية (٧-٤): الشرط الضروري لتكون النقطة X^* نقطة أستقرار (عظمى، صغرى، أنقلاب) أن يكون

$$\nabla f(X^*) = \left[\frac{\partial f(X)}{\partial X} \right]_{X^*} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.15)$$

الاثبات: انظر المرجع [33,37].

نظرية (٨-٤): الشروط الكافية لتكون النقطة X^* نقطة الأستقرار:

١. نهاية صغرى إذا كانت المصفوفة الهيسينية $H|_{X^*}$ مصفوفة تامة الأيجاب positive definite
٢. نهاية عظمى إذا كانت المصفوفة الهيسينية $H|_{X^*}$ مصفوفة تامة السالبة negative definite
٣. نقطة انقلاب inflection point إذا كانت المصفوفة الهيسينية $H|_{X^*}$ مصفوفة غير معرفة indefinite.

الاثبات: انظر المرجع [33].

وباستخدام الشروط الضرورية والكافية يمكن حل نماذج للمشاكل الممهده في الخطوات التالية:

خوارزم (١-٤): ١. أيجاد مشتقات الدالة $f(X)$ ونشير لها بالرمز $\nabla f(X)$

٢. مساواة المشتقات بالصفر أي تحديد المعادلات

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.16)$$

ويحل نظام المعادلات (4.16) نحصل على نقطة أو أكثر من نقط الاستقرار $X^{*(j)}$ ، حيث $X^{*(j)}$ تشير الى نقطة الحل الأمثل (نسبي او مطلق) رقم (j).

٣. أيجاد المصفوفة الهيسينية H.

٤. التعويض في H عند كل نقطة $X^{*(j)}$ وتحديد $H|_{X^{*(j)}}$

٥. اختبار $H|_{X^{*(j)}}$ عند كل نقطة $X^{*(j)}$ وفقا للشروط الكافية لتحديد نوع نقطة الاستقرار $X^{*(j)}$.

مثال (٤-٦): أعتبر مشكلة البرمجة على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = f(X) = 10X_1 + 12X_2 + 2X_2X_3 - 5X_1^2 - 2X_2^2 - 3X_3^2$$

الحل: ١- اوجد مشتقات الدالة $f(X)$ تم مساواتها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 10 - 10X_1 = 0 \rightarrow X_1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = -4X_2 + 2X_3 = 0 \rightarrow X_2 = \frac{1}{2}X_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = 12 - 6X_3 + 2X_2 = 0 \rightarrow 12 - 6X_3 + X_3 = 0$$

$$X_3 = \frac{12}{5}, X_2 = \frac{6}{5}$$

٢- وبالتالي توجد نقطة طرفية واحدة هي النقطة X^* حيث

$$X^* = \left(X_1^* = 1, X_2^* = \frac{6}{5}, X_3^* = \frac{12}{5}, Z^* = 2.36 \right)$$

$$H = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow M_1 = |-10| = -10 \rightarrow - \quad -3$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 40 \rightarrow +, M_3 = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -200 \rightarrow -$$

وبالتالي فإن المصفوفة $H|_{X^*}$ مصفوفة تامة السالبة، إذن النقطة

$$X^* = \left(X_1 = 1, X_2 = \frac{6}{5}, X_3 = \frac{12}{5}, Z = 2.36 \right)$$

نقطة نهاية عظمى.

ولكن مما هو جدير بالذكر أن معظم المشاكل وبصفة خاصة الاقتصادية والاجتماعية تكون معادلات الاستقرار $\nabla f(X) = 0$ غير خطية يصعب حلها وبصفة خاصة للمشاكل ذات الحجم الكبير للحصول على نقاط الأستقرار بالأضافة أنه قد توجد دوال $f(X)$ تكون غير متصلة وبالتالي لا يمكن الاعتماد على طريقة المشتقات المباشرة المذكورة أعلاه.

لذلك قدمت طرق تقريبية متعددة للحصول على القيم المثلى التقريبية بطرق لا تعتمد على المشتقات.

تمرين (٢-٤)

[١] أوجد

- 1) Max. $Z = -5X_1^2 - 2X_2^2 + 100$
- 2) Max. $Z = 30 - 4X_1^3 - 3X_2^3 + 24X_1 + 18X_2$
- 3) Max. $Z = 50 - X_1^4 - 2X_2^3 + 16X_1 + 24X_2$

[٢] أوجد

- 1) Max. $Z = 100 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 4X_1X_2 - 8X_2X_3 - 6X_1X_3$
- 2) Max. $Z = X_1^3 + X_2^3 - 9X_1 - 18X_2$
- 3) Max. $Z = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2$
- 4) Max. $Z = e^{2X_1 - X_2} + X_1 - X_2$

[٣] أوجد

- 1) Min. $Z = e^{-(X_1 - X_2)} + X_1^2 + X_2^2$
- 2) Min. $Z = X_1^3 + 2X_2^3 - 6X_1X_2 + 10$

Differentiable Methods**(٥-٤) طرق الحل المعتمدة على المشتقات**

في الفصل (٣-٤) قسمنا طرق حل النماذج غير الخطية غير المقيدة التقريبية الى قسمين: القسم الأول يعتمد على المشتقات التفاضلية، والقسم الثاني لا يعتمد على المشتقات التفاضلية [33, 32]. وفي هذا الفصل سوف نتناول القسم الأول وبالتحديد نختر من الطرق بالقسم الأول طريقتي:

١. طريقة الاتجاهات

٢. طريقة نيوتن رافسون

وكما ذكرنا سابقا أن هذه الطرق التقريبية تستخدم عندما تكون النماذج غير خطية غير ممهدة (غير سلسلة) بالإضافة الى أن التطور الكبير في الحاسبات ووجود حزم البرامج الجاهزة يمكن باستخدامها إجراء عدد كبير من التكرارات iterations في وقت قصير مكن من استخدام الطرق التقريبية على نطاق واسع والحصول على حلول تقريبية approximate solutions جيدة أو أقرب ما يمكن من الحلول الصحيحة exact solutions.

وتعتمد الطرق التقريبية التي تعتمد على المشتقات على نظريات التقارب convergent theorems في الحصول على حلول تقريبية لنقط الاستقرار [34, 33].

Directions method (١-٥-٤) طريقة الاتجاهات

وتسمى هذه الطريقة أيضا بطريقة الصعود (أو الهبوط) شديد الانحدار

.Steepest Ascent (or descent) method

وتعطي هذه الطريقة حلول تقريبية وفي حالة النماذج الممهدة (السلسلة) تعطي حلول صحيحة exact solutions.

نظرية (٩-٤): إذا فرضنا الدالة المتصلة $f(X)$ والقابلة للتفاضل، ومتجه الانحدار $(\nabla f(X))$ gradient vector يمثل الاتجاه direction للانحدار الشديد.

الاثبات: انظر المرجع رقم [29].

وتعتمد الطريقة على الانتقال من النقطة X_k الى نقطة أفضل منها X_{k+1} على العلاقة التالية:

(١) فى حالة التعظيم

$$X_{k+1} = X_k + \lambda_k^* \nabla f(X_k) , \quad \lambda_k^* \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.17)$$

حيث k رقم التكرار، n أقصى عدد من التكرارات الممكنة حيث X_0 نقطة مبدئية initial point افتراضية.

(٢) فى حالة التصغير

$$X_{k+1} = X_k - \tau_k^* \nabla f(X_k) , \quad \tau_k^* > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.18)$$

والدالة $f(X_k + \lambda_k \nabla f(X_k))$ تمثل دالة فى متغير واحد λ_k وبإيجاد قيمة λ_k^* ولتكن λ_k^* التي تجعل الدالة $f(X_k + \lambda_k \nabla f(X_k))$ نهاية عظمى. بالمثل يمكن إيجاد النهاية الصغرى لدالة $f(X_k - \tau_k \nabla f(X_k))$ كدالة فى مجهول واحد τ_k والحصول على τ_k^* لجميع قيم $k=1, 2, \dots, n$ ، تجعل الدالة $f(X_k - \tau_k \nabla f(X_k))$ نهاية صغرى وسوف نوضح ذلك بالتفصيل فى المثال التالي.

وتكون النقطة X_{k+1} نقطة نهاية عظمى (أو صغرى) إذا كان

$$|\delta_k| = |X_{k+1} - X_k| \leq \epsilon \quad (4.19)$$

حيث ϵ تمثل متجه الخطأ المسموح به وهو يؤل الى الصفر $0 \rightarrow \epsilon$ بحيث يتم افتراضه مسبقاً. وفى حالة إذا كان

$$|\delta_k| > \epsilon \quad (4.20)$$

فأننا نفرض ان $k = k + 1$ ونكرر الخطوات ويمكن تلخيص خطوات الحل فى الخوارزم التالي.

خوارزم (٢-٤)

الخطوة (١): ١. افتراض نقطة مبدئية مناسبة X_0 وأفتراض مستوى خطأ ϵ .

إذا اعتبرنا (i) تشير الى التكرار رقم i (أو نقطة الحل رقم i).

٢. أحسب المتجه $\nabla f(X)$ ثم أوجد $\nabla f(X_i)$

الخطوة (٢): ١. أوجد النقطة $X_i + \lambda_i \nabla f(X_i)$ ثم أوجد الدالة $f(X_i + \lambda_i \nabla f(X_i))$ كدالة في λ_i وذلك

في حالة التعظيم أو أيجاد النقطة $X_i - \tau_i \nabla f(X_i)$ ثم أيجاد الدالة $f(X_i - \tau_i \nabla f(X_i))$ في حالة التصغير.

٢. أيجاد النهاية العظمى للدالة $f(X_i + \lambda_i \nabla f(X_i))$ وتحديد λ_i^* أو أيجاد النهاية الصغرى للدالة $f(X_i - \tau_i \nabla f(X_i))$ وتحديد τ_i^* .

الخطوة (٣): ١. ضع $i = 0$

٢. في حالة النهاية العظمى نوجد

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* \nabla f(X_i)$$

أو في حالة النهاية الصغرى نوجد

$$X_{i+1} = X_i - \tau_i^* \nabla f(X_i)$$

الخطوة (٤): نوجد $|\delta_i|$ حيث

$$|\delta_i| = |X_{i+1} - X_i|$$

أ- فإذا كانت: $|\delta_i| \leq \epsilon$

ينتهي الحل وتصبح النقطة X_{i+1} هي نقطة الحل وتكون النهاية العظمى (أو الصغرى) للدالة $f(X_{i+1})$.

ب- وإذا كان $|\delta_i| > \epsilon$ ، نكمل التكرارات ونضع $i = i + 1$ ونكرر الخطوات 2,3,4.

ورغم بساطة تطبيق هذه الطريقة كما سوف نوضح في المثالين التاليين، إلا أنه تتطلب اختيار نقطة حل مبدئية (X_0) مناسبة، فإذا لم تكن مناسبة فإنه يمكن أن تفشل الطريقة في التقارب للحل.

مثال (٤-٨): باستخدام طريقة الصعود شديد الانحدار، أوجد النهاية العظمى للدالة $f(X_1, X_2)$ حيث:

$$f(X_1, X_2) = 10 - X_1^2 - X_2^2 + 2X_1 + 2X_2$$

١. إذا فرضنا أن $\epsilon = (0.0001, 0.0002)$ ، $X_0 = (0.1, 0.2)$ ،

٢. نضع $i = 0$

٣. $\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} -2X_1 + 2 \\ -2X_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

٤. $(X_0 + \lambda_0 \nabla f(X_0)) = \begin{bmatrix} 0.1 + 1.8 \lambda_0 \\ 0.2 + 1.6 \lambda_0 \end{bmatrix}$

٥. $f(X_0 + \lambda_0 \nabla f(X_0)) = 13.95 + 5.4 \lambda_0 - 5.8 \lambda_0^2$

ملحوظة: الدالة أعلاه دالة في متغير واحد λ_0 وعن طريق التفاضل نوجد قيمتها عند النهاية العظمى للدالة فنجد أن

$$\lambda_0^* = 0.47$$

٦. $X_1 = X_0 + \lambda_0^* \nabla f(X_0)$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.47 \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.576 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_1| = \left| \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.576 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0.846 \\ 0.376 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0002 \end{bmatrix}$$

فنجد أن $|\delta_1| > \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0002 \end{bmatrix}$

٧. نضع $i = i + 1 = 1$ لذلك ننتقل الى نقطة أخرى X_2

٨. نوجد $\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -2(0.946) + 2 \\ -2(0.576) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.108 \\ 0.848 \end{bmatrix}$

٩. $f(X_1 + \lambda_1 \nabla f(X_1)) = 8.19 + 3.07 \lambda_1 -$

$$25.05 \lambda_1^2$$

$$\lambda_1^* = 0.06$$

$$f(X_1 + \lambda_1^* \nabla f(X_1)) = 10.821 + 0.731 \lambda_1 - 0.731 \lambda_1^2$$

$$\lambda_1^* = 0.5$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= X_1 + \lambda_1^* \nabla f(X_1) \quad .10 \\
 &= \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.576 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.108 \\ 0.849 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 |\delta_2| &= \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.576 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0.054 \\ 0.424 \end{bmatrix} \right| > \epsilon
 \end{aligned}$$

ننتقل الى نقطة أخرى

$$\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -2(1) + 2 \\ -2(1) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .11$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= X_3 \\
 |\delta_3| &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} < \epsilon
 \end{aligned}$$

أذن النقطة $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هي نقطة نهاية عظمى وعندها تكون قيمة الدالة

$$f(X_1 = 1, X_2 = 1) = 10 - 1 - 1 + 2 + 2 = 12$$

مثال (٩-٤): أوجد قيمة X_1, X_2 التي تجعل

$$\text{Min. } Z = 100 + X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2$$

الحل:

١. إذا فرضنا أن النقطة X_0 بحيث $X_0 = (4, 2.5)$ ، $\epsilon = (0.0001, 0.0001)$

$$\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 2X_1 - 6 \\ 2X_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .2$$

نضع $i = 0$

٣. النقطة

$$(X_0 - \tau_0 \nabla f(X_0)) = \begin{bmatrix} 4 - 2 \tau_0 \\ 2.5 - \tau_0 \end{bmatrix}$$

$$f(X_0 - \tau_0 \nabla f(X_0)) = 100 + (4 - 2 \tau_0)^2 + (2.5 - \tau_0)^2 - 6(4 - 2 \tau_0)$$

$$-4(2.5 - \tau_0) = 100 + 16 - 16\tau_0 + 4\tau_0^2 + 6.25$$

$$-5\tau_0 + \tau_0^2 - 24 + 12\tau_0 - 10 + 4\tau_0$$

$$= 75.75 - 5\tau_0 + 5\tau_0^2$$

٤. وبايجاد النهاية الصغرى للدالة $f(X_0 - \tau_0 \nabla f(X_0))$ نجد أن قيمة τ_0 التي تجعل الدالة

$$f(X_0 - \tau_0 \nabla f(X_0))$$
 نهاية صغرى هي τ_0^* حيث

$$\tau_0^* = 0.5$$

٥. نحسب X_1 على النحو التالي:

$$X_1 = X_0 - \tau_0^* \nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_1| = \left| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \right| > \epsilon \quad .6$$

$$\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} 2(3) - 6 \\ 2(2) - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .7 \text{ نحسب}$$

وهنا نجد أن $\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ فهذا يعنى أن النقطة X_2 تساوى النقطة X_1 حيث:

$$X_2 = X_1 - \tau_1^* \nabla f(X_1)$$

وبالتالي

$$X_2 = X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_2| = |X_2 - X_1| = \left| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$|\delta_2| < \epsilon$$

لذلك ينتهي الحل وتكون النقطة التالية

$$X_1 = 3, \quad X_2 = 2, \quad f(X_1, X_2) = 87$$

نقطة نهاية صغرى.

ومما هو جدير بالذكر أن من أهم عيوب طريقة الاتجاهات أن التقارب لنقط الاستقرار يكون بطيء بالمقارنة بطرق أخرى مثل طريقة نيوتن رافسون التي سوف نتناولها فيما يلي.

تمرين (٣-٤)

[١] باستخدام طريقة الاتجاهات أوجد قيم X التي تحقق الأهداف التالية عند نقط مبدئية $X^{(0)}$ مناسبة

$$1) \text{ Max. } Z = -5X_1^2 - 2X_2^2 + 20X_1 + 12X_2 + 5$$

$$2) \text{ Max. } Z = -3X_1^3 - 4X_2^2 + X_1^2 + 18X_1 + 16X_2 + 2X_1 + 10$$

$$3) \text{ Min. } Z = X_1^2 + 2X_2^2 - 4X_1 - 8X_2 + 10$$

$$4) \text{ Min. } Z = 15X_1^3 + X_2^2 + 9X_1 + 8X_2 + 3$$

[٢] أوجد باستخدام طريقة الاتجاهات قيم X_1, X_2, X_3 بحيث

$$\text{Max. } Z = X_1(X_2 - 1) + X_3 \left(X_3^{2/3} - 3 \right)$$

عند النقطة المبدئية $X^{(0)} = (0, 1, 1)$

[٣] عقب على النتائج في [2].

Newton-Raphson Method**(٢-٥-٤) طريقة نيوتن رافسون**

تعتبر هذه الطريقة أسرع في التقارب من الطريقة السابقة فهي طريقة تكرارية أيضا تعتمد أيضا على نظريات التقارب [32,33].

فهي تعتمد على متجه المشتقات $\nabla f(X)$ ، كذلك معكوس المصفوفة الهيسينية H^{-1} ، حيث

$$X_{i+1} = X_i - H^{-1}|_{X_i} \nabla f(X_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.21)$$

ففي حالة إيجاد النهاية العظمى لابد أن تكون $H^{-1}|_{X_i}$ تامة السالبة، وفي حالة إيجاد النهاية الصغرى لابد أن تكون $H^{-1}|_{X_i}$ تامة الأيجاب، وفي الحالات غير ذلك تفشل الطريقة في الحصول على النهاية العظمى أو الصغرى وفيما يلي خطوات الحل.

خوارزم (٣-٤)

الخطوة (١): ١. افتراض نقطة حل مبدئية X_0 ، والمقياس ϵ .

٢. أوجد $\nabla f(X)$ ، $H^{-1}|_{X_i}$.

الخطوة (٢): ١. ضع $i = 0$ حيث $i = 1, 2, 3, \dots, n$ حيث n أكبر عدد من التكرارات.

٢. أوجد $\nabla f(X_i)$ ، $H^{-1}|_{X_i}$.

٣. أحسب النقطة X_{i+1} حيث:

$$X_{i+1} = X_i - H^{-1}|_{X_i} \nabla f(X_i)$$

الخطوة (٣): ١. أحسب $|\delta_i|$ حيث:

$$|\delta_i| = |X_{i+1} - X_i|$$

٢. إذا كانت: $|\delta_i| \leq \epsilon$

ينتهي الحل وتكون النقطة X_{i+1} هي النقطة المطلوبة.

٣. إذا كانت $|\delta_i| > \epsilon$ ، $i \leq n - 1$ ، ضع $i = i + 1$ ، والرجوع الى الخطوة

(٢)

وأجراء تكرار آخر.

٤. إذا كانت $\epsilon > |\delta_i|$ ، $i = n - 1$ ، يتم اختيار نقطة مبدئية X_0' ، ومقياس ϵ' آخر ويتم إجراء خطوة الحل مرة أخرى.

مثال (٤-١٠): أوجد النهاية العظمى للدالة $f(X)$ حيث:

$$f(X) = 100 - 2X_1^3 - 3X_2^2 + 24X_1 + 12X_2$$

الحل:

الخطوة (١)

١. نفرض أن $X_0 = (X_1 = 1, X_2 = 0.5)$ ، $\epsilon = (0.03, 0.01)$

$$2. \nabla f(X) = \begin{bmatrix} -6X_1^2 + 24 \\ -6X_2 + 12 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -12X_1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

الخطوة (٢):

١. $i = 0$

$$2. \nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad H^{-1}|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.8333 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.8333 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة (٣):

١. أحسب

$$|\delta_0| = |X_1 - X_0| = \left| \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} > \epsilon$$

٢. نضع $i = i + 1 = 0 + 1 = 1$

وننتقل للتكرار الثاني حيث

$$\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -13.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1}|_{X_1} = \begin{bmatrix} -0.0333 & 0 \\ 0 & -0.1667 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 - H^{-1}|_{X_1} \nabla f(X_1)$$

$$= \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.0333 & 0 \\ 0 & -0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2.05045 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_1| = |X_2 - X_1| = \left| \begin{bmatrix} 2.05045 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0.44955 \\ 0 \end{bmatrix} > \epsilon$$

لذلك ننتقل الى التكرار (٣) حيث نضع $i = i + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\nabla f(X_2) = \begin{bmatrix} -1.2261 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1}|_{X_2} = \begin{bmatrix} -0.01982 & 0 \\ 0 & -0.1667 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 2.05045 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.01982 & 0 \\ 0 & -0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2261 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2.02615 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_2| = \left| \begin{bmatrix} 2.02615 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.05045 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0.0243 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\delta_2| > \epsilon$$

وبما أن

ننتقل للتكرار رقم (٤) حيث

$$\nabla f(X_3) = \begin{bmatrix} -0.632 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1}|_{X_3} = \begin{bmatrix} -0.0411 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 2.02615 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.0411 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.632 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2.00018 \\ 2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$|\delta_3| = |X_4 - X_3| = \begin{bmatrix} 0.02597 \\ 0 \end{bmatrix} < \epsilon$$

ملحوظة:

١. نلاحظ أن $H(X_i)$ ، $H^{-1}(X_i)$ عند أى نقطة X_i تمثل مصفوفة تامة السالبة
أما إذا كانت $H(X_i)$ ، $H^{-1}(X_i)$ تمثل مصفوفة ليست تامة السالبة، فإن النقطة التي
تم التقارب لها ليست نقطة نهاية عظمى.

٢. وتفشل الطريقة عندما تكون المصفوفة H ، H^{-1} مصفوفة شاذة [10] singular matrix.

تمرين (٤-٤)

باستخدام طريقة نيوتن – رافسون حل النماذج التالية عند نقطة مبدئية ومستوى خطأ مناسب:

$$1. \text{Max. } Z = -(2X_1 - \sqrt{3})^2 - (3X_1 - \sqrt{5})^2 + 4$$

$$2. \text{Max. } Z = -(5X_1 - 7)^2 - (X_2 - 5)^2 - (2X_3 - 5)^2$$

$$3. \text{Max. } Z = \sqrt{(X_1 - 1)^2 + X_2^2}$$

$$4. \text{Max. } Z = \frac{16X_1 + 8X_2 - 2X_1X_2}{3(X_1X_2)^2}$$

$$5. \text{Max. } Z = e^{-(x_1+x_2)} X_1X_2$$

$$6. \text{Max. } Z = (X_1^2 + 3X_2^2) e^{-(x_1+x_2)}$$

$$7. \text{Min. } Z = e^{x_1+x_2} / X_1X_2$$

$$8. \text{Min. } Z = X_1^2 + 5X_2^2 - 7X_1 - 20X_2 + 2$$

$$9. \text{Min. } Z = (X_1 - 7)^2 + (X_2 - 8)^2 + 10$$

$$10. \text{Max. } Z = (X_1^2 + X_2^2) e^{-(2x_1+3x_2)}$$

(٦-٤) طرق الحل بالبحث المباشر (لا تعتمد على المشتقات)

Direct Search Methods

في حالة إذا كانت الدالة $f(X)$ دالة غير متصلة في بعض أو كل المتغيرات X ، أو في حالة عدم إمكانية إيجاد المشتقات فأنا نلجأ الى طرق أخرى لا تعتمد على المشتقات. وكما ذكرنا سابقا في الفصل (٤-٣) فإنه يوجد طرق متعددة لا تعتمد على المشتقات سوف تقتصر دراستنا في هذا الفصل على طريقة القفز العشوائي Random Jumping، وطريقة البحث أحادي المتغير Univariate Search Method.

(١-٦-٤) طريقة القفز العشوائي

وهي طريقة بسيطة تعتمد على تحديد قيم محددة للحدود الدنيا L والحدود العليا U للمتغيرات X أو بعبارة أخرى

$$L_j \leq X_j \leq U_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.22)$$

والانتقال من نقطة الى نقطة أخرى يعتمد على الأعداد العشوائية التي يمكن توليدها باستخدام الحاسب أو باستخدام جداول الأعداد العشوائية [29] فاذا أشرنا الى متجه المتغيرات في المحاولة i بالرمز $X^{(i)}$ حيث

$$X^{(i)} = [X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}]$$

فأنه في حالة تصغير الدالة $f(X)$ يتم حساب:

$$X^{(i)} = L + r^{(i)} (U - L) \quad (4.23)$$

يتم حساب: $f(X)$ وفي حالة تعظيم الدالة

$$X^{(i)} = U - r^{(i)} (U - L) \quad (4.24)$$

حيث $r^{(i)}$ تشير الى فئات الأعداد العشوائية في المحاولة (i) .

وتتوقف المحاولات عندما

$$|\delta_i| = |X^{(i+1)} - X^{(i)}| < \epsilon$$

وفيما يلي نقدم خوارزم لأجراء هذه المحاولات:

خوارزم (٤-٤): ١. تحديد قيم محددة للحدود العليا والدنيا للمتغيرات ولتكن U ، L ، وتحديد المقياس ϵ

٢. توليد عدد n_j من مجموعات الأعداد العشوائية وسوف نشير إليها بالرمز $r_j^{(i)}$

حيث يتم توليد مجموعة من الأعداد العشوائية لكل متغير X_j فى كل محاولة

٣. ضع $i = 1$ حيث تشير i الى رقم المحاولة

٤. نحسب:

أ- فى حالة التصغير

$$X_j^{(i)} = L_j + r_j^{(i)} (U_j - L_j), j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.25)$$

ب- فى حالة التعظيم

$$X_j^{(i)} = U_j - r_j^{(i)} (U_j - L_j), j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.26)$$

٥. نحسب $|\delta_i|$ حيث

$$|\delta_i| = |X^{(i+1)} - X^{(i)}| \quad (4.27)$$

أ- فإذا كان $|\delta_i| < \epsilon$ ينتهي الحل وتكون النقطة $X^{(i+1)}$ هى نقطة أستقرار

ب- إذا كانت $|\delta_i| > \epsilon$ نضع $i = i + 1$ وننتقل الى (٤) لأجراء محاولة تالية.

مثال (٤-١١): أوجد النهاية الصغرى للدالة $f(X_1, X_2)$ حيث:

$$f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 4X_1 - 6X_2$$

الحل:

١. إذا فرضنا أن الحدود العليا والدنيا

$$1 \leq X_j \leq 5, j = 1, 2$$

$$U_1 = U_2 = 5, L_1 = L_2 = 1$$

٢. توليد مجموعات الأعداد العشوائية $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ على النحو الموضح فى الجدول التالى.

٣. فى الجدول التالى توضح خطوات الخوارزم

جدول (٤-١) يوضح خطوات الحل لمثال (٤-١١)

رقم المحاولة (i)	الأعداد العشوائية		U_1 - L_1	U_2 - L_2	$X_1^{(i)}$	$X_2^{(i)}$	$f(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$
	$r_1^{(i)}$	$r_2^{(i)}$					
1	0.12606	0.63946	4	4	1.504	3.5578	-12.4437
2	0.42469	0.84082	4	4	2.698	4.3632	-10.655
3	0.32082	0.86722	4	4	2.283	4.4688	-10.7625
4	0.29605	0.69995	4	4	2.184	3.7999	-12.326
5	0.47964	0.51	4	4	2.918	3.0732	-12.1509
6	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	0.25001	0.50101	4	4	2.0004	3.00404	-12.9999

ورغم أن هذه الطريقة بسيطة، ولكنها غير كفاء inefficient وغير عملية أيضا للأسباب التالية:

١. تعتمد على الحدود العليا والدنيا للمتغيرات X وغالبا تكون قيم افتراضية.
٢. لا تأخذ سلوك الدالة $f(X)$ في المحاولات.
٣. لا تعتمد على نظريات التقارب للوصول لنقط الاستقرار.
٤. تعتمد في الانتقال من محاولة الى أخرى على الأعداد العشوائية فقط.

Univariate Search Method

(٢-٦-٤) طريقة البحث أحادي المتغير

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد النهاية الصغرى للدالة $f(X)$ ، حيث $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. وتعتبر هذه الطريقة أفضل من طريق القفز العشوائي حيث تأخذ في الاعتبار اتجاه التغير في كل متغير من المتغيرات $X_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ، وكذلك تأخذ في الاعتبار سلوك الدالة $f(X)$ [33,29].

وتعتمد هذه الطريقة على البحث في كل متغير من المتغيرات X_j كلا على حدة مع تثبيت باقى المتغيرات وعددها $(n-1)$ عند القيم المحددة fixed values في التكرار السابق. حيث يتم تحديد المتغير والاتجاه لتغيره وقيمة هذا التغير أيضا في التكرار.

فإذا فرضنا أن S^k تشير الى متجه رقم k في مصفوفة الوحدة S على النحو التالي:

$$S^k = \begin{cases} (1, 0, 0, \dots, 0) & \text{for } k = 1, n + 1, 2n + 1, \dots \\ (0, 1, 0, 0, \dots, 0) & \text{for } k = 2, n + 2, 2n + 2, \dots \\ (0, 0, 1, 0, \dots, 0) & \text{for } k = 3, n + 3, 2n + 3, \dots \\ \vdots & \vdots \\ (0, 0, 0, \dots, 1) & \text{for } k = n, 2n, 3n, \dots \end{cases} \quad (4.28)$$

كذلك إذا فرضنا ان λ^k تشير الى مقدار التغير الذي سوف يحدث للمتغير رقم k .

والخوارزم التالي يوضح الخطوات المتتالية للحل:

خوارزم (٥-٤)

الخطوة (١): ١. افترض أن $X^{(1)}$ تشير الى نقطة أفتراضية مبدئية، e مقدار صغير يؤول الى الصفر أي $e \rightarrow 0$

٢. ضع $k = 1, 2, \dots, n, 1 + n, \dots, m, k = 1$

٣. نحسب $f(X^k)$ وسوف نشير لها بالرمز f

الخطوة (٢): ١. أحسب كل من $f^+ = f(X^k + eS^k)$, $f^- = f(X^k - eS^k)$

٢. قارن بين كل من f, f^-, f^+

- أ- إذا كان $f^+ < f$ فإن اتجاه S^k يكون صحيح لتخفيض قيمة f ونذهب للخطوة (٣) لتحديد مقدار التغير λ^k
- ب- إذا كان $f^- < f$ فإن اتجاه $-S^k$ يكون هو الاتجاه صحيح لتخفيض f ونذهب للخطوة (٣) لتحديد مقدار التغير λ^k
- ج- إذا كان $f^+, f^- > f$ فإن النقطة X^k تكون نقطة نهاية صغرى وينتهي الحل.

الخطوة (٣): ١. أوجد $f(X^k \pm \lambda^k S^k)$ كدالة في متغير واحد λ^k .

٢. نوجد القيم المثلثي ل λ^k ونرمز لها بالرمز $\lambda^{*(k)}$ التي تجعل الدالة $f(X^k \pm \lambda^{*k} S^k)$ نهاية صغرى ولتكن λ^{*k}

الخطوة (٤): بأجبار λ^{*k} ننتقل الى نقطة أخرى $(k+1)$ حيث

$$X^{(k+1)} = X^k \pm \lambda^{*k} S^k \quad (4.29)$$

الخطوة (٥): ١. إذا كان $k < M - 1$ ، نضع $k = k + 1$ والرجوع الى خطوة (٢)

٢. إذا كان $k = M - 1$ ينتهي الحل.

وفيما يلي سوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال التالي:

مثال (٤-١٢): أوجد قيمة X_1, X_2 التي تجعل الدالة $f(X_1, X_2)$ نهاية صغرى.

$$f(X_1, X_2) = 2X_1^3 + 2X_2^2 - 24X_1 - 28X_2 + 100$$

الحل: التكرار (1) iteration

الخطوة (١): ١. نفرض أن النقطة المبدئية $X^{(1)} = (1, 5)$ ، $e = 0.1$ ، $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢. نحسب $f(X^{(1)})$ حيث

$$f(X^{(1)}) = 2(1)^3 + 2(5)^2 - 24(1) - 28(5) + 100 = -12 \quad (1)$$

الخطوة (٢): أحسب كلا من f^+, f^- على النحو التالي:

$$f^+(X^{(1)} + eS^{(1)}) = f(X^{(1)} + 0.1) = f(1.1, 5) = -13.738 \quad (2)$$

$$f^+ < f \quad (3)$$

$$f^-(X^{(1)} - eS^{(1)}) = f(X^{(1)} - 0.1) = f(0.9, 5) = -10.142 \quad (4)$$

من (1)، (3) نجد ان

$$f^- > f \quad (5)$$

وبالتالي من (3) و (5) فإن الاتجاه $+S^{(1)}$ هو الاتجاه الصحيح لتخفيض الدالة f وننتقل الى نقطة أفضل.

الخطوة (٣): نوجد الدالة $f(X^{(1)} \pm \lambda^{(1)}S^{(1)})$ كدالة في $\lambda^{(1)}$

$$f(X^{(1)} + \lambda^{(1)}S^{(1)}) = f(1 + \lambda^{(1)}, 5) = 2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 18\lambda - 12 \quad (6)$$

وبأيجاد قيمة $\lambda^{*(1)}$ التي تجعل الدالة في (6) نهاية صغرى، نجد أن:

$$\lambda^{*(1)} = 1$$

الخطوة (٤):

$$X^{(2)} = X^{(1)} + (1)S^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

التكرار (2) iteration وبتكرار الخطوات السابقة نجد أن:

$$f(X^{(2)}) = -22 \quad ١.$$

٢. نحسب

$$f^+(X^{(2)} + eS^{(2)}) = f(2, 5.1) = 2(2)^3 + 2(5.1)^3 - 24(2) - 28(5.1)$$

$$+100 = -48.79$$

وبتالي فان:

$$f^+ < f \quad (7)$$

كذلك

$$f^-(X^{(2)} - eS^{(2)}) = f(2,4.9) = 2(2)^3 + 2(4.9)^3 - 24(2) - 28$$

$$+100 = -21.58 \quad (4.9)$$

$$f^- > f \quad (8)$$

من (8), (7) نجد أن $S^{(2)}$ هو الاتجاه الصحيح وبالتالي نوجد الدالة

حيث $f(X^{(2)} \pm \lambda^{(2)}S^{(2)})$

$$f(X^{(2)} \pm \lambda^{(2)}S^{(2)}) = f(2, (5 + \lambda)) = 2(2)^3 + 2(5 + \lambda)^3 - 24(2)$$

$$-28(5 + \lambda) + 100 = 2\lambda^2 - 8\lambda - 22 \quad (9)$$

وبالتالي القيمة ل $\lambda^{(2)}$ التي تجعل الدالة (9) أقل ما يمكن تساوى $\lambda^{*(2)}$ حيث

$$\lambda^{*(2)} = 2$$

$$X^{(3)} = X^{(2)} + \lambda^{*(2)}S^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

التكرار (3) iteration

$$f(X^{(3)}) = -30 \quad \begin{array}{l} ١. نحسب $f(X^{(3)})$ حيث \\ ٢. أحسب \end{array}$$

$$f^+(X^{(3)} + eS^{(3)}) = f(2.1,7) = -27.878$$

وبالتالي فإن $f < f^+$
كذلك

$$f^-(X^{(3)} - eS^{(3)}) = f(1.9,7) = -29.882$$

وبالتالي فإن $f < f^-$

وبما أن $f < f^-$, $f < f^+$, إذن النقطة $X^{(3)}$ هي النهاية الصغرى وعندها

$$f(X) = -30$$

تمرين (٥-٤)

[١] باستخدام طريقة البحث أحادي المتغير أوجد ما يلي عند النقط المبدئية المناظرة $X^{(1)}$

$$1) \text{ Min. } f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 8X_2 + 20 \quad , \quad X^{(1)} = [1, 1]$$

$$2) \text{ Min. } f(X_1, X_2) = 2X_1^2 + 2X_2^2 - 8X_1X_2 + 100 \quad , \quad X^{(1)} = [-2, -2]$$

$$3) \text{ Min. } f(X_1, X_2, X_3) = 2X_1^3 + 4X_2^2 + 5X_3^2 - 12X_1 - 16X_2 - 20X_3$$

$$, \quad X^{(1)} = [0, 1, 0]$$

$$4) \text{ Min. } f(X_1, X_2) = 100 + 5X_1^4 + 2X_2^2 - 20X_1 - 24X_2 \quad , \quad X^{(1)} = [0, 1]$$

$$5) \text{ Man. } f(X_1, X_2) = -7X_1^2 - 9X_2^2 + 28X_1 + 36X_2 + 10 \quad , \quad X^{(1)} = [0, 0]$$

[٢] قارن بين النهايات الصغرى للدوال في [١] بالنهايات الصغرى للدوال باستخدام طريقة القفز العشوائي وعدد التكرارات باستخدام كل طريقة في كل مشكلة.

[٣] اعتبار المشاكل في [١] أوجد الحل باستخدام شروط الأمثلية في الفصل (٤-٤) ثم قارن بين الحل في [٣]، [٢].

Exercises

تمرينات (٧-٤)

[١] أوجد النهاية الصغرى $\text{Min } f(X)$ لكل دالة من الدوال التالية، ويناظر كل مشكلة النقطة المبدئية (n)

- 1) $F(X) = 1 / (-1X^2 + 3X - 7)$, $n = 1$
- 2) $F(X) = (X_1 - X_2 - 1)^2 + (X_1 - X_2 + 1)^2$, $n = 2$
- 3) $F(X) = X_1^4 + X_2^4 - 4X_1X_2$, $n = 2$
- 4) $F(X) = 2X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 7X_2$, $n = 2$
- 5) $F(X) = 1 / [(X_1 - X_2 - 2)^2 + (X_1 - X_2 + 1)^4]$, $n = 2$

[٢] أوجد النهاية الصغرى للدالة التربيعية التالية:

$$F(X) = \frac{1}{2} X^T Q X + C^T X,$$

حيث

- 1) $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- 2) $Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- 3) $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

[٣] إذا كان لدينا النقط التالية:

$$[X_1, Y_1]^T, \dots, [X_n, Y_n]^T \in \mathbb{R}^2$$

باستخدام شروط الأمثلية أثبت أن حل المشكلة

$$\min_{[a,b]^T} F(a, b) = \sum_{i=1}^n (aX_i + b - Y_i)^2$$

$$A^T A_Z = A^T Y$$

يحقق النظام

حيث

$$Z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T,$$

$$A^T = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

حيث خط الانحدار

$$L(X) = aX + b$$

للنقط $[X_1, Y_1]^T, [X_2, Y_2]^T, \dots, [X_n, Y_n]^T$

[٤] أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Min. } F(X_1, X_2) = cX_1^2 + X_2^2$$

أ. أوجد النهاية الصغرى المطلقة للدالة $F(X_1, X_2)$ global min
 ب. طبق 3 خطوات لطريقة الانحدار السريع للمشكلة أعلاه بافتراض أن النقطة المبدئية

$$X^0 = [1, c]^T, \quad c > 0$$

$$F(X) = X^{\frac{4}{3}} \quad [٥] \text{ أعتبر الدالة}$$

وضح ما يلي: ١- النهاية الصغرى المطلقة للدالة $F(X)$ تساوى $X^* = 0$.
 ٢- لأي نقطة مبدئية $X^{(0)} \neq 0$ ، باستخدام طريقة نيوتن أن $F(X)$ دالة تباعدية
 .diverges

[٦] أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Min. } F(X) = X_1^2 e^{X_1} + X_2^2 e^{X_2} + 1$$

(١) طبق طريقة نيوتن باستخدام عدد 2 تكرار عند النقطة المبدئية $X^0 = [1, 1]^T$.
 (٢) أوجد النهاية الصغرى المطلقة للنموذج أعلاه ثم عقب على الناتج.

الباب الخامس

طرق حل النماذج المقيدة

Solution Methods of Constrained Models

Introduction	(١-٥) المقدمة
Classification Models	(٢-٥) تصنيف النماذج
Lagrange Methods	(٣-٥) طريقة لاجرانج
Karush-kuhn-Tucker (KKT) Conditions	(٤-٥) شروط كارش-كون-توكر
Newton-Raphson Method	(٥-٥) طريقة نيوتن-رافسون
Direct Method	(٦-٥) الطرق المباشرة
Exercises	(٧-٥) تمرينات

Introduction**(١-٥) المقدمة**

فى الباب السابق تناولنا بشيء من التفصيل مشاكل البرمجة غير الخطية غير المقيدة (وتسمى أيضا بمشاكل الأمثلية (optimization problems)). كذلك تناولنا بعض طرق حلها تحليليا مثل طريقة المتجهات وطريقة نيوتن، وأخرى طرق عددية مثل طريقة البحث العشوائي وطريقة البحث أحادي المتغير.

وفى هذا الباب سوف نتناول مشاكل البرمجة غير الخطية المقيدة (وتسمى أيضا بمشاكل الأمثلية) وبعض طرق حلها تحليليا وعدديا.

وتتوقف خصائص الحل لمشاكل الأمثلية على صياغة المشكلة وطريقة الحل والمقصود هنا بخصائص الحل هل هو حل أمثل نسبي (local (relative) minimum (maximum) أم حل أمثل مطلق (global minimum (maximum).

وبالنسبة للحلول العددية يمكن فى بعض الحالات عدم التقارب الى الحل النسبي وبالتالي المطلق كما سوف نوضح فى الفصول التالية.

وفى هذه الحالات يمكن استخدام أسلوب آخر عددي مثل أسلوب المحاكاة (simulation technique) لحل هذا النوع من المشاكل.

Classification Models

(٢-٥) تصنيف النماذج

إذا فرضنا أن نموذج البرمجة المقيدة على النحو التالي:

$$\text{Min. (or Max.) } Z = f(X) \quad (5.1)$$

S.T.

$$h_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots , m \quad (5.2)$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots , p \quad (5.3)$$

ويمكن تقسيم طرق حل النماذج المقيدة الى قسمين [11, 29, 34]:

القسم الأول: طرق تعتمد على المشتقات التفاضلية مثل:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| Lagrange Method | ١ . طريقة لاجرانج |
| (KKT) Conditions | ٢ . شروط كارش-كون-توكر |
| Newton Raphson Methods | ٣ . طريقة نيوتن-رافسون |
| | : |

القسم الثاني: طرق لا تعتمد على المشتقات التفاضلية مثل:

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| Cutting Plane Method | ١ . طريقة المستوى القاطع |
| Feasible Point Method | ٢ . طريقة النقطة الممكنة |
| | : |

وبصفة عامة يتم تقسيم النماذج غير الخطية (مقيدة أو غير مقيدة) الى:

- أ. نماذج محدبة convex models، بمعنى أن دالة الهدف دالة محدبة (أو مقعرة)، وفئة القيود فئة محدبة (أنظر التعريفات بالفصل (٤-٢)). وعادة في النماذج المحدبة نحصل على الحل الأمثل المطلق كما سوف نوضح في الفصول التالية [1, 35].
- ب. نماذج غير محدبة nonconvex models وهي النماذج التي تكون فيها دالة فئة القيود فئة غير محدبة سواء دالة الهدف محدبة (أو مقعرة) أو غير ذلك.

وعادة بالنسبة للنماذج غير المحدبة يكون التقارب (في حالة التقارب) للحلول النسبية ونادرا يكون التقارب للحل الأمثل المطلق، كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية [15, 18, 5].

ومما هو جدير بالذكر أن معظم الطرق التحليلية أو العددية (التقريبية) للمشاكل المقيدة يتم تحويلها الى مشاكل غير مقيدة كما سوف نوضح ذلك في الفصول (٣-٥)، (٤-٥).

Lagrange Method**(٣-٥) طريقة لاجرانج**

إذا فرضنا النموذج المقيد، حيث تأخذ القيود شكل المتساويات على النحو التالي:

$$\text{Min. (or Max.) } Z = f(X) \quad (5.4)$$

$$\text{S.T. } h_i(X) = 0 \quad , i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (5.5)$$

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_k]' \quad \text{حيث}$$

قدم لاجرانج النظرية التالية التي يمكن باستخدامها حل النموذج المقيد بقيود في شكل متساويات [5, 33].

نظرية (١-٥): إذا فرضنا أن النقطة X^* نقطة منتظمة regular point نهاية صغرى (أو عظمى) نسبية (local (relative) للنموذج في (5.4), (5.5) فإنه يوجد معاملات λ_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, m$ مناظرة لكل قيد بحيث:

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) = 0 \quad (5.6)$$

الاثبات: انظر المرجع [33].

حيث تسمى λ_i بمعاملات لاجرانج $i = 1, 2, 3, \dots, m$

كذلك تسمى الدالة $L(X, \lambda)$ بدالة لاجرانج حيث:

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(X) \quad (5.7)$$

ويلاحظ أن:

(١) الدالة $L(X, \lambda)$ دالة في عدد $(k + m)$ من المتغيرات.

(٢) النموذج المقيد في (5.5), (5.4) تحول الى نموذج غير مقيد في (5.7)، وبالتالي

بتطبيق شروط الأمثلية على النموذج (5.7) يمكن الحصول على الحلول المثلى

(أنظر الفصل (٤-٤)) [39].

ويمكن تلخيص خطوات الحل في الخوارزم التالي.

خوارزم (١-٥):

الخطوة (١): تكون دالة لاجرانج على النحو التالي:

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(X)$$

الخطوة (٢): أيجاد المشتقات الأولى للمتغيرات وعددها $(k + m)$ ومساوتها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial X_j} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (5.8)$$

وتسمى المعادلات في (5.8) بمعادلات الاستقرار stationary equations.

الخطوة (٣): حل المعادلات (5.8) والحصول على نقط الاستقرار X^* ولضمان أن النقطة X^* نقطة ممكنة فلا بد من تحقيق القيود:

$$h(X^*) = 0 \quad (5.9)$$

ملاحظات:

- ١- في كثير من الحالات تكون المعادلات (5.8) غير خطية ومعقدة وليس من السهل حلها، في هذه الحالة نلجأ الى استخدام أساليب التقريب (أنظر الباب الأول) أو طرق الحل التقريبية (أنظر الباب الثاني).
- ٢- النقط التي يتم الحصول عليها X^* نقط أستقرار قد تكون عظمى أو صغرى أو أنقلاب. لذلك يتم اختبار النقط X^* لتحديد نوعها (عظمى، صغرى، انقلاب).

مثال (١-٥): باستخدام طريقة لاجرانج حل النموذج التالي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1^2 + X_2^2$$

$$\text{S.T. } 4X_1^2 + 6X_2^2 - 2 = 0$$

الحل:

١- نكون دالة لاجرانج على النحو التالي

$$L(X_1, X_2, \lambda) = 2X_1^2 + X_2^2 + \lambda[4X_1^2 + 6X_2^2 - 2]$$

٢- نوجد معادلات الاستقرار

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 4X_1 + 8X_1\lambda = 0 \rightarrow 4X_1(1 + 2\lambda) = 0 \rightarrow$$

$$X_1 = 0, \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2X_2 + 12X_2\lambda = 0 \rightarrow 2X_2(1 + 6\lambda) = 0 \rightarrow$$

$$X_2 = 0, \lambda = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4X_1^2 + 6X_2^2 - 2 = 0 \rightarrow X_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \text{ فأن } X_1 = 0 \text{ عندما}$$

$$X_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \text{ فأن } X_2 = 0 \text{ عندما، كذلك،}$$

وبالتالي فأن نقط الاستقرار هي

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow X^{(1)} = \left(X_1 = 0, X_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow X^{(2)} = \left(X_1 = 0, X_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\lambda = \frac{-1}{6} \rightarrow X^{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\lambda = \frac{-1}{6} \rightarrow X^{(4)} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

ملحوظة: ولتحديد نوع كل نقطة (عظمى، صغرى، انقلاب) باستخدام شروط الأمثلية الرجوع الى الفصل (٤-٤).

الحالة المحدبة Convex Case

$$\text{Min. } Z = f(X) \quad \text{إذا فرضنا أن:}$$

$$\text{S.T.} \quad h(x) = 0$$

حيث $f(X)$ دالة محدبة (أنظر تعريف (٤-١)) والفئة $h(X)$ فئة محدبة أيضا (أنظر تعريف (٤-٢)).

نظرية (٢-٥): إذا فرضنا أن النقطة X^* نقطة منتظمة وتحقق نظرية لاجرانج

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) = 0 \quad (5.10)$$

$$h(X^*) = 0 \quad (5.11)$$

فإن النقطة X^* نقطة نهاية صغرى مطلقة global minimum

الاثبات: انظر المرجع [33].

ملحوظة: وإذا كانت الدالة $f(X)$ دالة مقعرة concave، والفئة $h(X)$ فئة محدبة فأننا نحصل على النهاية العظمى المطلقة لحل النموذج.

مثال (٢-٥): أفترض نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$\text{Max. } Z = -X_1^2 - 2X_2^2 + 4X_1X_2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + 3X_2 = 6$$

$$2X_1 - X_2 = 8$$

ويمكن أثبات أن دالة الهدف دالة concave وفئة القيود فئة محدبة (أنظر تعريف (٤-١))

الحل:

$$L(X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2) = -X_1^2 - 2X_2^2 + 4X_1X_2 + \lambda_1[X_1 + 3X_2 - 6] + \lambda_2[2X_1 - X_2 - 8]$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -2X_1 + 4X_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -4X_2 + 4X_1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X_1 + 3X_2 - 6 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2X_1 - X_2 - 8 = 0 \quad (4)$$

بحل المعادلات (4) - (1) نجد أن:

$$X_1^* = 4.32, X_2^* = 0.56, \lambda_1^* = -3.38, \lambda_2^* = 4.91$$

$$Z^* = -8.6128$$

ويمثل الحل أعلاه حل أمثل مطلق.

(٤-٥) شروط كارش-كون-توكر

Karush-kuhn-Tucker (KKT) Conditions

إذا فرضنا أن النموذج المقيد يحتوي على قيود في شكل متباينات بالإضافة الى القيود في شكل متساويات على النحو التالي:

$$\text{Min. } Z = f(X) \quad (5.12)$$

$$\text{S.T. } h_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots, m \quad (5.13)$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots, p \quad (5.14)$$

وتسمى القيود $g_j(X) \leq 0$ ، $j = 1,2,3, \dots, p$ قيود فعالة active constraints في النقطة X^* عندما

$$g_j(X^*) = 0 \quad (5.15)$$

وإذا فرضنا أن الفئة $I(X^*)$ هي فئة القيود $g(X) \leq 0$ الفعالة في النقطة X^* فإن

$$I(X^*) = \{j : g_j(X^*) = 0\} \quad (5.16)$$

وتسمى النقطة X^* نقطة منتظمة regular point للمشكلة (5.14) – (5.12) إذا كانت فئة المتجهات التالية [7, 10,1]:

$$\nabla h_i(X^*), \nabla g_j(X^*), j \in I(X^*), i = 1,2,3, \dots, m$$

تمثل فئة متجهات خطية مستقلة [29,32] set of linearly independent vectors.

وتصبح دالة لاجرانج على النحو التالي:

$$L(X, \lambda, \mu) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(X) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(X) , \mu_j \geq 0. \quad (5.17)$$

وتسمى μ_j بمعاملات كارش-كون-توكر (KKT).

والنظرية التالية التي تعطى الشروط الضرورية للحل الأمثل وتسمى بنظرية (KKT).

نظرية (٣-٥): إذا فرضنا النقطة المنتظمة X^* تمثل نهاية صغرى نسبية للنموذج التالي

[33,34]:

$$\text{Min. } Z = f(X)$$

$$\text{S.T. } h_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots, m$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots, p$$

بحيث جميع الدوال $f(X), h_i(X), g_j(X)$ لجميع قيم i, j دوال متصلة وقابلة للتفاضل، فإن

$$(i) \quad \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(X^*) = 0, \quad \mu_j \geq 0. \quad (5.18)$$

$$(ii) \quad \mu_j g_j(X^*) = 0, \quad j = 1,2,3, \dots, p, \quad \mu_j \geq 0 \quad (5.19)$$

وتسمى القيود في (i) بقيود التراخي التكميلي complementary slackness.

الاثبات: أنظر المرجع [34].

ويمكن تلخيص الشروط (i)، (ii) على النحو التالي:

$$1) \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \mu_j \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots, m \quad , \quad j = 1,2,3, \dots, p$$

$$2) \quad \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(X^*) = 0$$

$$3) \quad \mu_j g_j(X^*) = 0 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots, p$$

$$4) \quad h_i(X^*) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots, m$$

$$5) \quad g_j(X^*) \leq 0 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots, p$$

مثال (٣-٥): أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Min. } Z = -2X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.T. } X_1^2 + X_2^2 \leq 8$$

$$(X_1 + 1)^2 + X_2^2 \leq 8$$

الحل:

$$L(X_1, X_2, \mu_1, \mu_2) = -2X_1 + 2X_2 + \mu_1[X_1^2 + X_2^2 - 8] + \mu_2[(X_1 + 1)^2 + X_2^2 - 8]$$

وباستخدام شروط (KKT):

$$-2 + 2X_1\mu_1 + 2(X_1 + 1)\mu_2 = 0 \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 \quad (1)$$

$$2 + 2X_2\mu_1 + 2X_2\mu_2 = 0 \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\mu_1[X_1^2 + X_2^2 - 8] = 0 \quad (3)$$

$$\mu_2[(X_1 + 1)^2 + X_2^2 - 8] = 0 \quad (4)$$

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 8 \quad (5)$$

$$(X_1 + 1)^2 + X_2^2 \leq 8 \quad (6)$$

ولحل النظام (6) - (1)، سوف نفترض أن $\mu_1 = 0$ فنجد أن

$$-2 + 2\mu_2(X_1 + 1) = 0 \quad (7)$$

$$2 + 2\mu_2X_2 = 0 \quad (8)$$

$$\mu_2[(X_1 + 1)^2 + X_2^2 - 8] = 0 \quad (9)$$

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 8 \quad (10)$$

$$(X_1 + 1)^2 + X_2^2 \leq 8 \quad (11)$$

$$\mu_2 \geq 0 \quad (12)$$

من (8), (7) نجد أن

$$\mu_2 = \frac{1}{X_1 + 1} \quad , \quad \mu_2 = \frac{-1}{X_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{X_1 + 1} = \frac{-1}{X_2} \quad \rightarrow$$

$$X_2 = -(X_1 + 1)$$

وبقسمة طرفي (4) على μ_2 فإن:

$$(X_1 + 1)^2 + X_2^2 - 8 = 0 \rightarrow X_1^2 + 2X_1 + 1 + (X_1 + 1)^2 - 8 = 0$$

$$2(X_1 + 1)^2 = 8 \rightarrow X_1 + 1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$X_1 = 2 - 1 = 1 \text{ أو } X_1 = -2 - 1 = -3$$

وبما أن $\mu_2 > 0$ فعند $X_1 = 1$ فإن $\mu_2 = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن

$$(X_1^* = 1, X_2^* = -2, \mu_1^* = 0, \mu_2^* = \frac{1}{2}) \quad (13)$$

وإذا فرضنا أن $\mu_2 = 0, \mu_1 > 0$ فإن:

$$-2 + 2\mu_1 X_1 = 0$$

$$2 + 2X_2 \mu_1 = 0$$

$$\mu_1 [X_1^2 + X_2^2 - 8] = 0$$

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 8$$

$$(X_1 + 1)^2 + X_2^2 \leq 8$$

وينفس الأسلوب أعلاه نجد أن:

$$\mu_1 = \frac{2}{2X_1} = \frac{1}{X_1}, \quad \mu_1 = \frac{-2}{2X_2} = \frac{-1}{X_2} \rightarrow \frac{1}{X_1} = \frac{-1}{X_2} \rightarrow X_1 = -X_2$$

وبقسمة طرفي (3) على μ_1 نجد أن:

$$(-X_2)^2 + X_2^2 = 8 \rightarrow 2X_2^2 = 8 \rightarrow X_2 = \pm 2$$

وبما أن $\mu_1 > 0$ ، بالتالي فإن $X_1 = 2, \mu_1 = \frac{1}{2}, X_2 = -2$

$$(X_1^* = 2, X_2^* = -2, \mu_1^* = \frac{1}{2}, \mu_2^* = 0)$$

حالة التحذب Convex Caseأذا فرضنا أن الفئة X بحيث

$$X = \{X : h(X) = 0, g(X) \leq 0\} \quad (5.20)$$

فئة محدبة، والدالة $f(X)$ دالة محدبة، بمعنى أن النموذج (5-14)-(5.12) نموذج محدب، والنظرية التالية تعطى الشروط الضرورية والكافية لتحديد نقط النهاية العظمى أو الصغرى.

نظرية (٤-٥): أعتبر النموذج المحدب التالي:

$$\text{Min. } Z = f(X)$$

$$\text{S.T. } h_i(X) = 0 \quad , i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad , j = 1, 2, 3, \dots, p$$

حيث الدوال $f(X), h_i(X), g_j(X)$ دوال متصلة وقابلة للتفاضل

فإذا فرضنا أن النقطة X^* نقطة منتظمة فأن النقطة X^* تكون نهاية صغرى مطلقة إذا وإذا فقط تحققت شروط (KKT) وذلك عنده تتحقق المعادلات التالية:

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(X^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(X^*) = 0 \quad (5.21)$$

$$\mu_j g_j(X^*) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \quad (5.22)$$

الأثبات: أنظر المرجع [33] صفحة 362.

ملحوظة: إذا كانت الدالة $f(X)$ دالة مقعرة concave، والفئة

$$X = \{X : h(X) = 0, g(X) \leq 0\}$$

فئة محدبة فأن النقطة X^* تكون نقطة نهاية عظمى مطلقة.

مثال (٤-٥): أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Min. } z = 3x_1^2 + 5x_2^2$$

$$\text{S.T. } 5x_1 + 8x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2)$$

$$= 3x_1^2 + 5x_2^2 + \mu_1[5x_1 + 8x_2 - 40] + \mu_2[2x_1 + x_2 - 10]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 5\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{6}[5\mu_1 + 2\mu_2] \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - 8\mu_1 - \mu_2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{10}[8\mu_1 + \mu_2] \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = [5x_1 - 8x_2 - 40] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = +[2x_1 + x_2 - 10] \quad (4)$$

وبحل المعادلتين (3), (4) نجد ان $x_1^* = \frac{40}{11}$, $x_2^* = \frac{30}{11}$

وبالتعويض ب x_1^*, x_2^* في المعادلتين (1), (2) نجد ان $\mu_1^* = \frac{360}{121}$, $\mu_2^* = \frac{4620}{1331}$

وبالتالي فان النقطة $(x_1^* = \frac{40}{11}$, $x_2^* = \frac{30}{11}$, $z^* = \frac{12,500}{121})$ نقطة نهاية صغرى مطلقة.

Newton-Raphson Method**(٥-٥) طريقة نيوتن رافسون**

سبق ان قدمنا فى الباب السابق (٥-٤) طريقة نيوتن رافسون لحل نماذج البرمجة غير المقيدة. وفي هذا الباب سوف نستخدم طريقة نيوتن رافسون فى حل النماذج المقيدة نظرا لأنها طريقة تقاربية convergent method للحلول العددية [10].

فاذا فرضنا النموذج المقيد فى (5.1)-(5.3) وبتحويل المتباينات فى (5.3) الى متساويات بإضافة او طرح متغيرات موجبه s^2 ، $J = 1, 2, \dots, P$ ، وتكوين دالة لاجرانج على النحو التالي.

$$L(Z) = L(x_1, x_2, \dots, s_1, s_2, \dots, s_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \quad (5.23)$$

حيث ان المتجه Z على النحو:

$$Z = (x_1, x_2, \dots, s_1, s_2, \dots, s_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

حيث يمثل λ_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ معاملات لاجرانج، كذلك μ_j ، $j = 1, 2, \dots, p$ تمثل معاملات (KKT)، وبإيجاد معادلات الاستقرار:

$$\frac{\partial L(Z)}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial L(Z)}{\partial s_k} = 0, \frac{\partial L(Z)}{\partial \lambda_i} = 0, \frac{\partial L(Z)}{\partial \mu_k} = 0 \quad (5.24)$$

حيث

$$j = 1, 2, \dots, n \quad . i = 1, 2, \dots, m \quad . k = 1, 2, \dots, p$$

وعندما تكون معادلات الاستقرار فى (5.24) غير خطية لا يمكن حلها تحليلا، فأننا نلجأ الى الحلول العددية على النحو التالي

$$Z^{(t+1)} = Z^{(t)} - [H|_{Z^{(t)}}]^{-1} \nabla L(Z)|_{Z^{(t)}} \quad (5.25)$$

حيث t تشير الى رقم التكرار $t = 0, 1, \dots, T$ ، T هي الحد الأقصى للتكرارات المسموح به.

ويشير $\nabla L(Z)|_{Z^{(t)}}$ الى قيمة المشتقات عند النقطة $Z^{(t)}$ ، كذلك $[H|_{Z^{(t)}}]^{-1}$ تشير الى معكوس المصفوفة الهيسينييه عند النقطة $Z^{(t)}$ ، حيث $Z^{(0)}$ هي النقطة المبدئية الافتراضية.

وفيما يلي سوف نوضح خطوات الحل في الخوارزم التالي:

خوارزم (٥-٢):

الخطوة (١): ١- كون دالة لاجرانج $L(Z)$

٢- افترض نقطة مبدئية $Z^{(0)}$ ، كذلك افترض ان ϵ مستوى الخطأ المسموح به، T اقصى عدد من التكرارات.

٣- ضع $t = 0$ وافترض $Z^{(0)}$.

الخطوة (٢): اوجد المشتقات الأولى للدالة $L(Z)$ عند النقطة $Z^{(t)}$

$$\nabla L(Z)|_{Z^{(0)}}$$

الخطوة (٣): ١- اوجد المصفوفة H

٢- ثم اوجد معكوس المصفوفة H ولتكن

$$[H|_{Z^{(t)}}]^{-1}$$

الخطوة (٤):

١- اوجد

$$Z^{(t+1)} = Z^{(t)} - [H|_{Z^{(t)}}]^{-1} \nabla L(Z)|_{Z^{(t)}}$$

٢- احسب مستوى الخطأ

$$\epsilon^{(t)} = |Z^{(t+1)} - Z^{(t)}|$$

(ا) إذا كان $\epsilon^{(t)} \leq \epsilon$ فان الحل العددي هو $Z^{(t+1)}$.

(ب) إذا كان $\epsilon^{(t)} > \epsilon$ ، $t < T$ ، نضع $t = t + 1$ ، ونرجع الى الخطوة رقم (٢).

(ج) إذا كان $\epsilon^{(t)} > \epsilon$ ، $t = T$ ، وهذا يعنى عدم حدوث تقارب نقطة استقرار في

حالة اخذ النقطة المبدئية $Z^{(0)}$ ، وفي هذه الحالة نختار نقطة مبدئية مناسبة أخرى

وتعاد خطوات الحل.

مثال (٤-٥): اوجد x_1, x_2 التي تجعل

$$\text{Min. } Z = 2x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 \quad (1)$$

$$S.T \quad x_1 + 2x_2 \leq 100 \quad (2)$$

الحل:

يمكن تحويل المتباينة في (2) الى متساوية بإضافة s^2 للطرف الايسر وتحويل المتباينة الى متساوية.

١- نكون دالة لاجرانج على النحو التالي:

$$L(x_1, x_2, s, \lambda) = 2x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 + \lambda[x_1 + 2x_2 + s^2 - 100]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 - 8 + \lambda \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 12x_2 - 12 + 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 2\lambda s \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 + s^2 - 100$$

ونجد ان الحل التحليلي (الصحيح) للنموذج

$$(x_1^* = 2, x_2^* = 1, s_2^{2*} = 96, \lambda^* = 0)$$

وفيما يلي سوف نقدم الحل باستخدام طريقة نيوتن رافسون على النحو التالي:

١- نفترض ان النقطة المبدئية

$$Z^{(0)} = [x_1 = 3, x_2 = 1.5, s = 9, \lambda = 0] , \epsilon = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

حيث

$$Z = [x_1, x_2, s, \lambda]$$

٢- نوجد التكرار الأول : نحسب $\nabla L_{Z(1)}$ على النحو التالي

$$\nabla L_{Z(0)} = [4, 6, 0, -13]$$

٣- نوجد $H|_{Z^{(0)}}$

$$H|_{Z^{(0)}} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & s & \lambda \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ s \\ \lambda \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 2 & 18 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[H|_{Z^{(0)}}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & -0.0138 & 0 \\ 0 & 0.0833 & -0.0093 & 0 \\ -0.0124 & 0 & 0.0012 & 0.0556 \\ 0 & 0 & 0.0556 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} - [H|_{Z^{(0)}}]^{-1} \nabla L(Z)|_{Z^{(0)}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & -0.0138 & 0 \\ 0 & 0.0833 & -0.0093 & 0 \\ -0.0124 & 0 & 0.0012 & 0.0556 \\ 0 & 0 & 0.0556 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.4998 \\ -0.7724 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 1.0002 \\ 9.7729 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نحسب الخطأ

$$\epsilon = |Z^{(1)} - Z^{(0)}| = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1.0002 - 1.5 \\ 9.7729 - 9 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4998 \\ 0.7729 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon > \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

التكرار الثاني

١- نوجد $\nabla Z|_{Z^{(1)}}$ حيث

$$\nabla Z|_{Z^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0024 \\ 0 \\ -0.4900 \end{pmatrix}$$

٢- نوجد $H|_{Z^{(1)}}$

$$\begin{aligned}
 H|_{Z^{(1)}} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 19.5458 \\ 1 & 0 & 19.5458 & 0 \end{pmatrix} \\
 [H|_{Z^{(1)}}]^{-1} &= \begin{pmatrix} 0.251 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0836 & -0.0086 & 0 \\ 0 & -0.0086 & 0.0016 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \\
 Z^{(2)} &= Z^{(1)} - [H|_{Z^{(1)}}]^{-1} \nabla L(Z)|_{Z^{(1)}} \\
 &= \begin{pmatrix} 2.000 \\ 1.0002 \\ 9.7729 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0002 \\ -0.0245 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 1.000 \\ 9.7969 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \epsilon = |Z^{(2)} - Z^{(1)}| &= \begin{pmatrix} 2.00 \\ 1.000 \\ 9.7969 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.00 \\ 1.0002 \\ 9.7729 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0002 \\ 0.0240 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\epsilon < \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ويصبح الحل العددي

$$x_1^* = 2, x_2^* = 1, \lambda^* = 0$$

ملاحظات:

- ١- لا يمكن استخدام هذه الطريقة عندما تكون المصفوفة H مصفوفة شاذة.
- ٢- قد لا يحدث التقارب للنهاية الصغرى (او العظمى) ولكن قد يحدث التقارب للنهاية العظمى (او الصغرى) او نقطة انقلاب.
- ٣- يتوقف التقارب للحل على تحديد النقطة المبدئية، ان يكون اختيارها جيد.

تمرين (٣-٥)

باستخدام طريقة نيوتن رافسون حل النماذج التالية:

$$\text{Min. } z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \quad (١)$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

عند النقطة المبدئية $(x_1 = 1, x_2 = 1)$ $x^{(0)}$

$$\text{Max. } z = (5 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 + 10 \quad (٢)$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$\text{Min. } z = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5 \quad (٣)$$

S.T.

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$$

$$\text{Min. } z = \text{Exp}(2x_1 + x_2) \quad (٤)$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$\text{Max. } z = -x_1^3 - 2x_2^2 + 6x_1 + 8x_2 + 10 \quad (٥)$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Direct Method**(٦-٥) الطرق المباشرة**

توجد طرق مختلفة لحل النماذج غير الخطية المقيدة، يمكن تقسيمها الى ٣ مجموعات على النحو التالي [18,14,29]:

Constraint Approximate Methods	(١) الطرق التقريبية المقيدة
Methods of feasible direction	(٢) طرق الاتجاهات المتاحة
heuristic search methods	(٣) طرق البحث الاستدلالي

وفي هذا الفصل سوف نتناول طريقة واحدة من المجموعة الأولى (طرق تقريب القيود) وهي: طريقة المستوى القاطع Cutting plane method

والطريقة أعلاه تعتمد على تقريب النماذج المقيدة غير الخطية الى النماذج خطية باستخدام تقريب تيلور (انظر الفصل (١-٣))، حيث يتم حدوث تقارب للحلول للنماذج الخطية المقربة.

(١-٦-٥) طريقة المستوى القاطع

اول من قدم هذه الطريقة Kelly سنة ١٩٦٠ لحل النماذج غير الخطية المحدبة.

وتعتمد هذه الطريقة على تحويل دالة الهدف الى دالة خطية وكذلك القيود الى قيود خطية، وبالتالي فان فئة الحلول الممكنة تكون فئة محدبة ومغلقة Closed convex set لفئة الحلول الممكنة للمشكلة الاصلية [32,34].

فاذا فرضنا ان نموذج البرمجة غير الخطية على النحو التالي:

اوجد قيم x_1, x_2, \dots, x_n التي تجعل:

$$\text{Min. } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.20)$$

$$\text{S.T. } g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.21)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.22)$$

حيث l_i, u_i الحدود الدنيا والعليا للمتغير x_i .

ويتم تحويل دالة الهدف الى دالة خطية على النحو التالي:

افترض ان دالة الهدف تساوى متغير جديد x_{n+1} حيث:

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.23)$$

ويصبح النموذج المحول بدالة هدف خطية على النحو التالي:

$$\text{Min. } z = x_{n+1} \quad (5.24)$$

$$\text{S.T. } g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (5.25)$$

$$g_{m+1}(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{n+1} \leq 0$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad \text{حيث}$$

وعند نقطة مبدئية $x^{(0)}$ يتم تحويل الدوال $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$

$$g_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{n+1}$$

الى دوال خطية عند النقطة $x^{(0)}$ باستخدام نظرية تيلور [23,9].

وبحل النموذج الخطى باستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل $x^{(1)}$ ثم يتم اخذ $x^{(1)}$ كنقطة مبدئية وتحويل النموذج الأصلي الى نموذج خطى وهكذا.

وفى كل تكرار يتم حساب الخطأ ϵ^i حيث:

$$\epsilon^i = |x^{(i+1)} - x^{(i)}| \approx 0 \quad (5.26)$$

ويكن وضع خطوات الحل في الخوارزم التالي:

خوارزم (٣-٥): الخطوة (١): ١- افتراض نقطة مبدئية $x^{(i)}$ ، $i = 1, 2, \dots, k$ حيث k عدد مناسب يتم اقتراضه من التكرارات.

٢- افتراض مستوى الخطأ المقبول ϵ .

الخطوة (٢): تقريب الدوال غير الخطية $g_j(x)$ ، $j = 1, 2, \dots, m + 1$ الى دوال خطية عند النقطة $x^{(i)}$ باستخدام مفكوك تيلور عند النقطة $x^{(i)}$ على النحو التالي:

$$\hat{g}_j(x) \approx g_j(x^{(i)}) + \nabla g_j(x^{(i)})(x - x^{(i)}) \quad , j = 1, 2, \dots, m + 1 \quad (5.27)$$

حيث $\hat{g}_j(x)$ ، $j = 1, 2, \dots, m + 1$ دوال خطية تقريبية عند $x^{(i)}$

الخطوة (٣): ١- يصبح النموذج التقريبي على النحو التالي:

$$\left. \begin{aligned} \text{Min. } z &= x_{n+1} \\ \text{S.T. } \hat{g}_j(x) &\leq 0 \\ \hat{g}_{m+1}(x) &= \hat{f}(x) - x_{n+1} \leq 0 \\ l_i &\leq x_i \leq u_i \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n + 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

٢- بحل النموذج (5.28) والحصول على نقطة الحل $x^{(i+1)}$

$$٣- \text{نحسب الخطأ } \epsilon^{(i)} = |x^{(i+1)} - x^{(i)}|$$

١- فاذا كانت $\epsilon^{(i)} \leq \epsilon$ تكون النقطة $x^{(i+1)}$ هي نقطة الحل التقريبي للنموذج غير الخطي (المشكلة الاصلية).

ب- اما إذا كانت $\epsilon^{(i)} > \epsilon$ ، $i < k$ ، نضع $i = i + 1$ ونرجع للخطوة (٢).

ج- اما إذا كانت $\epsilon^{(i)} > \epsilon$ ، $i = k$ ، نتوقف وفي هذه الحالة لم يتم حدوث تقارب للحل

عند النقطة المبدئية $x^{(0)}$ ، ويتم افتراض نقطة مبدئية اخرى.

ملاحظات:

١- طريقة المستوى القاطع تستخدم في النماذج المقيدة غير الخطية المحدبة فقط، وتعد بالنسبة لهذه النماذج طريقة كفاً efficient method.

٢- النماذج المقربة نماذج خطية يمكن ان نحصل على الحلول الكفاً لها بسهولة.

٣- ولكن من اهم عيوبها انها تعتمد على الحدود l_i, u_i للمتغيرات القرارية x_i كذلك تعتمد على مستوى الخطأ المسموح به ϵ .

٤- يزداد حجم المشكلة الخطية المحلولة كلما زادت عدد مرات التقريب (أي عدد القواطع cuts).

مثال (٥-٥) اوجد قيم x_1, x_2 التي تجعل

$$\text{Min. } z = x_1 - x_2$$

$$\text{S.T. } g_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

حل النموذج باستخدام المستوى القاطع [32,29].

الحل

١- بحل النموذج باستخدام شروط (KKT) نجد ان الحل الأمثل المطلق على النحو:

$$x_1^* = 0, x_2^* = 1, f^* = -1$$

٢- يلاحظ ان دالة الهدف دالة خطية وفي هذه الحالة بالطبع لا يتم تقريبها.

خطوة (١): نفرض ان $-2 \leq x_1, x_2 \leq 2$ ، كذلك $\epsilon = 0.01$ ، $k=10$ ،

خطوة (٢): نكون النموذج الخطى التالي

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min. } z = x_1 - x_2 \\ \text{S.T} \\ -2 \leq x_1 \leq 2 \\ -2 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

وبحل النموذج (1) نحصل على الحل وليكن

$$x^{(1)} = [x_1^* = -2, x_2^* = 2], z^* = -4$$

الخطوة (٣): ١- نوجد قيمة $g_1(x_1, x_2)$ عند $x^{(1)}$ على النحو

$$g_1(x^{(1)}) = 3(-2)^2 + 2(-2)(2) + (2)^2 - 1 = 23 > \epsilon$$

٢- يتم تقريب $g_1(x)$ عند النقطة $x^{(1)}$

$$g_1(x) \approx g_1(x^{(1)}) + \nabla g_1(x^{(1)})(x - x^{(1)}) \leq 0 \quad \rightarrow$$

$$-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0 \quad (2)$$

يضاف القيد الخطى أعلاه الى النموذج (1) فنحصل على النموذج الخطى

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min. } z = x_1 - x_2 \\ \text{S.T. } -2 \leq x_1 \leq 2 \\ \quad -2 \leq x_2 \leq 2 \\ -16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

بحل النموذج (3) نحصل على النقطة $x^{(2)}$ حيث

$$x_2^{(2)} = [x_1^* = -0.5625, x_2^* = 2.0], z^{*(2)} = -2.5625$$

الخطوة (٤): نحسب $g_1(x^{(2)})$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} g_1(x) \approx g_1(x^{(2)}) + \nabla g_1(x^{(2)})(x - x^{(2)}) \leq 0 \quad \rightarrow \\ -7.375x_1 + 5.125x_2 - 8.19922 \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

يضاف القيد (4) الى النموذج (3) على النحو:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min. } z = x_1 - x_2 \\ \text{S.T. } -2 \leq x_1 \leq 2 \\ \quad -2 \leq x_2 \leq 2 \\ -16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0 \\ -7.375x_1 + 5.125x_2 - 8.19922 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

وبحل النموذج أعلاه نحصل على نقطة الحل

$$x^{(3)} = [x_1^* = 0.2787, x_2^* = 2.000], z^{*(3)} = -1.7219$$

وتستمر هذه الخطوات حتى يتم حدوث تقارب عندما $g_1(x^{(i)}) \leq \epsilon$

والجدول التالي يوضح عدد مرات التكرار

جدول (١-٥) يوضح خطوات حل مثال (٥-٥)

عدد التكرارات (i)	القيود الخطية الجديدة	الحل للنموذج الخطي التقريبي عند النقطة $x^{(i+1)}$	$f(x^{(i+1)})$	$g_i(x^{(i+1)})$
1	$-2 \leq x_1 \leq 2$, and $-2 \leq x_2 \leq 2$	(-2.0,2.0)	-4.00	23.00
2	$-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$	(-0.5625,2.00)	-2.5625	6.19922
3	$-7.375x_1 + 5.125x_2 - 8.19922 \leq 0$	(0.2787,2.000)	-1.72193	2.11978
4	$-2.33157x_1 + 3.44386x_2 - 4.11958 \leq 0$	(-0.5297,0.837)	-1.3673	1.43067
5	$-4.85341x_1 + 2.73459x_2 - 3.43067 \leq 0$	(-0.05314 x_1 , 1.16024 x_2)	-1.21338	0.47793
6	$-2.6393x_1 + 2.4267x_2 - 2.47792 \leq 0$	(0.42665,1.4849)	-1.05845	0.48419
7	$-0.41071x_1 + 2.1169x_2 - 2.48420 \leq 0$	(0.17058,1.2066)	-1.03603	0.13154
8	$-1.38975x_1 + 2.07205x_2 - 2.13155 \leq 0$	(0.01829,1.4098)	-1.02269	0.04656

9	$-1.9722x_1$ $+ 2.0453x_2$ $- 2.04657 \leq 0$	(-0.16626, 0.84027)	-1.00653	0.06838
10	$-2.67809x_1$ $+ 2.01305x_2$ $- 2.06838 \leq 0$	(-0.07348, 0.9297)	-1.00321	0.01723

ومن الجدول يتضح ان مقياس الخطأ (او $\epsilon = 0.01$) يتحقق عند عدد مرات التكرار تساوى 10 حيث $k=10$ أيضا، ويكون الحل الأمثل التقريبي

$$x_1^* = -0.0734, x_2^* = 0.9297, z^* = -1.0032$$

تمرين (٤-٥)

استخدم طريقة المستوى القاطع اوجد الحل التقريبي لكل نموذج من النماذج التالية:

$$1. \quad \text{Min } f(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 18x_1 - 12x_2 - 6x_3 - 8$$

$$\text{S.T.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{اعتبر النقطة المبدئية } x^{(0)} = [0, 0, 0]$$

حل المشكلة (١) باستخدام شروط (kkt) ثم قارن الحل الصحيح بالحل التقريبي.

$$2. \quad \text{Min. } f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4$$

$$\text{S.T.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$6x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2$$

$$\text{عند النقطة المبدئية } x^{(0)} = [1, 1]$$

$$\text{Min. } f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2 \quad .٣$$

$$\text{S.T } -x_1^2 + x_2 \leq 4$$

$$-(x_1 - 2)^2 + x_2 \leq 3$$

عند النقطة المبدئية $x^{(0)} = [1,1]$

$$\text{Max. } z = -x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 100 \quad .٤$$

$$\text{S.T } x_1 + x_2 \geq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

عند النقطة المبدئية $x^{(0)} = [1.5,1]$

Exercises

(٧-٥) تمرينات

(١) ضع علامة (✓) امام العبارة الصحيحة وعلامة (×) امام العبارة الخطأ:

١- نقط الاستقرار stationary point دائما نقط نهاية عظمى او صغرى.

٢- الشروط الضرورية للحصول على نقط الاستقرار هي نفسها الشروط الكافية.

٣- إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة محدبة فان الدالة $k(x) = f(x)$ دالة مقعرة.

(٢) باستخدام طريقة لاجرانج حل المشاكل التالية

$$1) \text{Min. } z = x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 10x_2 + 13$$

$$\text{S.T } x_1x_2 - x_1 = 20$$

$$2) \text{Max. } z = -9x_1^2 - 4x_2^2 + 15x_1x_2 + 100$$

$$\text{S.T } 2x_1 + 5x_2 = 40$$

(٣) باستخدام شروط (kkt) حل النماذج التالية:

$$1) \text{Min. } z = -5x_1 + 10x_2$$

$$\text{S.T } x_1^2 + x_2^2 \leq 100$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 100$$

$$2) \text{Max. } z = e^{x_1+x_2} - x_1^2 - x_2^2$$

$$\text{S.T } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(٤) باستخدام طريقة نيوتن رافسون حل النماذج التالية:

$$1) \text{Min. } z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$$

$$\text{S.T } 2x_1 + 3x_2 \leq 10$$

عند النقطة المبدئية $x^{(0)} = [x_1 = 4, x_2 = 1]$

$$2) \text{Max. } z = (10 - x_1)^2 + (8 - x_2)^2 + 100$$

$$\text{S.T } 2x_1 + 3x_2 \leq 50$$

عند النقطة المبدئية $x^{(0)} = [x_1 = 8, x_2 = 5]$

(٥) باستخدام طريقة المستوى القاطع اوجد الحل التقريبي للمشاكل في (٤).

الجزء الثاني

أساليب البرمجة الهندسية

Geometric programming Techniques

الباب السادس: نماذج البرمجة الهندسية

Geometric Programming Models

Introduction (١-٦) المقدمة

Some Basic Concepts (٢-٦) بعض المفاهيم الأساسية

(٣-٦) نماذج البرمجة الهندسية ذات الحدود الموجبة

Posynomial Geometric Programming (PGP) Models

(٤-٦) نماذج البرمجة الهندسية العامة

Generalized (Signomial) Geometric Programming (GGP) Models

الباب السابع: طرق حل النماذج الهندسية ذات الحدود الموجبة

Solution Methods of Posynomial Geometric Programming (PGP) Models

Introduction (١-٧) المقدمة

Unconstrained (PGP) Model (٢-٧) النموذج الهندسي غير المقيد

Optimal Relative Weights Method (٣-٧) طريقة الاوزان النسبية المثلى

Duality Method (٤-٧) الطريقة البديلة

Constrained (PGP) Model (٥-٧) النموذج الهندسي المقيد

الباب الثامن: طرق حل النموذج الهندسي العام

Solution Methods of Generalized (Signomial) Geometric Programming Models

Introduction (١-٨) المقدمة

(٢-٨) النموذج العام

Generalized (Signomial) Geometric Programming (GGP) Model

Duality Method (٣-٨) الطريقة البديلة للحل

Partially Condensed Method (٤-٨) طريقة التكنيف الجزئي

Totally Condensed Method (٥-٨) طريقة التكنيف الكلي

الباب السادس

نماذج البرمجة الهندسية

Geometric Programing Models

Introduction

(١-٦) المقدمة

Some Basic Concepts

(٢-٦) بعض المفاهيم الأساسية

(٣-٦) نماذج البرمجة الهندسية ذات الحدود الموجب

Posynomial Geometric Programing (PGP) Models

(٤-٦) نماذج البرمجة الهندسية العامة

Generalized (Signomial) Geometric Programing (GGP) Models

Introduction

(١-٦) المقدمة

يعتبر أسلوب البرمجة الهندسية (GP) Geometric Programing أحد أساليب البرمجة غير الخطية، وهو يعتبر أسلوب حديث نسبيا لحل مشاكل البرمجة غير الخطية بالمقارنة بالأساليب التقليدية الأخرى المقدمة في الجزء الأول من هذا الكتاب.

وقد قدم أسلوب GP لأول مرة سنة ١٩٦١م، عندما واجه العالم Clarence Zenez المدير العلمي لمؤسسة وستينغ هوس Westinghouse corporation عدد من مشاكل في التصميمات الهندسية التي تتضمن مجموعة من المكونات ذات التكاليف، حيث تصاغ هذه المشاكل في شكل نماذج برمجة غير خطية معقدة نسبيا. وتعاون Clarence Zenez مع عالم الرياضيات Richard Duffin في جامعة ميلانو Mellon university الذي كان مهتم في هذا التوقيت بالنظرية البديلة (الثنائية) Duality theory للمشاكل غير الخطية وتطبيقاتها. ووجد Duffin ان مشاكل التصميم الهندسي في وستينغ هوس هي تطبيقات للنظرية التي قدمها.

وتعتمد طرق حل هذه المشاكل وتطبيقاتها التي قدمها Duffin وتلاميذه على العلاقة بين المتوسط الحسابي والهندسي او ما تسمى بالمتباينة الحسابية الهندسية -Arithmetic- Geometric inequality [7,3] على النحو التالي.

$$\text{الوسط الهندسي} \geq \text{الوسط الحسابي} \quad (6.1)$$

ومن هنا سمي هذا الأسلوب للبرمجة غير الخطية بالبرمجة الهندسية، حيث ترجع هذه التسمية الى:

- ١- يعتمد الأسلوب أساسا على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي،
- ٢- اول تطبيقات لهذا الأسلوب كانت في حل مشاكل التطبيقات الهندسية.

وفي سنة ١٩٦٧ قدم كلا من Duffin, Peterson and Zenez اول مرجع في أسلوب البرمجة الهندسية يشتمل على النظريات وامثلة توضيحية حيث تناول هذا المرجع المشاكل ذات الحدود الموجبة فقط Posynomial Terms [5,6].

ثم طور كلا من Wilde and Pally كلا على حده في نفس التوقيت النظريات وطرق حل المشاكل ذات الحدود الموجبة والسالبة أيضا، مما أدى الى حل كثير من المشاكل الحقيقية باستخدام هذا الأسلوب [8].

وفى سنة ١٩٧٦م نشر كل من Beighlez and Phillis مرجع البرمجة الهندسية التطبيقية تحت عنوان Applied Geometric Programming، حيث تم تناول العديد من التطبيقات الفعلية لأسلوب البرمجة الهندسية [7].

ويعتمد أسلوب البرمجة الهندسية من الأساليب الهامة التي يمكن استخدامها في حل الكثير من المشاكل الفعلية نظرا لتعدد الصياغات الرياضية لهذه المشاكل [3,6].

وفى هذا الجزء من الكتاب سوف نقدم اهم المفاهيم الأساسية المرتبطة بهذا الأسلوب، كذلك اهم مشاكل البرمجة غير الخطية ذات الحدود الموجبة وطرق حلها.

كذلك تناول المشاكل الاعم ذات الحدود الموجبة والسالبة وطرق حلها. سواء كانت المشاكل غير مقيدة او مقيدة.

ذلك بالإضافة الى ان أساليب البرمجة الهندسية يمكن استخدامها في حل الكثير من مشاكل البرمجة الأخرى مثل البرمجة الاحتمالية، البرمجة العشوائية، كذلك حل مشاكل في العلوم الأخرى مثل الإحصاء، والاقتصاد القياسي،... الخ.

Some Basic Concepts**(٢-٦) بعض المفاهيم الأساسية**

تعتمد طرق حل نماذج البرمجة الهندسية على:

- (١) النظرية البديلة للنماذج غير الخطية.
- (٢) المتباينة العددية الهندسية.
- (٣) تحويل النماذج غير المحدبة الى نماذج محدبة.

وفي هذا الفصل سوف نقدم بعض اهم التعريفات والمفاهيم الأساسية التي سوف تستخدم في هذا الباب والابواب التالية [3,8].

تعريف (١-٦): الدالة ذات الحدود الموجبة Posynomial function

يقال ان الدالة $P(x)$ دالة ذات حدود موجبة إذا كان:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{t=1}^T P_t(x) = \sum_{t=1}^T c_t x_1^{a_{t1}} x_2^{a_{t2}} \dots x_N^{a_{tN}} \\ &= \sum_{t=1}^T c_t \prod_{j=1}^N x_j^{a_{tj}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

حيث $a_{tj}, x_j, c_t > 0, j = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T$ قيم حقيقية.

ويسمى الحد $P_t(x)$ بالحد الواحد single-term او monomial.

وفي حالة اخذ c_t قيم بعضها موجب وبعضها سالب او بعبارة أخرى غير مقيدة بالإشارة الموجبة في هذه الحالة تسمى الدالة $P(x)$ بالدالة العامة signomial function او generalization function.

تعريف (٢-٦): يقال ان نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$\text{Min(or Max). } Z = g_0(x) \quad (6.3)$$

$$\text{S.T. } g_i(x) \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.4)$$

$$x_j > 0, j = 1, 2, \dots, N \quad (6.5)$$

حيث:

$$g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} P_{it}(x) = \sum_{t=1}^{T_i} c_{it} \prod_{j=1}^N x_j^{a_{itj}}, i = 0,1,2, \dots, m \quad (6.6)$$

$$c_{it} > 0, i = 0,1,2, \dots, m \quad (6.7)$$

نموذج ذو حدود موجبة Posynomial model.

تعريف (٣-٦): يقال ان نموذج البرمجة الهندسية

$$Min (orMax). Z = \sum_{t=1}^T \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{itj} \quad (6.8)$$

$$S.T \ g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{itj} \leq \sigma_i \quad (6.9)$$

حيث

$$\sigma_{it} = \pm 1, \sigma_i = \pm 1 \ c_{it} > 0, x_j > 0 \quad (6.10)$$

نموذج ذو حدود موجبة وسالبة او النموذج العام (generalization) model (signomial).

تعريف (٣-٦): القيد الفعال (الحرج) active (tight) constraint

هو القيد الذي يتحقق في شكل متساوية (=) في الحل الأمثل

مثال (٢-٦): إذا اعتبرنا القيد

$$2x_1 + 7x_2 \leq 37$$

فاذا كان قيم x_1, x_2 في الحل الأمثل على النحو

$$x_1^* = 1, x_2^* = 5$$

وبالتالي في الحل الأمثل يتحقق القيد في شكل متساوية حيث

$$2(1) + 7(5) = 37$$

تعريف (٤-٦): القيد المرن (غير الحرج) loose constraint

هو القيد الذي يتحقق في شكل متباينة (\geq) في الحل الأمثل.

مثال (٣-٦): إذا اعتبرنا القيد

$$5x_1 - 3x_2 \geq 0$$

فاذا كان $x_1^* = 4, x_2^* = 2$ فان

$$5(4) - 3(2) > 10$$

وبالتالي في الحل الأمثل تحقق القيد في شكل متباينة.

تعريف (٥-٦): الشرط الطبيعي normality condition لأوزان الحدود في دالة الهدف

هو: مجموع الاوزان النسبية للحدود في دالة الهدف في الوضع الأمثل تساوى واحد.

مثال (٤-٦):

إذا فرضنا عدد الحدود في دالة الهدف 4 حدود وان الوزن النسبي للحد في دالة الهدف في الحل الأمثل , سوف نشير له بالرمز $w_j, j = 1, 2, 3, 4$ فان:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

تعريف (٦-٦): الوزن النسبي للحد في دالة الهدف في الوضع الأمثل

ويعتمد أسلوب البرمجة الهندسية على تحديد الوزن النسبي لكل حد من الحدود بالنسبة لدالة الهدف في الوضع الأمثل او بعبارة أخرى كل حد يمثل نسبة كام من دالة الهدف. وعن طريق إيجاد النسب المثلى نوجد الحل الأمثل للنموذج.

وسوف نوضح ذلك فيما يلي [7].

مثال (٥-٦): إذا فرضنا نموذج البرمجة الهندسية غير المقيد التالي اوجد بحيث

$$\text{Min. } z = \underbrace{100x^{-1}}_{(a) \text{ الحد الأول}} + \underbrace{20x^2}_{(b) \text{ الحد الثاني}}$$

ومن الشروط الضرورية (انظر الباب ٤، ٥) نجد ان

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -100x^{-2} + 40x = 0 \rightarrow \quad (1)$$

$$x^* = \left[\frac{100}{40} \right]^{\frac{1}{3}} \rightarrow$$

$$z^* = 100 \left[\frac{100}{40} \right]^{\frac{1}{3}} + 20 \left[\left[\frac{100}{40} \right]^{\frac{1}{3}} \right]^2 = 100 \left[\frac{40}{100} \right]^{\frac{1}{3}} + 20 \left[\frac{100}{40} \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$z^* = 73.91 + 36.62 = 110.53 \quad (2)$$

ومن (2) نجد ان الاسهام النسبي لقيمة الحد الأول (a) في دالة الهدف z يساوى 73.91 وقيمة الحد الثاني (b) في دالة الهدف z يساوى 36.62 وبالتالي يصبح الوزن النسبي للحد (a) في دالة الهدف المثلى:

$$\frac{73.91}{110.53} \times 100 = 66.87\%$$

كذلك للحد (b)

$$\frac{36.62}{110.53} \times 100 = 33.13\%$$

وكما ذكرنا أعلاه، انه بمعرفة الوزن النسبي الأمثل للحد يمكن إيجاد القيمة المثلى لدالة الهدف، كما سوف نوضح في الفصول التالية.

(٣-٦) نماذج البرمجة الهندسية ذات الحدود الموجبة

Posynomial Geometric Programming (PGP) Models

في بداية تقديم أسلوب البرمجة الهندسية كان التعامل فقط مع النماذج ذات الحدود الموجبة على النحو التالي.

أولاً: بالنسبة للنموذج غير المقيد:

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad (6.8)$$

حيث $c_{0t}, x_j > 0$, قيم حقيقية a_{0tj}

ثانياً: بالنسبة للنموذج المقيد

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}$$

$$\text{S.T. } y_i(x) = \sum_{i=1}^{T_i} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ity}} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.9)$$

$$c_{it} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (6.10)$$

وهذا النوع من النماذج في أولاً او ثانياً فانه يوجد عديد من طرق الحل أهمها:

- (١) طريقة الاوزان النسبية المثلى
- (٢) الطريقة البديلة
- (٣) طرق التكتيف الجزئي او الكلى

وفى الباب التالي (٧) سوف نقدم الطرق (١)، (٢)، وفى الباب الثامن سوف نقدم بعض طرق التكتيف في (٣).

(٤-٦) نماذج البرمجة الهندسية العامة

Generalized (signomial) Geometric Programing (GGP) Models

منذ سنة ١٩٦١ وبدا التطوير في أساليب البرمجة الهندسية بحيث يشتمل النموذج على الحدود موجبة وحدود سالبة أيضا.

اولا: بالنسبة للنموذج غير المقيد:

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{0t} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad (6.11)$$

ثانيا: بالنسبة للنموذج المقيد

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{0t} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}$$

S.T.

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ity}} \leq \sigma_i \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (6.12)$$

حيث

$$\sigma_{it} = \pm 1 \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \quad , t = 1, 2, \dots, T_i$$

$$c_{it}, x_j > 0 \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \quad , j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sigma_i = \pm 1 \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m$$

وهذا النوع من النماذج هو الحالة العامة، ومعظم المشاكل الفعلية يمكن صياغتها كنماذج من هذا النوع، وأيضا يوجد عديد من الطرق لحل لهذه النماذج أهمها:

(١) الطريقة البديلة.

(٢) طرق التكنيف الجزئي او الكلى.

وفى الباب (٨) سوف تقدم الطرق (١)، (٢).

الباب السابع

طرق حل النماذج الهندسية ذات الحدود الموجبة

Solution Methods of Posynomial Geometric Programing (PGP) Models

Introduction	(١-٧) المقدمة
Unconstrained (PGP) Model	(٢-٧) النموذج الهندسي غير المقيد
Optimal Relative Weights Method	(٣-٧) طريقة الاوزان النسبية المثلى
Duality Method	(٤-٧) الطريقة البديلة
Constrained (PGP) Model	(٥-٧) النموذج الهندسي المقيد

Introduction**(١-٧) المقدمة**

في هذا الباب سوف نقدم نماذج البرمجة الهندسية ذات الحدود الموجبة **Posynomial Geometric Programing Models** وطرق حلها في الحالتين التاليتين:

أولاً: النماذج غير المقيدة الموجبة **Unconstrained Posynomial Models**

ثانياً: النماذج المقيدة الموجبة **Constrained Posynomial Models**

وبالنسبة للنماذج غير المقيدة توجد طرق متعددة لحلها وفي هذا الباب سوف نقدم طريقة الأوزان النسبية المثلى **Optimal Relative Weights Method** والطريقة البديلة **duality method** على التوالي.

وبالنسبة للنماذج المقيدة عادة يتم تحويلها الى نماذج غير مقيدة ويتم حلها بالطرق المذكورة أعلاه.

وبالنسبة للنماذج المقيدة وغير المقيدة فإنه توجد طرق متعددة لحلها أيضا وفي هذا الباب سوف نقدم طريقتي:

- طريقة الأوزان النسبية المثلى.
- الطريقة البديلة.

Unconstrained (PGP) Model**(٢-٧) النموذج الهندسي غير المقيد**

في هذا الفصل سوف نعتبر النموذج الهندسي ذو الحدود الموجبة غير المقيد على النحو التالي:

$$\text{Min. } y(x) = \sum_{t=1}^T c_t p_t(x) = \sum_{t=1}^T c_t \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}} \quad (7.1)$$

حيث

$$c_t, x_j > 0, j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T$$

ويكون المطلوب تحديد القيم المثلى لكل من $x_j, y(x), j = 1, 2, \dots, n$.

وبما ان من شروط الأمثلية الضرورية ان

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_j} = \sum_{t=1}^T c_t a_{tj} x_j^{(a_{tj}-1)} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}} = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (7.2)$$

وبما ان $x_j > 0$ بالتالي بضرب طرفي (7.2) في $x_j^{-(a_{tj}-1)}$ فان

$$\sum_{t=1}^T c_t a_{tj} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}} = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (7.3)$$

وكما ذكرنا سابقا ان أسلوب البرمجة الهندسية يعتمد على إيجاد الوزن النسبي الأمثل لكل حد من الحدود في دالة الهدف وعن طريقها يمكن إيجاد القيم المثلى لكل من دالة الهدف $y(x)$ كذلك المتغيرات القرارية $x_j, j = 1, 2, \dots, n$.

وتوجد طرق متعددة لأسلوب البرمجة الهندسية في حل النموذج أعلاه، وفي الفصل التالي سوف نقدم طريقة الاوزان النسبية المثلى [6,7].

(٣-٧) طريقة الاوزان النسبية المثلى

Optimal Relative Weights Method

تعتمد هذه الطريقة على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي ذلك بالإضافة الى شروط التعامد orthogonality condition والشرط الطبيعي normality condition فاذا رمزنا للوزن النسبي الأمثل للحد رقم (t) بالرقم w_t^* بحيث ان:

$$\sum_{t=1}^T w_t^* = 1 \quad (7.4)$$

حيث تعرف المعادلة (7.4) بالشرط الطبيعي للأوزان.

فاذا رمزنا للحل الأمثل بالرمز $y(x^*)$ ، x_j^* ، $j = 1, 2, \dots, n$ فان:

$$w_t^* = \frac{c_t p_t(x^*)}{y^*(x)} \quad , t = 1, 2, \dots, T \quad (7.5)$$

وبالتعويض في (7.3) ب w_t^* نجد ان

$$\sum_{t=1}^T (a_{tj} w_t^*) y^*(x) = 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (7.6)$$

وبما ان $y^*(x)$ تأخذ قيم موجبة فقط فبقسمة طرفي (7.6) على $y^*(x)$ فان:

$$\sum_{t=1}^T a_{tj} w_t^* = 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (7.7)$$

وتعرف الشروط في (7.7) بشروط التعامد.

ومما سبق يمكن إعادة كتابة $y^*(x)$ على النحو التالي باستخدام العلاقة بين المتوسط الحسابي والهندسي في (6. 1) على النحو التالي

$$y^*(x) = \prod_{t=1}^T (y^*(x))^{w_t} = \prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t p_t(x^*)}{w_t^*} \right]^{w_t^*}$$

$$= \prod_{t=1}^T \left(\frac{c_t}{w_t^*} \right)^{w_t^*} \prod_{t=1}^T [p_t(x^*)]^{w_t^*} \quad (7.8)$$

وبما ان المقدار $\{\prod_{t=1}^T [p_t(x^*)]^{w_t^*}\}$ يساوى واحد حيث

$$\prod_{t=1}^T [p_t(x^*)]^{w_t^*} = \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^n (x_j^*)^{a_{tj} w_t^*} = \prod_{j=1}^n (x_j^*)^{\sum_{t=1}^T a_{tj} w_t^*} = 1 \quad (7.9)$$

وبالتعويض في (7.8) بـ (7.9) نجد ان:

$$y_0^*(x) = \prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t}{w_t^*} \right]^{w_t^*} \quad (7.10)$$

ومن العلاقة (7.10) فانه يمكن إيجاد $y_0^*(x)$ عن طريق w_t^* وليس عن طريق x_j ،

ونلاحظ ان عدد المعادلات الخطية في (7.6)، (7.7) تساوى $(n + 1)$ حيث يمثل القيد (7.4) الشرط الطبيعي normality condition وتمثل القيود في (7.2) شروط التعامد .orthogonality conditions

فاذا كان عدد الحدود يساوى عدد المعادلات الخطية بمعنى

$$T = n + 1 \quad (7.11)$$

فان عدد المعادلات الخطية المستقلة (حيث الحدود مستقلة) تساوى عدد المجاهيل w_t ،

$t = 1, 2, \dots, T$ وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٧-١): اوجد قيم x_1, x_2 حيث:

$$Min. y_0(x) = 5x_1^{-3}x_2^{-2} + 4x_1^3x_2 + 3x_1^{-3}x_2^3$$

الحل:

بما ان $T = n + 1 = 3$ فان عدد الحدود يساوى عدد المعادلات.

١- نكون المعادلات في (7.4)، (7.7) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \\ -3w_1 + 3w_2 - 3w_3 &= 0 \\ -2w_1 + w_2 + 3w_3 &= 0 \end{aligned}$$

٢- وبحل المعادلات أعلاه نجد ان:

$$w_1^* = 0.4, w_2^* = 0.5, w_3^* = 0.1$$

وبالتالي فان

$$y_0^*(x) = \left[\frac{5}{0.4} \right]^{0.4} \left[\frac{4}{0.5} \right]^{0.5} \left[\frac{3}{0.1} \right]^{0.1} = 10.915$$

٣- ويمكن إيجاد القيم المثلى لـ x_1, x_2 من العلاقة (7.5) على النحو:

٤- الحد الأول

$$\begin{aligned} 5x_1^{-3}x_2^{-2} &= 0.4(10.915) \rightarrow x_1^{-3} = 0.8732x_2^2 \rightarrow x_2 \\ &= \sqrt{1.145213x_1^{-3}} \rightarrow x_2 = 1.07015x_1^{\frac{-3}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

الحد الثاني

$$4x_1^3x_2 = 0.5(10.915) = 5.4575 \rightarrow x_2 = 1.3644x_1^3 \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد ان

$$x_1^* = 1.175820, x_2^* = 0.537176$$

ملاحظة: يعتبر الحل $x_1^* = 1.175820, x_2^* = 0.537176$

$y_0^*(x) = 10.915$ حل أمثل وحيد ويرجع ذلك الى ان عدد الحدود المستقلة

يساوى عدد المعادلات.

ولكن في كثير من المشاكل الفعلية تكون عدد الحدود أكبر من $(n + 1)$ او بعباره أخرى:

$$T > (n + 1)$$

في هذه الحالة يوجد عدد لانهائي من الحلول الممكنة كما سوف نوضح في المثال

التالي، ولتحديد الحل الأمثل من هذه الحلول الممكنة قدم كل من Duffin and

Zenez طريقة تسمى بالطريقة البديلة dual method للحصول على الحل الأمثل من الحلول الممكنة، كما سوف نوضح ذلك في الفصل التالي.

مثال (٧-٢): اوجد قيم x_1, x_2, x_3 التي تجعل:

$$\text{Min. } y_0(x) = 40x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} + 20x_1x_2 + 10x_1x_3 + 40x_2x_3 + 5x_1$$

الحل:

وفقا للشروط الطبيعي وشروط التعامد نحصل على المعادلات التالية:

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 &= 1 \\ -w_1 + w_2 + w_3 + w_5 &= 0 \\ -w_1 + w_2 + w_4 &= 0 \\ -w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

والمعادلات (1) في 5 مجاهيل w_t ، $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ويمكن حلها بدلالة احدى المجاهيل $(5-4=1)$ وليكن w_5 فان

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5} w_5 & , & \quad w_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} w_5 \\ w_3 &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5} w_5 & , & \quad w_4 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} w_5 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

وبما ان $0 \leq w_5 \leq 1$ فان:

$$\frac{1}{3} \leq w_1 \leq \frac{2}{5} , 0 \leq w_2 \leq 1 , 0 \leq w_3 \leq \frac{1}{5} , \frac{1}{5} \leq w_4 \leq \frac{1}{3} \quad (3)$$

ومن (3) نجد انه يوجد عدد كبير من الحلول الممكنة فعند وضع أي قيمه من القيم الممكنة لـ w_5 فسوف تناظرها عدد كبير من قيم w_t ، $t = 1, 2, 3, 4$ ، الممكنه.

تعريف (٧-١): درجة الصعوبة Degree of difficulty

عرف كل من Duffin and Zenez الفرق بين T ، $(n + 1)$ بتعبير "درجة الصعوبة" ورمز لها بالرمز (dd) حيث

$$dd = T - (n + 1) \quad (7.11)$$

فعندما $dd = 0$ فانه يوجد حل وحيد للمعادلات الخطية ويكون حل امثل كما في المثال السابق (٧-١) .

ولكن كلما زادت قيمة (dd) زادت صعوبة حل المعادلات حيث يكون عدد الحدود (او بعبارة أخرى الاوزان النسبية w_t) أكبر من عدد المعادلات. وفي هذه الحالة قدم Duffin الطريقة البديلة للحصول على الحل الأمثل كما سوف نوضح في الفصل التالي.

Duality Method

(٤-٧) الطريقة البديلة

وتعتمد هذه الطريقة على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي وتحويل المشكلة الاصلية primal problem الى المشكلة البديلة dual problem المناظرة لها، فتكون دالة الهدف للمشكلة البديلة دالة مقعرة concave function وتكون فئة القيود فئة محدبة convex constraints، وبالتالي نحصل على الحل الأمثل للمشكلة البديلة والمشكلة الاصلية أيضا [6].

وسوف نقدم هذه الطريقة على النحو التالي:

أولاً: ١- إذا فرضنا الاعداد الموجبة $v_t, t = 1, \dots, T$ ، والاوزان النسبية بالرمز w_t ، فمن العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي العامة نجد ان

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_T v_T \geq v_1^{w_1}, v_2^{w_2}, \dots, v_T^{w_T} \quad (7.12)$$

ويتساوى طرفي في (7.12) في حالة واحدة عندما

$$v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_T \quad (7.13)$$

١- وباستخدام هذه العلاقة فانه يمكن إعادة كتابة $y_0(x)$ على النحو التالي

$$y_0(x) = \sum_{t=1}^T c_t p_t(x) = \sum_{t=1}^T w_t \left[\frac{c_t p_t}{w_t} \right] \quad (7.14)$$

٢- ومن العلاقة (7.12) والعلاقة (7.14) نجد ان

$$\sum_{t=1}^T c_t p_t(x) \geq \prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t p_t(x)}{w_t} \right]^{w_t} = \prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t}{w_t} \right]^{w_t} \quad (7.15)$$

حيث أن : $\prod_{t=1}^T [p_t(x)]^{w_t} = \prod_{j=1}^n (x_j^*)^{\sum_{t=1}^T a_{tj} w_t^*} = 1$

وتمثل الدالة $\prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t}{w_t} \right]^{w_t}$ في (7.15) بالدالة البديلة dual function للدالة الاصلية في (7.1).

ثانياً

$$١- \text{بما ان } y_0(x) = \sum_{t=1}^T c_t \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}}$$

٢- إذا فرضنا ان

$$u_j = \ln x_j$$

فان

$$x_j = e^{u_j} \quad (7.16)$$

٣- وبالتالي فان :

$$y_0(x) = \sum_{t=1}^T c_t \prod_{j=1}^n e^{u_j a_{tj}} = \sum_{t=1}^T c_t e^{\sum_{j=1}^n u_j a_{tj}} \quad (7.17)$$

ثالثا

تصبح المشكلة البديلة للمشكلة الاصلية في (7.14) على النحو التالي:

$$Max. d(w) = \prod_{t=1}^T \left[\frac{c_t}{w_t} \right]^{w_t} \quad (7.18)$$

S. T.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=1}^T w_t &= 1, \quad w_t > 0 \\ \sum_{t=1}^T a_{tj} w_t &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

ونلاحظ ان فئة القيود في (7.19) فئة محدبة لقيود خطية اما الدالة $d(w)$ فهي دالة مقعرة ممكن تحويلها الى دالة خطية على النحو التالي:

$$H(w) = \ln d(w) = \sum_{t=1}^T \ln \left[\frac{c_t}{w_t} \right]^{w_t} = - \sum_{t=1}^T w_t \ln \left(\frac{w_t}{c_t} \right) \quad (7.20)$$

وبما ان الدالة في (7.20) مقعرة والقيود في (7.19) خطية يمكن حلها باستخدام شروط الأمثلية والحصول على الحل الأمثل المطلق كما سوف نوضح ذلك في المثال التالي.

وفيما يلي سوف نكتب خطوات التحويل والحل في الخوارزم التالي.

خوارزم (٧-١):

- الخطوة (١): ١- حدد كل من n, T ، وبالتالي $w_t, t = 1, \dots, T$.
- ٢- اوجد درجة الصعوبة (dd) فإذا كانت $dd \geq 1$ أكمل الخطوات التالية.
- الخطوة (٢): ١- اوجد معادلات الشرط الطبيعي وشروط التعامد كما في (7.4)، (7.7).
- ٢- اوجد النموذج المقيد في (7.18)، (7.19).
- ٣- كون الدالة $H(w)$ كما في (7.20).
- الخطوة (٣): ١- باستخدام شروط الأمثلية حل النموذج (7.19)، (7.20) والحصول على القيم المثلي $w_t^*, t = 1, \dots, T$.
- ٢- اوجد $y_0^*(x)$ باستخدام المعادلة (7.17).
- ٣- اوجد $x_j^*, j = 1, 2, \dots, n$ باستخدام العلاقة (7.5).

مثال (٣-٧): اعتبر مثال (٢-٧) صفحة (١٣٤)

١- بما ان

$$dd = 5 - (3 + 1) = 1 > 0$$

٢- نوجد المشكلة البديلة

$Max. d(w)$

$$= \left[\frac{40}{w_1} \right]^{w_1} \cdot \left[\frac{20}{w_2} \right]^{w_2} \cdot \left[\frac{10}{w_3} \right]^{w_3} \cdot \left[\frac{40}{w_4} \right]^{w_4} \cdot \left[\frac{5}{w_5} \right]^{w_5} \quad (1)$$

$S. T.$

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 &= 1 \\ -w_1 + w_2 + w_3 + w_5 &= 0 \\ -w_1 + w_2 + w_4 &= 0 \\ -w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ 0 \leq w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

الحل:

- ١- نحول دالة الهدف في (1) الى دالة في (w_5) فقط بالتعويض بـ w_1, w_2, w_3, w_4 من (2) في مثال (٢-٧) فتكون على النحو

$$d(w_5) = \left\{ \left[\frac{40}{\frac{1}{5}(2-w_5)} \right]^{\left(\frac{2-w_5}{5}\right)} \left[\frac{20}{\frac{1}{5}(1-3w_5)} \right]^{\left(\frac{1-3w_5}{5}\right)} \left[\frac{10}{\frac{1}{5}(1-3w_5)} \right]^{\left(\frac{1-3w_5}{5}\right)} \right. \\ \left. \left[\frac{40}{\frac{1}{5}(1+2w_5)} \right]^{\left(\frac{1+2w_5}{5}\right)} \left[\frac{5}{w_5} \right]^{(w_5)} \right\} \quad (3)$$

٢- نوجد لوغاريتم طرفي المعادلة (3)

$$H(w_5) = - \left\{ \left(\frac{2-w_5}{5} \right) \ln \left[\frac{2-w_5}{200} \right] + \left(\frac{1-3w_5}{5} \right) \ln \left[\frac{1-3w_5}{100} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{1-3w_5}{5} \right) \ln \left[\frac{1-3w_5}{50} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{1+2w_5}{5} \right) \ln \left[\frac{1+2w_5}{200} \right] + w_5 \ln \left[\frac{w_5}{5} \right] \right\} \quad (4)$$

حيث $H(w_5) = \ln d(w_5)$

وباستخدام شروط الأمثلية نحصل على القيمة المثلى لـ w_5 على النحو

$$\frac{\partial H(w_5)}{d(w_5)} = \frac{1}{5} \left[1 + \ln \left(\frac{2-w_5}{200} \right) \right] + \frac{3}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{1-3w_5}{100} \right) \right] \\ + \frac{3}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{1-3w_5}{50} \right) \right] - \frac{2}{5} \left[1 + \ln \left(\frac{1+2w_5}{200} \right) \right] \\ - \left[1 + \left(\frac{w_5}{5} \right) \right] = 0 \rightarrow$$

$$\ln \left[(2-w_5)^{\frac{1}{5}} (1-3w_5)^{\frac{6}{5}} (1+2w_5)^{\frac{-2}{5}} w_5^{-1} \right] \\ = \ln \left[\frac{(200)^{\frac{1}{5}} (100)^{\frac{3}{5}} (50)^{\frac{3}{5}}}{(200)^{\frac{2}{5}} (5)} \right] \rightarrow$$

$$(2 - w_5)^{\frac{1}{5}}(1 - 3w_5)^{\frac{6}{5}}(1 + 2w_5)^{\frac{-2}{5}}(w_5)^{-1} = 11.45 \quad (5)$$

$$w_5^* = 0.070$$

وبالتعويض في المعادلات (2) في مثال (٧-٢) نجد ان:

$$\left. \begin{aligned} w_1^* &= 0.4 - 0.2(0.0709) = 0.3858 \\ w_2^* &= w_3^* = 0.2 - 0.6(0.0709) = 0.1575 \\ w_4^* &= 0.2 + 0.4(0.0709) = 0.2289 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ومن العلاقة (7.5) يمكن إيجاد الحل الأمثل للمشكلة الاصلية primal problem على النحو التالي

$$y_0^*(x) = \left\{ \left[\frac{40}{0.3858} \right]^{0.3858} \cdot \left[\frac{20}{0.1575} \right]^{0.1575} \cdot \left[\frac{10}{0.1575} \right]^{0.1575} \cdot \left[\frac{40}{0.2284} \right]^{0.2284} \cdot \left[\frac{5}{0.0709} \right]^{0.0709} \right\} = 108.75 \quad (7)$$

ومن (7) يمكن إيجاد القيم المثلى لـ x_1, x_2, x_3 على النحو التالي:

$$x_1^* = \left[\frac{(108.75)(0.0709)}{5} \right] = 1.545$$

$$x_2^* = \left[\frac{(108.75)(0.2284)}{40(1.107)} \right] = 0.561$$

$$x_3^* = \left[\frac{(108.75)(0.1575)}{10(1.542)} \right] = 1.107$$

ملحوظة: يلاحظ ان المشكلة الاصلية primal problem تمثل نموذج غير مقيد، ولكن للحصول على الحل تم تحويلها الى المشكلة البديلة dual problem التي تمثل نموذج مقيد.

(٥-٧) النموذج الهندسي الموجب المقيد

Constrained (PGP) model

في الفصول السابقة من هذا الباب تناولنا نماذج البرمجة الهندسية غير المقيدة وطرق حلها. وفي هذا الفصل والفصول التالية سوف نقدم النموذج الهندسي الموجب المقيد بقيود موجبة أيضا في الشكل متباينة على النحو التالي:

$$\text{Min. } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} C_{0t} P_t(x) \quad (7.21)$$

S.T.

$$y_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} C_{it} Q_{it}(x) \leq 1 \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (7.22)$$

حيث

$$P_t(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad , t = 1, 2, \dots, T \quad (7.23)$$

$$Q_{it}(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (7.24)$$

$$x_j > 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (7.25)$$

والنموذج المقيد أعلاه يختلف عن النموذج غير المقيد في وجود قيود موجبة في (7.22)، وهذه القيود الموجبة يمكن ان يعاد كتابتها باستخدام المتباينة العامة للوسط الحسابي والوسط الهندسي مع الأخذ في الاعتبار ان الاوزان النسبية للحدود في القيد الواحد لا تحقق الشرط الطبيعي بمعنى ان مجموع الاوزان النسبية في القيد الواحد لا تساوى واحد.

فاذا فرضنا المتغيرات الموجبة δ_{it} تناظر الحد رقم t في القيد رقم i وباستخدام العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي نجد ان

$$\delta_{i1}v_1 + \delta_{i2}v_2 + \dots + \delta_{iT_i}v_{T_i} \geq v_1^{\delta_{i1}}, v_1^{\delta_{i2}}, \dots, v_{T_i}^{\delta_{iT_i}} \quad (7.26)$$

فاذا فرضنا u_{it} حيث

$$u_{it} = \delta_{it}v_t \quad (7.27)$$

فانه يمكن إعادة كتابة العلاقة (7.26) على النحو التالي

$$u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{iT_i} \geq \left(\frac{u_{i1}}{\delta_{i1}}\right)^{\delta_{i1}} \left(\frac{u_{i2}}{\delta_{i2}}\right)^{\delta_{i2}} \dots \left(\frac{u_{iT_i}}{\delta_{iT_i}}\right)^{\delta_{iT_i}} \quad (7.28)$$

وبافتراض ان w'_{it} هو الوزن النسبي المناظر للحد رقم t في القيد رقم i ، ونلاحظ انه في القيود لا يتحقق الشرط الطبيعي للأوزان (بمعنى ان مجموع الاوزان النسبية للحدود في القيد الواحد لا تساوى واحد)، ولكن يمكن افتراض ان مجموع الاوزان في القيد i تساوى λ_i بمعنى

$$\lambda_i = w'_{i1} + w'_{i2} + w'_{i3} + \dots + w'_{iT_i} = \sum_{t=1}^{T_i} w'_{it} \quad (7.29)$$

ومن (7.29)، (7.26) نجد ان:

$$\delta_{it} = \frac{w'_{it}}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.30)$$

وبالتعويض في (7.28) بـ (7.30) فان:

$$(u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{iT_i}) \geq \left[\frac{u_{i1}}{w'_{i1}}\right]^{\frac{w'_{i1}}{\lambda_i}} \left[\frac{u_{i2}}{w'_{i2}}\right]^{\frac{w'_{i2}}{\lambda_i}} \dots \left[\frac{u_{iT_i}}{w'_{iT_i}}\right]^{\frac{w'_{iT_i}}{\lambda_i}} \lambda_i \quad (7.31)$$

او

$$[u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{iT_i}]^{\lambda_i} \geq \left[\frac{u_{i1}}{w'_{i1}}\right]^{w'_{i1}} \left[\frac{u_{i2}}{w'_{i2}}\right]^{w'_{i2}} \dots \left[\frac{u_{iT_i}}{w'_{iT_i}}\right]^{w'_{iT_i}} \lambda_i^{\lambda_i} \quad (7.32)$$

وباستخدام العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي العامة، فإنه يمكن إعادة كتابة $y_0(x)$ و $y_i(x)$ على النحو التالي:

$$[y_0(x)]^{\lambda_0} \geq \left[\frac{C_{01}P_1(x)}{w'_{01}} \right]^{w'_{01}} \cdot \left[\frac{C_{02}P_2(x)}{w'_{02}} \right]^{w'_{02}} \cdots \left[\frac{C_{0T_0}P_{T_0}(x)}{w'_{0T_0}} \right]^{w'_{0T_0}} \cdot \lambda_0^{\lambda_0} \quad (7.33)$$

$$1 \geq [y_i(x)]^{\lambda_i} \geq \left[\frac{C_{i1}Q_1}{w'_{i1}} \right]^{w'_{i1}} \cdot \left[\frac{C_{i2}Q_2}{w'_{i2}} \right]^{w'_{i2}} \cdots \left[\frac{C_{iT_i}Q_{T_i}}{w'_{iT_i}} \right]^{w'_{iT_i}} \cdot \lambda_i^{\lambda_i}$$

$$, i = 1, 2, \dots, m \quad (7.34)$$

وبما ان جميع الحدود في (7.33)، (7.34) موجبة فيضرب الأطراف المتناظرة في المتباينات أعلاه نجد

$$[y_0(x)]^{\lambda_0} \geq \left\{ \prod_{t=1}^{T_0} \left[\frac{C_{0t}P_t(x)}{w'_{0t}} \right]^{w'_{0t}} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{C_{it}Q_{it}}{w'_{it}} \right]^{w'_{it}} \cdot \lambda_i^{\lambda_{i0}} \lambda_0 \right\} \quad (7.35)$$

حيث

$$\lambda_0 = w'_{01} + w'_{02} + \cdots + w'_{0T_0} = 1 \quad (7.36)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{T_0} a_{itj} w'_{it} = 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (7.37)$$

ويمكن إعادة كتابة المتباينة رقم (7.35) على النحو التالي:

$$y_0(x) \geq \left\{ \prod_{t=1}^{T_0} \left[\frac{C_{0t}}{w'_{0t}} \right]^{w'_{0t}} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{C_{it}\lambda_i}{w'_{it}} \right]^{w'_{it}} \right\} \quad (7.38)$$

حيث

$$\lambda_i = w'_{i1} + w'_{i2} + \cdots + w'_{iT_i} \quad (7.39)$$

وتصبح المشكلة البديلة المناظرة للمشكلة الاصلية على النحو التالي:

$$\text{Max } d(w') = \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{C_{it} w'_{i0}}{w'_{it}} \right]^{w'_{it}} \right\} \quad (7.40)$$

S.T.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T_0} w'_{0t} &= 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{T_0} a_{itj} w'_{it} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ w'_{i0} &= \sum_{t=1}^{T_i} w'_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

ونجد في النموذج (7.41)، (7.40) ان:

$$w'_{00} = 1, \quad w'_{i0} = \lambda_i$$

وان عدد الحدود T على النحو

$$T = \sum_{i=0}^m T_i \quad (7.42)$$

والنموذج (7.40) يناظر النموذج (7.19)، (7.18) في الفصل (٧-٤) وبالتالي يمكن حله باستخدام الخوارزم (٧-١).

وفي حالة درجة الصعوبة (dd) حيث

$$dd = T - (n + 1) = 0$$

نحصل على حل وحيد أمثل مطلق، وفي حالة $dd > 0$ فانه يتم تحويل النموذج الى نموذج مقعر حيث

$$d^*(w') = y_0^*(x)$$

ويمكن إيجاد القيم المثلى لـ x_1, x_2, \dots, x_n من العلاقة التالية

$$w_{0t}'[y_0^*(x)] = c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}$$

حيث ان الوزن العام generalized weight للحد رقم t في القيد i يرمز له بالرمز w_{it} حيث

$$w_{it} = \frac{w'_{it}}{\sum_t w'_{it}} = c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \quad (7.43)$$

مثال (٤-٧): اعتبر النموذج التالي [6,7]:

$$\text{Min. } y_0(x) = 0.3x_1x_3^{1.2} + 0.5x_1^{-1.5}x_2^{-1.2}x_3^{-1.4} + 0.2x_2^{1.3} \quad (1)$$

S.T.

$$\left. \begin{aligned} 0.8x_1x_3 &\leq 1 \\ 1.2x_1x_2^{-1} &\leq 1 \\ x_1x_2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

الحل:

١- نعرف الاوزان النسبية في دالة الهدف والاوزان في القيود على النحو التالي في دالة الهدف

$$w'_{01}, w'_{02}, w'_{03}$$

وفى القيود على النحو w'_{11}, w'_{21}

٢- نكون القيد المناظر للشرط الطبيعي وقيود التعامد على النحو:

$$\left. \begin{aligned} w'_{01} + w'_{02} + w'_{03} &= 1 & (a) \\ w'_{01} - 1.5w'_{02} + w'_{11} + 1.2w'_{21} &= 0 & (b) \\ -1.2w'_{02} + 1.3w'_{03} + w'_{11} &= 0 & (c) \\ 1.2w'_{01} - 1.4w'_{02} + w'_{11} &= 0 & (d) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

٣- دالة الهدف البديلة $d(w')$

$$\begin{aligned}
 & \text{Max. } d(w') \\
 & = \left\{ \left[\frac{C_{01}w'_{00}}{w'_{01}} \right]^{w'_{01}} \left[\frac{C_{02}w'_{00}}{w'_{02}} \right]^{w'_{02}} \left[\frac{C_{03}w'_{00}}{w'_{03}} \right]^{w'_{03}} \right\} \cdot \left\{ \left[\frac{C_{11}w'_{10}}{w'_{11}} \right]^{w'_{11}} \left[\frac{C_{21}w'_{20}}{w'_{21}} \right]^{w'_{21}} \right\} \\
 & = \left\{ \left[\frac{C_{01}}{w'_{01}} \right]^{w'_{01}} \cdot \left[\frac{C_{02}}{w'_{02}} \right]^{w'_{02}} \cdot \left[\frac{C_{03}}{w'_{03}} \right]^{w'_{03}} \cdot [C_{11}]^{w'_{11}} \cdot [C_{21}]^{w'_{21}} \right\}
 \end{aligned}$$

وبالتعويض في الدالة $d(w')$ بقيم c_{it} نجد ان:

$$\text{Max. } d(w') = \left\{ \left[\frac{0.3}{w'_{01}} \right]^{w'_{01}} \cdot \left[\frac{0.5}{w'_{02}} \right]^{w'_{02}} \cdot \left[\frac{0.2}{w'_{03}} \right]^{w'_{03}} \cdot [0.8]^{w'_{11}} \cdot [1.2]^{w'_{21}} \right\} \quad (4)$$

والدالة (4) والقيود في (3) تمثل نموذج برمجة غير خطية وقيوده قيود خطية في 5 مجاهيل في الدالة (4) معادلات ونجد ان درجة الصعوبة على النحو:

$$dd = T - (n + 1) = 5 - (3 + 1) = 1 > 0$$

٤- يمكن إيجاد الدالة $d(w')$ بدلالة أحد المتغيرات وليكن w'_{11} حيث $0 \leq w'_{11} \leq 1$

ف نجد ان:

$$\left. \begin{aligned}
 w'_{01} &= 0.269w'_{11} + 0.3776 \approx 0.27w'_{11} + 0.38 \\
 w'_{02} &= -0.51867w'_{11} + 0.3237 \approx -0.52w'_{11} + 0.32 \\
 w'_{03} &= -0.664w'_{11} + 0.2988 \approx -0.66w'_{11} + 0.30 \\
 w'_{21} &= -1.2736w'_{11} + 0.08996
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

وبالتالي:

$$d(w'_{11}) = \left\{ \left[\frac{0.3}{0.27w'_{11} + 0.38} \right]^{0.27w'_{11} + 0.38} \cdot \left[\frac{0.5}{-0.52w'_{11} + 0.32} \right]^{-0.52w'_{11} + 0.22} \cdot \left[\frac{0.2}{-0.66w'_{11} + 0.30} \right]^{-0.66w'_{11} + 0.30} \cdot [0.8]^{w'_{11}} \cdot [1.2]^{w'_{21}} \right\} \quad (6)$$

وإذا فرضنا ان $Z(w'_{11})$ على النحو:

$$Z(w'_{11}) = \ln d(w'_{11})$$

$$Z(w'_{11}) = - \left\{ (0.27w'_{11} + 0.38) \ln \left[\frac{0.27w'_{11} + 0.38}{0.3} \right] + (-0.52w'_{11} + 0.32) \ln \left[\frac{-0.52w'_{11} + 0.32}{0.5} \right] + (-0.66w'_{11} + 0.30) \ln \left[\frac{-0.66w'_{11} + 0.30}{0.2} \right] + w'_{11} \ln \left(\frac{10}{8} \right) + w'_{21} \ln \left(\frac{10}{12} \right) \right\} \quad (7)$$

ونلاحظ ان الدالة (7) دالة مقعرة تخضع لقيود خطية وبالتالي يمكن باستخدام شروط الأمثلية الحصول على القيمة المثلي لـ w'_{11} ثم القيم الأخرى على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(w'_{11})}{\partial w'_{11}} = & - \left\{ \left[(0.27w'_{11} + 0.38) \left(\frac{0.27(0.3)}{0.27w'_{11} + 0.38} \right) \right. \right. \\ & + (0.27) \ln \left(\frac{0.27w'_{11} + 0.38}{0.3} \right) \left. \right] \\ & + \left[(-0.52w'_{11} + 0.32) \left(\frac{(-0.52)0.5}{-0.52w'_{11} + 0.32} \right) \right. \\ & + (-0.52) \ln \left(\frac{-0.52w'_{11} + 0.32}{0.5} \right) \left. \right] \\ & + \left[(-0.66w'_{11} + 0.30) \left(\frac{(-0.66)0.2}{-0.66w'_{11} + 0.30} \right) \right. \\ & + (-0.66) \ln \left(\frac{-0.66w'_{11} + 0.30}{0.2} \right) \left. \right] + \left[\ln \left(\frac{10}{8} \right) \right] \\ & + \left[\ln \left(\frac{10}{12} \right) \right] \left. \right\} = 0 \quad \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0.08)(0.27) \ln \left(\frac{0.27w'_{11} + 0.38}{0.3} \right) + (-0.52)(0.5) \\ + (-0.52) \ln \left(\frac{-0.52w'_{11} + 0.32}{0.5} \right) + (-0.132) \\ + (-0.66) \ln \left(\frac{-0.66w'_{11} + 0.30}{0.2} \right) + \ln \left(\frac{10}{8} \right) + \ln \left(\frac{10}{12} \right) \\ = 0 \quad \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \ln \left(\frac{0.27w'_{11} + 0.38}{0.3} \right)^{0.27} + \ln \left(\frac{-0.52w'_{11} + 0.32}{0.5} \right)^{-0.52} \right. \\ \left. + (0.66) \ln \left(\frac{-0.66w'_{11} + 0.30}{0.2} \right)^{-0.66} \right\} \\ = -0.081 + 0.260 - 1.25 - 0.833 = -1.904 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(0.149) \quad \rightarrow \\
\ln \left\{ \left(\frac{0.27w'_{11} + 0.38}{0.3} \right)^{0.27} \left(\frac{-0.52w'_{11} + 0.32}{0.5} \right)^{-0.52} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{-0.66w'_{11} + 0.30}{0.2} \right)^{-0.66} \right\} = \ln(0.149) \quad (8)
\end{aligned}$$

وبحل المعادلة (8) في w'_{11} نجد ان:

$$w'^*_{11} = 0.0297$$

وبالتالي فبالتعويض في (6) نجد ان:

$$w'^*_{01} = 0.3339, w'^*_{02} = 0.3074, w'^*_{03} = 0.3587, w'^*_{12} = 0.0975$$

وبالتالي فان:

$$y_0^*(x) = d^*(w') = 0.9189$$

ويمكن الحصول على القيم المثلى لـ x_1, x_2, x_3 من العلاقة

$$1.2x_1x_2^{-1} = \frac{w'_{21}}{w'_{20}} = 1 \quad \rightarrow x_1 = \frac{10}{12}x_2 \quad (9)$$

$$0.2x_2^{1.3} = (0.3587)(0.9189) = 0.3296 \quad \rightarrow x_2^* = 1.468$$

وبالتعويض في (9) نجد ان:

$$x_1^* = 1.223$$

وبالمثل

$$(0.3)(1.223)x_3^{1.2} = (0.3339)(0.9189) = 0.3068 \quad \rightarrow$$

$$x_3^* = 0.8610$$

الباب الثامن

طرق حل النموذج الهندسي العام

Solution Methods of Generalized (signomial) Geometric Programming Models

Introduction

(١-٨) المقدمة

(٢-٨) النموذج العام

Generalized (signomial) Geometric Programming (GGP)
Model

Duality Method

(٣-٨) الطريقة البديلة للحل

Partially Condensed Method

(٤-٨) طريقة التكتيف الجزئي

Totally Condensed Method

(٥-٨) طريقة التكتيف الكلي

Introduction

(١-٨) المقدمة

في هذا الباب سوف نقدم طرق التكتيف الجزئي لحل النموذج الهندسي العام.

وتوجد طرق متعددة لحل النموذج العام معظمها طرق عددية.

وفي هذا الباب سوف نقدم طريقتين من الطرق العددية التي تعطى حلول تقريبية مثلي وهما:

- طريقة التكتيف الجزئي وتعتمد على تقريب النموذج العام الى نموذج موجب ثم حله باستخدام الطرق المقدمة في الباب السابع.
- طريقة التكتيف الكلي وهي طريقة تكرارية وهي تعتمد على تحويل النموذج العام الى نموذج موجب ثم تحويله الى نموذج خطى يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس.

(٢-٨) النموذج العام

Generalized Geometric Programming (GGP) Model

إذا اعتبرنا النموذج العام على النحو التالي [3,6,7]:

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{0t} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad (8.1)$$

$$\text{S.T. } y_i(x) = \sum_{i=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \leq \sigma_i \quad (8.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{it} = \pm 1 \quad , t = 1, 2, \dots, T_i \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \\ \sigma_i = \pm 1 \quad , i = 1, 2, \dots, m \\ c_{it} > 0 \quad , t = 1, 2, \dots, T_i \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \\ x_j > 0 \quad , j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

ويوجد لدينا حالتين على النحو التالي:

الحالة الأولى: إذا كانت دالة الهدف $y_0(x)$ دالة موجبة posynomial بمعنى أن:

$$\sigma_{0t} = 1 \quad , t = 1, 2, \dots, T_0$$

وتصبح دالة الهدف:

$$\text{Min } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}$$

S.T.

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \leq \sigma_i$$

في هذه الحالة باستخدام الطريقة البديلة نحصل على الحل الأمثل المطلق global solution.

الحالة الثانية: إذا كانت درجة الصعوبة (dd) تساوى صفر في هذه الحالة يتم الحصول على الحل الأمثل المطلق أيضا.

الحالة الثالثة: عندما يكون النموذج في الحالة العامة (8.3) – (8.1) بمعنى وجود بعض الدوال ذات الحدود السالبة signomial function في هذه الحالة نقطة الاستقرار التي نحصل عليها لا بد من تحديد نوعها هل هي نقطة نهاية عظمى محلية max-local point ام نهاية صغرى محلية min-local point او غير ذلك ويتم ذلك باختيار النقطة كما هو موضح في الباب الرابع في شروط الأمثلية [1,32].

Duality Method**(٣-٨) الطريقة البديلة**

في هذا الفصل سوف نقدم الطريقة البديلة لحل النموذج العام، وهي نفس الطريقة البديلة السابقة شرحها في الباب السابق، ولكن بعد اجراء التحويلات على النحو التالي:

الحالة الأولى: إذا فرضنا ان $y_0(x)$ دالة موجبة *posynomial*، والمتغير x_0 متغير موجب بحيث:

$$x_0 \geq y_0(x) \quad \rightarrow \quad x_0^{-1}y_0(x) \leq 1 \quad (8.4)$$

وتصبح دالة الهدف على النحو التالي

$$\text{Min. } x_0 \quad (8.5)$$

$$\text{S.T. } x_0^{-1}y_0(x) \leq 1$$

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \leq \sigma_i$$

كذلك يمكن إعادة كتابة القيود في (8.2) على النحو التالي:

$$f_i(x) = \sigma_i \left[1 - \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \right] \geq 0 \quad (8.6)$$

ومن الباب السابق نجد ان جميع قيم الاوزان (w) قيم غير سالبة حيث

$$w_{0t} = \frac{c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}}{y_0(x)}, \quad t = 1, 2, \dots, T_0 \quad (8.7)$$

$$w_{it} = c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (8.8)$$

وبالتالي يصبح النموذج المحول

$$\text{Min. } x_0 \quad (8.9)$$

$$S.T. \quad x_0 w_{0t} = c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad , t = 1, \dots, T_0$$

$$f_i(x) = \sigma_i \left[1 - \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it} \right] \geq 0 \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (8.10)$$

$$w'_{it} = c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \quad , i = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T_i \quad (8.11)$$

حيث ان $\sum_{t=1}^{T_i} w'_{it} \neq 1$

$$w'_{00} = \sum_{t=1}^{T_0} w'_{0t} = 1 \quad (8.12)$$

وبنفس أسلوب التحويلات في الباب السابق، نحصل على المشكلة البديلة على النحو التالي:

$$\text{optimum } d(w') = \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w'_{i0}}{w'_{it}} \right]^{\sigma_{it} w'_{it}} \quad (8.13)$$

S.T.

$$\sum_{t=1}^{T_0} w'_{0t} = 0 \quad \leftarrow \text{الشرط الطبيعي} \quad (8.14)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w'_{0t} = 0 \quad \rightarrow \text{شرط التعامد} \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (8.15)$$

$$w'_{i0} = \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w'_{it} \quad , w'_{i0} \geq 0 \quad (8.16)$$

ملاحظات:

- ١- عندما تكون جميع حدود دالة الهدف موجبة، فأنا نحصل على الحل الأمثل المطلق.
٢- عندما $dd=0$ في هذه الحالة نحصل على الحل الأمثل المطلق للمشكلة الاصلية حيث

$$d(w^{*'}) = y_0^*(x)$$

- ٣- عندما توجد دالة او أكثر ذات حدود سالبة signomial function فان الحل الأمثل يمكن ان يكون نهاية صغرى نسبية وللتأكيد ان نقطة الحل نهاية صغرى لا بد من اجراء اختبار لها [30,1].

خوارزم (٨-١): لحل النموذج بدالة هدف تشتمل على الحدود الموجبة فقط، والقيود ذات حدود موجبة وسالبة على النحو:

اعتبر النموذج

$$\text{Min. } y_0(x) = \sum_{t=1}^{T_0} c_0 \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \quad (1)$$

S.T

$$y_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \leq \sigma_i \quad \begin{matrix} t = 1, 2, \dots, T_i \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (2)$$

حيث

$$\sigma_{it} = \pm 1 \quad , \sigma_i = \pm 1 \quad (3)$$

في الخطوات التالية

الخطوة (١): ١- تكوين المعادلات التي تمثل الشرط الطبيعي والشرط المتعامدة

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=1}^{T_0} w'_{0t} &= 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w'_{it} &= 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \\ w'_{it} &\geq 0 \quad , \sigma_0 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

٢- وبحل المعادلات (3) نحصل على

$$w_{i0}^{*'} = \sigma_i \sum \sigma_{it} w_{it}^{*'} \geq 0, w_{00}' = 1$$

حيث يمثل المقدار $[w_{it}' / w_{i0}']$ الوزن النسبي للحد t في القيد رقم i $w_{00}' = 1$
الخطوة (٢): ١- إذا كانت $dd = 0$ فان لحل المعادلات (3) يكون حل أمثل مطلق فنحسب $d(w')$ على النحو التالي

$$\left. \begin{aligned} \text{optimize } d(w^{*'}) &= \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w_{i0}'}{w_{it}'} \right]^{\sigma_{it} w_{it}'} \\ S.T \quad \sum_{t=1}^{T_0} w_{0t}' &= 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w_{it}' &= 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} (4)$$

وبحل النموذج أعلاه نحصل على قيم $w_{it}^{*'} , i = 1, 2, \dots, m$

٣- نحسب

$$w_{i0}^{*'} = \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it}' \geq 0$$

الخطوة (٣): ١- نوجد $y_0(x^*)$ حيث

$$y_0(x^*) = d(w^{*'})$$

$$c_{it} \prod_{j=1}^{T_i} x_j^{a_{itj}} = y_0(x^*) w_{it}^{*'} , \left. \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m \\ t &= 1, 2, \dots, T_i \end{aligned} \right\} (5) \text{ -} ٢$$

نحصل على القيم المثلى x^* .

والأمثلة التالية نوضح الخطوات أعلاه.

مثال (١-٨): هذا المثال قدمه Passy سنة ١٩٦٧ [7]:

$$\text{Min. } y_0(x) = x_1 \quad (1)$$

$$\text{S.T. } y_1(x) = 5x_1^{-1}x_2 - x_1^{-1}x_3^2x_4^4 \leq 1 \quad (2)$$

$$y_2(x) = \frac{-5}{2}x_2x_3^{-2} + \frac{3}{2}x_3^{-1}x_4 \leq 1 \quad (3)$$

الحل:

١- من المثال نجد ان

$$\begin{aligned} \sigma_{01} = +1 & , \sigma_{21} = -1 & , \sigma_2 = 1 & , c_{12} = 1 \\ \sigma_{11} = +1 & , \sigma_{22} = +1 & , c_{01} = 1 & , c_{21} = \frac{5}{2} \\ \sigma_{12} = -1 & , \sigma_1 = 1 & , c_{11} = 5 & , c_{22} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

٢- تكوين الشرط الطبيعي وشروط التعامد على النحو التالي:

$$\left. \begin{aligned} w'_{01} &= 1 \\ w'_{01} - w'_{11} - w'_{12} &= 0 \\ w'_{11} - w'_{21} &= 0 \\ -2w'_{12} + 2w'_{21} - w'_{22} &= 0 \\ -4w'_{12} + w'_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [y_0(x)] \\ [x_1] \\ [x_2] \\ [x_3] \\ [x_4] \end{array} \quad (1)$$

٣- وبما ان $dd = 0$ حيث:

$$dd = T - (n + 1) = 5 - (4 + 1) = 0$$

وبالتالي فان حل المعادلات في (1) حل وحيد، حيث

$$w_{01}^* = 1.00 \quad , w_{11}^* = 1.50 \quad , w_{12}^* = 0.50 \quad , w_{21}^* = 1.5 \quad , w_{22}^* = 2.00$$

ومن العلاقة (8.16) نجد ان

$$w_{i0}^* = \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it}^*$$

$$w_{10}' = 1\{(1)(1.5) + (-1)(0.50)\} = +1.0 \geq 0$$

$$w_{20}' = 1\{(-1)(1.5) + (1)(2.00)\} = 0.5 \geq 0$$

وتصبح قيمة دالة الهدف للمشكلة البديلة على النحو التالي

$$d(w^*) = \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w_{i0}'}{w_{it}'} \right]^{\sigma_{it} w_{it}'}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{1} \right) \cdot \left(\frac{5(1.0)}{1.5} \right)^{1.5} \cdot \left(\frac{1}{0.5} \right)^{-0.5} \cdot \left(\frac{2.5(1.5)}{1.5} \right)^{-1.5} \cdot \left(\frac{1.5(0.5)}{2.0} \right)^{2.0} \right\}$$

$$= 0.796$$

وبما ان

$$y_0(x) = d(w^*) = 0.796$$

ومن العلاقة بين المشكلة الاصلية والبديلة في (3.7), (3.8) نجد ان:

$$x_1^* = 0.796 \quad , x_2^* = 0.239 \quad , x_3^* = 0.446 \quad , x_4^* = 1.19$$

وهذه النقطة نقطة نهاية صغرى نسبية لأثبت اننها نهاية صغرى مطلقة لابد من اجراء اختبار لتحديد نوعها [1,39].

الحالة الثانية: عندما تكون دالة الهدف ذات حدود موجبة وأخرى سالبة signomial function

وفي هذه الحالة يكون النموذج في الحالة العامة، وتكون فئة القيود فئة غير محدبة non-convex set.

في هذه الحالة إذا فرضنا ان دالة الهدف والطرف الايسر من القيود بأخذ الشكل التالي

$$y_i(x) \equiv \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\sigma_{it} = \pm 1 \quad , c_{it} > 0 \quad , x_j > 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (8.17)$$

المشكلة الاصلية

$$\text{Min } y_0(x)$$

$$S.T \quad y_i(x) \leq \sigma_i \quad , \sigma_i = \pm 1 \quad , i = 1, 2, \dots, m$$

فاذا فرضنا ان فئة الدوال ذات الحدود الموجبة والسالبة σ_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ كذلك فئة الحدود

$$T = \sum_{i=0}^m T_i$$

والمتغيرات البديلة التي تحقق الشرط الطبيعي العام

$$\sum_{t=0}^{T_0} \sigma_{0t} w'_{0t} = \sigma_0 (\pm 1) \quad (8.18)$$

وشروط التعامد

$$\sum_{i=0}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w'_{it} = 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \quad (8.19)$$

$$w'_{it} \geq 0 \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \quad , t = 1, 2, \dots, T_i \quad (8.20)$$

$$w'_{i0} \equiv \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w'_{it} \geq 0 \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (8.21)$$

كذلك بالنسبة للدوال ذات الحدود السالبة حيث:

$$\sigma_i \equiv \pm 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\sigma_{it} \equiv \pm 1 \quad , \quad \begin{cases} t = 1, 2, \dots, T_i \\ i = 0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (8.22)$$

ومن العلاقة (8.18)-(8.21) نجد ان:

$$w'_{00} \equiv 1 \quad (8.23)$$

وتصبح المشكلة البديلة للمشكلة الاصلية على النحو التالي:

$$Max. d(w') = \sigma_0 \left[\prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w'_{i0}}{w'_{it}} \right] \right]^{\sigma_0} \quad (8.24)$$

وبحل النموذج (8.24)، (8.21)، (8.18) نحصل على القيم w'^* وبالتالي

$$y_0^*(x) = d(w'^*)$$

وبالتالي يمكن الحصول على القيم المثلى لـ X من العلاقات التالية

$$c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} = w'_{0t} \sigma_0 y_0^*(x) \quad , t = 1, 2, \dots, T_0$$

$$c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} = w'_{it} \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad , t = 1, 2, \dots, T_i$$

خوارزم (٢-٨): لحل النموذج العام، حيث توجد حدود موجبة وحدود سالبة في دالة الهدف والقيود أيضاً، نتبع الخطوات التالية.

الخطوة (١): ١- تحديد المتغيرات $i = 0, 1, 2, \dots, m \quad , t = 1, 2, \dots, T_i$

٢- تكون المعادلات التي تمثل الشرط الطبيعي وشروط التعامد على النحو التالي.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T_0} \sigma_{0t} w'_{0t} &= \sigma_0 (\pm 1) \\ \sum_{i=0}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w'_{it} &= 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} (1)$$

٣- إذا كانت $dd = 0$ ، فبحل المعادلات في (1) نحصل على القيم لـ w'_{it}^* ،

$$i = 0, 1, 2, \dots, m \quad , t = 1, 2, \dots, T_i$$

ثم نحسب

$$w'_{i0} \equiv \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w'_{it} \quad (2)$$

الخطوة (٢): ١- نحسب

$$d(w^{*'}) = \sigma_0 \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w_{i0}^{*'}}{w'_{it}} \right]^{\sigma_{it} w_{it}^{*'}} \right\}^{\sigma_0}$$

$$y_0^*(x) = d(w^{*'}) - 2$$

الخطوة (٣): من المعادلات

$$c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} = w_{0t}^{*'} \sigma_0 y_0(x^*) \quad , t = 1, 2, \dots, T_0$$

$$c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} = \frac{w_{it}^{*'}}{\sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it}^{*'}} \quad , i = 1, 2, \dots, m$$

نحصل على القيم المثلي لـ x_j^* ، $j = 1, 2, \dots, n$

الخطوة (٣): ١- إذا كانت $dd \geq 1$ في هذه الحالة نكون النموذج

$$\left. \begin{aligned} & \text{optimize } d(w') = \sigma_0 \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w_{i0}'}{w'_{it}} \right]^{\sigma_{it} w'_{it}} \right\}^{\sigma_0} \\ & S.T \\ & \sum_{t=0}^{T_0} \sigma_{0t} w'_{0t} = \sigma_0 (\pm 1) \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} a_{itj} w'_{it} = 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

وبحل النموذج (3) نحصل على قيم $w_{it}^{*'}$ ثم نرجع الى الخطوة (٢)، الخطوة (٣) كما سوف نوضح في الأمثلة التالية.

مثال (٢-٨): Benights and Charles (1976)

$$\text{Min. } y_0(x) = -2x_1x_2x_3^4x_4^{-1} + x_2^{-1}x_3^{-1} + 5x_1^{\frac{1}{2}}x_4 \quad (1)$$

$$\text{S.T. } y_1(x) = x_4^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{3}}x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$$

الحل

أولاً نحول شكل القيد في شكل (\leq) بضرب الطرفين في (-1)

$$y_1(x) = -x_4^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{3}}x_3 \leq -1 \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد ان

$$\left. \begin{array}{llll} \sigma_{01} = -1.0 & , \sigma_{12} = +1.0 & , \sigma_{03} = 5.0 & , c_{02} = 1 \\ \sigma_{11} = -1 & , \sigma_{03} = 1.0 & , c_{01} = 2.0 & \\ \sigma_{02} = +1.0 & , \sigma_{11} = -1 & , c_{11} = 1.0 & , c_{12} = 1.0 \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} -w'_{01} + w'_{02} + w'_{03} = 1 \\ -w'_{01} + \frac{1}{2}w'_{03} = 0 \\ -w'_{01}w'_{02} + \frac{1}{3}w'_{12} = 0 \\ -4w'_{01} - w'_{02} + w'_{12} = 0 \\ w'_{01} + w'_{03} - \frac{1}{2}w'_{11} = 0 \end{array} \right\} (2)$$

وبحل المعادلات الخطية في (2) نجد ان

$$w'_{01} = \frac{2}{3} , w'_{02} = \frac{1}{3} , w'_{03} = \frac{4}{3} , w'_{11} = 4.0 , w'_{12} = 3.0 \quad \} (3)$$

$$\sigma_0 = +1$$

$$w_{10}^{*'} = \sigma_1 [\sigma_{11} w_{11}^{*'} + \sigma_{12} w_{12}^{*'}] = -(-4 + 3) = 1.0 = \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= 1.0$$

وبالتالي فان:

$$d(w') = \sigma_0 \left\{ \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{c_{it} w_{i0}'}{w_{it}'} \right]^{\sigma_{it} w_{it}'} \right\}^{\sigma_0}$$

$$= 1 \left\{ \left[\frac{2.0(1)}{2/3} \right]^{-1(2/3)} \cdot \left[\frac{1.0}{1/3} \right]^{1/3} \cdot \left[\frac{5.0}{4/3} \right]^{4/3} \right\} \cdot \left\{ \left[\frac{(1.0)(1.0)}{4.0} \right]^{-4} \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{(1.0)(1.0)}{3.0} \right]^{3.0} \right\} = 38.322 \quad (4)$$

وبالتالي فان

$$y_0(x^*) = d(w^{*'}) = 38.322$$

ولحساب القيم المثلى لـ x_1, x_2, x_3, x_4 من العلاقة

$$c_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} = w_{0t}^{*'} \sigma_0 y_0(x^*) \quad , t = 1, 2, \dots, T_0$$

$$c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} = \frac{w_{it}^{*'}}{\sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it}^{*'}} \quad , i = 1, 2, \dots, m$$

وبالتالي فان

$$2x_1 x_2 x_3^4 x_4^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right) (1.0)(38.322)$$

$$x_2^{-1} x_3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right) (1.0)(38.322)$$

$$5x_1^{\frac{1}{2}}x_4 = \left(\frac{4}{3}\right)(1.0)(38.322)$$

$$x_4^{\frac{1}{2}} = \frac{4.0}{1.0}$$

وبالتالي

$$x_1^* = 0.4083 \quad , x_2^* = 0.00422 \quad , x_3^* = 18.558 \quad ,$$

$$x_4^* = 16.00 \quad , y_0(x^*) = 38.322$$

مثال (٣-٨): حل النموذج التالي

$$\text{Maximize } y_0(x) = 5x_1^2 - x_2^2x_3^4$$

$$S.T. \quad y_1(x) = 1.5x_2^{-1}x_3 - 2.5x_1^2x_2^{-2} \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

الحل:

١- نضع المشكلة في الشكل الأساسي على النحو التالي

$$\text{Minimize } y_0(x) = -5x_1^2 + x_2^2x_3^4$$

$$S.T. \quad y_1(x) = 2.5x_1^2 - 1.5x_2^{-1}x_3 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

٢- من المشكلة

$$\sigma_{01} = -1 \quad , \sigma_{02} = 1.0 \quad , \sigma_{11} = 1.0 \quad , \sigma_{12} = -1.0 \quad , \sigma_1 = -1$$

$$\left. \begin{aligned} -w'_{01} + w'_{02} &= 1 \quad , 2w'_{02} - 2w'_{11} + w'_{12} = 0 \\ -2w'_{01} + 2w'_{11} &= 0 \quad , 4w'_{02} - w'_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

وبحل المعادلات (1)

$$w'_{01} = -1.50 \quad , w'_{02} = -0.50 \quad , w'_{11} = -1.5 \quad , w'_{12} = -2.0 \quad (2)$$

ونلاحظ ان اختيار $\sigma_0 = 1$ أدى الى ان جميع قيم $w^{*'}_{i}$ التي تمثل الاوزان النسبية سالبة، وبالتالي فان لابد من ان $\sigma_0 = -1$ ويترتب على ذلك

$$w_{01}' = 1.50 \quad , w_{02}' = 0.50 \quad , w_{11}' = 1.5 \quad , w_{12}' = 2.0$$

وبما ان

$$w_{i0}' = \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} w_{it}'$$

فان

$$w_{10}' = (-1)\{(1)(1.5) + (-1)(2)\} = -1\{1.5 - 2\} + 0.5$$

$$d(w^*) = -1 \left\{ \left[\frac{5.0}{1.5} \right]^{-1.5} \left[\frac{1.0}{0.5} \right]^{0.5} \left[\frac{(0.5)(2.5)}{1.5} \right]^{1.5} \left[\frac{0.5(1.5)}{2.0} \right]^{-2} \right\}^{-1}$$

$$= -0.795495 \quad \rightarrow$$

$$y_0(x^*) = -0.795495$$

وبالتالي

$$x_1^* = 0.4885 \quad , x_2^* = 0.446 \quad , x_3^* = 1.189$$

Partially Condensed Method**(٤-٨) طريقة التكتيف الجزئي**

بالنسبة للنماذج غير الخطية فإنه يمكن حلها باستخدام الأساليب التقليدية أو باستخدام بعض أساليب البرمجة الهندسية نلجأ الى أساليب التقريب العددية numerical approximation technique وبالنسبة لهذه الأساليب التقريبية قدمت العديد من الخوارزميات لحل هذا النوع من النماذج.

وبالنسبة لنماذج البرمجة الهندسية العامة signomial models قدم Duffin سنة ١٩٦٦ أسلوب تقريبي سمي بأسلوب التكتيف condensed technique يعتمد على المتباينة العددية الهندسية ثم تحويل النموذج العام الى نموذج ذو حدود موجبة فقط يمكن حله باستخدام الأساليب المقدمة في الباب السابق [7].

ثم قدمت العديد من طرق التكتيف كان أهمها ما قدمه كل من Aviel and Dembo [8,6].

وفي هذا الفصل سوف نقدم طريقة التكتيف الجزئي على النحو التالي:

أولاً: إذا فرضنا ان النموذج العام على النحو:

$$\text{Min. } y_0(x) \quad (8.25)$$

$$S.T. \quad \left. \begin{array}{l} y_i(x) \leq \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (8.26)$$

$$y_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}}, \quad \sigma_{it} = \pm 1$$

ويمكن إعادة كتابة النموذج أعلاه بحيث تكون دالة الهدف دالة خطية موجبة وتحويل $y_0(x)$ الى قيد على النحو التالي:

نفرض ان $x_0 = y_0(x)$ فإن:

$$\text{Min} \quad x_0 \quad (8.27)$$

$$S.T. \quad \left. \begin{array}{l} y_i(x) \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\ x_j > 0 \end{array} \right\} \quad (8.28)$$

ثانياً: بالنسبة للقيود في (8.4) يمكن تقسيم $y_i(x)$ الى الفرق بين دالتين $P(x), Q(x)$ دالة ذات حدود موجبة على النحو التالي:

$$y_i(x) = Q_i(x) - P_i'(x) \quad (8.29)$$

وبالتعويض في (8.4) نجد ان

$$Q_i(x) \leq 1 + P_i'(x) = P(x) \quad , i = 0,1,2, \dots, m \quad (8.30)$$

ثالثاً: وبتحويل الدالة $P_i'(x)$ الى دالة موجبة بحد واحد عند نقطة افتراضية ولتكن $x = \bar{x}$ وتسمى هذه العملية بالتكتيف الجزئي ويصبح النموذج على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad x_0 \quad (8.31)$$

$$\text{S.T.} \quad \frac{Q_i(x)}{P_i(x, \bar{x})} \leq 1 \quad , i = 0,1,2, \dots, m \quad (8.31')$$

$$x_j \quad , j = 0,1,2, \dots, m$$

والنموذج أعلاه نموذج حدود موجبة يمكن حله باستخدام الطرق المقدمة في الباب ٧.

رابعاً: ويتم الحصول على الدالة $P_i(x, \bar{x})$ على النحو التالي:

أ- بما ان المتباينة العددية الهندسية على النحو

$$\sum_t u_t = \prod_t \left[\frac{u_t}{\delta_t} \right]^{\delta_t} \quad , u_t > 0 \quad (8.32)$$

حيث δ_t تشير الى اوزان غير سالبة بمعنى:

$$\delta_t \geq 0 \quad , \quad \sum_t \delta_t = 1 \quad (8.33)$$

ب- فاذا فرضنا ان $(1 + P_i'(x))$ تشير الى u_t فان

$$1 + P_i'(x) = \sum_t^{T_i} P_{it}(x) = \sum_t^{T_i} u_t$$

ج - فاذا فرضنا ان \bar{x} نقطة ممكنة *feasible point* (أي تحقق فئة القيود للمشكلة الاصلية) فانه ممكن الحصول على الاوزان δ_{it} على النحو التالي

$$\delta_{it}(\bar{x}) = \frac{P_{it}(\bar{x})}{\sum_t^{T_i} P_{it}(\bar{x})} = \frac{P_{it}(\bar{x})}{P_i(\bar{x})} \quad (8.34)$$

د- وبما ان $\delta_{it}(\bar{x})$ قيم عددية وبتطبيق المتباينة العددية الهندسية

$$P_i(x) \geq P_i(x, \bar{x}) = \prod_t^{T_i} \left[\frac{P_{it}(x)}{\delta_{it}} \right]^{\delta_{it}} \quad (8.35)$$

او

باستخدام \bar{x} نحدد الاوزان على النحو التالي:

$$\delta_{it}(\bar{x}) = \frac{P_{it}(\bar{x})}{\sum_t^{T_i} P_{it}(\bar{x})} = \frac{P_{it}(\bar{x})}{P_i(\bar{x})}$$

وبما ان $\delta_{it}(\bar{x})$ قيم عددية وبتطبيق المتباينة العددية الهندسية فان:

$$P_i(x) \geq P_i(x, \bar{x}) = \prod_t^{T_i} \left[\frac{P_{it}(x)}{\delta_{it}} \right]^{\delta_{it}}$$

او

$$P_i(x, \bar{x}) = \prod_t^{T_i} \left[\frac{P_{it}(x) P_i(\bar{x})}{P_{it}(\bar{x})} \right]^{\frac{P_{it}(\bar{x})}{P_i(\bar{x})}}$$

هـ - وبالتالي فان

$$P_i(x) \geq \prod_t^{T_i} \left[\frac{c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}} P_i(\bar{x})}{c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{itj}}} \right]^{\frac{P_{it}(\bar{x})}{P_i(\bar{x})}} \quad (8.36)$$

ويمكن تخفيض (8.36) على النحو التالي

$$P_i(x) \geq P_i(x, \bar{x}) = P_i(\bar{x}) \prod_{j=1}^n \left[\frac{x_j}{\bar{x}_j} \right]^{\frac{\sum_t a_{itj} P_{it}(\bar{x})}{P_i(\bar{x})}} \quad (8.37)$$

وبلاحظ ان :

$$\bar{x}_j, P_i(\bar{x}), \sum_t a_{itj} P_{it}(\bar{x})$$

تمثل مقادير ثابتة constants

و- والنموذج (8.31)-(8.31') نموذج ذو الحدود الموجبة في الشكل المعياري standard model وقد يسمى أيضا regular model.

ملحوظة: ١ - النقطة الافتراضية $\bar{x}, \bar{T}, \bar{x}$ نقطة ممكنة لفئة القيود للمشكلة الاصلية كذلك تكون نقطة ممكنة لفئة القيود في النموذج (8.31)-(8.31') [3,6].

٢- درجات الصعوبة للنموذج (8.7)-(8.7') على النحو

$$dd = T' - (n + 1)$$

حيث T' هي عدد الحدود في النموذج (8.31)-(8.31')

مثال (٤-٨): إذا فرضنا نموذج برمجة هندسية بدالة هدف ذات حدود موجبة على النحو التالي:

$$Min. y_0(x) = 2x_1x_2^{\frac{1}{2}} + x_3^{-1}x_2x_4^2 + x_1^{-2}x_2^{-1}x_3^2 \quad (1)$$

$$S.T \quad x_1x_2^{\frac{1}{2}}x_3 - x_2^{-1}x_4^2 \leq 1 \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 > 5 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$$

باستخدام طريقة التكتيف الجزئي حل النموذج أعلاه.

الحل:

١- إذا فرضنا ان

$$y_0(x) \leq x_0 \quad \rightarrow$$

$$2x_0^{-1}x_1x_2^{\frac{1}{2}} + x_0^{-1}x_3^{-1}x_2x_4^2 + x_0^{-1}x_1^{-2}x_2^{-1}x_3^2 \leq 1 \quad (4)$$

٢- كذلك بالنسبة للقيود (2) فان

$$\frac{x_1x_2^{\frac{1}{2}}x_3}{1 + x_2^{-1}x_4^2}$$

بالنسبة للقيود (3) فان

$$5x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \leq 1$$

وبالتالي فان

$$Q_0(x) = (4) \quad , P_0(x) = 1 \quad , Q_1(x) = x_1x_2^{\frac{1}{2}}x_3 \quad ,$$

$$P_1(x) = 1 + x_2^{-1}x_4^2 \quad , Q_2(x) = 5x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \quad , P_2(x) = 1$$

٣- وبما ان $P_0(x)$ و $P_2(x)$ تتكون من حد واحد فان:

$$P_0(x) = P_0(x, \bar{x}) \quad , P_2(x) = P_2(x, \bar{x})$$

وللحصول على $P_1(x, \bar{x})$ على النحو التالي:

$$P_1(x, \bar{x}) = [1 + x_2^{-1}x_4^2] \left[\frac{x_2}{\bar{x}_2} \right]^{\frac{-x_2^{-1}\bar{x}_4^{-2}}{1+\bar{x}_2^{-1}\bar{x}_4^{-2}}} \cdot \left[\frac{x_4}{\bar{x}_4} \right]^{\frac{2\bar{x}_2\bar{x}_4^2}{1+\bar{x}_2^{-1}\bar{x}_4^{-2}}}$$

٤- فاذا تم افتراض النقطة الممكنة \bar{x} حيث:

$$\bar{x} = [\bar{x}_1 = 10.0, \bar{x}_2 = 0.10, \bar{x}_3 = 5.0, \bar{x}_4 = 5.0]$$

حيث \bar{x} تحقق فئة القيود في النموذج (3)-(1)

٥- وبالتالي فان

$$P_1(x, \bar{x}) = 1.22x_2^{-0.975}x_4^{1.95}$$

٦- ويصبح النموذج ذات الحدود الموجبة على النحو التالي:

$$\text{Min. } x_0$$

$$\left. \begin{aligned} S.T. \quad & 2x_0^{-1}x_1x_2^{\frac{1}{2}} + x_0^{-1}x_3^{-1}x_2x_4^2 + x_0^{-1}x_1^{-2}x_2^{-1}x_3^2 \leq 1 \\ & 0.94x_1x_2^{1.475}x_3x_4^{-1.95} \leq 1 \\ & 5x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \leq 1 \\ & X > 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

٧- والنموذج أعلاه نموذج ذو حدود موجبة *posynomial model*، حيث درجة الصعوبة *dd* تساوى صفر على النحو التالي:

$$dd = T' - (n + 1) = 5 - (4 + 1) = 0$$

وبالتالي باستخدام الشرط الطبيعي وشروط التعامد يمكن تحديد الاوزان المثلى وبالتالي حساب قيم المتغيرات، فيكون الحل حل أمثل مطلق للنموذج (5)

$$(x_0^*)^1 = 6.8852, x_1^* = 3.27, x_2^* = 0.54, x_3^* = 2.82, x_4^* = 1.90$$

ملحوظة:

الحل أعلاه حل مطلق للنموذج (5) ويعتبر حل تقريبي للنموذج الأصلي عند النقطة \bar{x} .

٨- واذا رمزنا للحل في التكرار k بالرمز $(x^*)^k$ فان النقطة $(x_j^*)^1 = (x_j^*)^2$ وتكرار نفس الخطوات السابقة بحيث $k=1,2,3,4,5$ والناتج تم تلخيصها في الجدول التالي:

جدول (٨-١): يوضح الحلول المتتالية

رقم التكرار iteration number	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_0^*
1	10.0	0.10	5.0	2.0	8.905
2	3.27	0.54	2.82	1.90	6.885
3	3.066	0.593	2.750	1.810	6.7836

4	3.047	0.598	2.744	1.805	6.7786
5	3.051	0.597	2.745	1.808	6.7815

ونلاحظ ان قيمة دالة الهدف x_0^* اخذت في التقارب من التكرار 3 وتعتبر قيمة x_0^* التقريبية في التكرار 4,5 نفس القيمة.

(٥-٨) أسلوب التكتيف الكلى في البرمجة الهندسية

Totally Condensed Geometric Programing (TCGP) Technique

فى الفصل السابق تم تقريب نموذج البرمجة العام signomial model الى نموذج موجب posynomial model عند نقطة افتراضية معينة (\bar{x}) ممكنة ثم حل النموذج الموجب باستخدام الطرق المقدمة فى الباب السابع.

فى سنة ١٩٧٠ قدم Duffin أسلوب التكتيف الكلى او الثنائى حيث يتم تحويل النموذج الموجب ذو التكتيف الجزئى الى نموذج ذو حد واحد موجب فى كل قيد ثم قدم Dembo سنة ١٩٧٢ بعض الخوارزميات التى تعتمد على تحويل النموذج ذو التكتيف الثنائى الى نماذج خطية يمكن حلها باستخدام السمبلكس [6].

وفى سنة ١٩٨٤ استخدمت El-Dash أسلوبى التكتيف الجزئى والكلى لحل بعض المشاكل فى أسلوبى البرمجة الاحتمالية وبرمجة الهدف، مما أدى الى حل عديد من المشاكل الفعلية ذات الحجم الكبير باستخدام أساليب التكتيف الجزئى والكلى [3].

وفىما يلى سوف نوضح تحويل النموذج التقريبي المكثف تكتيف جزئى الى نموذج مكثف تكتيف كلى ثم تحويله الى نموذج خطى على النحو التالى:

أولاً: من الفصل السابق نجد ان النموذج الموجب المقرب approximate model على النحو التالى:

نموذج (١)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_0 \\ \text{S.T.} \quad & \frac{Q_i(x)}{P_i(x, \bar{x})} \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\ & x_j > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8.38)$$

حيث

$P_i(x, \bar{x})$ دالة موجبة بحد واحد \bar{x} نقطة التكتيف point of condensation monomial وبالتالى يمكن كتابة النموذج أعلاه على النحو:

نموذج (ب)

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad x_0 \\ \text{S.T.} \quad & \phi_i(x) \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\ & x_j > 0 \end{aligned} \quad (8.39)$$

حيث $\phi_i(x)$ دالة موجبة متعددة الحدود على النحو

$$\phi_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} \psi_{it}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

ثانياً: ولتقريب $\phi_i(x)$ الى دالة موجبة في حد واحد نستخدم المتباينة العددية الهندسية مرة ثانية على النحو التالي:

$$e_{it} = \frac{\psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})} = \frac{\psi_{it}(\bar{x})}{\sum_{t=1}^{T_i} \psi_{it}(\bar{x})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, T_i \quad (8.40)$$

$$\phi_i(x, \bar{x}) = \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{\psi_{it}(x)}{e_{it}} \right]^{e_{it}} \quad (8.41)$$

او

$$\phi_i(x, \bar{x}) = \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{\psi_{it}(x) \phi_i(\bar{x})}{\psi_{it}(\bar{x})} \right]^{\frac{\psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})}}$$

او

$$\phi_i(x, \bar{x}) = \phi_i(\bar{x}) \prod_{j=0}^n \left[\frac{x_j}{\bar{x}_j} \right]^{\frac{\sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} \psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (8.42)$$

ويصبح النموذج أعلاه بعد اجراء عملية التكتيف عند النقطة \bar{x} مرتين متتاليتين على النحو التالي:

نموذج (ج)

$$\begin{aligned} &Min \quad x_0 \\ &S.T. \quad \Phi_i(x, \bar{x}) \leq 1 \quad , i = 0,1,2, \dots, m \quad (8.43) \\ &\quad \quad \quad x, \bar{x} > 0 \end{aligned}$$

ثالثاً: نلاحظ ان $\Phi_i(x, \bar{x})$ دالة موجبة بحد واحد، يمكن بأخذ لوغاريتيمات تحويل النموذج اعلاه الى نموذج خطى يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس simplex method [1,39].

ونلاحظ ان

$$\Phi_i(x) \geq \Phi_i(x, \bar{x}) \quad (8.44)$$

وباستخدام هذه التحويلات يتطلب ذلك ان تكون فئة القيود فئة محكمة compact set، ويمكن التغلب على ذلك بوضع حدود عليا upper limits وحدود دنيا lower limits للمتغيرات x_j على النحو:

$$L_j \leq x_j \leq u_j \quad , j = 0,1,2, \dots, n \quad (8.45)$$

كذلك يجب ان تكون دالة الهدف موجبة (دالة التكاليف مثلاً) ويصبح النموذج المحول على النحو التالي:

نموذج (د)

$$Min \quad \ln(x_0) \quad (8.46)$$

$$S.T. \quad \ln \Phi_i(\bar{x}) + \sum_{j=0}^n \left[\frac{\sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} \psi_{it}(\bar{x})}{\Phi_i(\bar{x})} \right] \ln \left(\frac{x_j}{\bar{x}_j} \right) \leq 1 \quad (8.47)$$

$$\ln L_j \leq \ln x_j \leq \ln u_j \quad , j = 0,1,2, \dots, n \quad (8.48)$$

وبما ان

$$\ln \left(\frac{x_j}{\bar{x}_j} \right) = \ln(x_j) - \ln(\bar{x}_j) \quad (8.49)$$

$$\left\{ \ln \phi_i(\bar{x}) - \sum_{j=0}^n \left[\frac{\sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} \psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})} \right] \ln(\bar{x}_j) \right\} + \left\{ \sum_{j=0}^n \left[\frac{\sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} \psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})} \right] \ln(x_j) \right\} \leq 0 \quad (8.50)$$

ونلاحظ ان: (١) الحد الأول في (8.50) يمثل مقدار ثابت، والحد الثاني يمثل دالة خطية في $\ln(x_j)$

(٢) عندما تكون احدى قيم x_j كسرية فيكون $\ln(x_j)$ قيمة سالبة وللتغلب على ذلك نفرض ان

$$z_j = \ln(x_j) - \ln(x_j^L) \quad , j = 0,1,2, \dots, n \quad (8.51)$$

$$z_j^{u_j} = \ln(x_j^{u_j}) - \ln(x_j^L) \quad , j = 0,1,2, \dots, n \quad (8.52)$$

ملحوظة: التعريف أعلاه لـ z_j يجعل $z_j^L = 0$

ويصبح النموذج (8.49) - (8.45) على النحو التالي:

نموذج (هـ)

$$\text{Min } z_0 + \ln(x_0^{L_0}) \quad (8.53)$$

$$\text{S.T. } \ln \phi_i(\bar{x}) + \sum_{j=0}^n f_{ij}(\bar{x}) \ln \left[\frac{x_j^L}{\bar{x}_j} \right] + \sum_{j=0}^n f_{ij}(\bar{x}) \leq 0 \quad (8.54)$$

$$0 \leq z_j \leq z_j^{u_j} \quad , j = 0,1,2, \dots, n \quad (8.55)$$

حيث

$$f_{ij}(\bar{x}) = \frac{\sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} \psi_{it}(\bar{x})}{\phi_i(\bar{x})} \quad (8.56)$$

كذلك

$$\begin{aligned} \ln \left(\phi_i(\bar{x}) + \sum_{j=0}^n f_{ij}(\bar{x}) \ln \left[\frac{x_j^{L_j}}{\bar{x}_j} \right] \right) &= \ln \left(\phi_i(\bar{x}) \prod_{j=0}^n \left[\frac{x_j^{L_j}}{\bar{x}_j} \right]^{f_{ij}(\bar{x})} \right) \\ &= \ln(\phi_i(x^L, \bar{x})) \end{aligned} \quad (8.57)$$

مقادير ثابتة

ويمكن إعادة كتابة النموذج (8.54) – (8.52) على النحو التالي:

نموذج (ك)

$$\text{Min } z_0 + \ln(x_0^{L_0}) \quad (8.58)$$

$$\text{S. T. } \sum_{j=0}^n f_{ij}(\bar{x}) z_j \leq -\ln[\phi_i(x^L, \bar{x})], \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, m \\ j = 0, 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (8.59)$$

$$0 \leq z_j \leq z_j^{u_j} \quad (8.60)$$

وبحل النموذج أعلاه نحصل على z_j^* ومنها نحصل على x_j^* بالتعويض في قيود المشكلة الاصلية primal فى الطرف الايسر بالنقطة x_j^* :

ا- لو جميع القيود في المشكلة الاصلية تحققت عند النقطة x_j^* فان النقطة x_j^* هي الحل الأمثل (النسبي).

ب- اذا لم يتحقق قيد او اكثر في المشكلة الاصلية عند x_j^* فأننا نعرف فئة القيود التي لم تتحقق بالفئة $Y_v(x)$

$$Y_v(x) = \max_{i \in S} [Y_i(x_j^*) | Y_i(x_j^*) > 1] \quad (8.61)$$

حيث S فئة القيود التي لم تتحقق، ويتم تحديد القيد الابعد عن التحقيق، ويتم تكتيفه جزئي وكلى عند النقطة x_j^* واطافة هذا القيد الى النموذج (8.14) – (8.16) ثم حل النموذج من جديد.

وهكذا الى ان نصل الى نقطة الحل التي تحقق جميع القيود في المشكلة الاصلية [7].

ويمكن تلخيص خطوات الحل في الخوارزم التالي:

خوارزم (٢-٨): الخطوة (١): اختيار نقطة حل مبدئية مناسبة ونرمز لها بالرمز \bar{x} ، بحيث تحقق هذه النقطة جميع قيود المشكلة الاصلية.

الخطوة (٢): ١- يتم تحويل النموذج العام الى نموذج موجب (تكتيف جزئي) حول النقطة \bar{x}

٢- تحويل جميع القيود الموجبة الى قيد بحد واحد موجب (تكتيف كلى) حول النقطة \bar{x} .

٣- تحويل النموذج الى نموذج خطى بأخذ اللوغاريتمات للقيود وتحديد المتغيرات z_j

الخطوة (٣): ١- حل النموذج الخطى في (8.10) – (8.8) باستخدام طريقة السمبلكس ونحصل على z_j^* .

٢- الحصول x_j^* من z_j^* .

الخطوة (٤): اختبار القيود عند النقطة x_j^* .

أ- إذا تحققت جميع القيود فان النقطة x_j^* هي نقطة الحل الأمثل النسبية (وممكن تكون المطلقة في النماذج الممهدة).

ب- إذا لم يتحقق قيد او أكثر عند النقطة x_j^* يتم تحويل لهذا القيد عند النقطة x_j^* الى قيد خطى (ويسمى قاطع cut) ويتم اضافته الى القيود الخطية الأخرى والانتقال الى الخطوة (٣).

وفيما يلي سوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال الذي قدمه Dembo [3,6].

مثال (٢-٨): باستخدام أسلوب التكتيف الثنائي (الكلى) حل النموذج التالي:

$$\text{Min. } x_0$$

$$S.T. \quad y_1(x) = \frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_0^2}{16} - \frac{x_1^2}{16} \leq 1$$

$$y_2(x) = \frac{x_0^2 x_1^{-1}}{6} + \frac{x_1}{6} + \frac{7x_1^{-1}}{3} - x_0 x_1^{-1} \leq 1$$

$$1 \leq x_1, x_0 \leq 100$$

$$Q_1(x) = \frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{2}, \quad p_1(x) = 1 + \frac{x_0^2}{16} + \frac{x_1^2}{16}$$

$$Q_2(x) = \frac{x_0^2 x_1^{-1}}{6} + \frac{x_1}{6} + \frac{7x_1^{-1}}{3}, \quad p_2(x) = 1 + x_0 x_1^{-1}$$

وبما ان:

$$p_1(x) = \sum_{t=1}^{T_i} p_{it}(x), \quad p_2(x) = \sum_{t=1}^{T_i} p_{it}(x) \rightarrow$$

$$p_{11}(x) = 1, p_{12}(x) = \frac{x_0^2}{16}, p_{13}(x) = \frac{x_1^2}{16}, p_{21}(x) = 1, p_{22}(x) = x_0 x_1^{-1}$$

وبالتالى يمكن وضع النموذج على النحو التالى:

النموذج الأول:

Min . x_0

$$S.T. \quad \frac{Q_1(x)}{p_1(x)} \leq 1$$

$$\frac{Q_2(x)}{p_2(x)} \leq 1$$

وبافتراض ان النقطة المبدئية $x = \bar{x} = (4.0, 4.5)$ فان:

$$p_1(x, \bar{x}) = \left[\frac{1}{\delta_{11}} \right]^{\delta_{11}} \left[\frac{x_0^2/16}{\delta_{12}} \right]^{\delta_{12}} \left[\frac{x_1^2/16}{\delta_{13}} \right]^{\delta_{13}}$$

$$p_2(x, \bar{x}) = \left[\frac{1}{\delta_{21}} \right]^{\delta_{21}} \left[\frac{x_0 x_1^{-1}}{\delta_{22}} \right]^{\delta_{22}}$$

ولتحديد قيم الازان النسبية δ_{it} عند النقطة \bar{x}

$$\delta_{11} = \frac{1}{p_1(x)}, \delta_{12} = \frac{x_0^2/16}{p_1(x)}, \delta_{13} = \frac{x_1^2/16}{p_1(x)}, \delta_{21} = \frac{1}{p_2(x)}, \delta_{22} = \frac{x_0 x_1^{-1}}{p_2(x)}$$

عند النقطة $\bar{x} = (4.0, 4.5)$ نجد ان:

$$p_1(\bar{x}) = 3.265 \rightarrow \delta_{11} = 0.3055, \delta_{12} = 0.3665, \delta_{13} = 0.388$$

$$p_2(\bar{x}) = 1.88 \rightarrow \delta_{21} = 0.530, \delta_{22} = 0.470$$

→

$$p_1(x, \bar{x}) = 0.435x_0^{0.612}x_1^{0.775}$$

$$p_2(x, \bar{x}) = 1.997x_0^{0.471}x_1^{-0.471}$$

وبالتالي فان النموذج المكثف تكتيف جزئي يكون نموذج موجب على النحو:

النموذج الثانى:

$$\text{Min } . x_0$$

S.T

$$\phi_1(x) = \frac{Q_1(x)}{p_1(x, \bar{x})} = 0.574x_0^{0.388}x_1^{-0.755} + 1.148x_0^{-0.612}x_1^{0.225} \leq 1$$

$$\phi_2(x) = \frac{Q_2(x)}{p_2(x, \bar{x})} = 0.083x_0^{1.529}x_1^{-0.529} + 0.083x_0^{-0.471}x_1^{1.471}$$

$$+1.168x_0^{-0.471}x_1^{-0.529} \leq 1$$

$$1 \leq x_1, x_0 \leq 100$$

وبما ان:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \psi_{11}(x) + \psi_{12}(x) \\ &= 0.574x_0^{0.388}x_1^{-0.755} + 1.148x_0^{-0.612}x_1^{0.225} \end{aligned}$$

$$\phi_2(x) = \psi_{21}(x) + \psi_{22}(x) + \psi_{23}(x)$$

$$= 0.083x_0^{1.529}x_1^{-0.529} + 0.083x_0^{-0.471}x_1^{1.471} \\ + 1.168x_0^{-0.471}x_1^{-0.529}$$

وبالتعويض فان

$$\phi_1(x, \bar{x}) = \left[\frac{\psi_{11}(x)}{e_{11}} \right]^{e_{11}} \left[\frac{\psi_{12}(x)}{e_{12}} \right]^{e_{12}}$$

$$\phi_2(x, \bar{x}) = \left[\frac{\psi_{21}(x)}{e_{21}} \right]^{e_{21}} \left[\frac{\psi_{22}(x)}{e_{22}} \right]^{e_{22}} \left[\frac{\psi_{23}(x)}{e_{23}} \right]^{e_{23}}$$

حيث

$$e_{11} = \frac{\psi_{11}(\bar{x})}{\phi_1(\bar{x})}, e_{12} = \frac{\psi_{12}(\bar{x})}{\phi_1(\bar{x})}, e_{21} = \frac{\psi_{21}(\bar{x})}{\phi_2(\bar{x})}$$

$$e_{22} = \frac{\psi_{22}(\bar{x})}{\phi_2(\bar{x})}, e_{23} = \frac{\psi_{23}(\bar{x})}{\phi_2(\bar{x})}$$

$$\phi_1(x, \bar{x}) = 1.72x_0^{-0.305}x_1^{-0.083} \leq 1$$

$$\phi_2(x, \bar{x}) = 0.516x_0^{0.166}x_1^{0.277} \leq 1$$

ويصبح النموذج بعد التكتيف الكلي على النحو التالي:

النموذج الثالث:

Min . x_0

$$S.T. \quad 1.72x_0^{-0.305}x_1^{-0.083} \leq 1$$

$$0.516x_0^{0.166}x_1^{0.277} \leq 1$$

$$1 \leq x_1, x_0 \leq 100$$

وبافتراض ان

$$z_0 = \ln(x_0) - \ln(x_0^{L_0}) = \ln(x_0)$$

$$z_1 = \ln(x_1) - \ln(x_1^{L_1}) = \ln(x_1)$$

ويصبح النموذج الخطى المكافئ المحول على النحو التالي:

النموذج الرابع:

$$\text{Min } . z_0$$

$$S. T. \quad \phi_1(x, \bar{x}) = 0.305z_0 - 0.082z_1 \leq -0.543$$

$$\phi_1(x, \bar{x}) = 0.166z_0 - 0.277z_1 \leq 0.661$$

$$0 \leq z_0 \leq 6.907$$

$$0 \leq z_1 \leq 6.907$$

وبالتالي فان

$$z_0^* = 1.350 \quad , z_1^* = 1.579$$

→

$$x_0^{*1} = 3.858 \quad , x_1^{*1} = 4.852$$

ثم اختبار القيود في المشكلة الاصلية على النحو التالي:

$$Q_1(x) - p_1(x) = 0.989 \quad (\text{يتحقق القيد عند } x^{*'})$$

$$Q_2(x) - p_2(x) = 1.01 \quad (\text{لم يتحقق القيد عند } x^{*'})$$

وبالتالي يتم تقرب القيد الثاني عند النقطة x^* ثم تحويله الى خطى على النحو التالي

$$\bar{Q}_2(x, \bar{x}) = 0.097z_0 + 0.369z_1 \leq 0.697$$

ويتم إضافة القيد أعلاه الى النموذج الرابع ويسمى هذا القيد قطع cut على النحو التالي:

النموذج الخامس

$$\text{Min } . z_0$$

$$S.T. \quad -0.305z_0 - 0.082z_1 \leq -0.542$$

$$0.166z_0 + 0.277z_1 \leq 0.661$$

$$0.097z_0 + 0.369z_1 \leq 0.697$$

$$0 \leq z_0 \leq 6.907$$

$$0 \leq z_1 \leq 6.907$$

وبحل النموذج أعلاه نجد ان

$$z_0^* = 1.354 \quad , z_1^* = 1.566$$

→

$$x_0^{*2} = 3.872 \quad , x_1^{*2} = 4.786$$

ثم اختبار قيود المشكلة الاصلية

$$Q_1(x) - p_1(x) = 0.992 \quad (\text{يتحقق القيد عند } x^{*2})$$

$$Q_2(x) - p_2(x) = 0.998 \quad (\text{يتحقق القيد عند } x^{*2})$$

وبالتالي تصبح النقطة x^{*2} هي الحل.

ملحوظة: ورغم ان الطريقة أعلاه تتطلب اجراء عدد كبير من التكرارات وزيادة حجم المشكلة بإضافة قواطع cuts وبصفة خاصة للمشاكل ذات الحجم الكبير- ولكن هذه الصعوبة تم التغلب عليها بوجود عدد كبير من الخوارزميات وبرامج الحاسب التي تقوم بحل هذه المشاكل في [3,6]، وبالتالي تصبح النقطة x^{*2} هي الحل.

المصطلحات باللغة العربية والانجليزية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
A		
Analytical solution	٣٤،٣٠	حل تحليلي
Approximate error	١٨،٩	خطا التقريب
Approximate roots	٣٤	الجزور التقريبية
Arithmetic geometric inequality	١٣٢	المتباينة العددية الهندسية
Active solution	١٠٥	قيد فعال
C		
Convergent function	٧٧،١٦	دالة تقاربية
Constrained model	٥٥،٥١،١٢	نموذج محدب
Convex combination	٦٢	توليفة محدبة
Convex set	٦٣	فئة محدبه
Concave function	٦٨،٦٦	دالة مقعرة
Concave set	٦٦	فئة محدبه
Conjugate gradient method		طريقة الانحدار المترافق
Cutting plane method	٧٢،١٢	طريقة المستوى القاطع
Compact set	١٠٠،١١٩،١٨٩	فئة محكمة
Couchy bounds	٣٤	حدود كوشي
D		
Differentiable methods	٧٧،٦٠	طرق تعتمد على التفاضل
Degrees of difficulty	١٤٧	درجات الصعوبة
Duality method	١٤١،١٢٩	الطريقة البديلة (الثنائية)
Dual problem	١٤٩،١٤٧	المشكلة البديلة
Direction method	١١٩،٨٨،٧٧،٧٢،٦٠	طريقة الاتجاهات
E		
Exact solution	٦١	حل صحيح (غير تقريبي)
F		
Feasible point	١٨١	نقطة ممكنة
G		
Global (absolute) point	١٠٥	نقطة مطلقة
Geometric programming	١٦٢،١٢٩	البرمجة الهندسية
Gradient vector		متجه الانحدار

Generalized weights		الاوزان العامة
Global solution	٩٧	حل مطلق
	H	
Hessian matrix	٧٤	المصفوفة الهيسينية (مصفوفة المشتقات من الترتيب الثاني)
	I	
Inverse matrix		معكوس المصفوفة
Iteration	٤٥	تكرارات
Infection point	٩٣,٧٤	نقطة انقلاب
Indefinite matrix	٧٤,٦٩	مصفوفة غير معرفه
	K	
Karush-kuhn-tucker (kkt) conditions	١٠٧	شروط كارش-كون-توكر
	L	
Local (relative) point		نقطة نسبية
Lower limits		الحدود الدنيا
Lagrange method	١٠٢,١٢	طريقة لاجرانج
Loose constraint	١٣٦	قيد غير حرج (يتحقق في شكل متباينة في الحل الأمثل)
	M	
Multi-variable function		دالة متعددة المتغيرات
Minimum point	٦٤	نقطة نهاية صغرى
Maximum point	٦٤	نقطة نهاية عظمى
	N	
Nonsingular matrix	٢٣,٧٣,٣٥	مصفوفة غير شاذة
Numerical solution	٣٠	حل عددي
Negative definite	٦٩,٤٠	تامة السالبة
Newton-Raphson method	١١٣,٨٤,٤٤	طريقة نيوتن-رافسون
Necessary conditions	٧٤,٧٢	شروط ضرورية
Non-linear equation		معادلة غير خطية
Newton method	٧٢,٤٠	طريقة نيوتن
Normality condition	١٣٦	الشرط الطبيعي

S		
Smooth function	٧٢	دالة ممهدة
Singular matrix	٨٧	مصفوفة شاذة
Smoothed equations	١٠٣	معادلات ممهدة
Stationary points	١٠١,٥٦	نقطة استقرار
Stationary equations	١٠٤,٦١	معادلات استقرار
Simulation technique	٩٩	أسلوب المحاكاة
Signomial function	١٣٥,١٣١	دالة ذات حدود موجبة وسالبة
P		
Polynomial function	٣٦	دالة كثيرة حدود
Positive definite	٧٤	تامة الإيجابية
Pattern search method	٣٧,٦٩	طريقة البحث عن النمط
Posynomial function	١٣٤,١٣١	دالة ذات حدود موجبة
O		
Optimal condition	٧٤	شروط الأمثلية
Optimization problems	٩٩	مشاكل الأمثلية
Optimal local weights	١٤٤,١٤١	اوزان مثلى نسبيا
Orthogonality conditions	١٤٤	شروط التعامد
R		
Remainder	٣٦,١٦	الباقى
Random search method	٨٨,٧٢,٦٠	طريقة البحث العشوائي
Random jumping method	٨٨,٦٠	طريقة القفز العشوائي
U		
Univariate search method	٩١,٧٣	طريقة البحث أحادي المتغير
Unconstrained model	٧٢,٥٥,٥١,١٢	نموذج غير مقيد
Unique	٣٥	وحيد
Utility function	٤٨	دالة المنفعة
Univariate search method	٨٨,٦٠	طريقة البحث أحادي المتغير
T		
Taylor's approximation	١٤,٨	تقريب تيلور
Theorems of convergence	٥٣	نظريات التقارب
Totally Condensed	١٦٣	تكثيف كلى

المراجع العربية:

[١] عفاف الدش (٢٠١٢): بحوث العمليات واتخاذ القرار – الجزء الأول – "البرمجة وحيدة الهدف" – المكتبة الاكاديمية شارع الدقي – القاهرة – مصر.

[٢] عفاف الدش (٢٠٢١): بحوث العمليات واتخاذ القرارات – الجزء الثالث – "البرمجة الاحتمالية" – الطبعة الثانية – المكتبة الاكاديمية شارع الدقي – القاهرة – مصر.

المراجع الأجنبية:

- [3] Afaf El-Dash (1984): "Chance-constrained and Nonlinear Goal Programming", Ph.D. Thesis, Applied Mathematics Dept., North Wales University, U.K.D.
- [4] Afaf El-Dash (1988): "Geometric Programming and Cyclic Aircraft Maintenance Flying System", The Egyptian Computer Journal, ISSR Cairo University., Vol. 16, PP.42-59.
- [5] Andrzej Ruszczyński (2011): "Nonlinear Optimization", Princeton University, Press, New York.
- [6] Avriel, Dembo, and Passy (1975): "Solution of Generalized Geometric Programs" International Journal for Numerical Methods in Engineer.
- [7] Beightler and Phillips (1976): "Applied Geometric Programming", John Wiley & Sons, INC.

- [8] Beightler, Phillips, and Wilde (1979): “Foundations of Optimization”, Second Edition, Prentice – Hall, INC, Englewood, NJ
- [9] Bradly and Smith (1999): “Calculus”, Prentice – Hall, New Jersey.
- [10] Carl Stitz and Jeff Zeager (2013): “College Algebra”, Lakeland and Lorain County, Community College.
- [11] Chasnov (2012): “Numerical Methods”, The Hong Kong University.
- [12] Chung Shun (2002): “A Survey on Numerical Methods for Unconstrained Optimization Problems”, The Chinese University of Hong Kong.
- [13] Dennis and Robert (1996): “Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equation”, Springer, New York.
- [14] Dikin (1967): “Iterative Solution of Problems of linear and Quadratic Programming”, Doki, Akad Nauk, SSS 1974 (1): 747-748.
- [15] Eric Walter (2014): “Numerical Methods and Optimization”, Springer, New York.
- [16] Forsgren, Gill and Wright (2002): “Interior Methods for Nonlinear Optimization”, SIAM Review, Vol. 44, No.4, Pp:525-597.

- [17] Frederic and Charles (2006): “Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects”, Second Edition, New York.
- [18] Hanif and Serali (2006): “Nonlinear Programming: Theory and Algorithms”, Third Edition, Wiley & Sons, INC, New Jersey.
- [19] Hook and Jeeves (1961): “Direct Search Solution of Numerical and Statistics Problems”, Journal of ACM, 8(2): 212-229.
- [20] Jorge and Stephen (1999): “Numerical Optimization”, Springer, New York.
- [21] Juan Carlos (2010): “Numerical PDE Constrained Optimization”, Springer, New York.
- [22] Kamara’s (1984): “A New Polynomial – Line Algorithm for Linear Programming Proceeding of The Sixteenth and Annual”, ACM Symposium on Theory of Computing – STOC, 84, P.302.
- [23] Kendall (1978): “An Introduction to Numerical Analysis”, John Wiley, New York.
- [24] Manfred, Dietmar and Enrico (2019): “Numerical Methods and Optimization in Finance”, Academic Press, London.

-
- [25] Melvin (1982): “Numerical Analysis: A Practical Approach”,
Macmillan Publishing Co. INC, New York.
- [26] Michael (2008): “Nonlinear Optimization with Engineering
Applications”, Springer, U.K.D.
- [27] Nada (2018): “A Joint Chance-constrained Programming
Approach and its Application”, Math &
Statistics Dep., Faculty of commerce, Helwan
University, Egypt.
- [28] Press, and Other (2007): “Linear Programming Interior Point
Methods Numerical Recipes: The Art of
Scientific Computing (3rd ed.)”, New York
Cambridge University, Press, London.
- [29] Rao (1978): “Optimization: Theory and Application”, Wiley,
Eastern Limited.
- [30] Rasha and Afaf (2021): “A New Bivariate Generalized
Exponential Distribution with Application in
Joint Chance-constrained Programming”,
FJMS, Vol 130, No. 2.
- [31] Rasha and Afaf (2021): “A Probabilistic Programming Technique
Bivariate Lomax Random Parameters”, FJMS,
Vol 130, No. 2.
- [32] Richard (1982): “Operation Research”, Schaum’s Outline Series
in Engineering, McGraw – Hell Book Company.

-
- [33] Sanjay Sharma (2006): “Applied Nonlinear Programming”, New Age International (p) Limited, Publishers, New Delhi.
- [34] Sergiy and Panos (2014): “Numerical Methods and Optimization: An Introduction” CRC Press, New York.
- [35] Slawomir and Xin (Eds.) (2011): “Computational Optimization, Methods and Algorithms”, Springer, U.K.D.
- [36] Smith and Minton (2007): “Calculus”, Higher Education, New York.
- [37] Solomon (2013): “Numerical Algorithm”, Springer, New York.
- [38] Stephen and Lieven (2004): “Convex Optimization”, Cambridge, London.
- [39] Taha (2004): “Introduction of Operation Research”, Mac Millan Publishing Co., INC., New York.
- [40] Urmila (2008): “Introduction to Applied Optimization”, Second Edition USA.
- [41] Wenyu and Xiangyuan (2006): “Optimization Theory and Methods Nonlinear Programming”, Springer, New York.
- [42] Wikipedia (2021): “Pattern Search (Optimization)”.
- [43] Wikipedia (2021): “Taylor Multi-variate”.
- [44] Wikipedia, The Free Encyclopedia (2021): “Interior-point Methods”.

- [45] Willard (1969): “Nonlinear Programming: A Unified Approach”,
Prentice – Hall, INC, London.
- [46] Yu and Wen (1979): “Positive Basis and A Class of Direct Search
Techniques”, Scientia Sinica [Zhonguo Kexue]:
69-77.