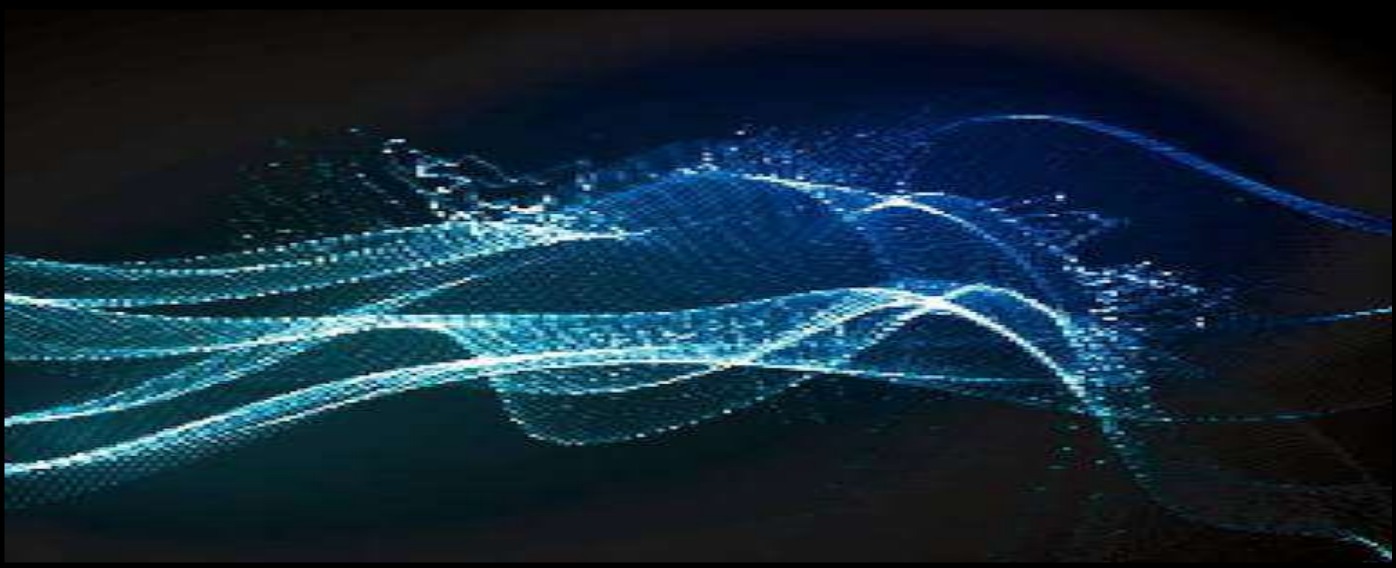
بحوث العمليات وأتخاذ القرارات

الجزء الثالث

البرمجة الأحتمالية

Probabilistic Programming

الطبعة الثانية



الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقا

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير بالدقي - القاهرة

١٤٤٠ هـ / ٢٠١٩م

بحوث العمليات وأتخاذ القرارات

النظريات - الأساليب - التطبيق

الجزء الثالث

البرمجة الأحتمالية

Probabilistic Programming

الطبعة الثانية

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي
ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً
كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير بالدقي - القاهرة

١٤٤٠ هـ / ٢٠١٩م

بحوث العمليات واتخاذ القرارات

النظريات - الأساليب - التطبيق

الجزء الثالث

البرمجة الأحتمالية

الطبعة الثانية

١٤٤٠هـ - ٢٠١٩م

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

القاهرة – مصر

الطبعة الأولى: سنة ١٤٣٦ هـ/٢٠١٥م – الموزع - المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي القاهرة.

رقم الإيداع: ٢٠١٥/٢١٧٢٨

الترقيم الدولي: 978 977 90 36335

الطبعة الثانية: سنة ١٤٤٠ هـ/٢٠١٩م – الموزع - المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي القاهرة.

رقم الإيداع: : ٢٠١٩/٢٣١٥٠

الترقيم الدولي: : 978 977 90 36335

الموقع الإلكتروني: http://www.dr-afafeldash.com

بسم الله الرحمن الرحيم

{ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاء مَاء فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَداً رَّابِياً وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاء حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِّثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاء وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآيه ١٧)

الفهرس

الموضوع | الصفحة

مقدمة

نظراً للتطور السريع فى السنوات الأخيرة فى دراسة الطبيعة المتغيرة فى كثير من مكونات العناصر للمشاكل القرارية المختلفة، مما تطلب اهمية أصدار الطبعة الثانية من كتاب البرمجة الأحتمالية.

و تختلف هذه الطبعة عن الطبعة الأولى فى:

أ) أضافة أجزاء جديدة لأساليب البرمجة الأحتمالية التى تتعامل مع التوزيعات الأحتمالية الأحادية و التوزيعات الأحتمالية الثنائية و التوزيعات الأحتمالية المتعددة للمعلمات العشوائية. و ذلك يرجع إلى نشر العديد من التوزيعات الاحتمالية الثنائية و المتعددة منذ ١٩٦٠. و رغم وجود العديد من التوزيعات الأحتمالية الثنائية و المتعددة فأنه يوجد عجز شديد فى أستخدلم و تطبيق هذه التوزيعات فى أسلوب البرمجة الاحتمالية، لذلك يعتبر أستخدام هذه التوزيعات فى البرمجة الأحتمالية ذو أهمية فى دراسة و حل العديد من المشاكل الفعلية.

ب) تقديم بعض الأساليب الحديثة لتحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة.

ج) تقديم العديد من الأمثلة العددية و التطبيقية لأستخدام التوزيعات المقدمة فى (أ).

د) تصويب الأخطاء المطبعية الواردة فى الطبعة الأولى سنة ٢٠١٥م.

و تعتبر الحلول المثلى optimal solutions للمشاكل القرارية decision's problems فى جميع القطاعات الأنتاجية و الخدمية العمود الفقرى للنمو و التقدم فى هذه القطاعات لما توفره من الوقت و الجهد و النفقات ايضاً.

و كثير من المشاكل القرارية يمكن صياغتها و حلها للحصول على الحلول المثلى بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية Mathematical programming approaches المناسبة. و ذلك فى حالة إذا كانت بيئة صناعة القرار Decision's environment بيئة غير عشوائية (يقينية) حيث تكون معلمات parameters نموذج البرمجة متغيرات غير عشوائية، و يسمى نموذج البرمجة فى هذه الحالة بنموذج البرمجة اليقينية Deterministic programming model.

و لكن فى الواقع الأعم تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية Stochastic environment متغيرة، فى هذه الحالة تكون بعض أو كل معلمات نموذج البرمجة متغيرات عشوائية random variables (سواء معلومة أو غير معلومة التوزيعاتالأحتمالية لهذه المتغيرات العشوائية). و يسمى نموذج البرمجة فى هذه الحالة بنموذج

البرمجة العشوائية Stochastic programming model، و عندما تكون التوزيعات الأحتمالية

distributions probability للمعلمات العشوائية معلومة فإنه يسمى نموذج برمجة أحتمالية programming probabilistic model و بالتالى فهو حالة خاصة من النموذج العشوائى.

و يرتبط النموذج العشوائى فى جميع حالاته بمستوى مخاطرة risk و الحل الأمثل لنموذج البرمجة الأحتمالية يكون مشروط بمستوى للمخاطرة المسموح بها والتى ترجع لوجود العامل العشوائى.

و توجد أساليب مختلفة لصياغة و حل نماذج البرمجة الأحتمالية مثل: أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً Chance-constrained programming، و أسلوب البرمجة متعددة المراحل Multi-stage programming، ..... الخ.

و يعتبر Tintner سنة ١٩٤١ أول من قدم دراسة للنماذج العشوائية و ميز بين الأنواع المختلفة للمخاطرة المصاحبة لحلول نماذج البرمجة العشوائية.

و سوف تقتصر دراستنا فى هذا الجزء من الكتاب على أساليب البرمجة الأحتمالية و بصفة خاصة أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً بالنسبة لنماذج البرمجة الخطية الأحتمالية linear programming Probabilistic و نماذج برمجة الهدف الخطية الأحتمالية Probabilistic linear goal programming ايضاً.

و يعتبر أول من قدم أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً كل من Charnes and Cooper سنة ١٩٥٥ ثم توالت الأبحاث النظرية و التطبيقية لهذا الأسلوب نظراً لأهمية المشاكل التى يتم حلها بأستخدام هذا الأسلوب.

و كذلك يعتبر Contini سنة ١٩٦٨ أول من قدم أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً chance-constrained goal programming حيث أفترض ان وجود معلمات

عشوائية تتبع التوزيع المعتاد.

و فى سنة ١٩٨٤ قدمت El-Dash أسلوب جديد لبرمجة الهدف الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع الأسى بمعلمتين، ثم توالت الأبحاث النظرية و التطبيقية فى القطاعات الأنتاجية

و الخدمية المختلفة، و فى الفصل (١-٥) سوف نقدم نبذة عن التطور التاريخي لأهم الدراسات التى قدمت بالنسبة لأسلوب البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً و أسلوب برمجة الهدف الخطية المقيدة أحتمالياً. مع ذكر أهم التطبيقات التى قدمت لهذه الأساليب فى القطاعات المختلفة.

~~و نظراً لأهمية أساليب بحوث العمليات بصفة عامة و التطور المستمر فى أساليبها المختلفة، و بصفة خاصة الأساليب المرتبطة ببيئة صناعة القرار المتغيرة و تطبيقاتها على نطاق واسع، بالإضافة إلى العجز الشديد فى المكتبة العربية بالنسبة للكتب العلمية و بصفة خاصة بحوث العمليات لارتباطها الوثيق و تكاملها مع العلوم الأخرى خاصة علم الأحصاء- مما دفعني لأصدار الطبعة الثانية من الجزء الثالث من كتاب "بحوث العمليات واتخاذ القرارات – البرمجة الاحتمالية"~~

حيث يتكون الكتاب من الأجزاء الثلاثة التالية:-

- الجزء الأول تحت عنوان: "البرمجة وحيدة الهدف"
- الجزء الثاني تحت عنوان: "البرمجة متعددة الأهداف"
- الجزء الثالث تحت عنوان: "البرمجة الاحتمالية"

و الأجزاء الثلاثة تصاعدية بمعنى أن تناول الجزء الثالث يتطلب ضرورة الإلمام بالجزئيين الأول و الثانى، كذلك تناول الجزء الثاني يتطلب ضرورة الإلمام بالجزء الأول.

و المستهدفون من هذا الجزء هم طلاب مرحلتى البكالوريوس و الدراسات العليا فى التخصصات المختلفة (الإحصاء – الإقتصاد – المحاسبة – الإدارة - ...... الخ)، كذلك متخذى القرارات فى المجالات المختلفة. و يحتوى هذا الكتاب على ثلاثة اجزاء و عشرة أبواب:

الباب الأول تحت عنوان: مشاكل البرمجة العشوائية

و يتناول هذا الباب المشاكل القرارية و تصنيفها، ثم عرض لأهم أساليب البرمجة الأحتمالية و بصفة خاصة أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً، ثم نقدم نبذة عن التطور التاريخى لأسلوب البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً و برمجة الهدف الخطية المقيدة أحتمالياً. هذا بالإضافة إلى ذكر أهم المتطلبات الأساسية لتناول موضوعات هذا الكتاب.

الجزء الاول تحت عنوان
القيود الأحتمالية بتوزيعات أحتمالية أحادية

و يشتمل على الأبواب الثانى و الثالث و الرابع.

الباب الثانى تحت عنوان: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متصلة ($\tilde{b}_i$)

و يقدم هذا الباب كيفية تحويل نماذج البرمجة الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة بأستخدام أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون بعض المعلمات العشوائية ($\tilde{b}_i$) متغيرات عشوائية متصله ذات توزيعات مختلفة.
بالإضافة إلى تقديم أمثلة تطبيقية مختلفة فى هذه الحالة و مجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الثالث تحت عنوان: القيود الاحتمالية لمعلمة عشوائية متقطعة ($\tilde{b}_i$)

و يقدم هذا الباب تحويل النماذج الأحتمالية التى تشمل على معلمات عشوائية بتوزيعات أحتمالية متقطعة الى نماذج يقينية مكافئة. ثم تقديم مجموعة من الأمثلة التطبيقية.

الباب الرابع تحت عنوان: القيود الأحتمالية بمعلمة عشوائية واحدة ($\tilde{a}_{ij}$)

حيث يقدم هذا الباب تحويل القيد الأحتمالى المشتمل على معلمة عشوائية واحدة ($\tilde{a}_{ij}$) الى قيد يقينى مكافئ و أستخدام توزيعات احتمالية مختلفة للمعلمة ($\tilde{a}_{ij}$) كذلك تقديم مجموعة من الأمثلة التطبيقية ايضاً.

الجزء الثانى تحت عنوان
القيود الأحتمالية بتوزيعات متعددة

و يشتمل على الأبواب الخامس و السادس و السابع و الثامن.

الباب الخامس تحت عنوان: بعض أساليب التحويلات الأحصائية

و يقدم هذا الباب بعض اساليب التحويلات الأحتمالية التى تعتبر جزء اساسى فى دراسة الأبواب التالية.

الباب السادس تحت عنوان: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية بتوزيعات ثنائية

و يقدم هذا الباب كيفية تحويل النماذج الأحتمالية الى نماذج يقينية مكافئة فى حالة وجود معلمات عشوائية بتوزيعات ثنائية، فى حالة الأستقلال و عدم الأستقلال لهذه المعلمات العشوائية و ذلك بأستخدام توزيعات ثنائية مختلفة كذلك تقديم القيود المشتركة بالأضافة إلى تقديم مجموعة من الامثلة التطبيقية ايضاً.

الباب االسابع تحت عنوان: القيود الأحتمالية ذات المعلمات العشوائية $(\tilde{a}_{ij})$ بتوزيعات أحتمالية متعددة

و يقدم هذا الباب القيود الأحتمالية التى تحتوى على معلمات عشوائية بتوزيعات أحتمالية متعددة مختلفة، و كيفية تحويل هذه القيود الى قيود يقينية بالأضافة إلى مجموعة من الأمثلة العددية.

الباب الثامن تحت عنوان: دالة الهدف الأحتمالية

و يقدم هذا الباب كيفية تحويل دالة الهدف الأحتمالية و بالتالى تحويل النمزذج الأحتمالى الى نموذج يقينى فى ظل قواعد قرارية معينة.

الجزء الثالث تحت عنوان
برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً

و يشتمل على االباب التاسع و العاشر.

الباب التاسع تحت عنوان: برمجة الهدف الخطية

و يقدم هذا الباب بعض أهم التعريفات الأساسية التى يتم تناولها فى اسلوب برمجة الهدف، و يعتبر هذا الباب الأساس لتناول الباب التالى كذلك يقدم العديد من الأمثلة العددية

و التطبيقية أيضاً.

الباب العاشر تحت عنوان: نماذج برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً

و يشتمل هذا الباب على نماذج برمجة الهدف بمعلمات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معينة و أسلوب كيفية تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة. ثم تقديم العديد من الأمثلة و التمرينات التى توضح التحويل.

كذلك تتضمن هذه الطبعة ١٠ ملاحق تتضمن بعض المتطلبات الرئيسية لتناول الموضوعات المقدمة بالإضافة إلى قائمة بالمصطلحات باللغة العربية و الإنجليزية و قائمة متنوعة من المراجع العربية و الأجنبية.

و أخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجعل هذه الطبعة من الكتاب لبنه من لبنات البناء، عسى أن نجد من المتخصصين العرب من يقدم إسهاماته فى هذه العلوم.

والله ولى التوفيق

المؤلفة
أ.د عفاف على حسن الدش
أستاذ بحوث العمليات والإحصاء
كلية التجارة – جامعة حلوان
القاهرة – ديسمبر ٢٠١٩

الباب الأول

مشاكل البرمجة العشوائية
Stochastic Programming Problems

(١-١) مقدمة Introduction

فى معظم القطاعات الإنتاجية أو الخدمية مثل القطاع الزراعى، أو قطاع النقل، أو السياحة، أو البنوك، ... الخ. يواجه متخذ القرار كثير من المشاكل التى تخضع لعنصر أو أكثر من العناصر المتغيرة، و فى هذه الحالة يقال أن بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية متغيرة، و تسمى هذه المشاكل بالمشاكل العشوائية stochastic problems.

و عادة تصاغ هذه المشاكل فى شكل نماذج تأخذ في الأعتبار العناصر العشوائية، و تسمى بالنماذج العشوائية stochastic models [١٢, 43, 51, 59, 64, 68, 77, 94].

و فى معظم المشاكل الفعلية التى يمكن صياغتها فى شكل نماذج برمجة (خطية أو غير خطية) غالباً يوجد معلمة parameter أو أكثر من معلمات نموذج البرمجة تمثل متغيرات عشوائية random variables تعكس البيئة المتغيرة و كذلك تعكس المخاطرة الناشئة عن القرار الذى يتم أتخاذه، و فى هذه الحالة يسمى النموذج نموذج برمجة عشوائية stochastic programming model [149, 182].

و توجد أساليب مختلفة لحل هذا النوع من النماذج. و لكن تشترك جميع الأساليب المختلفة لحل نماذج البرمجة العشوائية فى الخصائص التالية:

١- تحويل النموذج العشوائي إلى نموذج يقينى (أو عدة نماذج يقينية متتالية) وفقاً لفئة من القواعد القرارية decisions rules التى يتم على أساسها التحويل بحيث تتصف ببعض خصائص الأمثلية [١٢, 174, 196].
٢- نتيجة للأختلافات العشوائية لبعض المعلمات (أو كل المعلمات) فإن ذلك يؤدى إلى وجود مخاطرة risk مرتبطة بالحل الذي يتم الحصول عليه بعد تحويل النموذج العشوائي إلى نموذج يقينى. و تختلف الطرق فى قياس هذه المخاطرة وفقاً للأسلوب المتبع فى الحل [64, 160, 165].
٣- لا يوجد حل أمثل مطلق لنموذج البرمجة العشوائية و لكن توجد حلول مثلى مشروطة بأحتمالات معينة (ممكن أفتراض قيم هذه الأحتمالات أو إيجاد أفضل قيم لهذه الأحتمالات بأستخدام أساليب برمجة الصلاحية reliability programming [67, 177, 182]).

و يعتبر Tintner سنة ١٩٤١ أول من تناول نماذج البرمجة العشوائية حيث ميز بين

نوعين من المخاطرة هما:

أ- المخاطرة الذاتية subjective risk

عندما يوجد توزيع أحتمالى معلوم للمعلمة التى تمثل متغير عشوائى فإنه يمكن قياس المخاطرة، و بأستخدام بعض أساليب البرمجة الأحتمالية يمكن تحديد التوزيع الأحتمالى للحل الأمثل (وفقاً لفئة القواعد القرارية المفترضة التى سبق تحديدها) [195, 182, 174].

ب- عدم التأكد الذاتى subjective uncertainty

حيث يفترض عدم معرفة التوزيعات الاحتمالية للمعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية، و لكن يفترض معرفة التوزيعات الأحتمالية القبلية لها priori probability distributions of the parameters [195, 64].

و فى سنة ١٩٥٥ ميز Tintner أيضاً بين أسلوبين للبرمجة العشوائية هما الأسلوب الإيجابى و الأسلوب السلبى negative and positive approaches [195].

ثم تكونت العديد من المدارس العلمية التى قدمت أساليب مختلفة للبرمجة العشوائية و الغالبية منها ميز بين نوعين من الأساليب:

(١) النوع الأول حيث تكون المعلمات العشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة (أو أمكانية تقدير هذه التوزيعات الأحتمالية [182,٩]) و هى ما يمكن تسميتها بأساليب البرمجة الأحتمالية probabilistic programming. و هذا النوع هو ما سنتناوله بالتفصيل في الأبواب التالية.

(٢) أما النوع الثانى عندما تكون المعلمات العشوائية غير معلومة التوزيعات الأحتمالية [182, 160, 150].

و سوف تقتصر دراستنا فى هذا الكتاب على النوع الأول فقط.

و يعتبر كل من Charnes and Cooper سنة ١٩٥٥ أول من قدما أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً Chance-Constrained Programming (CCP) لتحويل النماذج العشوائية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية

معلومة.

و يعتبر هذا الأسلوب من أهم الأساليب للبرمجة الأحتمالية، نظراً لبعض الخصائص التى يتميز بها، بالإضافة إلى مرونته فى التطبيق و التحليل أيضاً كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الأبواب التالية، ثم قدما العديد من التطبيقات لهذا الأسلوب [64, 51, 48].

و لكن أعتبار من سنة ١٩٧٠ تم تطوير و نمو أسلوب (CCP) بأستخدام الدراسات التى قدمها Sengupta و آخرين حيث قدم العديد من طرق التحويل بأستخدام أسلوب CCP [178]. كذلك قدم العديد من الدراسات لأساليب البرمجة العشوائية الأخرى بالأشتراك مع Tintner وآخرين مثل Fox [177, 176].

و نظراً للأهمية النظرية و التطبيقية لأسلوب CCP، سوف نقدم نبذة تاريخية عن التطور التاريخى للأسلوب وعلاقته بأساليب البرمجة الأخرى كذلك أهم مجالات تطبيقه فى الفصل (١-٥). و في هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل تصنيف المشاكل القرارية للبرمجة العشوائية فى الفصل (١-٢)، ثم نقدم باختصار بعض أهم أساليب البرمجة الاحتمالية فى الفصل (١-٣). أما التعريف بأسلوب (CCP) و أهم خصائصه سوف يقدم فى الفصل (١-٤) ثم نقدم نبذة تاريخية عن التطور التاريخي لأسلوب CCP و أرتباطه بأساليب البرمجة اليقينية مثل البرمجة الخطية و برمجة الهدف و أهم التطبيقات فى الفصل (١-٥) كما ذكرنا سابقاً. بالإضافة الى تقديم أهم المتطلبات الأساسية لدراسة أساليب البرمجة العشوائية بصفة عامة و أسلوب (CCP) بصفة خاصة فى الفصل (١-٦) ذلك بالإضافة إلى مجموعة من التمرينات المتنوعة فى الفصل (١-٧).

(١-٢) تصنيف المشاكل القرارية
Classification Decision's Problems

فى الجزئين الأول و الثانى من هذا المرجع [٨ ، ١٠] ذكرنا أن القرار decision هو النتيجة النهائية لعملية conclusion of process تسمى عملية صناعة القرار decision making process، حيث يتم تحقيق هدف أو عدة أهداف معينة بعدد من البدائل الممكنة فى ظل أمكانيات محددة limited possibilities. و يختار متخذ القرار أفضل بديل best alternative من هذه البدائل فى ظل بيئة صناعة القرار environment decision making.

و المقصود هنا ببيئة صناعة القرار جميع العناصر و العلاقات المؤثرة فى صناعة القرار و التى لا يتحكم فيها متخذ القرار و تعتبر معطيات له.

كذلك تناولنا بالتفصيل بعض أهم أساليب البرمجة الرياضية المختلفة مثل البرمجة الخطية و غير الخطية، برمجة الهدف، ....، الخ كأساليب هامة فى حل كثير من المشاكل القرارية.
و لكن جميع الأساليب التي تم تقديمها كانت تحت أفتراض أن بيئة صناعة القرار المتمثلة فى صياغة معلمات parameters النموذج (و تسمى أيضاً المعلمات بالمتغيرات التحكمية control variables) تأخذ غالباً قيم ثابته constants و لكن فى معظم المشاكل الفعلية يكون هذا الفرض غير متحقق حيث تكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية random variables [181, 88, 59].

و بصفة عامة يمكن تقسيم المشاكل القرارية التى يمكن صياغتها و حلها بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية إلى قسمين على النحو التالى:

<u>القسم الأول</u>: المشاكل اليقينية deterministic problems حيث تكون بيئة صناعة القرار بيئة يقينية بمعنى أن معلمات النموذج الذى يمثل المشكلة تأخذ قيم ثابتة و يسمى النموذج فى هذه الحالة نموذج يقينى deterministic model.
و إذا حدث تغير فى القيم الثابته لبعض المعلمات إلى قيم ثابته أخرى ففى هذه الحالة يمكن

أستخدام أسلوب تحليل الحساسية sensitivity analysis لتحديد التغيرات التى تطرأ على الحل الأمثل نتيجة التغيرات التى تحدث فى قيم المعلمات.

<u>القسم الثانى</u>: المشاكل العشوائية stochastic problems حيث تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية بمعنى أن معلمات النموذج الذى يمثل المشكلة تمثل متغيرات عشوائية random variables و يسمى النموذج فى هذه الحالة نموذج عشوائي stochastic model.
و توجد أساليب مختلفة للبرمجة العشوائية stochastic programming تتناول هذا النوع من المشاكل، و سوف نتناول بالتفصيل احد هذه الاساليب الأكثر قابلية للتطبيق و هو أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً فى الفصول التالية.
و فى المثال التالى سوف نوضح الفرق بين المشكلة اليقينية و المشكلة العشوائية.

<u>مثال (١-١)</u>

يقوم أحد المصانع بإنتاج نوعين من المنتجات A,B، حيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من النوع A ثلاثة وحدات من المادة الخام، و الوحدة الواحدة من النوع B خمسة وحدات من المادة

الخام، حيث أن المتاح من المادة الخام فى الأسبوع 1500 وحدة. و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من A,B فى الإسبوع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن، حيث C_1, C_2 تشير إلى ربح الوحدة من A,B على الترتيب فى الحالات التالية:

١- إذا كانت $C_1 = 10$, $C_2 = 15$ ثم إذا حدث تغير فى C_1, C_2 بحيث تصبح $C_1 = 11$, $C_2 = 13$
٢- إذا كان ربح الوحدة من A,B تكافئ $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ على الترتيب، حيث $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغير عشوائى بدالة كثافة الأحتمال $f_1(\tilde{C}_1)$, $f_2(\tilde{C}_2)$ على الترتيب بحيث $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$.

<u>الحل</u>

إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من A,B على الترتيب فأن:

١- عندما $C_1 = 10$, $C_2 = 15$ فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية على النحو التالى: أوجد X_1, X_2 التى تجعل:

$$\left.\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 10X_1 + 15X_2 \\ \text{S.T.}\quad 3X_1 + 5X_2 &\le 1500 \\ X_1, X_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

و النموذج أعلاه نموذج برمجة خطية يقينى deterministic LP model و بحله بيانياً أو بأستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة:

$$X_1^* = 500 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad Z^* = 5000$$

أما إذا تغيرات C_1, C_2 لتصبح $C_1 = 11$, $C_2 = 13$ فبأستخدام تحليل الحساسية نجد أن الحل الأمثل X_1^*, X_2^* لم يتغير، و قيمة Z^* هى التى تتغير فقط على النحو التالى:

$$X_1^* = 500 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad Z^* = 5500$$

٢. أما عندما يكون ربح الوحدة الواحدة من A,B متغير عشوائى فيصبح النموذج على النحو التالى: أوجد X_1, X_2 التى تجعل:

$$\left.\begin{aligned} \text{Max. } \tilde{Z} &= \tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \\ \text{S.T.} \quad 3X_1 + 5X_2 &\le 1500 \\ X_1, X_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

و النموذج (2) نموذج برمجة خطية عشوائى **stochastic LP model** يمكن حله بأستخدام أحد أساليب البرمجة العشوائية المختلفة التى سوف نتناولها فى الفصول التالية.

و بصفة عامة يكون نموذج البرمجة العشوائية (خطية أو غير خطية) على النحو التالى [182]:

$$\text{Max. (or Min.)} Z = f(X|C) \qquad (1\text{-}1)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X|\theta_i) \le b_i \quad , \ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1\text{-}2)$$

$$X = [x_1, \ldots, x_n]^\backslash \quad , \qquad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{m1} & \theta_{m1} & \cdots & \theta_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = [b_1, b_2 \ldots, b_m]^\backslash \ , c = [c_1, c_2 \ldots, c_n]$$

حيث X مبدول متجة المتغيرات القرارية و كل من المتجهات $c, \theta_i, b^\backslash$ ، $i = 1, 2, .., m$ تشير إلى متجهات المعلمات، و فى حالة وجود عنصر واحد على الأقل فى فئة المعلمات $(c, \theta_i, b^\backslash)$ يمثل متغير عشوائى فى هذه الحالة يسمى النموذج (1-2), (1-1) نموذج برمجة عشوائية، و يكون النموذج برمجة خطية عشوائية عندما تكون الدوال f, g_i دوال خطية فى المتغيرات القرارية، أما إذا كان على الأقل واحدة من الدوال f, g_i غير خطية يكون النموذج برمجة غير خطية عشوائية.

و يعتبر النموذج اليقينى حالة خاصة **special case** من النموذج العشوائى ففى الحالة اليقينية تكون فئة (فراغ **space**) المعلمات $(c, \theta_i, b^\backslash)$ مكونة من عنصر واحد مركب

حيث تمثل كل معلمة بقيمة واحدة، أما فى الحالة العشوائية فإن فئة المعلمات $(c, \theta_i, b^\backslash)$ تكون مكونة من أكثر من عنصر مركب تناظرها فئة أخرى مصاحبة لها تمثل فئة الأحتمالات حيث يناظر كل عنصر فى فئة المعلمات عنصر مصاحب فى فئة الأحتمالات المناظرة [182,١٢,٨].

و بالتالى فإن الحالة العشوائية هى حالة أعم من الحالة اليقينية و بصفة خاصة المشاكل القرارية التالية:

- المشاكل المرتبطة بالتخطيط على مراحل متتالية فى فترات مستقبلية.
و مثال ذلك تحديد حجم و أسعار الكميات المعروضة من السلع الزراعية مثلاً فى فترات مستقبلية [66]، كذلك حجم الأفواج السياحية فى المواسم المختلفة، ... الخ.
- المشاكل المرتبطة بمعلومات غير متوفرة بشكل كامل لمتخذ القرار و لكن معلوم سلوكها الأحتمالى [91, 89, 88].

و مثال ذلك حجم الطلب و العرض فى السوق الحر على سلعة معينة بالنسبة للشركات المتنافسة المنتجة لهذه السلعة و تحديد كل شركة لسعر الوحدة من هذه السلعة، فعادةً تكون المعلومات الخاصة بكل شركة من الشركات المتنافسة غير معلومة بشكل كامل للشركات الأخرى المتنافسة[184,٩]. و بالتالى تصبح مشكلة الشركة القرارية هى تحديد عدد الوحدات التى تقوم بإنتاجها و طرحها فى السوق فى ظل معلومات غير كاملة عن العرض و الطلب فى السوق. فهى مشكلة قرارية فى حالة عدم التأكد، أو بعبارة أخرى مشكلة عشوائية.

و بصفة عامة يمكن تصنيف المشاكل القرارية العشوائية إلى نوعين على النحو التالى:

<u>**النوع الأول:**</u> عندما يكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة **known probability distributions** أو ممكن تقديرها (بأساليب التقدير الأحصائية المختلفة[٩,٦]) فى هذه الحالة تسمى المشاكل مشاكل قرارية أحتمالية **probabilistic decision problems**. و هذا النوع من المشاكل يمكن صياغته و حله بأستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية **probabilistic programming techniques** حيث تمكن أساليب البرمجة الأحتمالية من قياس و تقدير المخاطر **risk** المرتبطة بكل قرار يتخذه متخذ القرار فى ظل قاعدة قرارية معينة للأمثلية. و أحياناً تسمى هذه المشاكل أيضاً بالمشاكل

القرارية المعينة certainty decision problems أو المشاكل القرارية فى ظل المخاطرة decision problems under risk [134, 92].

و كثير من هذا النوع من المشاكل يمكن صياغتها و حلها بأستخدام أسلوب أو أكثر من أساليب البرمجة الأحتمالية و التى سوف نتناولها بالتفصيل فى الفصل التالى.

النوع الثانى: عندما تكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية و لكن توزيعاتها الأحتمالية غير معلومة unknown probability distributions. و هذا النوع من المشاكل يسمى بالمشاكل القرارية غير المعينة uncertainty decision problems. و هذا النوع من المشاكل يمكن دراسته و حله بأستخدام أساليب أخرى غير البرمجة الأحتمالية مثل أساليب المحاكاة simulation techniques [69] .
و فى بعض المشاكل التى تتوافر بيانات عن السلوك الأحتمالى للمعلمات التى تعتبر متغيرات عشوائية غير معلومة التوزيع الأحتمالى فإنه يمكن تقدير التوزيعات الأحتمالية probability distributions [151,٦] لهذه المعلمات، و بالتالى يمكن تطبيق أساليب البرمجة الأحتمالية فى حلها. و يمكن توضيح هذا التصنيف (التقسيم) أعلاه فى الشكل التالى.

و فى هذا الكتاب سوف نتناول بالتفصيل المشاكل الأحتمالية و أساليب حلها بأستخدام أسلوب (CCP) لما يتمتع به من خصائص هامه تجعله قابل للتطبيق كما نوضح ذلك بالتفصيل فى الفصل (١-٤).

و الشكل التالى يلخص تصنيف المشاكل القرارية بصفه عامه و المشاكل القرارية العشوائية بصفه خاصة كذلك العلاقة بينهم.

المشاكل القرارية

(١)

مشاكل يقينية **deterministic problems**

- جميع المعلمات يمكن صياغتها فى قيم محددة
- يمكن صياغة المشكلة و حلها بأستخدام أساليب البرمجة اليقينية

(٢)

مشاكل عشوائية **stochastic problems**

-حيث يوجد واحدة على الاقل من المعلمات تمثل متغير عشوائى

(٢-١)

مشاكل أحتمالية **problems probabilistic**

- حيث تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية معلومة أو يمكن تقديرها.
- يمكن حلها بأستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية مثل:
  - أسلوب (CCP)،
  - أسلوب البرمجة متعددة المراحل،
  - أسلوب البرمجة الانتقالية.

(٢-٢)

مشاكل في ظروف عدم التأكد
problems under uncertainty

- حيث تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.
- يمكن دراستها و حلها بأستخدام أساليب المحاكاه أو أساليب عددية أخرى.
- و فى حالة توافر بيانات عن المعلمات العشوائية يمكن أستخدام التوزيعات التقديرية كتقدير للتوزيعات غير المعلومة و تحويلها إلى مشاكل أحتمالية، ثم أمكانية أستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية

شكل (١-١): تصنيف المشاكل القرارية وفقاً لطبيعة معلمات المشكلة

(١-٣) أساليب البرمجة الأحتمالية
Probabilistic Programming (PP) Techniques

البرمجة الأحتمالية هى عبارة عن النظريات theories و الأساليب techniques المختلفة لدمج الأختلافات العشوائية stochastic variations للمعلمات فى نموذج البرمجة الرياضية mathematical programming model و الحصول على الحل الأمثل وفقاً للقاعدة القرارية المستخدمة المرتبطة بالتوزيعات الأحتمالية لهذه المعلمات [176, 174, 165]. و قد ترجع الأختلافات العشوائية فى المعلمات إلى واحد على الأقل من البندين التاليين:

١- **<u>طبيعة المشكلة محل الدراسة</u>: و مثال ذلك عند صياغة المشاكل المرتبطة بحجم بعض المحاصيل الزراعية المطلوبة فى فترة ما، حيث يأخذ الطقس كأحد معلمات المشكلة حيث يعتبر الطقس متغير عشوائى كذلك ظروف السوق و العمالة أيضاً [165, 64].**

٢- **<u>طبيعة القرارات المطلوب الوصول إليها</u>: و مثال ذلك طبيعة القرارات التي تُأخذ فى اللحظة أو فى المدى القصير أو المدى المتوسط أو المدى الطويل، حيث أن البعد الزمنى أو المكانى يمثل عامل هام فى الأختلافات.**

و توجد تصنيفات مختلفة لأساليب حل مشاكل البرمجة الأحتمالية وفقاً لأسلوب دمج التغيرات العشوائية فى النموذج أو وفقاً لطبيعة الحل الذى يتم الوصول إليه. و يمكن تصنيف الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الأحتمالية إلى ثلاث مجموعات A,B,C على النحو التالى [153, 51, 49, 47]:

A) أساليب برمجة المخاطرة Risk Programming Approaches

و من هذه الأساليب:

- **أسلوب البرمجة ذات القيود الأحتمالية**
  Chance-Constrained Programming (CCP) Approach
- **أسلوب البرمجة اللا معلمية**
  Nonparametric Programming Approach
-

- أسلوب البرمجة متعددة المراحل
Multi-Stage Programming Approach

- أسلوب البرمجة الأحتمالية الانتقالية
Transition Probability Programming Approach

B) أسلوب البرمجة المتوائمة
Adaptive Programming Approach

C) أسلوب تحليل الحساسية الأحتمالي
Probabilistic Sensitivity Analysis

و الجدير بالذكر أن جميع الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الأحتمالية تشترك فى بعض الخصائص أهمها [182, 176, 162]:

١- جميع المعلمـات التى تمثل متغيرات عشوائيـة لها توزيعـات أحتماليـة معـروفـة أو ممكن تقديرها بالأساليب الأحصائية المختلفة.

٢- التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية يتم دمجها فى نموذج البرمجة الرياضية بطريقة أو أخرى و يتم تحويل النموذج الأحتمالى probabilistic model إلى نموذج يقينى deterministic model كما فى حالة أستخدام أسلوب (CCP) (أو إلى عدة نماذج يقينية متتالية كما فى حالة أستخدام أسلوب البرمجة متعددة المراحل) و ذلك بأستخدام طرق مختلفة للدمج وفقاً للطبيعة العشوائية للمعلمات [64, 56]. و قد يتم البدأ بنموذج يقينى مبدئى مناسب ثم دمج التوزيعات الأحتمالية للمعلمات للحصول على التوزيع الأحتمالى لدالة الهدف و المتغيرات القرارية معاً كما فى حالة أستخدام أسلوب transition programming approach أو أستخدام أسلوب تحليل

الحساسية الأحتمالى probabilistic sensitivity analysis أو الدمج ثم الحصول على نموذج يقينى مكافئ بمستوى مخاطرة risk معينة كما فى حالة أستخدام أسلوب (CCP) و هو الأسلوب محل الدراسة فى هذا الكتاب و الذي سوف يقدم بالتفصيل فى الأبواب التالية.

٣- و بتحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى، أو تحويل النموذج اليقينى المبدئي إلى نماذج يقينية أخرى متتالية يتم وفقاً لتعريف فئة القواعد القرارية set of

decision's rules التي يتم على أساسها التحويل حيث تتصف ببعض خصائص الأمثلية some optimality properties [49].

و فى الأبواب التالية سوف نوضح هذه الخواص بالتفصيل بالنسبة لأسلوب (CCP).

و مما سبق يتضح الأرتباط الوثيق بين أساليب حل مشاكل البرمجة الأحتمالية و النظرية و الأساليب الأحصائية و بصفة خاصة التوزيعات الأحتمالية (المتقطعة و المتصلة) و التحويلات الأحصائية statistical transformations. لذلك فى الباب التالى سوف نقدم أهم التعريفات و النظريات الأحصائية و التحويلات التى تعتبر متطلبات أساسية فى دراسة و حل مشاكل البرمجة العشوائية بصفة عامة و البرمجة الأحتمالية بصفة خاصة.

(١-٤) أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً
Chance- Constrained Programming (CCP) Technique

فى هذا الفصل سوف نتناول بأختصار تعريف القيد الأحتمالى chance-constraint الذي يرجع له تسمية هذا الأسلوب، ثم نقدم نبذة تاريخية عن الأسلوب و تطوره و أهم التطبيقات التى قدمت خلال السنوات السابقة فى الفصل التالى (١-٥).

<u>تعريف القيد الأحتمالى:</u> إذا أعتبرنا نموذج البرمجة الخطية التالى:

$$\mathbf{Max.\,Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j} \qquad \textbf{(1-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{S.T.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j < \tilde{b}_i \quad ,\ i = 1, 2, \ldots, t \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le b_i \quad ,\ i = t+1, t+2, \ldots, m \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1-4)}$$

$$\mathbf{X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n} \qquad \textbf{(1-5)}$$

حيث X_j تشير إلى المتغيرات القرارية، b_i و C_j و a_{ij} تشير إلى المعلمات التى تمثل مقادير ثابتة، أما المعلمات $\tilde{b}_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, t$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معروفة و تسمى هذه القيود فى هذه الحالة بالقيود العشوائية. فإذا كانت $f(\tilde{b}_i)$ ، $F(\tilde{b}_i)$ تشير إلى دالة كثافة الأحتمال density function و دالة التوزيع التراكمية cumulative distributed function للمتغير $\tilde{b}_i$ على الترتيب، فإنه يمكن إعادة كتابة القيود فى (1-4) بعد دمج التوزيع
الأحتمالى للمتغير (أو المتغيرات) ($\tilde{b}_i$) على النحو التالى:

$$\mathbf{P_r\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i\right\} = \gamma_i \quad , \ i = 1, 2, \ldots, t} \qquad \textbf{(1-6)}$$

و تقرأ المعادلة (1-6)على النحو "أحتمال تحقق القيد رقم (i)، $i = 1, 2, \ldots, t$ فى القيود

(1-4) يساوي γ_i"، حيث $0 < \gamma_i < 1$ و يسمى γ_i بمقياس تحقق tolerance measure القيد (i) و يسمى أيضاً مستوى المأمونية للقيد (i). و بالتالى يصبح $1 - \gamma_i$ هو

أحتمال عدم تحقق violation measure القيد (i)، و يعتبر الأحتمال $1-\gamma_i$ هو مقياس للمخاطرة risk الناتج عن عدم تحقق القيد (i). و صياغة القيود (1-4) فى شكل أحتمالى فى (1-6) يمكننا بعد ذلك من التحويل إلى قيد يقينى مكافئ equivalent deterministic constraint على النحو التالى:

$$1-F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right)=\gamma_i \;\longrightarrow\; F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right)=1-\gamma_i \qquad (1\text{-}7)$$

و من تعريف الدالة التراكمية (كما سوف نوضح ذلك بالفصل (٢-٢)) نجد أن:

$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right)=P_r\left(\tilde{b}_i\le\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right)$$

وبما أن التوزيع الأحتمالى للمتغير $\tilde{b}_i$ معروف، بالتالى فإن الصياغة الرياضية mathematical form للدالة F_i تكون معروفة أيضاً و فى كثير من التوزيعات تكون الصياغة الرياضية و لها صياغة محكمة closed form و بالتالى يمكن الحصول على الدالة F^{-1} من الدالة F ، و بالتالى يمكن تحويل القيد الأحتمالى (i) إلى قيد يقينى مكافئ كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فيما بعد.

و سوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل بالباب التالى. و بطرق مشابهة يمكن تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية عندما يكون واحد على الأقل من المعلمات a_{ij} متغير عشوائى معلوم التوزيع الأحتمالى له، وسوف نشير إلى a_{ij} التي تمثل متغير عشوائى بالرمز $\tilde{a}_{ij}$ و بالتالي يصبح المتغير $\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j\right)$ متغير عشوائى أيضاً (سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الأبواب (٤،٦،٧)).

فإذا كان التوزيع الأحتمالى للمتغير $\tilde{a}_{ij}$ معلوم فإن توزيع المتغير $\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j\right)$ يصبح معلوم أيضاً. و بالتالى إذا كانت H_i تمثل دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j\right)$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j\le b_i\right)=\gamma_i \;\longrightarrow \qquad (1\text{-}8)$$

$$H_i(b_i)=\gamma_i \qquad (1\text{-}9)$$

حيث تم تحويل القيد الأحتمالى فى (1-8) إلى قيد يقينى مكافئ فى (1-9). و سوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل فى الأبواب التالية.

كذلك بالنسبة لمعلمات دالة الهدف C_j حيث $j = 1, 2, .., n$ عندما تكون بعض أو كل هذه المعلمات متغيرات عشوائية سوف نشير لها بالرمز $\tilde{C}_j$ فإنه يمكن تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى قيد أحتمالي على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j X_j \geq U^*\right) = \gamma \qquad (1\text{-}10)$$

ملحوظة: الحد U^* يتم تحديد قيمته بأستخدام متخذ القرار حيث $U^* \to \infty$ عندما تكون العملية تعظيم، كذلك $U^* \to 0$ عندما تكون العملية تصغير.

فإذا كان التوزيع الأحتمالى لـ $\tilde{C}_j$ معلوم فإن المتغير $\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j X_j\right)$ يكون توزيعة الأحتمالى معلوم أيضاً، فإذا فرضنا أن F هى دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j X_j\right)$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالى فى (1-10) إلى قيد يقينى على النحو:

$$1 - F(U^*) = \gamma \qquad (1\text{-}11)$$

و كما ذكر فإن U^* تشير إلى الحد الأدنى لقيمة دالة الهدف الممكن أن يقبل به متخذ القرار. و أفتراض قيم كل من γ ، U^* ، γ_i حيث $i = 1, 2, .., m$ يرجع إلى متخذ القرار و سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الأبواب التالية.

وفقاً للقاعدة القرارية التى يقرها متخذ القرار يتم صياغة دالة الهدف لنموذج البرمجة المقيدة أحتمالياً، و سوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل بالباب التاسع.

و مما سبق يتضح أن حجم النموذج الأحتمالى $(n \times m)$ حيث عدد المتغيرات القرارية يساوي n و عدد القيود يساوى m، و عند تحويله إلى نموذج مكافئ يقينى، فيكون حجم النموذج اليقينى عندما تكون بعض أو كل $\tilde{a}_{ij}$ ، $\tilde{b}_i$ ، $\tilde{C}_j$ متغيرات عشوائية فيظل عدد المتغيرات القرارية

يساوى n و تصبح عدد القيود $(m + 1)$ و يصبح حجم النموذج اليقينى $(n \times (m + 1))$ و عندما تكون معاملات المتغيرات القرارية فى دالة الهدف C_j مقادير ثابته يكون حجم النموذج $(n \times m)$، و بصفة عامة يعتبر حجم النموذج اليقينى المكافئ يساوى حجم النموذج الأحتمالى تقريباً. و يعتبر ذلك من مزايا أسلوب (CCP) بالنسبة لأساليب البرمجة الأحتمالية الأخرى حيث يتزايد حجم النموذج اليقينى عن الأحتمالى تزايد كبير كما فى أسلوب برمجة تعدد المراحل [196, 163].

و مما سبق يتضح بساطة أسلوب CCP فى تناول العامل العشوائى عند تحويل نموذج البرمجة الأحتمالى إلى نمودج برمجة يقينى، كذلك فى تطبيقه على البيانات فعليه . هذا بالإضافة إلى أنه أسلوب مرن بمعنى إمكانية أستخدامه فى تحويل نماذج البرمجة الأحتمالية المختلفة مثل البرمجة الخطية الأحتمالية و البرمجة غير الخطية الأحتمالية و برمجة الهدف الأحتمالية...الخ الى نماذج برمجة يقينية. و فى هذا الكتاب سوف نتناول أستخدام أسلوب CCP فى تحويل نماذج البرمجة الخطية الأحتمالية و نماذج برمجة الهدف الأحتمالية إلى نماذج يقينية.

(٥-١) رؤية تاريخية A Historical Perspective

فى الفصول السابقة ذكرنا أن أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً أسلوب مرن ممكن دمجه بأساليب البرمجة الأخرى مثل أسلوب البرمجة الخطية، و غير الخطية، و برمجة الهدف، ... الخ.

و مما سبق يتضح أن أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً يعتمد أساساً على التوزيعات الاحتمالية الأحادية **univariate distributions** أو الثنائية **bivariate distribution** أو المتعددة **multi-variate distributions** و قد أدى التطور الكبير فى السنوات الاخيرة فى أشتقاق توزيعات أحتمالية احادية او ثنائية أو متعددة اكثر ملائمة فى توفيق و تحليل البيانات مما أدى أيضاً إلى تطوير أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً و تطوير تطبيقاته أيضاً.

و في هذا الفصل سوف نتناول بإختصار التطور التاريخى لأهم الدراسات لأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (**CCP**)، و أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً (**CCGP**)، حيث أنهما موضع أهتمامنا فى هذا الكتاب، و فيما يلى نقدم بإختصار أهم الدراسات التى قدمت وفقاً للتطور التاريخى.

يرجع أسلوب (**CCP**) إلى كل من **Charnes and Cooper** سنة ١٩٥٥ فهما أول من قدما أسلوب (**CCP**) كأحد أهم أساليب البرمجة الأحتمالية من الجانبين النظري و التطبيقي. و فيما يلي سوف نقدم بأختصار بعض أهم الدراسات التى تم تقديمها:

فى سنة (١٩٥٨) قدم كل من **Charnes, Cooper and Symonds** للمرة الأولى تحويل بعض القيود التى تحتوى على بعض المعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة إلى قيود يقينية مكافئة و تم تطبيق ذلك فى مشكلة الحصول على التكاليف المثلى لنظام تسخين الزيوت [54].

و فى سنة (١٩٥٩) قدم كل من **Charnes and Cooper** للمرة الأولى أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً **chance-constrained prog.** كأسلوب من أساليب البرمجة الأحتمالية حيث قدموا أهم النظريات التى بُنى على أساسها هذا الأسلوب [47].

و فى سنة (١٩٦٣) قدما أيضاً بعض التحويلات لدوال الأهداف التى تحتوى على بعض المعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة إلى قيود أحتمالية **chance-constraints** و وضع قاعدة قرارية مناسبة التى على أساسها يتم تحويل المشكلة الأحتمالية إلى مشكلة يقينية من خلال تقديم **P-model** و سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الباب

التاسع [50].

فى سنة (١٩٦٦) قدم كل من Charnes and Kirly بعض القواعد القرارية المثلى optimal decision's rules لأسلوب (CCP) من خلال تقديم بعض النماذج مثل E-model [52].

فى سنة (١٩٦٨) قدم Contini للمرة الأولى الدمج بين أسلوب (CCP) و أسلوب برمجة الهدف goal programming (GP) ما أطلق على تسميته أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً (CCGP) فى حالة وجود بعض المعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية و تتبع التوزيع المعتاد [57] ثم قدم النموذج اليقينى المكافئ فى هذه الحالة.

فى سنة (١٩٦٩) قدما Charnes and Cooper أستخدام أسلوب (CCP) فى بناء و حل بعض النماذج الاقتصادية و تقدير المخاطر risk و أطلقوا على عملية تحويل النماذج الأحتمالية إلى يقينية بهدف تقدير المخاطر المثلى أسم برمجة المخاطر risk programming [51].

و أيضاً فى سنة (١٩٦٩) أستخدم كل من Sengupta and Gruver أسلوب (CCP) فى تقديم تحليل الصلاحية reliability analysis لبعض النماذج الأحتمالية عندما تكون بعض المعلمات متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعى أو التوزيع الأسى مثلاً [177].

فى سنة (١٩٧٠) قدم Sengupta تعميم لبعض خصائص الحل و أسلوب الدمج من خلال بعض النظريات بالنسبة لنماذج البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً [178].

و فى سنة (١٩٧٢) قدم Sengupta أيضاً أسلوب (CCP) عندما تكون بعض المعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية تتبع توزيع كا^{٢} Chi-square distribution [181].

و فى خلال الفترة (١٩٧٧-١٩٨٠) قدم Keown مجموعة من التطبيقات لأسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً فى القطاعات المالية و البنكية [122-125].

و فى سنة (١٩٨٤) قدمت El-Dash تعريف و تفسير للمتغيرات الأنحرافية الأحتمالية probabilistic deviational variables بالنسبة لنماذج برمجة الهدف الأحتمالية، كذلك قدمت النظرية التى تربط بين المتغيرات الأنحرافية العشوائية و المتغيرات الأنحرافية اليقينية المناظرة لها [64]، فى حالة وجود بعض المعلمات تمثل متغيرات عشوائية موجبة (مثل المتغيرات التى تتبع التوزيع الأسى أو توزيع χ^2 كذلك قدمت عدة تطبيقات لبرمجة الهدف

الأحتمالية فى النقل [٦٤,١٤]، و الزراعة [66]، و الدفاع الجوى[٧٧,٦٥,١]، و التخزين للمنتجات محدودة الصلاحية [68]، و قطاعات أخرى.

و فى سنة (١٩٨٥) قدم كل من Lee and Olson خوارزم لحل مشاكل برمجة الهدف غير الخطية المقيدة أحتمالياً [135].

و فى نفس العام (١٩٨٥) قدم أيضاً كل من Rakes and Reeves دراسة لتحديد و أختبار مؤشرات المأمونية tolerance measures للقيود الأحتمالية [162].

فى سنة (١٩٨٧) قدم كل من Olson and Swenseth تقريباً خطياً مناسباً للنماذج اليقينية المكافئة غير الخطية عندما تكون بعض المعلمات تتبع التوزيعات المعتادة normal distributions [157].

فى سنة (١٩٩٣) قدمت El-Dash و آخرين أسلوب تحليل معلمى parametric analysis لمشاكل برمجة الهدف الأحتمالية.

فى سنة (١٩٩٨) قدم كل من Biswal, Biswal and Duan أسلوب للبرمجة الاحتمالية المقيدة عندما تكون معاملات المتغيرات القرارية فى القيود ($\tilde{a}_{ij}$) متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الأسى و حصولهم على نماذج يقينية غير تقريبية كذلك على حلول صحيحة exact solution أيضاً [39].

فى سنة (٢٠٠٧) قدم Yadavalli و آخرين أسلوب للحصول على القيم المثلى

لصلاحية بعض الأنظمة بأستخدام أسلوب (CCP) حيث أعتبر كل من الأنظمة ذات المراحل المتتالية و المتغيرات القرارية متغيرات صحيحة [208].

فى سنة (٢٠٠٨) قدم كل من Ahmed and Shapiro بعض نماذج ذات المتغيرات القرارية الصحيحة حيث أستخدام الأسلوب العددى المحاكاة و طريقة Monte-Carlo للحصول على حلول عددية [19].

و فى سنة (٢٠٠٨) قدم أيضاً كل من Henriorn and Strugarek دراسة لنماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً فى حالة القيود المحدبة [104].

و منذ أن قدم Contini سنة (١٩٦٨) أسلوب (CCGP) و توالت التطبيقات لهذا

الأسلوب فى قطاعات مختلفة منها قطاع التخطيط، و البنوك، و إعادة المخلفات الصلبة [57].

فى سنة (٢٠٠٩) قدم Bhattacharya نموذج برمجة هدف أحتمالى مقيد لحل مشاكل تخطيط الأعلام [38].

و فى سنة (٢٠١١) قدم Branda بعض القواعد القرارية ممثلة فى دوال المخاطرة penalty functions حيث تم تحويلها إلى قيود أحتمالية ثم قام بدمجها فى دالة الهدف، كذلك قدم النظريات المرتبطة بخصائص الحل للنماذج اليقينية المكافئة، ثم طبق ذلك في إدارة المخاطر المالية financial risk management [43].

فى سنة (٢٠١٢) عرف Geletu و آخرون القيود الأحتمالية المشتركة joint chance-constraints حيث أعتبر أن بعض المعلمات العشوائية غير المستقلة تتبع توزيع جاوس .Gaussian dist كذلك بعض التوزيعات الأخرى، ثم قدم التحويل من نموذج أحتمالى إلى نموذج برمجة غير خطية يقينى مكافئ ثم طبق ذلك على إدارة أحتياطى محزون المياة [88].

و معظم الدراسات التى قدمت قبل سنة ٢٠١٢ تناولت أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون المعلمات العشوائية متغيرات عشوائية مستقلة، فى سنة ٢٠١٨ قدم كل من El-Dash and Hafez أسلوب لتحويل القيود الأحتمالية إلى يقينية عندما تتبع المعلمات

المرتبطة التوزيع الأسى الثنائى لـ Downton [101, 100, 81].
كذلك طبقوا نفس الأسلوب على بعض التطبيقات للقيود الأحتمالية المرتبطة joint chance constraints.

فى سنة ٢٠١٨ قدمت El-Dash أسلوب لتحويل القيود الأحتمالية الخطية إلى قيود يقينية خطية أيضاً عندما تكون المعلمات العشوائية متغيرات تتبع التوزيع الأسى العام generalized exponential distribution حيث يتميز التوزيع الاسى العام بثلاث معلمات عن التوزيعات الموجبة الأخرى مثل توزيع جاما و مربع كا بالمرونة فى التطبيق [80].

فى سنة ٢٠١٩ قدم كل من El-Dash and Hafez أسلوب عددى بسيط لتحويل نماذج القيود المرتبطة أحتمالياً joint chance-constraints إلى نماذج يقينية خطية عندما تتبع المعلمات العشوائية التوزيع الأسى العام بثلاثة معلمات [81]. و هذا الاسلوب يمكن تطبيقه فى كثير من القطاعات الإنتاجية و الخدمية.

(١-٦) متطلبات أساسية Basic Prerequisites

ترتبط البرمجة الأحتمالية أرتباط وثيق بالإحصاء و الأحتمالات statistics and probabilities فى عملية تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية أو تفسير و أختبار نتائج الحل (أو تقدير التوزيعات الأحتمالية أيضاً).

و فيما يلى سوف نقدم بأختصار بعض الموضوعات الهامة important topics فى كل من الرياضيات و الإحصاء و الأحتمالات التى يجب الألمام الجيد بها عند تناول و تطبيق أساليب البرمجة الأحتمالية أو البرمجة العشوائية بصفة عامة.

أولاً: بعض الموضوعات فى الرياضيات

- الدوال و الدوال العكسية Functions and Inverse Functions
- الفئات المحدبة Convex Sets
- أساليب التقريب Approximate Techniques
- النقط العظمى و الصغرى للدوال متعددة المتغيرات Maximum and Minimum Points

ثانياً: بعض الموضوعات الأحتمالية

- المتغيرات العشوائية Random Variables
- العملية العشوائية Stochastic Process
- التـوزيعـات الأحتماليـة الاحادية Univariate Probability Distributions
- التوزيعات الاحتمالية الثنائية Bivariate Probability Distributions
- التـوزيعـات الأحتماليـة المتعددة Multi-Variate Probability Distributions
- العينات العشوائية Random Samples
- التقدير الإحصائى Statistical Estimation
- أختبارات الفروض Testing of Hypothesis
- التحويلات الأحتمالية Probability Transformations

ثالثاً: بعض الموضوعات فى بحوث العمليات

- البرمجة الخطية Linear Programming (LP)
- البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming (Non-LP)
- البرمجة الهندسية Geometric Programming
- برمجة تعدد الأهداف Multi-objective Programming
- برمجة الهدف Goal Programming (GP)

(١-٧) تمرينات Exercises

(١-١) تكلم بأختصار عن:

١- بيئة صناعة القرار و علاقتها بالمتغيرات التحكمية.
٢- البرمجة العشوائية و البرمجة اليقينية.
٣- البرمجة العشوائية و البرمجة الأحتمالية.

(١-٢) تكلم بأختصار عن الأساليب المختلفة للبرمجة الأحتمالية و ما هى الخصائص المشتركة بينها.

(١-٣) عرف القيد الأحتمالى Chance-constraint.

(١-٤) تكلم بأختصار عن التطور التاريخي لأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (CCP).

(١-٥) أذكر بأختصار أهم الموضوعات المرتبطة بأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (CCP).

(١-٦) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة و علامة (×) أمام العبارة الخاطئة:

١- يعتبر Sengupta أول من قدم أسلوب (CCP).

٢- بالنسبة للمشاكل العشوائية يجب أن تكون جميع المعلمات متغيرات عشوائية.

٣- لا يوجد أساليب لحل المشاكل العشوائية إلا أسلوب (CCP).

٤- بالنسبة للبرمجة العشوائية ممكن أن تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.

٥- بالنسبة للبرمجة الأحتمالية ممكن أن تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.

٦- ممكن تقدير التوزيعات الأحتمالية للمعلمات غير معلومة التوزيعات الأحتمالية فى حالة

توافر البيانات ثم أستخدام أسلوب (CCP).

٧- يتطلب أسلوب (CCP) وجود الدالة العكسية للدالة التراكمية للمعلمة (أو المعلمات) التى تمثل متغيرات عشوائية.

٨- يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) الإلمام الجيد بالتوزيعات الأحتمالية.

٩- يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) الإلمام الجيد بالتحويلات الإحصائية.

١٠-يستخدم أسلوب (CCP) فى حالة إذا كانت المتغيرات القرارية متغيرات عشوائية.

١١-يعتبر Contini سنة (١٩٦٨) أول من قدم أسلوب (CCP).

١٢-المشاكل الأحتمالية هى حالة خاصة من المشاكل العشوائية.

١٣-لا يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) معرفة التوزيع الأحتمالى للمعلمات العشوائية.

١٤-لا يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) معلومية الدالة العكسية للدالة التراكمية للمعلمة العشوائية.

١٥-توجد أساليب لحل المشاكل العشوائية غير أسلوب (CCP).

١٦-النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى الخطى بمعلمة $\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}} \sim \mathbf{GExp}$ يكون نمذجة برمجة خطية أيضاً.

الجزء الاول

القيود الاحتمالية بتوزيعات أحتمالية آحادية
Chance-Constraints and Univariate Probability Distributions

الباب الثانى: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متصلة ($\tilde{b}_i$)
Chance Constraints (CC) with Continuous Random Parameters ($\tilde{b}_i$)

الباب الثالث: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متقطعة ($\tilde{b}_i$)
Chance Constraints with Discrete Random Parameters ($\tilde{b}_i$)

الباب الرابع: القيود الأحتمالية بمعلمة عشوائية واحدة ($\tilde{a}_{ik}$)
Chance Constraints with Univariate distributed Random Parameters $\tilde{a}_{ik}$

يتناول هذا الجزء نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً فى حالة وجود بعض المعلمات parameters تمثل متغيرات عشوائية ، حيث يتناول القيد الواحد معلمة عشوائية واحدة،

و بالتالى أستخدام التوزيعات الأحتمالية الأحادية univariate probability distributions فى تحويل القيود الأحتمالية probabilistic constraints إلى قيود يقينية مكافئة equivalent deterministic constraints.

و يهدف هذا الجزء إلى تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة يمكن حلها بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية.

و يتكون هذا الجزء من الأبواب التالية:

الباب الثانى و يتناول القيود الأحتمالية المتضمنة معلمات عشوائية تمثل متغيرات عشوائية متصلة ($\tilde{b}_i$) بتوزيعات أحتمالية مختلفة.

الباب الثالث و يتناول القيود الأحتمالية المتضمنة معلمات عشوائية تمثل متغيرات عشوائية متقطعة ($\tilde{b}_i$) بتوزيعات أحتمالية مختلفة أيضاً.

الباب الرابع و يتناول القيود الأحتمالية التى يحتوى القيد الواحد على معلمة عشوائية واحدة فى الطرف الأيسر تمثل متغير عشوائى له توزيع أحتمالى معروف.

الباب الثانى

القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متصلة $(\tilde{b}_i)$

Chance Constraints (CC) with Continuous Random Parameters $(\tilde{b}_i)$

(٢-١) مقدمة

Introduction

(٢-٢) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع منتظم

$\tilde{b}_i \sim$ **Uniform Distribution**

(٢-٣) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الأسى

$\tilde{b}_i \sim$ **Exponential Distribution**

(٢-٤) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المعتاد

$\tilde{b}_i \sim$ **Normal Distribution**

(٢-٥) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع مربع كا

$\tilde{b}_i \sim$ **Chi-Square Distribution**

(٢-٦) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الأسى العام

$\tilde{b}_i \sim$ **Generalized Exponential Distribution**

(٢-٧) أمثلة تطبيقية

Applied Examples

(٢-٨) تمرينات

Exercises

(٢-١) مقدمة Introduction

فى هذا الباب نتناول بشىء من التفصيل القيود الأحتمالية الخطية **chance linear constraints** عندما تكون بعض (أو كل) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة و أستخدام أسلوب (CCP) لتحويلها إلى نماذج برمجة يقينية مكافئة **equivalent deterministic programming models**، ثم حل النموذج اليقينى بأحد أساليب البرمجة الرياضية المعروفة.

و يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) كما ذكرنا سابقا أن تكون دالة التوزيع التراكمية F_i للمتغير $\tilde{b}_i$ كذلك الدالة العكسية لها F_i^{-1} معروفة و ذات صياغة محكمة **closed form** أيضاً بالنسبة للمعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية[٧, 64, 175].

و فى هذا الباب سوف نتناول كيفية تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة بالنسبة لبعض أهم التوزيعات الأحتمالية المتصلة الأكثر تطبيقاً.

حيث نتناول القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية تتبع التوزيعات المتصلة الأحادية التالية:
المنتظم، الأسى، المعتاد (الطبيعى)، χ^2، التوزيع الأسى العام بثلاثة معلمات.

فإذا أعتبرنا نموذج البرمجة الخطية الأحتمالى على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (2\text{-}1)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m^{\backslash} \qquad (2\text{-}2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i \quad , \quad i = m^{\backslash} + 1, m^{\backslash} + 2, \ldots, m \qquad (2\text{-}3)$$

$$X_j \ge 0 \qquad (2\text{-}4)$$

و يلاحظ أن حجم النموذج $(n \times m)$ حيث n تشير إلى عدد المتغيرات القرارية، m تشير إلى عدد القيود الهيكلية، حيث X_j المتغيرات القرارية $X_j \geq 0$ و المعلمات C_j , a_{ij} , b_i مقادير ثابتة $j = 1, 2, , \dots, n$ ، $i = 1, 2, \dots, I$ كذلك المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية

لها توزيعات أحتمالية معلومة حيث $i = m^\backslash + 1 , m^\backslash + 2 , \dots , m$.

و فيما يلى سوف نوضح كيفية تحويل القيود الأحتمالية فى (2-3) إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى مأمونية (أحتمال تحقق القيد) tolerance measure معين γ_i ، $0 < \gamma_i < 1$ على النحو التالى:

يمكن إعادة صياغة القيد رقم (i) فى مجموعة القيود (2-3) على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \longrightarrow F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \qquad (2\text{-}5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F_i^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (2\text{-}6)$$

و يعتبر القيد (2-6) قيد يقينى. كذلك يمكن إفتراض أن القيد الأحتمالى على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i\right) \geq \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq F_i^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (2\text{-}7)$$

بالمثل

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i\right) \leq \gamma_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq F_i^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (2\text{-}8)$$

و فيما يلى سوف نتناول عملية تحويل القيود الأحتمالية $i = m^\backslash + 1 , m^\backslash + 2 , \dots , m$ إلى قيود يقينية بالنسبة للمتغيرات $\tilde{b}_i$ التى تتبع توزيعات أحتمالية معينة.

و بالنسبة للنموذج الأحتمالى بعد تحويله إلى نموذج يقينى مكافئ فى هذه الحالة يلاحظ ما يلى:

١- حجم النموذج اليقينى $(n \times m)$ و هو نفسه حجم النموذج الاحتمالى و لم يؤدى التحويل إلى تزايد حجم النموذج كما هو فى حالة أستخدام أسلوب المراحل المتتالية [183, 182, 64] و هذا يعتبر من مزايا أسلوب (CCP).

٢- إذا كان النموذج الاحتمالى نموذج خطى فإن النموذج اليقينى المكافئ يكون نموذج خطى أيضاً فى معظم التوزيعات للمعلمة $\tilde{b}_i$ و يمكن حله بأستخدام

أسلوب البرمجة الخطية. و إذا كان النموذج الأحتمالى غير خطي فإن النموذج اليقينى المكافئ يكون غير خطى أيضاً و يمكن حله بأستخدام أساليب البرمجة غير الخطية [$116, 102, 64, 63$,٨].

٣- أستخدام أسلوب (CCP) يتطلب وجود دالة عكسية لدالة التوزيع التراكمية للمتغير($\tilde{b}_i$)، أى وجود $F_i^{-1}\left(\tilde{b}_i\right)$ و معلومية الصياغة الرياضية لها، أو حساب قيمها من جداول أحصائية كما فى الجداول بالملاحق من (6)-(1).

أما إذا كان النموذج الاحتمال نموذج غير خطى probabilistic non-linear programming model حيث واحدة على الأقل من الدوال $f(X,C)$ أو $g_i(X,\theta)$ تكون دالة غير خطية فى المتغيرات القرارية X بحيث:

$$\mathrm{Max.}\, Z = f(X,C) \tag{2-9}$$

$$\mathrm{S.T.}\;\; g_i(X,\theta) \le b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m^{\backslash} \tag{2-10}$$

$$g_i(X,\theta) \le \tilde{b}_i \quad , \quad i = m^{\backslash} + 1 , m^{\backslash} + 2 ,\dots,m \tag{2-11}$$

حيث تمثل X متجه المتغيرات القرارية، كذلك متجهات المعلمات C ، b كذلك المصفوفة θ عناصرها عبارة عن معلمات X و تمثل مقادير ثابتة، أما المتجه ($\tilde{b}$) عناصره تمثل متغيرات عشوائية. و بأستخدام نفس الأسلوب المتبع بالنسبة للنموذج الاحتمالى الخطى يصبح النموذج اليقينى المكافئ عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالى:

$$\mathrm{Max.}\, Z = f(X,C)$$

$$\mathrm{S.T.}\;\; g_i(X,\theta) \le b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,I$$

$$g_i(X,\theta) = F_i^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad i = I+1 , I+2 ,\dots,m$$

حيث $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ هى معكوس دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى ($\tilde{b}_i$). كذلك ممكن أن تكون بعض القيود $i = I+1, I+2, \dots, m$ ،i على النحو التالى:

$$g_i(X,\theta) \le F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

أو $$g_i(X,\theta) \geq F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$
وفقاً لطبيعة القيد الأحتمالى المناظر، كما سبق توضيح ذلك فى نماذج البرمجة الأحتمالية الخطية،

ثم حل النموذج اليقينى غير الخطى بأحد أساليب البرمجة غير الخطية [٨,169].

و كما ذكرنا يهدف هذا الباب إلى دراسة كيفية تحويل نموذج البرمجة الأحتمالى probabilistic programming model إلى نموذج برمجة يقينى مكافئ equivalent deterministic programming model عند مستويات مأمونية معينة، عندما تكون بعض أو كل المعلمات ($\tilde{b}_i$) متغيرات عشوائية متصلة مثل المتغيرات التي تتبع التوزيعات المنتظمة أو التوزيعات الأسية أو التوزيعات المعتادة، .... الخ [٨].

و يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ بمعلومية الدالة التراكمية للمتغير ($\tilde{b}_i$) و المشار إليها بالرمز $F_i(b_i)$ بدلالة الطرف الأيسر للقيد رقم (i) كذلك معلومية الدالة العكسية للدالة التراكمية $F_i^{-1}(b_i)$ [٧] عند مستويات معينة من مستويات المأمونية γ_i ، $i = 1, 2, \dots, m$.

و فيما يلى سوف نتناول المعلمات ($\tilde{b}_i$) التى تتبع بعض التوزيعات الأحتمالية الأكثر تطبيقا.

(٢-٢) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المنتظم

$\tilde{b}_i \sim$ Uniform Distribution

إذا أعتبرنا $\tilde{b}_i$ متغير منتظم يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة أحتمال $f_i(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \frac{1}{(b-a)} \quad , \quad a \le \tilde{b}_i \le b \tag{2-12}$$

فأن دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{b}_i$ على النحو التالى [٦،٤]:

$$F_i\left(b_i^{\backslash}\right) = \frac{\left(b_i^{\backslash} - a\right)}{(b-a)} \tag{2-13}$$

حيث $b_i^{\backslash}$ تقع داخل الفترة $(b-a)$، فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i$$

فإنه يمكن إعادة صياغته على النحو التالى عند مستوى المأمونية γ_i ، أو بمعنى أخر أحتمال تحقق القيد يساوى γ_i و بالتالى أحتمال عدم تحققه يساوى $(1-\gamma_i)$ على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i$$

أو بعبارة أخرى

$$1 - F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = \gamma_i \longrightarrow F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \tag{2-14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F_i^{-1}(1-\gamma_i) \tag{2-15}$$

بالتعويض بالطرف الأيمن للدالة التراكمية فى (2-13) فى الطرف الأيسر للقيد (2-14) نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = (1-\gamma_i)(b-a) + a \tag{2-16}$$

و القيد (2-15) قيد يقينى عند مستوى المأمونية γ_i .

ملاحظات:

(١) من تعريف الدالة العكسية أمكن الحصول على القيد اليقينى (16-2) حيث:

$$F_i^{-1}(1-\gamma_i) = (1-\gamma_i)(b-a) + a$$

(٢) ممكن أن يأخذ القيد الأحتمالى شكل متباينة أيضاً على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \;\longrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

أو

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \;\longrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \;\longrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge F_i^{-1}(\gamma_i)$$

مثال (٢-١)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } Z = 2\,X_1 + 5\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2\,X_1 + X_2 \le 10 \qquad (2)$$

$$3\,X_1 + 5\,X_2 \le 30 \qquad (3)$$

$$-X_1 + X_2 \le \tilde{b} \qquad (4)$$

$$X_1\,,\; X_2 \ge 0$$

حيث $\tilde{b}$ متغير منتظم بمعلمتين $a = 1\,,\; b = 9$.

المطلوب

١- **أوجد $E(\tilde{b})$ ثم أعتبر الطرف الأيمن فى القيد (4) يساوى $E(\tilde{b})$ ، ثم حل النموذج اليقينى المكافئ فى هذه الحالة.**
٢- **أعتبر مستوى المأمونية $\gamma = 0.6$ ، حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج مكافئ يقينى ثم أوجد الحل الأمثل.**
٣- **أعتبر مستوى المأمونية $\gamma = 0.9$ ، حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ.**
٤- **قارن بين نتائج النماذج اليقينية فى الحالات الثلاثة أعلاه.**

<u>الحل</u>

١- بما أن $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المنتظم المتصل فأن:

$$E(\tilde{b}) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

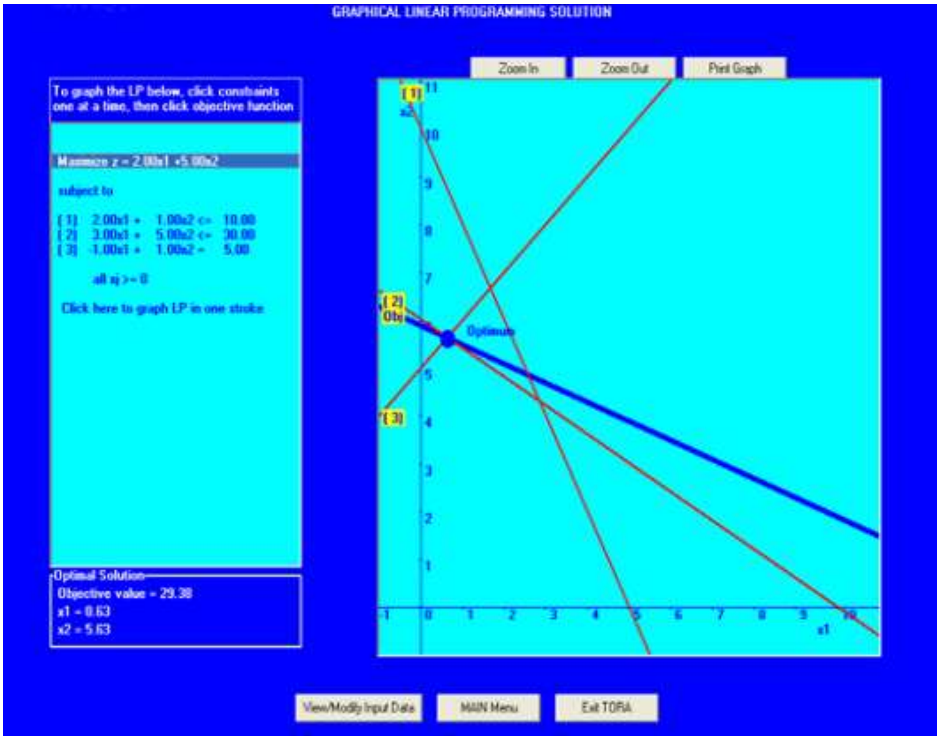
و يصبح القيد اليقينى المكافئ للقيد الأحتمالى رقم (4) على النحو التالى:

$$-X_1 + X_2 \leq 5 \qquad (5)$$

و بأستبدال القيد (4) بالقيد رقم (5) فى النموذج الأحتمالى أعلاه ثم حله نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 29.38 \quad , X_1^* = 0.63 \quad , X_2^* = 5.63 \qquad (6)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-١)

٢- إذا فرضنا أن فإنه يمكن وضع القيد الأحتمالى رقم (4) على النحو التالى:

$$P_r(-X_1 + X_2 \leq \tilde{b}) = 0.6 \qquad (7)$$

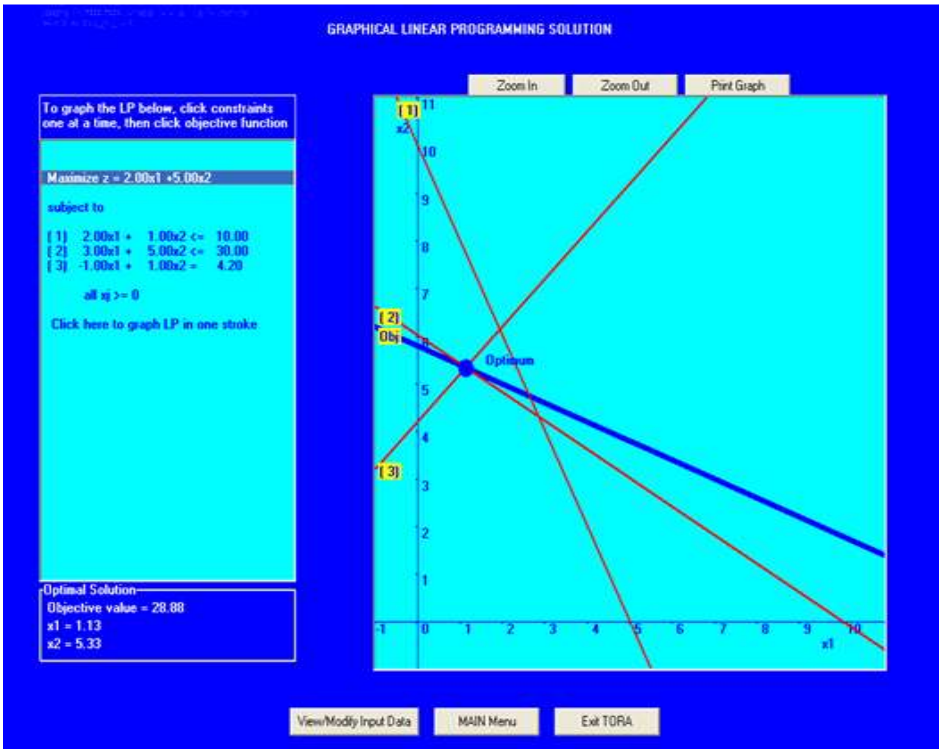
و بتحويل القيد الأحتمالى (7) إلى قيد يقينى مكافئ بأستخدام العلاقة (2-16) فإن:

$$-X_1 + X_2 = (1 - 0.6)(9 - 1) + 1 = 4.2 \qquad (8)$$

و بأستبدال القيد الأحتمالى رقم (4) بالقيد اليقينى المكافئ رقم (8) فى النموذج (1)-(4) و بحل النموذج اليقينى يكون الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 28.88 \quad , \; X_1^* = 1.13 \quad , \; X_2^* = 5.33 \qquad (9)$$

و الشكل التالى يوضح بيانياً الحل الأمثل فى هذه الحالة.



شكل (٢-٢)

٣- و عندما $\gamma = 0.9$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالى على النحو التالى:

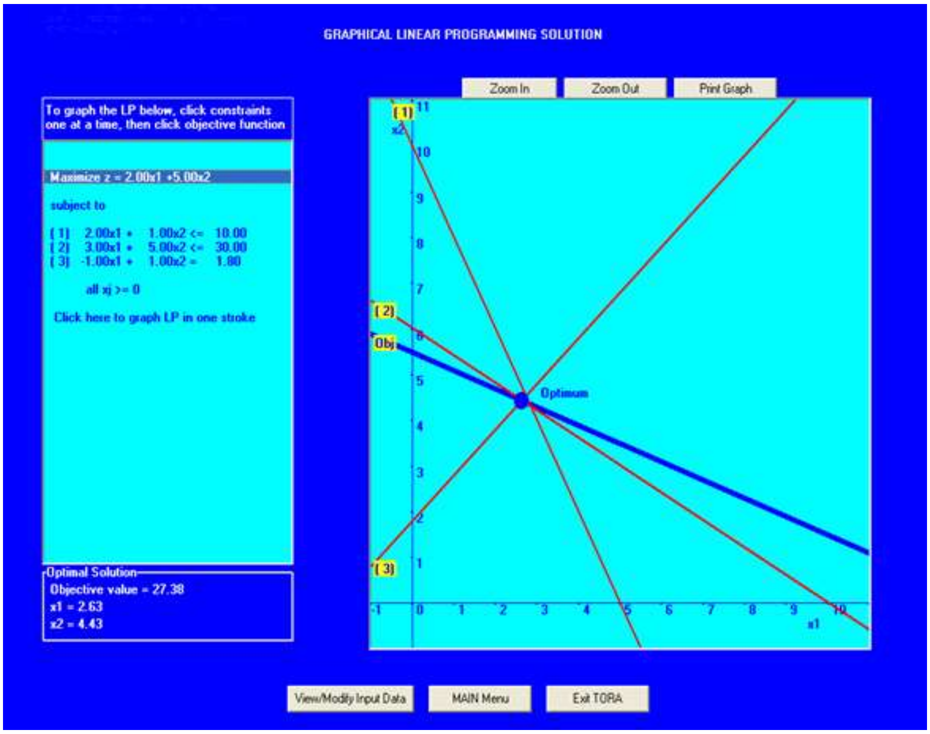
$$P_r(-X_1 + X_2 \leq \tilde{b}) = 0.9 \quad \longrightarrow$$

$$-X_1 + X_2 = 1.8 \qquad (10)$$

و بأستبدال القيد الأحتمالى رقم (4) بالقيد اليقينى رقم (10) فى النموذج (4)-(1) و بحل النموذج اليقينى فى هذه الحالة يكون الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 27.38 \quad , X_1^* = 2.63 \quad , X_2^* = 4.43 \qquad (11)$$

و الشكل التالي يوضح الحل البيانى فى هذه الحالة.



شكل (٢-٣)

٤- الجدول التالى يلخص النتائج فى الحالات الثلاثة السابقة:

جدول (٢-١): يوضح المقارنة بين القيم المختلفة للحلول

الحل	γ	رقم الحل
$Z^* = 29.38 \quad , X_1^* = 0.63 \quad , X_2^* = 5.63$	0.50	(6)
$Z^* = 28.88 \quad , X_1^* = 1.13 \quad , X_2^* = 5.33$	0.60	(9)
$Z^* = 27.38 \quad , X_1^* = 2.63 \quad , X_2^* = 4.43$	0.90	(11)

و من الجدول يتضح أن القيمة المثلي لـ Z^* تتناقص (الهدف تعظيم) كلما زاد مستوى المأمونية أو بعبارة أخرى يتراجع الحل الأمثل كلما زادت قيمة مستوى المأمونية γ (حيث أن الدالة العكسية F^{-1} للمتغير الأحتمالى فى هذه الحالة دالة متناقصة في مستوى المأمونية γ).

(٢-٣) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الأسى
$\tilde{b}_i \sim$ Exponential Distribution

إذا فرضنا أن المعلمة $\tilde{b}_i$ متغير متصل يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين λ_i, α_i بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ حيث:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \left[\text{Exp}\left(-\lambda_i(\tilde{b}_i - \alpha_i)\right)\right] \quad , \lambda_i > 0 \quad , \quad \tilde{b}_i \geq \alpha_i \ , \ \ \alpha_i \geq 0$$

و فى الحالة الخاصة عندما يتبع المتغير $(\tilde{b}_i)$ التوزيع الأسى بمعلمة واحدة λ_i أو بعبارة أخرى عندما $\alpha_i = 0$ فإن:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \left[\text{Exp}\left(-\lambda_i \tilde{b}_i\right)\right] \qquad (2\text{-}17)$$

و من نظرية الأحتمالات نجد أن دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{b}_i$ المشار إليها بالرمز $F\left(b_i^{\backslash}\right)$ على النحو التالى:

$$F\left(b_i^{\backslash}\right) = 1 - \text{Exp}\left[-\lambda_i \left(b_i^{\backslash} - \alpha_i\right)\right] \qquad (2\text{-}18)$$

و بالتالى يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالى التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i$$

عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \longrightarrow 1 - F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = \gamma_i \longrightarrow$$
$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \qquad (2\text{-}19)$$

و من تعريف الدالة التراكمية و التعويض فى الطرف الأيسر فى القيد (2-19) نجد أن:

$$1 - \text{Exp}\left[-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \alpha_i\right)\right] = 1 - \gamma_i$$

و بأخذ ln للطرفين فى المعادلة أعلاه نجد أن:

$$\ln\left[\text{Exp}\left(-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \alpha_i\right)\right)\right] = \ln \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i \tag{2-20}$$

ملحوظة

١- من تعريف الدالة التراكمية عند المستوى $(1-\gamma_i)$ فى (2-18) نجد أن الدالة العكسية هو الطرف الأيمن فى (2-20) أو بعبارة أخرى:

$$F_i^{-1}(1-\gamma_i) = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i \tag{2-21}$$

٢- الدالة $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ دالة متناقصة فى γ_i.

٣- فى الحالة الخاصة عندما $\alpha = 0$ فإن:

$$F\left(b_i^{\backslash}\right) = 1 - \operatorname{Exp}\left(-\lambda_i\, b_i^{\backslash}\right) \longrightarrow F_i^{-1}(1-\gamma_i) = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} \tag{2-22}$$

٤- و عند مستوى مأمونية لا يقل عن γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow 1 - F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) \ge \gamma_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le F_i^{-1}(1-\gamma_i) \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i$$

بالمثل عند مستوى مأمونية لا يزيد عن γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i$$

مثال (٢-٢)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Min. } Z = 7X_1 + 4X_2 \tag{1}$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 \ge 6 \tag{2}$$

$$-X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1 \tag{3}$$

$$5X_1 - 2X_2 \le \tilde{b}_2 \tag{4}$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \tag{5}$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = 5$، و المتغير $\tilde{b}_2$ يتبع التوزيع

الأسى بمعلمة $\lambda_2 = 0.2$.

المطلوب

١- أوجد $E(\tilde{b}_1)$, $E(\tilde{b}_2)$ ثـم أستبـدل الطـرف الأيمــن فى القيود (4)،(3) بـ$E(\tilde{b}_1)$, $E(\tilde{b}_2)$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج البقينى فى هذه الحالة.

٢- أعتبر مستوى المأمونية لتحقيق كل قيد من القيدين (4)،(3) هما $\gamma_1 = 0.6 , \gamma_2 = 0.7$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ فى هذه الحالة.

٣- أعتبر مستوى المأمونية لتحقيق كل قيد من القيدين (4)،(3) هما $\gamma_1 = 0.8 , \gamma_2 = 0.9$ و أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ.

٤- قارن بين نتائج النموذج المكافئ فى الحالات الثلاثة أعلاه.

الحل

١- من نظرية الاحتمالات نجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \alpha_1 = 5.5 \quad , \quad E(\tilde{b}_2) = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{0.2} = 5 \qquad (6)$$

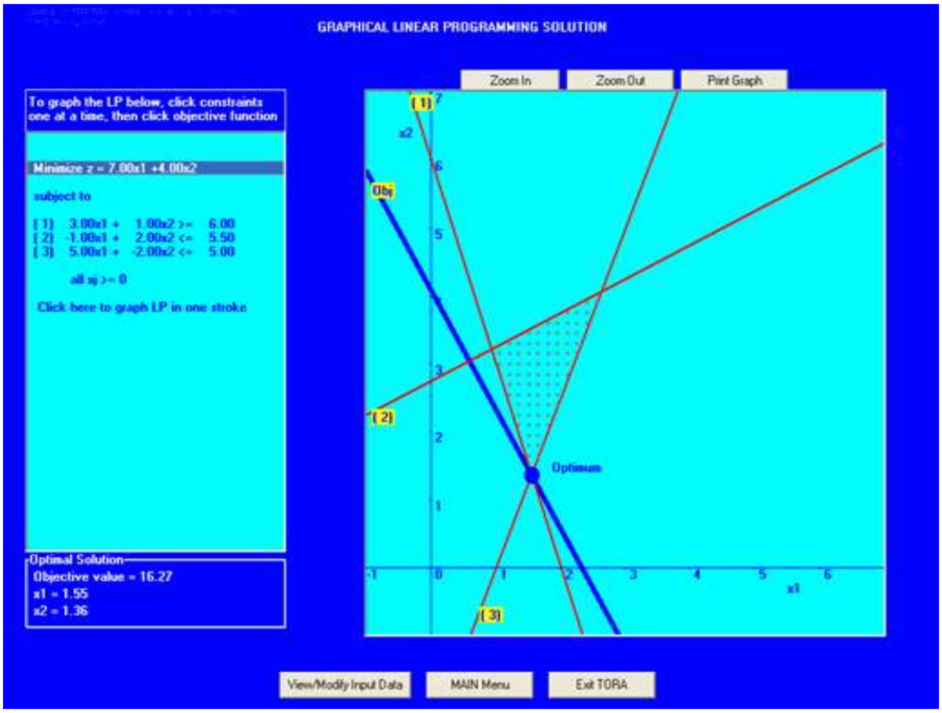
بالتعويض فى الطرف الأيمن للقيدين (4),(3) بـ $E(\tilde{b}_1)$, $E(\tilde{b}_2)$ يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= 7\,X_1 + 4\,X_2 \\ \text{S.T.} \quad 3\,X_1 + X_2 &\ge 6 \\ -X_1 + 2\,X_2 &\le 5.5 \\ 5\,X_1 - 2\,X_2 &\le 5 \\ X_1 , X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

و بحل النموذج اليقينى أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 16.27 \quad , \; X_1^* = 1.55 \quad , \; X_2^* = 1.36 \qquad (7)$$

و الشكل التالي يوضح الحل بيانياً للنموذج اليقينى أعلاه.



شكل (٢-٤): يوضح الحل الأمثل بيانياً

٢- عند $\gamma_1 = 0.6 \, , \, \gamma_2 = 0.7$ فإن:

$$P_r\left(- X_1 + 2\, X_2 \leq \tilde{b}_1\right) = 0.6 \;\longrightarrow$$

و بأستخدام العلاقة (2-21):

$$- X_1 + 2\, X_2 = \frac{-\ln(0.6)}{2} + 5 = 5.26 \qquad (8)$$

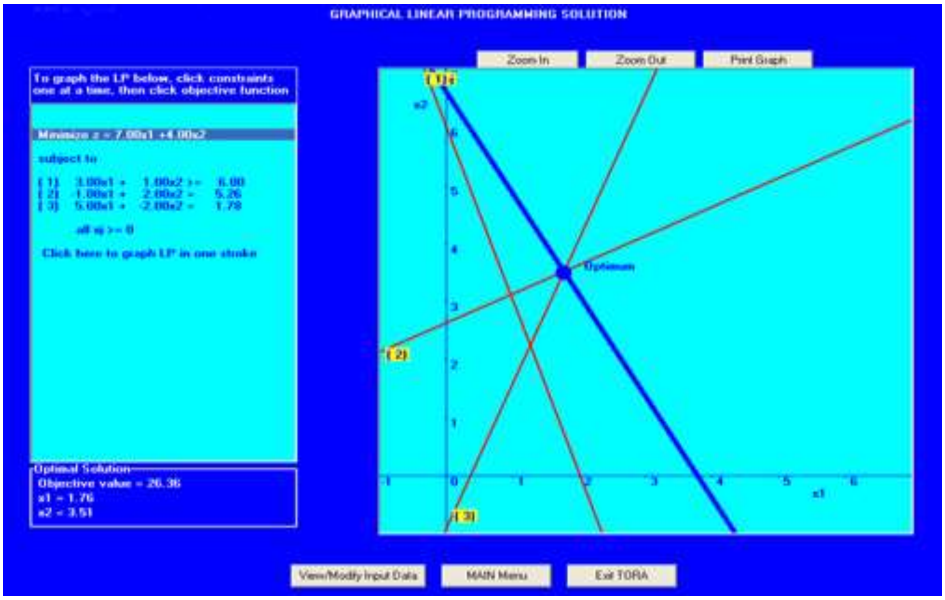
بالمثل بالنسبة للقيد (4)

$$P_r\left(5\, X_1 - 2\, X_2 \leq \tilde{b}_2\right) = 0.7 \;\rightarrow 5\, X_1 - 2\, X_2 = \frac{-\ln(0.7)}{0.2} = 1.78 \quad (9)$$

و بالتعويض فى الطرف الأيمن للقيدين (3),(4) بالقيدين (8),(9) على الترتيب يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 7\, X_1 + 4\, X_2 \\
&\text{S.T.} \quad 3\, X_1 + X_2 \geq 6 \\
&\qquad -X_1 + 2\, X_2 = 5.26 \\
&\qquad 5\, X_1 - 2\, X_2 = 1.78 \\
&\qquad X_1 \, , \; X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

و الشكل التالى يوضح الحل بيانياً للنموذج اليقينى أعلاه بيانيا.



شكل (٢-٥): يوضح الحل الأمثل للنموذج أعلاه

و بحل النموذج اليقينى أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 26.36 \quad , X_1^* = 1.76 \quad , X_2^* = 3.51 \qquad (10)$$

٣- و بالمثل عندما $\gamma_1 = 0.8 , \gamma_2 = 0.9$ فإن:

$$P_r\left(- X_1 + 2\, X_2 \leq \tilde{b}_1\right) = 0.8 \longrightarrow$$

$$- X_1 + 2\, X_2 = \frac{- \ln(0.8)}{2} + 5 = 5.11 \qquad (11)$$

$$P_r\left(5\, X_1 - 2\, X_2 \leq \tilde{b}_2\right) = 0.9 \longrightarrow$$

$$5\, X_1 - 2\, X_2 = \frac{- \ln(0.9)}{0.2} = 1.12 \qquad (12)$$

و يصبح الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

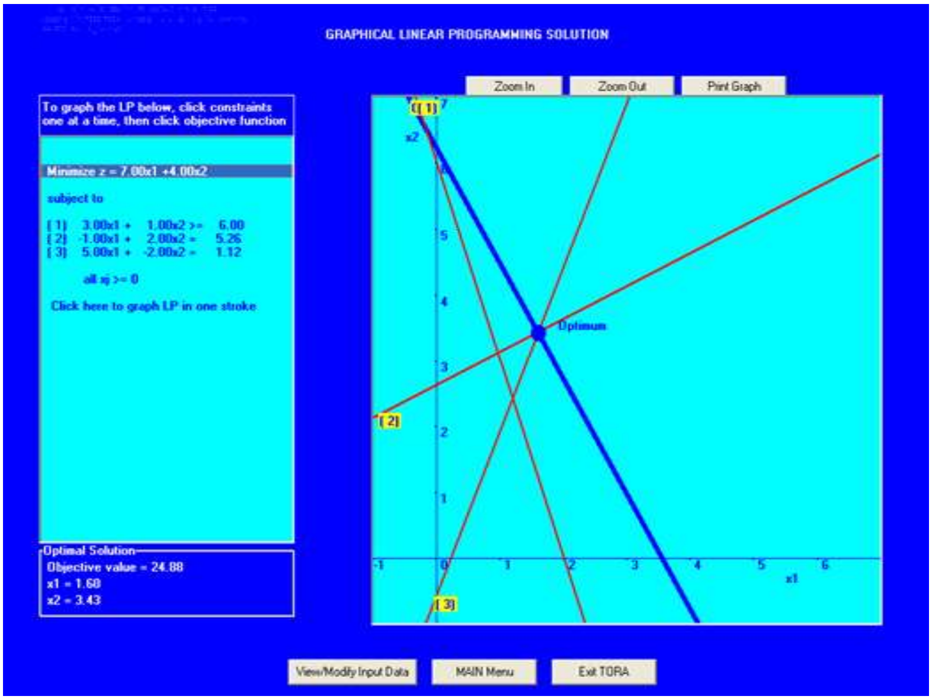
$$Z^* = 24.88 \quad , X_1^* = 1.60 \quad , X_2^* = 3.43 \qquad (13)$$

٤- و الجدول التالى يوضح الفرق بين الحلول المثلى للنماذج اليقينية السابقة.

جدول (٢-٢): يوضح المقارنة بين الحلول المختلفة

الحل الأمثل	مستويات المأمونية	رقم الحل
$Z^* = 16.27\ ,\ X_1^* = 1.55\ ,\ X_2^* = 1.36$	$\gamma_1 = 0.632, \gamma_2 = 0.632$	(7)
$Z^* = 26.36\ ,\ X_1^* = 1.76\ ,\ X_2^* = 3.51$	$\gamma_1 = 0.6\ , \gamma_2 = 0.7$	(10)
$Z^* = 24.88\ ,\ X_1^* = 1.60\ ,\ X_2^* = 3.43$	$\gamma_1 = 0.8\ , \gamma_2 = 0.9$	(13)

و الشكل (٢-٦) التالى يوضح الحل بيانياً.



شكل (٢-٦): يوضح الحل الأمثل للنموذج اليقينى السابق

مثال (٢-٣)

أعتبر المثال السابق (٢-٢)، إذا فرضنا أن $\gamma_1 \geq 0.6 , \gamma_2 \leq 0.7$.
أوجد النموذج اليقينى المكافئ، ثم قارن الحل فى هذه الحالة بالحل فى المثال السابق.

الحل

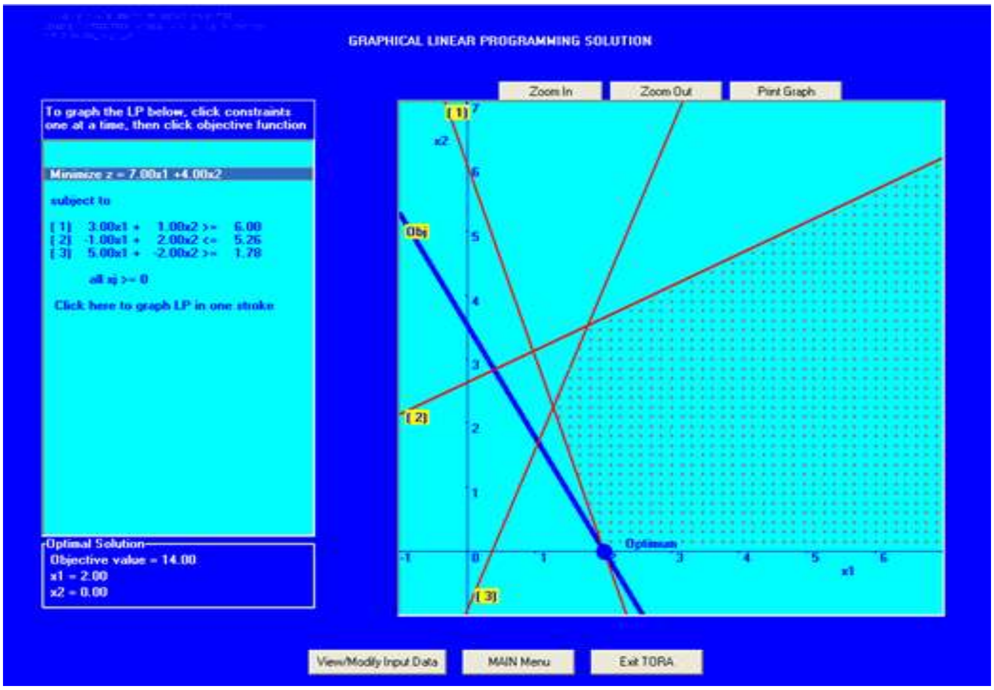
فى هذه الحالة يصبح النموذج اليقينى المكافئ بعد تحويل النموذج الأحتمالى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= 7\,X_1 + 4\,X_2 \\ \text{S.T.} \quad 3\,X_1 + X_2 &\geq 6 \\ -X_1 + 2\,X_2 &\leq 5.26 \\ 5\,X_1 - 2\,X_2 &\geq 1.78 \\ X_1 , X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

و بحل النموذج نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 14 \quad , X_1^* = 2.0 \quad , X_2^* = 0$$

و الشكل التالى يوضح الحل الامثل بيانياً للنموذج اليقينى اعلاه.



شكل (٢-٧): يوضح الحل الأمثل بيانيا

و بمقارنة الحل فى هذه الحالة بالحلول في المثال السابق نجد أن دالة الهدف تحسنت من $Z^* = 26.36$ إلى $Z^* = 14$ ويرجع ذلك إلى زيادة قيم مقياس المأمونية γ_1 أدى إلى تحسن قيمة دالة الهدف Z^*.

(٢-٤) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المعتاد

$\tilde{b}_i \sim$ Normal Distribution

إذا أعتبرنا $\tilde{b}_i$ متغير يتبع التوزيع المعتاد (الطبيعى) بتوقع μ وتباين σ^2، و دالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث [٦،٤]:

$$f(\tilde{b}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad , \quad -\infty < X < \infty \qquad (2\text{-}23)$$

و يعتمد تحويل القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى على تحويل المتغير المعتاد $\tilde{b}_i$ إلى معتاد قياسى Z، و يرجع ذلك إلى توافر القيم المختلفة للدالة F_i ، و الدالة F_i^{-1} للمتغير المعتاد القياسى Z عند مستويات المأمونية المختلفة γ_i فى جداول إحصائية كما هو موضح بملحق رقم (٢).

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i$$

و بأفتراض مستوى المأمونية γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i$$

فان هذا القيد مكافئ للقيد التالى:

$$P_r\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \mu\right) \div \sigma \le Z\right\} = \gamma_i \qquad (2\text{-}24)$$

حيث Z متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسى، حيث تم تحويل المتغير المعتاد $(\tilde{b}_i)$ إلى معتاد قياسى (Z). و يمكن إعادة كتابة المعادلة (2-24) على النحو التالى:

$$1 - F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = \gamma_i \;\rightarrow\; F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = 1 - \gamma_i \;\longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (2\text{-}25)$$

و كما ذكرنا سابقاً فإن قيمة الدالة العكسية للدالة التراكمية $F^{-1}(1-\gamma_i)$ للمتغير المعتاد القياسى (Z) عند القيم المختلفة $(1-\gamma_i)$ محسوبة فى الجدول الإحصائى بملحق (٢).

و سوف نوضح ذلك فى المثال التالى.

مثال (٢-٤)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } Z = 7X_1 + 5X_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T. } 8X_1 + 5X_2 \le 40 \quad (2)$$

$$-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1 \quad (3)$$

$$X_1 ,\ X_2 \ge 0 \quad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير معتاد بتوقع $\mu = 10$، و أنحراف معيارى $\sigma = 2$، حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستويات المأمونية التالية:

١- $\gamma = 0.5$ ٢- $\gamma = 0.7$ ٣- $\gamma = 0.9$

الحل

١- إذا أعتبرنا القيد الأحتمالى:

$$P_r\left(-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1\right) = 0.5 \longrightarrow$$

$$P_r\left\{\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2} \le Z\right\} = 0.5 \longrightarrow$$

$$1 - F\left\{\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2}\right\} = 0.5 \longrightarrow \quad (5)$$

$$F\left\{\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2}\right\} = 0.5 \longrightarrow$$

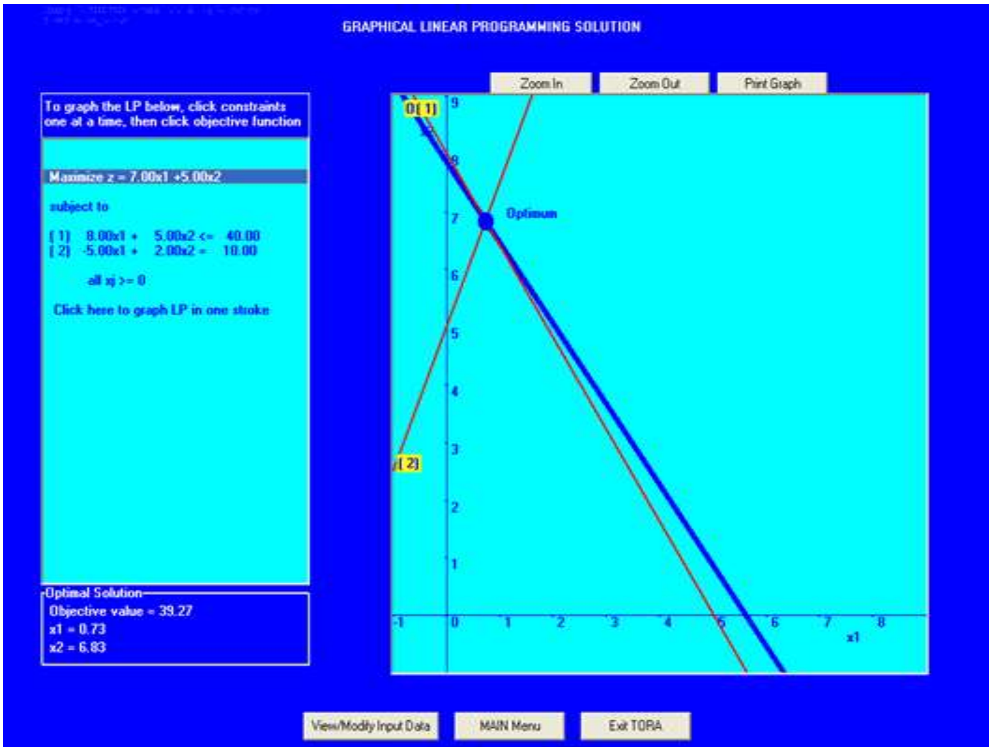
و بأستخدام جدول الدالة التراكمية للمتغير المعتاد القياسى بملحق (٢) نجد أن:

$$\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.5) = 0 \rightarrow -5X_1 + 2X_2 = 10 \quad (6)$$

و بأستبدال القيد (3) بالقيد (6) و بحل النموذج اليقينى نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 39.27 \quad , X_1^* = 0.73 \quad , X_2^* = 6.83 \qquad (7)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً فى هذه الحالة.



شكل (٢-٨): يوضح الحل الأمثل $\gamma = 0.5$

٢- و عندما $\gamma = 0.7$ فإن:

$$P_r(-5\,X_1 + 2\,X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.7 \;\longrightarrow$$

$$P_r\left(\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2} \le Z\right) = 0.7 \;\longrightarrow$$

$$F\left(\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2}\right) = 0.3 \;\longrightarrow$$

و بأستخدام ملحق (٢) فإن:

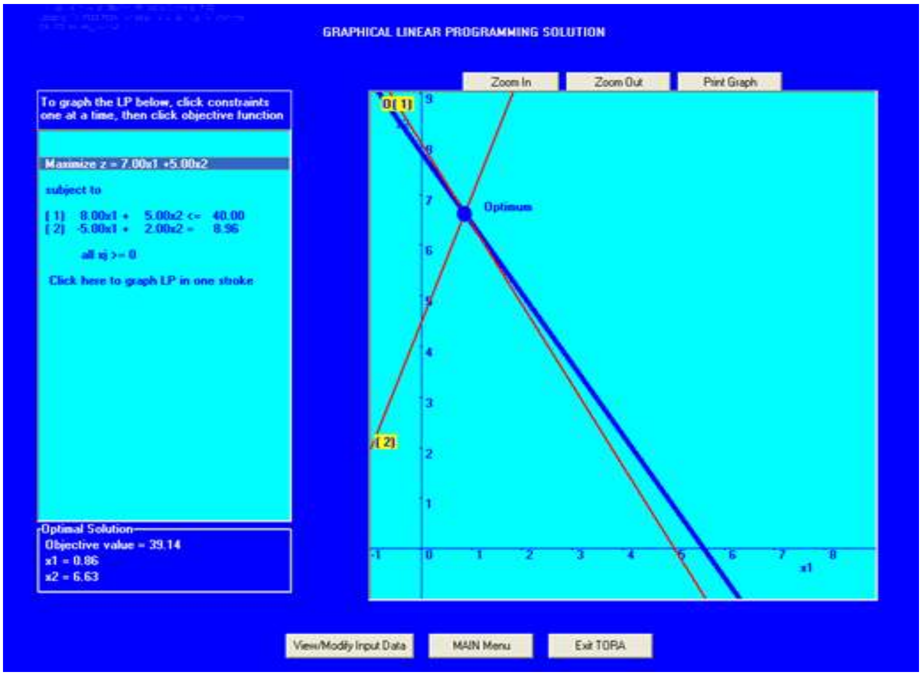
$$\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.3) = -0.52 \quad \longrightarrow$$

$$-5\,X_1 + 2\,X_2 = -1.04 + 10 = 8.96 \qquad (8)$$

و بأستبدال القيد (3) بالقيد اليقينى (8) نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$Z^* = 39.14 \quad , X_1^* = 0.85 \quad , X_2^* = 6.63 \qquad (9)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-٩): يوضح الحل الأمثل $\gamma = 0.7$

٣- و عندما $\gamma = 0.9$ فإن:

$$P_r\left(-5\,X_1 + 2\,X_2 \le \tilde{b}_1\right) = 0.9 \quad \longrightarrow$$

$$P_r\left(\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2} \le Z\right) = 0.9 \quad \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2}\right) = 0.1 \quad \longrightarrow$$

و بأستخدام ملحق (٢) فإن:

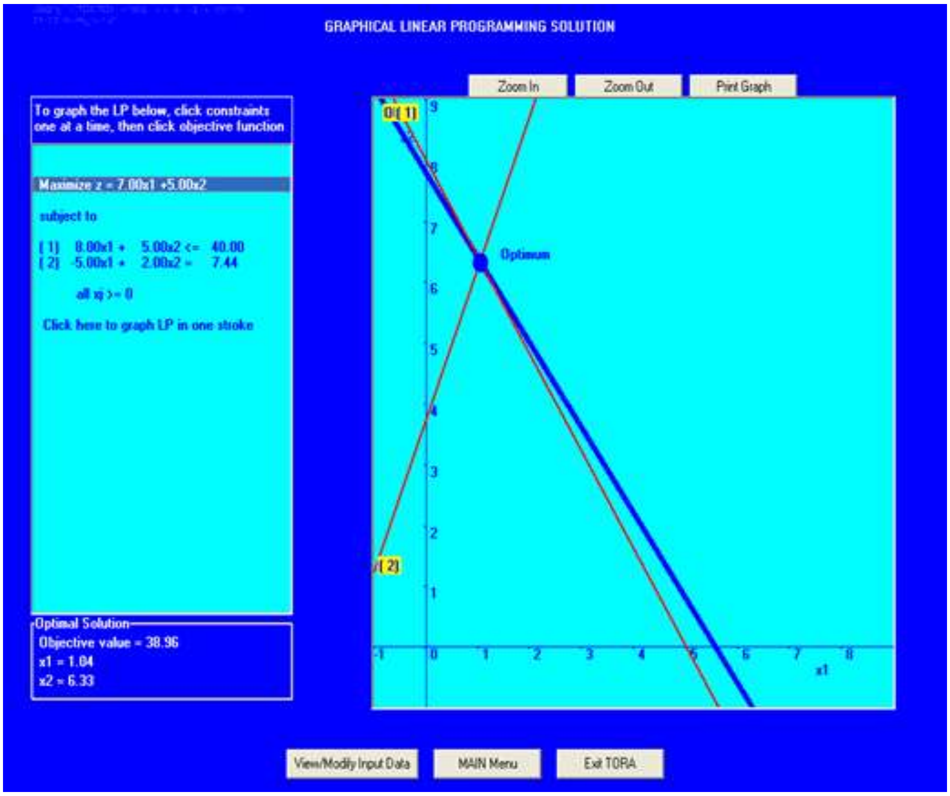
$$\frac{-5\,X_1 + 2\,X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.1) = -1.28 \quad \longrightarrow$$

$$-5\,X_1 + 2\,X_2 = -2.56 + 10 = 7.44 \qquad (10)$$

و بأستبدال القيد (3) بالقيد اليقينى (10) نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$Z^* = 38.96 \quad , X_1^* = 1.04 \quad , X_2^* = 6.33 \qquad (11)$$

والشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-١٠): يوضح الحل الأمثل $\gamma = 0.9$

مثال (٢-٥)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Min. } Z = 5\,X_1 + 4\,X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad -4\,X_1 + 2\,X_2 \le 8 \qquad (2)$$
$$X_1 + 2\,X_2 \le \tilde{b}_1 \qquad (3)$$
$$X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2 \qquad (4)$$
$$X_1\,,\ X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $E(\tilde{b}_1) = 5$ ، و تباين $Var(\tilde{b}_1) = 4$ ، $\tilde{b}_2$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين $\lambda_2 = 0.4\,, \alpha_2 = 1$.

المطلوب

عند مستوى المأمونية $\gamma_1 \ge 0.8$ ، $\gamma_2 \ge 0.8$.

الحل

من العلاقة (2-21) يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالى:

$$P_r\left\{\frac{X_1 + 2\,X_2 - 5}{2} \le \tilde{b}_1\right\} \le 0.8$$

و من ملحق (2) نجد أن:

$$1 - F\left(\frac{X_1 + 2\,X_2 - 5}{2}\right) \le 0.8 \ \rightarrow\ X_1 + 2\,X_2 \ge 3.32 \qquad (6)$$

كذلك القيد (4) فإن:

$$P_r\left(X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2\right) \ge 0.8 \ \rightarrow\ F\,(X_1 + X_2) \ge 0.8$$

و من العلاقة (2-18) فإن:

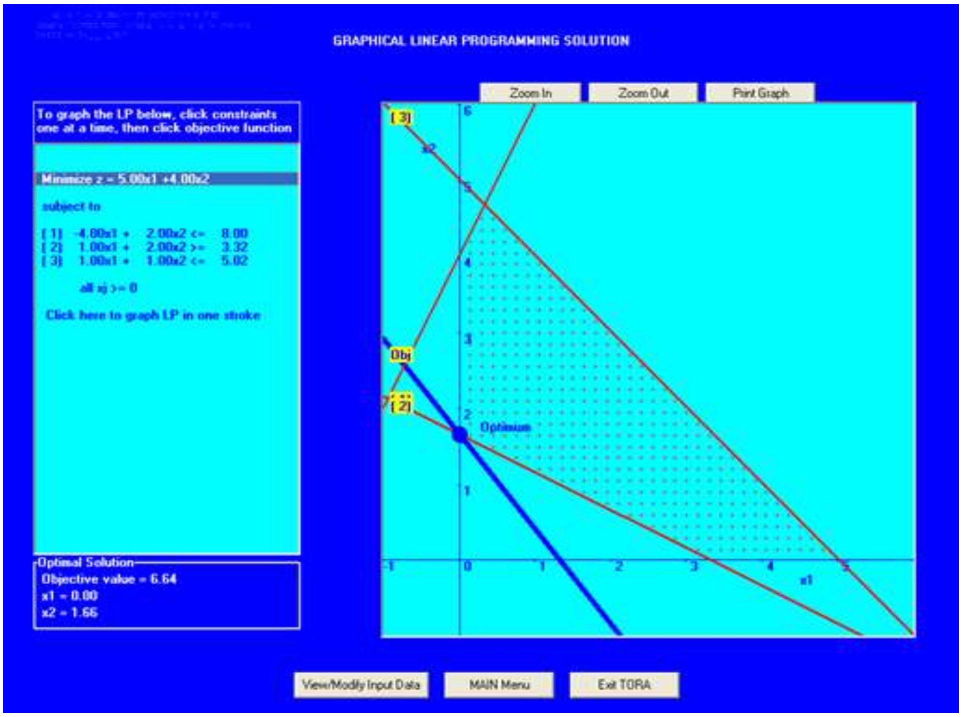
$$1 - \text{Exp}\{-0.4(X_1 + X_2 - 1)\} \le 0.8 \ \rightarrow$$

$$X_1 + X_2 \le \frac{-\ln 0.2}{0.4} + 1 \ \rightarrow X_1 + X_2 \le 5.02 \qquad (7)$$

و بأستبدال القيدين (4),(3) بالقيدين (7),(6) و حل النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى يكون الحل الأمثل:

$$Z^* = 6.64 \quad , \; X_1^* = 0 \quad , \; X_2^* = 1.66$$

و الشكل يوضح الحل بيانياً.



شكل (٢-١١): يوضح الحل الأمثل

(٢-٥) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع χ^2

$\tilde{b}_i \sim \chi^2$ Distribution

إذا أعتبرنا ($\tilde{b}_i$) متغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية (k) ودالة كثافة أحتمال $f_i(\tilde{b}_i)$ فأن [٦،٤]:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} (\tilde{b}_i)^{\frac{k}{2}-1} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}\tilde{b}_i\right] \quad , \quad \tilde{b}_i \geq 0 \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i$$

و بأفتراض مستوى المأمونية γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \;\rightarrow\; 1 - F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = \gamma_i \;\longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) \qquad (2\text{-}26)$$

و من الجداول الإحصائية بملحق (٣) يمكن الحصول على قيمة $F^{-1}(1-\gamma_i)$ و بدرجات حرية k و بذلك يتم تحويل القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى. و سوف نوضح ذلك فى المثال التالى.

<u>مثال (٢-٦)</u>

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Max. } Z = 10\,X_1 + 15\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 8\,X_1 + 5\,X_2 \leq 40 \qquad (2)$$

$$-6\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b} \qquad (3)$$

$$X_1 \, , \; X_2 \geq 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $k = 30$.

<u>المطلوب</u>

أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى فى كل حالة من الحالات التالية:

١- أعتبر أن الطرف الأيمن فى القيد الأحتمالى (3) يساوى $E(\tilde{b})$ ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى فى هذه الحالة.

٢- أعتبر $\gamma_i \leq 0.5$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ.

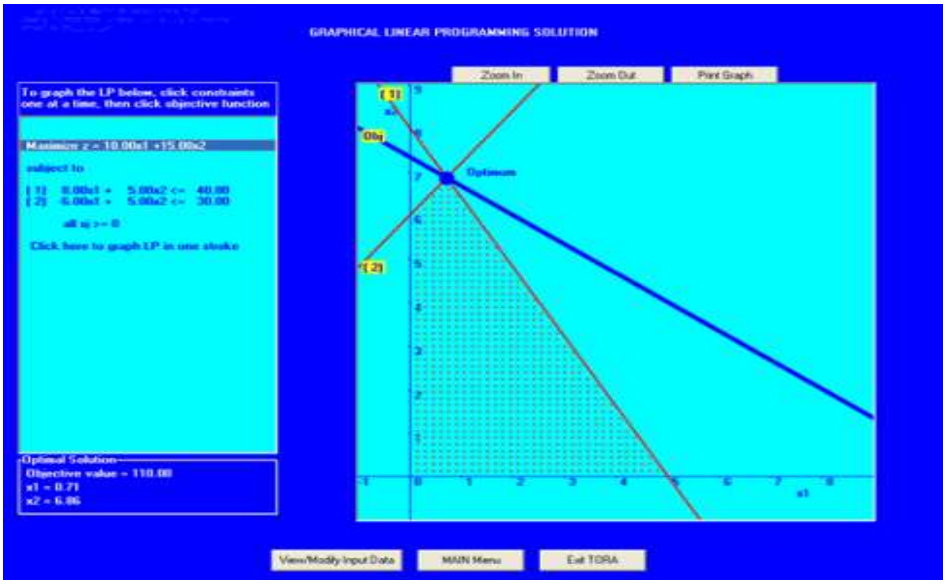
٣- أعتبر $\gamma_i = 0.95$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ.

الحل

١- بما أن $E(\tilde{b}) = k = 30$ و يصبح النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 10\,X_1 + 15\,X_2 \\ \text{S.T. } 8\,X_1 + 5\,X_2 &\leq 40 \\ -6\,X_1 + 5\,X_2 &\leq 30 \\ X_1\,,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-١٢): يوضح الحل الأمثل

و بحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 110 \quad , X_1^* = 0.71 \quad , X_2^* = 6.86$$

٢- وعندما $\gamma \leq 0.5$ فإن:

$$P_r\left(-6\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b}\right) \leq 0.5 \longrightarrow$$

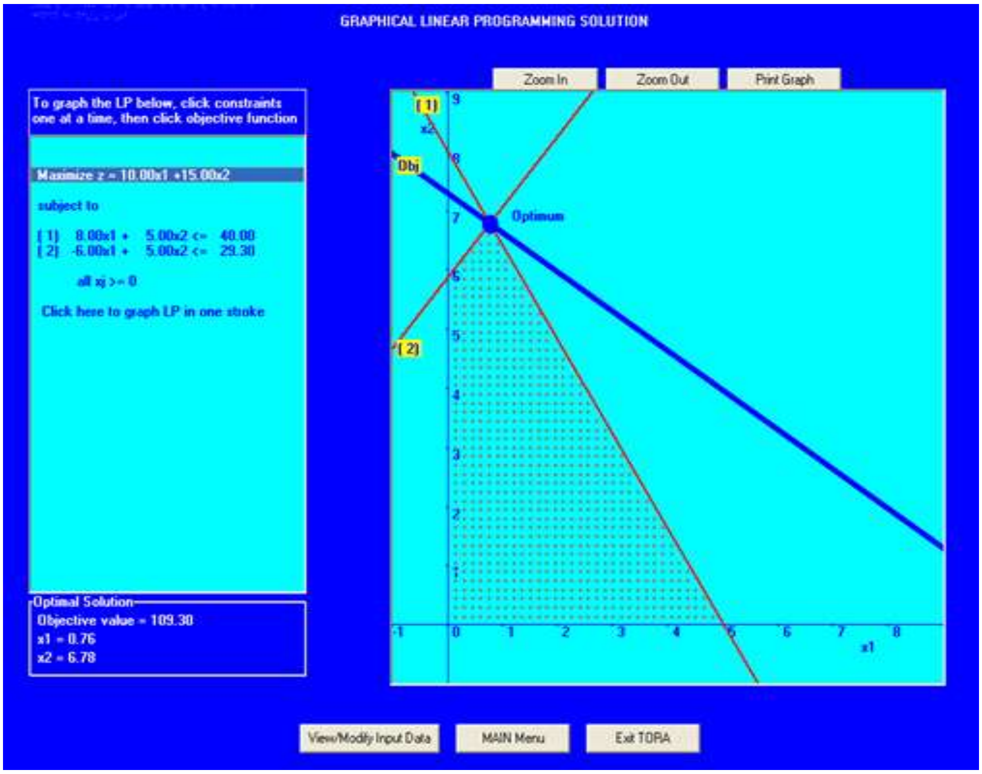
$$-6\,X_1 + 5\,X_2 \leq 29.3 \tag{6}$$

حيث: $F^{-1}(1-\gamma) = F^{-1}(0.5) = 29.3$

و بإحلال القيد (6) بدلاً من (5) فى النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقينى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 109.30 \quad , X_1^* = 0.76 \quad , X_2^* = 6.78$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-١٣)

٣- و بالمثل عندما $\gamma \geq 0.95$ فإن:

$$P_r\left(-6\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b}\right) = 0.95 \;\rightarrow\; F(-6\,X_1 + 5\,X_2) = 0.05 \;\longrightarrow$$

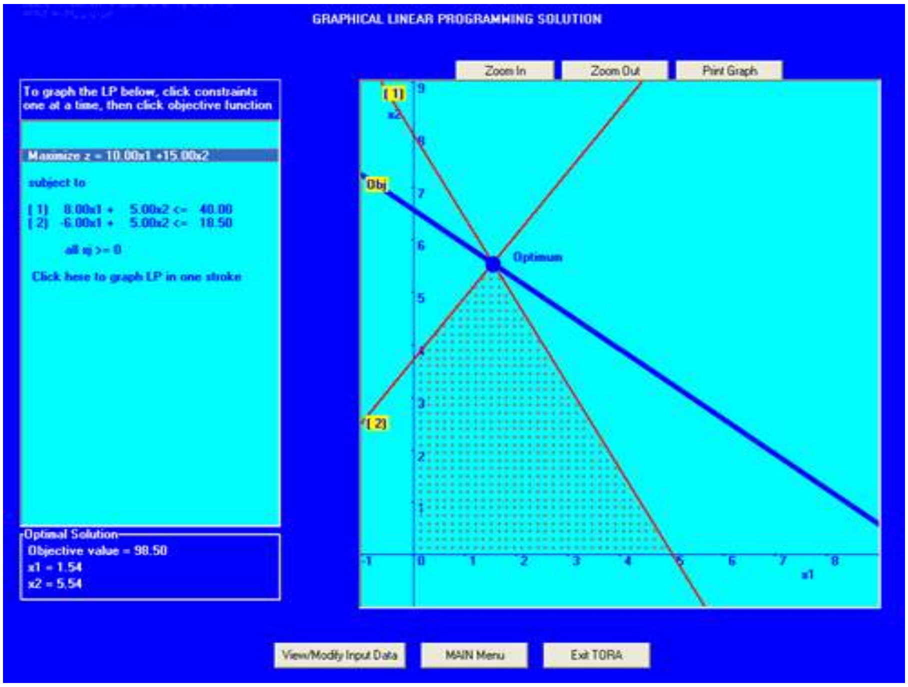
و من جداول التوزيع التراكمية لـ χ^2 نجد أن:

$$-6\,X_1 + 5\,X_2 \leq 18.5 \qquad (7)$$

و بأستبدال القيد (5) فى النموذج اليقينى أعلاه بالقيد (7) نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 98.50 \quad , X_1^* = 1.54 \quad , X_2^* = 5.54$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٢-١٤): يوضح الحل الأمثل

(٦-٢) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الأسى العام
$\tilde{b}_i \sim$ Generalized Exponential Distribution $\left(GE_{(\lambda,\mu,\alpha)}\right)$

في سنة ١٩٩٩ أشتق كل من Gupta and Kundu توزيع أحتمالى أسى بثلاثة معلمات (معلمة تمثل أقصى نقطة لدالة كثافة الأحتمال λ scale parameter ، و معلمة تمثل أقل نقطة فى نطاق دالة كثافة الأحتمال للمتغير μ location parameter ، و معلمة ثالثة تمثل شكل المنحنى α shape parameter)، و سمى هذا التوزيع بالتوزيع الأسى العام و نرمز له بالرمز $GE(\lambda,\mu,\alpha)$.

فإذا كان $\tilde{x}$ متغير عشوائى يتبع توزيع $GE(\lambda,\mu,\alpha)$ بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{x})$، و دالة توزيع تراكمية $F(x)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{x}) = {}^{\alpha}/_{\lambda}\ [1 - \text{Exp}\,(-(\tilde{x}-\mu)/\lambda)]^{\alpha-1}\ [\text{Exp}\,(-(\tilde{x}-\mu)/\lambda)] \qquad \textbf{(2-27)}$$

$$F(x) = [1 - \text{Exp}\,(-(x-\mu)/\lambda)]^{\alpha}\ ,\quad x > \mu \quad \lambda, \alpha > 0 \qquad \textbf{(2-28)}$$

و يستخدم هذا التوزيع كبديل افضل لكل من توزيع جاما Gamma و توزيع وايبل Weibull حيث تشترط درجات الحرية فى كل من التوزيعين أن تكون درجات الحرية عدد صحيح موجب اما المعلمة α لا يشترط فيها ان تكون عدد صحيح، هذا بالإضافة أن دالة التوزيع التراكمية للمتغير الأسى العام دالة محكمة الصياغة closed form [97] و بالتالى يمكن أستخدام هذا التوزيع بكفاءة فى تطبيق أسلوب (CCP).

في فترة ٢٠١٨، ٢٠١٩ قدمت El-Dash أسلوب لتحويل النماذج الخطية المقيدة أحتماليًاً بمعلمات $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ تتبع $GE(\lambda,\mu,\alpha)$ إلى نماذج يقينية خطية أيضاً [81, 80]، و فيما يلى سوف نقدم كيفية تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية عندما المعلمات $\tilde{b}_i$ تتبع توزبع $GE(\lambda,\mu,\alpha)$ على النحو التالى:

$$\Pr\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \quad \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le F_i^{-1}\,(1-\gamma_i) \quad \longrightarrow \qquad \textbf{(2-29)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \mu_i - \lambda_i \left\{\ln\left[1-(\gamma_i)^{1/\alpha_i}\right]\right\} \qquad (2\text{-}30)$$

ملحوظة

١- الطرف الأيمن للمتباينة (2-30) أعلاه يمثل مقدار ثابت.

٢- الطرف الأيمن للمتباينة يمثل قيمة الدالة العكسية للمتغير $\tilde{b}_i$ عند $(1-\alpha_i)$.

كذلك إذا كانت أحدى المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ و لتكن $\tilde{a}_{i1}$ تمثل متغير يتبع $GE(\lambda, \mu, \alpha)$ بحيث

$$Pr\left(\tilde{a}_{i1}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right) \ge \gamma_i \qquad \longrightarrow$$

$$F_i\left(\frac{b_i - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}}{x_1}\right) \ge \gamma_i \;\rightarrow\; \frac{b_i - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j}{x_1} \ge F_i^{-1}(\alpha_i) \qquad (2\text{-}31)$$

و من تعريف الدالة التراكمية و الدالة العكسية لها للمتغير $\tilde{a}_{i1}$ فأن

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij} + x_1\left\{\mu_{i1} - \lambda_{i1}\ln\left[1-(\gamma_i)^{1/\alpha_i}\right]\right\} \le b_i \qquad (2\text{-}32)$$

و القيد اليقينى المكافئ أعلاه قيد خطى فى النتغيرات القرارية.

مثال (٢-٧)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Max. } Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad Pr\left(x_1 + 2x_2 + x_3 \le \tilde{b}_1\right) \ge 0.7 \qquad (2)$$

$$Pr\left(\tilde{a}_{21}x_1 + 3x_2 - x_3 \le 15\right) \ge 0.6 \qquad (3)$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad (5)$$

حيث:
$$\tilde{b}_1 \sim GE_{(\lambda_1=2,\ \mu_1=5,\ \alpha_1=1.5)}, \quad \gamma_1 = 0.7$$
$$\tilde{a}_{21} \sim GE_{(\lambda_{21}=1,\ \mu_{21}=10,\ \alpha_{21}=2)}, \quad \gamma_2 = 0.6$$

المطلوب

١- حول القيود الأحتمالية (3) , (2) إلى يقينية مكافئة.

٢- أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

الحل

فيما يلى القيدين (7) , (6) المكافئين للقيدين (4) , (3)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6.190 \qquad (6)$$

$$11.490x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 15 \qquad (7)$$

و بالتالى يصبح النموذج اليقينى (5) , (4) , (7) ,(6) , (1) نموذج برمجة خطية يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس [٨, 173]، و يصبح الحل الأمثل على النحو التالى:

$$z^* = 7.81\,, \quad x_1^* = 0.83, \quad x_2^* = 1.83, \quad x_3^* = 0$$

(٧-٢) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٢-١)

تقوم إحدى المطاعم بإنتاج ٤ أنواع من الوجبات السريعة A,B,C,D بحيث يدخل فى كل وجبة ثلاثة أنواع من المكونات الرئيسية، البروتين، الخضروات، الدقيق I, II, III . و الجدول التالى يوضح الكميات اليومية المتاحة بالكيلوجرام من كل مكون، و النسبة المئوية للمكون فى الوحدة الواحدة من كل وجبه، كذلك سعر بيع الوحدة الواحدة بالجنيه، حيث أن وزن كل وجبة يساوى كيلوجرام واحد.

فإذا كان حجم الطلب على المنتجات A,B معاً يمثل متغير عشوائى $\tilde{b}_1$ يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 220$ و أنحراف معيارى $\sigma_1 = 10$. كذلك يؤول الطلب على المنتجات C,D إلى التوزيع المعتاد $\tilde{b}_2$ بتوقع $\mu_2 = 250$ و أنحراف معيارى $\sigma_2 = 15$.

جدول (٢-٣)

المكونات	النسبة المئوية (%) المطلوبة من كل مكون لإنتاج الوحدة الواحدة من كل وجبة (نسبة المكون)				الكميات اليومية بالكيلوجرام
	A	B	C	D	
I بروتين	15	27	33	38	100
II خضروات	35	13	27	20	120
III دقيق	50	60	40	42	300
سعر بيع الوحدة بالجنية	70	90	100	120	

و يرغب متخذ القرار فى المطعم تحديد عدد الوجبات التى يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون الإيرادات أكبر ما يمكن فى الحالتين التاليتين:

١- عندما يكون الطلب على كل نوع يساوى الطلب المتوقع.

٢- أستخدام أسلوب CCP عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \leq 0.9$, $\gamma_2 \geq 0.5$

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3, X_4 هى عدد الوجبات التى يجب إنتاجها من A,B,C,D على الترتيب فى اليوم، حيث:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

و يصبح النموذج الأحتمالى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = 70\,X_1 + 90\,X_2 + 100\,X_3 + 120\,X_4 \qquad (1)$$
$$\text{S.T. } 0.15\,X_1 + 0.27\,X_2 + 0.33\,X_3 + 0.38\,X_4 \leq 100 \qquad (2)$$
$$0.35\,X_1 + 0.13\,X_2 + 0.27\,X_3 + 0.20\,X_4 \leq 120 \qquad (3)$$
$$0.55\,X_1 + 0.60\,X_2 + 0.40\,X_3 + 0.42\,X_4 \leq 300 \qquad (4)$$
$$X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1 \qquad (5)$$
$$X_3 + X_4 \leq \tilde{b}_2 \qquad (6)$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \qquad (7)$$

١- بما أن:

$$E(\tilde{b}_1) = 220 \;\;, \; Var(\tilde{b}_1) = 100 \;, \;\; E(\tilde{b}_2) = 250 \;\;, \; Var(\tilde{b}_2) = 225$$

و بالتالى يمكن أستبدال القيدين الأحتماليين (5),(6) بالقيدين اليقينيين التاليين:

$$X_1 + X_2 \leq 220 \qquad (8)$$
$$X_3 + X_4 \leq 250 \qquad (9)$$

و بحل النموذج اليقينى بأحد طرق البرمجة الصحيحة integer programming [193, 150] و بأستخدام حزمة Tora [١١]:

$$Z^* = 36540 \;\;, \;\; X_1^* = 219 \;\;, \;\; X_2^* = 1 \;\;, \;\; X_3^* = 0 \;\;, \;\; X_4^* = 176$$

٢- يمكن إعادة صياغة القيد (5) و تحويله إلى قيد يقينى على النحو التالى:

$$P_r\left(X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1\right) \leq 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10} \leq Z\right) \leq 0.9 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10}\right) \leq 0.9 \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10}\right) \geq 0.1 \longrightarrow \frac{X_1 + X_2 - 220}{10} \geq F^{-1}(0.1)$$

و من ملحق رقم (٢) نجد أن:

$$F^{-1}(0.1) = -1.28 \longrightarrow X_1 + X_2 \geq 207.2 \qquad (10)$$

بالمثل لتحويل القيد (6)

$$P_r(X_3 + X_4 \leq \tilde{b}_2) \geq 0.5 \longrightarrow P_r((X_3 + X_4 - 250)/15 \leq Z) \geq 0.5 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\right) \geq 0.5 \longrightarrow F\left(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\right) \leq 0.5 \longrightarrow$$

$$\frac{X_3 + X_4 - 250}{15} \geq F^{-1}(0.5)$$

و باستخدام ملحق رقم (٢) أيضاً نجد أن:

$$F^{-1}(0.5) = 0 \longrightarrow X_3 + X_4 \leq 250 \qquad (11)$$

و بأحلال القيدين اليقينيين (11),(10) بدلاً من القيدين الأحتماليين (6),(5) فى النموذج (1)-(7) و بأستخدام أسلوب البرمجة الصحيحة أيضاً نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 38{,}490 \quad , X_1^* = 258 \quad , X_2^* = 227 \quad , X_3^* = 0 \quad , X_4^* = 0$$

<u>تطبيق (٢-٢)</u>

فى احدى المدن يرغب أحد المستثمرين فى هذه المدينة إقامة مصنع لأعادة تدوير المخلفات الصلبة. و يرغب فى تحديد الطاقة الإنتاجية للمصنع بحيث تمثل المخلفات التى يتم إعادة

تدويرها 70% من كمية المخلفات التى يتم رفعها (بالطن). فإذا كانت المدينة مقسمة إلى 4 مناطق يتم تجميع المخلفات منها حيث تمثل كميات المخلفات التى يتم رفعها من المناطق ال 4 متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الأسى العام بمعلمات على النحو التالى

$$\tilde{b}_1 \sim GEXP\ (\lambda_1 = 2\ ,\ \mu_1 = 5\ ,\alpha_1 = 1.5)$$
$$\tilde{b}_2 \sim GEXP\ (\lambda_2 = 1.5\ ,\ \mu_2 = 3\ ,\alpha_2 = 1)$$
$$\tilde{b}_3 \sim GEXP\ (\lambda_3 = 2\ ,\ \mu_3 = 8\ ,\alpha_3 = 1.5)$$
$$\tilde{b}_4 \sim GEXP\ (\lambda_4 = 3\ ,\ \mu_4 = 4\ ,\alpha_4 = 0.5)$$

فإذا كان يرغب متخذ القرار فى تحديد طاقة المصنع أن يكون كمية المخلفات التى يتم إعادة تدويرها لا يزيد عن 49 طن يومياً، و ذلك بمستوى معنوية مأمونية لا تقل عن 0.9 .
و المطلوب تحديد كمية المخلفات التى يجب رفعها يومياً من كل منطقة.

الحل

١- تفرض x_1, x_2, x_3, x_4 تشير إلى الكميات التى يجب رفعها من المخلفات من المناطق ال 4 على الترتيب.

٢- النموذج الأحتمالى الذى يمثل المشكلة.
أوجد قيم x_1, x_2, x_3, x_4 التى تجعل

$$\begin{array}{llr}
 & \text{Max. } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & (1) \\
\text{S.T.} & 0.70\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \le 49 & (2) \\
 & \Pr\left(x_1 \le \tilde{b}_1\right) \ge \gamma_1 & (3) \\
 & \Pr\left(x_2 \le \tilde{b}_2\right) \ge \gamma_2 & (4) \\
 & \Pr\left(x_3 \le \tilde{b}_3\right) \ge \gamma_3 & (5) \\
 & \Pr\left(x_4 \le \tilde{b}_4\right) \ge \gamma_4 & (6) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & (7)
\end{array}$$

و يمكن تحويل القيود الاحتمالية فى (6)-(3) إلى قيود يقينية

$$x_i \le \left\{ \mu_i - \lambda_i \left[\ln\,(1-\gamma_i)^{1/\alpha_i}\right]\right\}$$

$$\begin{array}{lr}
x_1 \le \left\{ 5 - 2\left[\ln\,(1-0.9)^{1/1.5}\right]\right\} \rightarrow x_1 \le 10.37 & (8) \\
x_2 \le \{ 3 - 1.5\,[\ln\,(1-.09)]\} \rightarrow x_2 \le 6.45 & \\
x_3 \le \left\{ 8 - 2\left[\ln\,(1-0.9)^{1/1.5}\right]\right\} \rightarrow x_3 \le 13.37 & \\
x_4 \le \left\{ 4 - 3\left[\ln\,(1-0.9)^{1/0.5}\right]\right\} \rightarrow x_4 \le 10.64 &
\end{array}$$

و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{S.T.} \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 49$$

$$x_1 \le 10.37, \qquad x_2 \le 6.45, \qquad x_3 \le 13.37, \qquad x_4 \le 10.64$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

و بحل النموذج أعلاه بأستخدام طريقة السمبلكس نجد ان الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 40.83, \quad x_1^* = 10.37, \quad x_2^* = 6.45,$$

$$x_3^* = 13.37, \quad x_4^* = 10.64$$

(٢-٨) تمرينات Exercises

(٢-١)

أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } Z = 8\,X_1 + 3\,X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 2\,X_1 + 3\,X_2 \geq \tilde{b}_1 \qquad (2)$$
$$5\,X_1 + 8\,X_2 \leq \tilde{b}_2 \qquad (3)$$
$$X_1 \leq 5 \qquad (4)$$
$$X_1\,,\ X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران مستقلين، $\tilde{b}_1 \sim N(6,1)$ ، $\tilde{b}_2 \sim N(40,2)$.

أ- بوضع القيم المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ فى الطرف الأيمن للقيود (2),(3)– أوجد الحل الأمثل للنموذج بيانياً.

ب- حول النموذج الأحتمالى (1)-(5) إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma_1 > 0.90$, $\gamma_2 > 0.9$ - ثم حل النموذج بيانياً.

ج- حول النموذج الأحتمالى (1)-(5) إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma_1 > 0.80$, $\gamma_2 > 0.80$ - ثم حل النموذج بيانياً.

د- قارن بين النتائج فى (أ)-(ج).

(٢-٢)

أعتبر نماذج البرمجة الأحتمالية التالية – حول convert كل منهم إلى نموذج يقينى مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية γ_i المناظرة للقيد الأحتمالى، ثم حل النموذج اليقينى بأستخدام الأسلوب المناسب.

١)

$$\text{Max. } Z = 5\,X_1 + 2\,X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 5\,X_1 + 7\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9$$
$$8\,X_1 + 4\,X_2 \geq 32$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 32$ و أنحراف معيارى $\sigma = 3$.

٢)

$$\begin{aligned} &\text{Max. } Z = 2\,X_1 + 3\,X_2 + X_3 \\ \text{S.T.}\quad &4\,X_1 + X_2 + 3\,X_3 \le 20 \\ &X_1 + 3\,X_2 \le \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 > 0.8 \\ &2X_2 + X_3 \le \tilde{b}_2 \quad , \quad \gamma_2 < 0.9 \\ &X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda = 15$ ، كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 20$ و أنحراف معياري $\sigma = 5$.

(٢-٣)

١- حول النموذج الأحتمالى التالى إلى نموذج يقينى مكافئ إذا كان $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية ٢ كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 5$ ، و أنحراف معيارى $\sigma = 1$.

$$\begin{aligned} &\text{Max. } Z = X_1 + 2\,X_2 + 5\,X_3 \\ &P_r\left(2\,X_1 + X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1\right) \ge 0.86 \\ &P_r\left(3\,X_1 + 5\,X_2 + 2\,X_3 \le \tilde{b}_2\right) \ge 0.75 \\ &X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

٢- حل النموذج اليقينى المكافئ.

(٢-٤)

أعتبر النموذج الأحتمالى فى تمرين (٢-٣)، و بافتراض أن $\tilde{b}_1$ تتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 2$ و تباين $\sigma_1^2 = 1$ عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \ge 0.9$ ، $\gamma_2 \ge 0.8$. حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ ثم أوجد الحل الأمثل.

الباب الثالث

القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متقطعة ($\tilde{b}_i$)
Chance Constraints with Discrete Random Parameters ($\tilde{b}_i$)

(٣-١) مقدمة

Introduction

(٣-٢) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المنتظم

$\tilde{b}_i \sim$ Uniform Distribution

(٣-٣) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الهندسى

$\tilde{b}_i \sim$ Exponential Distribution

(٣-٤) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع ذات الحدين

$\tilde{b}_i \sim$ Normal Distribution

(٣-٥) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع بواسون

$\tilde{b}_i \sim$ Chi-Square Distribution

(٣-٦) أمثلة تطبيقية

Applied Examples

(٣-٧) تمرينات

Exercises

(٣-١) مقدمة Introduction

فى الباب السابق (٢) تناولنا بالتفصيل بعض أهم المعلمات $\tilde{b}_i$ التى تمثل متغيرات عشوائية متصلة. و فى هذا الفصل سوف نتناول بالتفصيل كيفية تحويل النموذج الاحتمالى بأستخدام أسلوب (CCP) إلى نموذج يقينى مكافئ فى حالة عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{b}_i$، $i = m^\backslash + 1 , m^\backslash + 2 ,\ldots,m$ متغيرات عشوائية متقطعة.

فإذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية الاحتمالى على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (3\text{-}1)$$

$$\text{S. T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1, 2,\ldots,m^\backslash \qquad (3\text{-}2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i \quad , \quad i = m^\backslash + 1, m^\backslash + 2,\ldots,m \qquad (3\text{-}3)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1, 2,\ldots,n \qquad (3\text{-}4)$$

يلاحظ أن حجم النموذج $(n\times m)$ حيث n تشير إلى عدد المتغيرات القرارية، m تشير إلى عدد القيود الهيكلية، حيث X_j المتغيرات القرارية، و المعلمات C_j , a_{ij} , b_i مقادير ثابتة $j = 1, 2, \ldots , n$ ، $i = 1, 2, \ldots , m^\backslash$ كذلك المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة حيث $i = m^\backslash + 1 , m^\backslash + 2 ,\ldots,m$. و فيما يلى سوف نوضح كيفية تحويل القيود (3-3) إلى قيود يقينية مكافئة وفقاً لبعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتقطعة $\tilde{b}_i$.

(٣-٢) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المنتظم

$\tilde{b}_i \sim$ Uniform Distribution

إذا فرضنا أن $\tilde{b}_i$ متغير يتبع التوزيع المنتظم المتقطع [٦ ,151] بدالة احتمال $f_i(\tilde{b}_i)$ على النحو:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \begin{cases} \frac{1}{N} & , \quad \tilde{b}_i = 1, 2, \ldots, N \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \qquad (3\text{-}5)$$

و بافتراض مستوى مأمونية γ_i فإن القيد الاحتمالى (3-3) فإنه يمكن أعادة صياغته على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j < \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \quad , \quad 0 < \gamma_i < 1$$

أو بعبارة أخرى (القيد المكمل)

$$P_r\left(\tilde{b}_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow$$

و بالتالى فان:

$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1 = F_i^{-1}(1 - \gamma_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = N(1 - \gamma_i) + 1 \qquad (3\text{-}6)$$

ملحوظة

١- القيد (3-6) قيد يقينى حيث $[N(1-\gamma_i) + 1]$ مقدار ثابت لا يعتمد على X_j ، $j = 1, 2, \ldots, n$.

٢- المقدار $[N(1-\gamma_i) + 1]$ عبارة عن الدالة العكسية F_i^{-1} عند $(1-\gamma_i)$ للدالة التراكمية F_i للمتغير $(\tilde{b}_i)$.

٣- القيد الاحتمالى الواحد يكافئه قيد يقينى واحد.

و بالتالي يكون النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الاحتمالى (1-3)-(4-3) على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\, X_j$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = N(1-\gamma_i) + 1 \quad , \quad i = I+1, I+2, \ldots, m \qquad (3\text{-}7)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

مثال (٣-١)

تقوم أحدى الشركات بأنتاج نوعين من المنتجات A,B بحيث يتطلب أنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع ثلاثة أنواع من المواد الخام منهم مادتين يتم استيرادهما بحيث تمثل الكمية المتاحة من كل مادة متغير عشوائي منتظم بحيث:

$$f(\tilde{b}_1) = \frac{1000}{10,000} \quad , \quad \tilde{b}_1 = 1000,\ 2000, \ldots, 10000$$

$$f(\tilde{b}_2) = \frac{2000}{10,000} \quad , \quad \tilde{b}_2 = 2000,\ 4000,\ 6000,\ 8000, 10000$$

و الجدول التالى يوضح قيم المعلمات الثابتة.

و يرغب متخذ القرار فى تحديد الكميات التي يجب أنتاجها فى كل حالة من الحالات التالية بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن:

١- أوجد القيمة المتوقعة للكميات المتاحة من المادة الخام II ، III. أعتبر الكميات المتاحة من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ هى الكميات المتوقعة، ثم أوجد النموذج اليقينى فى هذه الحالة، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج.

٢- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma_1 = 0.7\ ,\ \gamma_2 = 0.7$ أوجد النموذج اليقينى المكافئ فى هذه الحالة، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

٣- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma_1 = 0.9\ ,\ \gamma_2 = 0.9$ أوجد النموذج اليقينى المكافئ فى هذه الحالة، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

قارن بين القرارات المأخوذة فى الحالات الثلاثة السابقة.

جدول (٣-١): يوضح مستلزمات الإنتاج

مستلزمات الأنتاج	الكميات المطلوبة من مستلزمات الأنتاج لأنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج		الكميات المتاحة
	A	B	
I	0.5	0.6	3000
II	0.5	1.4	$\tilde{b}_1$
III	1.4	0.7	$\tilde{b}_2$
ربح الوحدة بالجنية	200	500	

الحــــل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي الكميات التي يجب أنتاجها من A,B على الترتيب. فإن النموذج الاحتمالى الذي يمثل المشكلة أعلاه على النحو:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 200\,X_1 + 500\,X_2 \\ \text{S.T.}\quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 &\le 3000 \\ 0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 &\le \tilde{b}_1 \\ 1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 &\le \tilde{b}_2 \\ X_1\,,\ X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

١- و بأستخدام تعريف القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى نوجد القيمة المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ و سوف نشير لهما بالرمز $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ على الترتيب فنجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \sum_{\tilde{b}_1} f(\tilde{b}_1)\tilde{b}_1 = \sum_{\tilde{b}_1}\left(\frac{1}{10}\right)\tilde{b}_1 = \frac{1}{10}\{1000 + 2000 + \cdots .. + 10{,}000\}$$

$$= 5{,}500$$

$$E(\tilde{b}_2) = \sum_{\tilde{b}_2} f(\tilde{b}_2)\tilde{b}_2 = \sum_{\tilde{b}_2}\left(\frac{1}{5}\right)\tilde{b}_2 = \frac{1}{5}\{2000 + 4000 + \cdots .. + 10000\}$$

$$= 7{,}000$$

و يلاحظ أن:

$$P_r(\tilde{b}_1 \le 5{,}500) = \frac{5}{10} = 0.5 \quad \to P_r(\tilde{b}_1 > 5500) = 0.5$$

كذلك

$$P_r(\tilde{b}_2 \leq 6,000) = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \rightarrow \quad P_r(\tilde{b}_2 > 6000) = 0.6$$

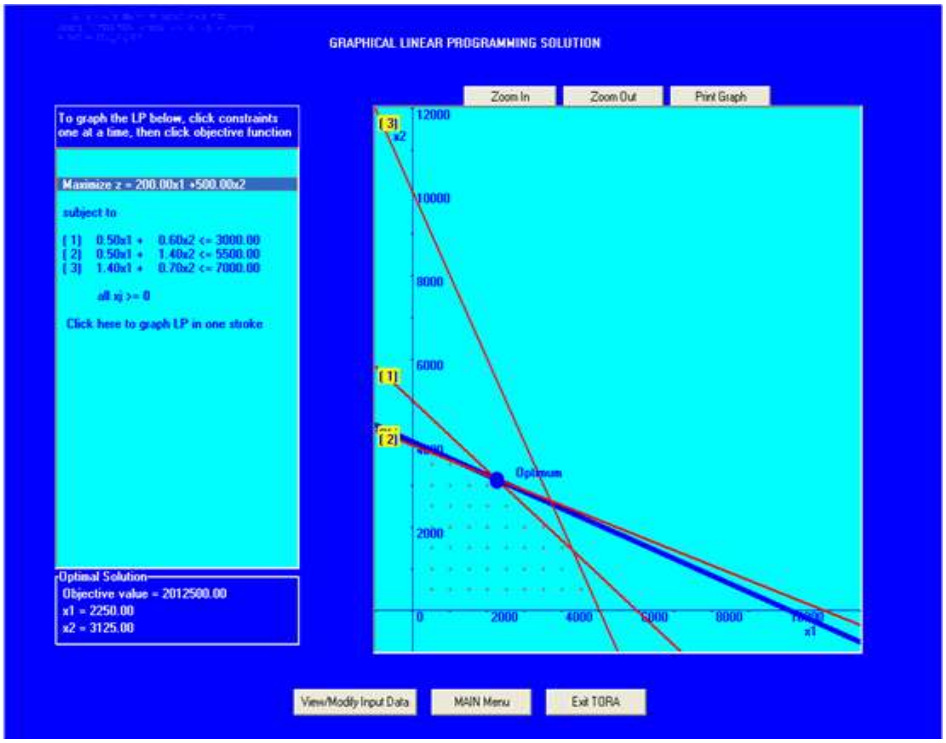
و بالتالى نجد أن النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الاحتمالى عندما تكون القيم المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ هى القيم الممكنة المتاحة لـ $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 200\,X_1 + 500\,X_2 \\ \text{S.T.} \quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 &\leq 3000 \\ 0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 &\leq 5500 \\ 1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 &\leq 6000 \\ X_1\,,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

و بحل النموذج اليقينى أعلاه بيانياً كما في الشكل التالى نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = 2,012,500 \quad , \quad X_1^* = 2,250 \quad , \quad X_2^* = 3,125 \qquad (1)$$

و ذلك بمستوى مأمونية $\gamma_1 = 0.5\ ,\ \gamma_2 = 0.6$



شكل (٣-١): يوضح الحل الأمثل

٢- عندما $\gamma_1 = 0.7$, $\gamma_2 = 0.7$ فى هذه الحالة نجد أن:

$$P_r(0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \leq \tilde{b}_1) = 0.7$$

و بتطبيق العلاقة (3-6) نجد أن:

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 = (10,000)(0.3) + 1000 = 4000$$

بالمثل:

$$P_r(1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \leq \tilde{b}_2) = 0.70 \longrightarrow$$
$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 = (10,000)(0.3) + 2000 = 5000$$

و يصبح النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} &\text{Max. } Z = 200\,X_1 + 500\,X_2 \\ \text{S.T.}\quad & 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \leq 3000 \\ & 0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \leq 4000 \\ & 1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \leq 5000 \\ & X_1\,,\; X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

كما هو موضح فى الشكل (٣-٢) التالى.

و بحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

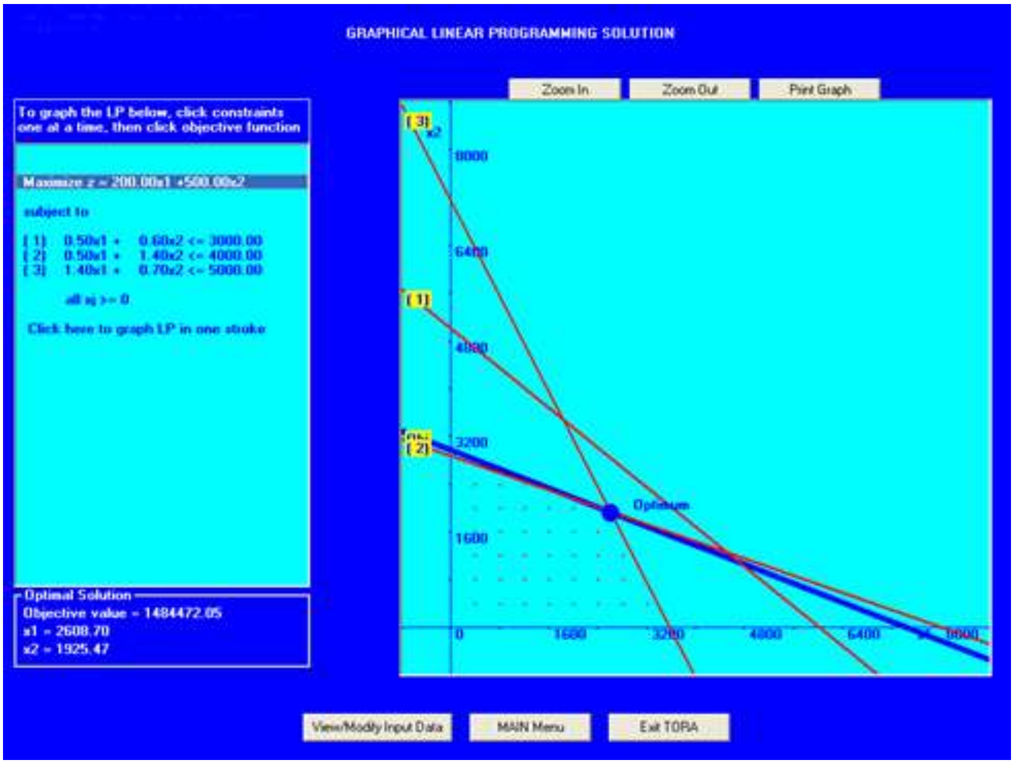
$$Z^* = 1,484,472.05 \quad , \quad X_1^* = 2608.7 \quad , \quad X_2^* = 1925.47 \qquad (2)$$

٣- و عند $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.9$ فى هذه الحالة نجد أن:

$$P_r(0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \leq \tilde{b}_1) = 0.9$$

و بتطبيق العلاقة (3-7) نجد أن:

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 = (0.10)(10,000) + 1000 = 2000$$



شكل (٣-٢): يوضح الحل الأمثل

بالمثل:

$$P_r(1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le \tilde{b}_2) = 0.90 \;\longrightarrow$$

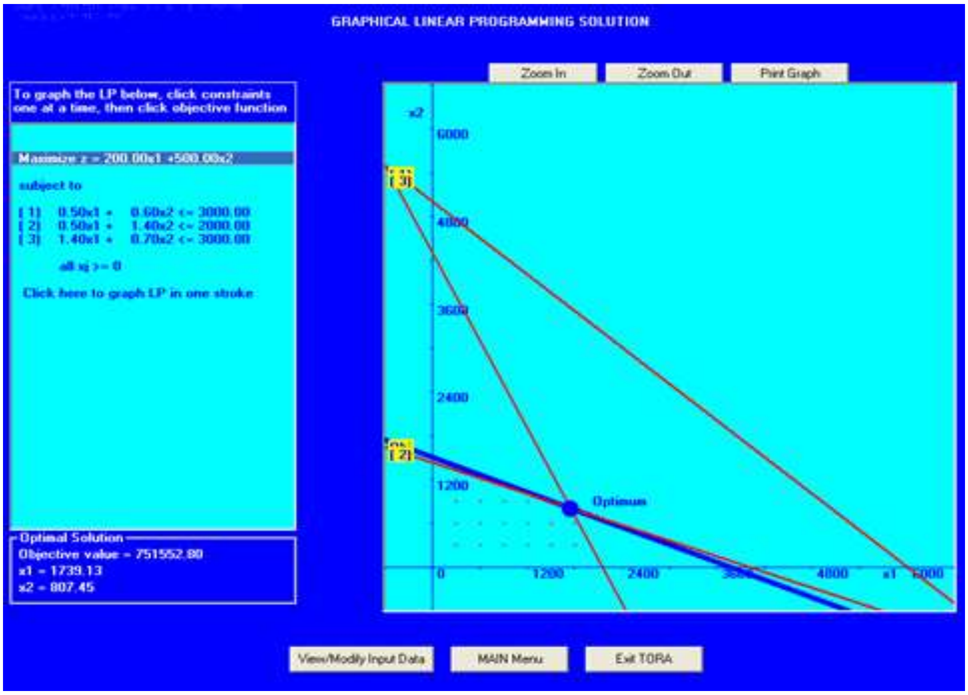
$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 = (0.10)(10,000) + 2000 = 3000$$

و يصبح النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } Z = 200\,X_1 + 500\,X_2 \\
&\text{S.T.}\quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \le 3000 \\
&\qquad\;\; 0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \le 2000 \\
&\qquad\;\; 1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le 3000 \\
&\qquad\qquad X_1\,,\; X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

و بحل النموذج اليقينى نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 751,552.8 \;,\; X_1^* = 1739.13 \;,\; X_2^* = 807.45 \qquad (2)$$



شكل (٣-٣): يوضح الحل الأمثل

و يمكن تلخيص نتائج الحل فى الحالات الثلاثة فى (1)-(3) السابقة فى الجدول التالى:

جدول (٣-٢): الحلول المثلى عند مستوى مأمونية مختلفة

رقم الحالة	γ_i	الحل
(1)	$(0.5\,,0.6\,)$	$Z^* = 2,012,500 \;,\; X_1^* = 2,250 \;,\; X_2^* = 3,135$
(2)	$(\,0.7\,,0.7\,)$	$Z^* = 1,484,472.05 \,,X_1^* = 2608.7, X_2^* = 1925.47$
(3)	$(\,0.9\,,0.9\,)$	$Z^* = 751,552.8\,, X_1^* = 1739.13,\; X_2^* = 807.45$

و من الجدول يتضح أنه كلما زادت مستويات المأمونية أدى ذلك إلى تراجع الحل الأمثل حيث أن الدوال العكسية F_i^{-1} دوال متناقصة فى γ_i. و فى الباب الثامن سوف نقدم مقاييس صلاحية الحل reliability measures، حيث يتم تعريف مقياس الصلاحية للحل أحتمال (وهو أحتمال أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود في نفس الوقت) .

(٣-٣) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الهندسى

$\tilde{b}_i \sim$ Geometric Distribution

إذا فرضنا أن $\tilde{b}_i$ متغير عشوائى يتبع التوزيع الهندسى [145,٤] بدالة احتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = P(1-P)^{\tilde{b}_i} \quad , \quad 0 < P < 0 \quad , \quad \tilde{b}_i = 0, 1, 2, 3, \dots \dots$$

و بالتالى فإن:

$$\Pr\left(\tilde{b}_i < b_i^{\backslash}\right) = \sum_{\tilde{b}_i=0}^{b_i^{\backslash}-1} P(1-P)^{\tilde{b}_i} = 1-(1-P)^{b_i^{\backslash}} \tag{3-8}$$

و بأفتراض أن مستوى المأمونية γ_i و أعتبر أن القيد الاحتمالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i$$

فإن هذا القيد مكافئ للقيد التالى:

$$P_r\left(\tilde{b}_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = 1-\gamma_i \tag{3-9}$$

بالتعويض فى الطرف الأيسر للقيد الاحتمالى (3-9) بالطرف الأيمن فى القيد (3-8) نجد أن:

$$1-(1-P)^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j} = (1-\gamma_i) \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = \frac{\ln \gamma_i}{\ln(1-P)} \tag{3-10}$$

<u>ملحوظة</u>

(١) القيد (3-10) قيد يقينى حيث يمثل المقدار $\left\{\frac{\ln \gamma_i}{\ln(1-P)}\right\}$ مقدار ثابت.

(٢) عندما يكون القيد الأحتمالى على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$1-(1-P)^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j} \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)} \tag{3-11}$$

(٣) بالمثل إذا كان القيد على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge \frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)} \tag{3-12}$$

حيث يمثل المقدار $\left\{\frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)}\right\}$ مقدار ثابت أيضاً.

مثال (٣-٢)

أعتبر نموذج البرمجة الخطية الاحتمالى التالى:

$$\text{Max. } Z = 5\,X_1 + 3\,X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 3\,X_1 + 5\,X_2 \geq 75 \qquad (2)$$
$$X_1 \leq 25 \qquad (3)$$
$$0.02\,X_1 + 0.01\,X_2 \leq \tilde{b} \qquad (4)$$
$$X_1\,,\ X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}$ يمثل متغير عشوائى له التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.4$.

المطلوب

١- أوجد $E(\tilde{b})$ ، ثم حول النموذج الاحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ بأستبدال الطرف الأيمن فى القيد (4) بالقيمة $E(\tilde{b})$ ثم أوجد الحل الأمثل للقيد اليقينى موضحاً مستوى المأمونية γ في هذه الحالة.

٢- بأفتراض أن مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.6$ حول النموذج الاحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

٣- بأفتراض أن مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.7$ حول النموذج الاحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى، ثم قارن بين النتائج في (1)-(3).

الحل

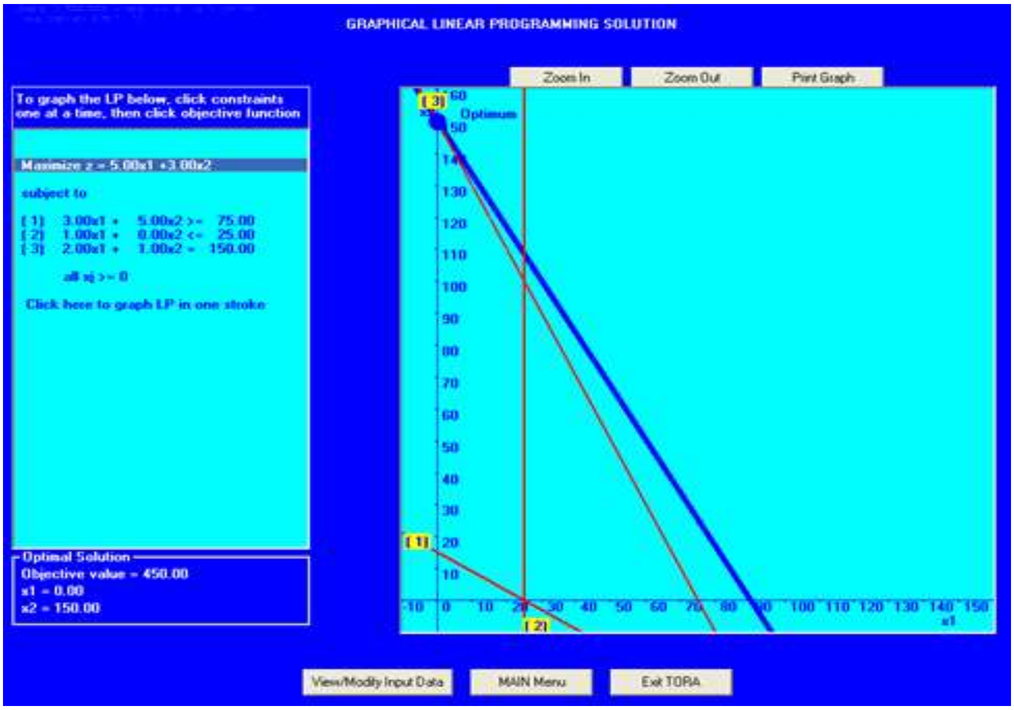
١- من نظرية الأحتمالات نجد أن:

$$E(\tilde{b}) = \frac{(1-P)}{P} = \frac{1-0.4}{0.4} = 1.5$$

و يصبح النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الاحتمالى (1)-(5) على النحو التالى:

$$\text{Min. } Z = 5\,X_1 + 3\,X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 3\,X_1 + 5\,X_2 \geq 75 \quad , \ X_1 \leq 25$$
$$0.02X_1 + 0.01\,X_2 = 1.5 \longrightarrow 2\,X_1 + X_2 = 150 \qquad (6)$$
$$X_1\,,\ X_2 \geq 0$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٣-٤): يوضح الحل الأمثل

و بحل النموذج أعلاه نجد أن:

$$Z^* = 450 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 150$$

٢- بافتراض أن $\gamma \geq 0.60$ فإن القيد (4) يمكن إعادة صياغته على النحو التالى:

$$\Pr\left(0.02\, X_1 + 0.01\, X_2 \leq \tilde{b}_i\right) \geq 0.60 \qquad (7)$$

و من المعادلة (3-11) نجد أن القيد اليقينى المكافئ للقيد الاحتمالى (4) على النحو التالى:

$$0.02X_1 + 0.01\, X_2 \leq \left\{\frac{\ln(1-0.6)}{\ln(1-0.4)}\right\} = 1.7937 \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 179.37 \qquad (8)$$

و بأستبدال القيد (6) فى النموذج اليقينى أعلاه بالقيد (8) نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة

على النحو التالى:

$$Z^* = 538.11 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 179.37$$

و الشكل (٣-٥) التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.

٣- بأفتراض أن $\gamma \geq 0.70$ يمكن تحويل القيد الاحتمالى (4) إلى قيد يقينى بأستخدام العلاقة (13-21) على النحو التالى:

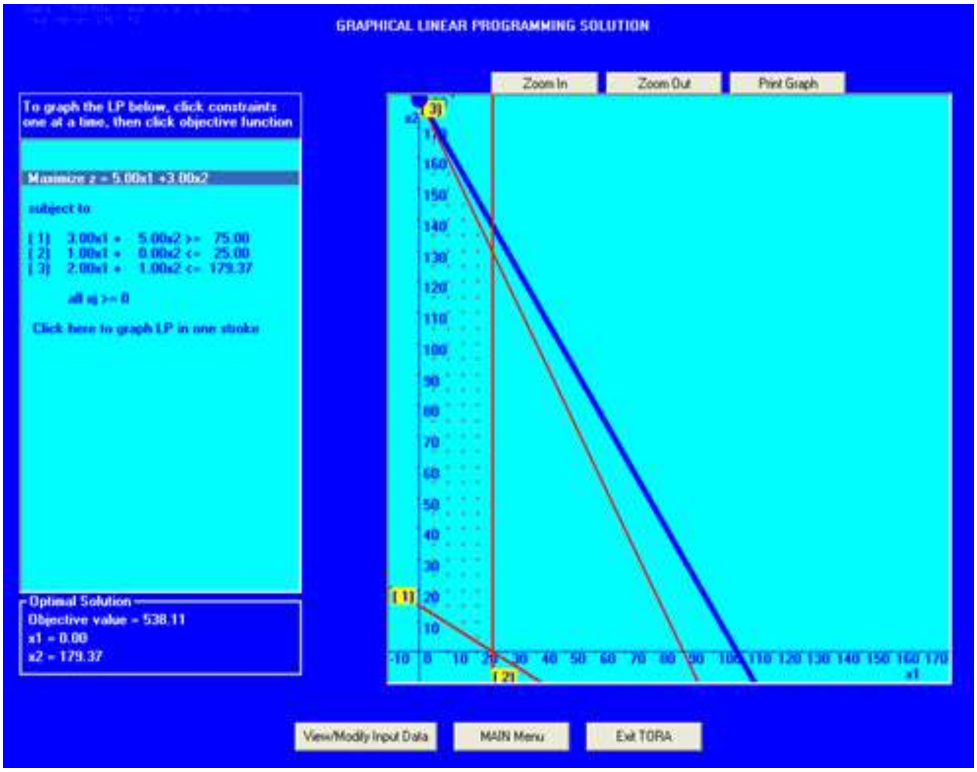
$$0.02X_1 + 0.01\,X_2 \leq \left\{\frac{\ln(1-0.7)}{\ln(1-0.4)}\right\} = 2.3569 \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 235.69 \qquad (9)$$

و باستبدال القيد (6) فى النموذج اليقينى أعلاه بالقيد (9) نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 707.07 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 235.69$$

و الشكل (٣-٥) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.



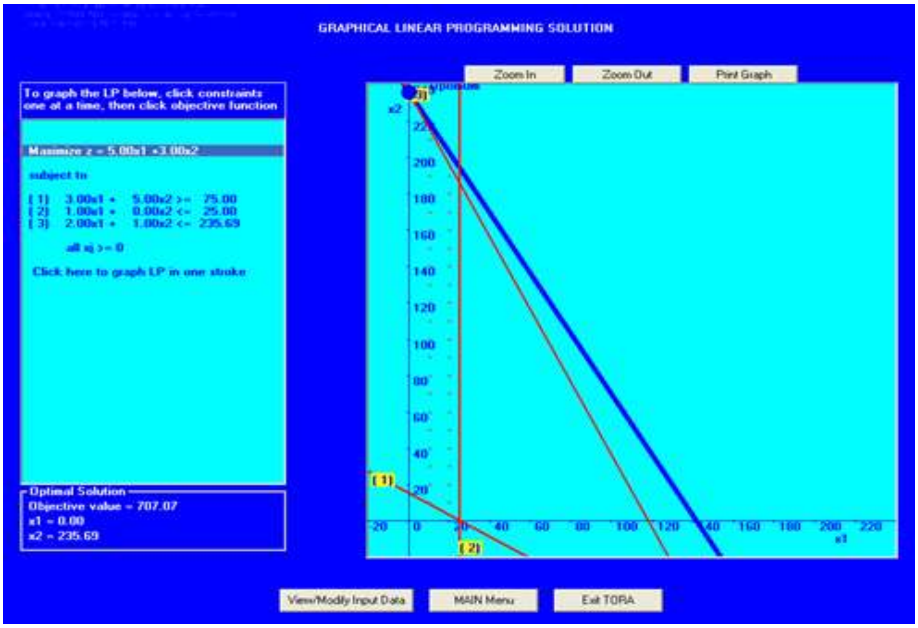
شكل (٣-٥): يوضح الحل الأمثل

و الجدول التالى يوضح الاختلاف فى الحل فى الحالات الثلاثة الراجعة إلى تغير مستوى المأمونية γ.

جدول (٣-٣): يوضح الحلول المثلى عند مستويات مأمونية مختلفة

رقم الحالة	γ_i	الحل
(1)	$= 0.36$	$Z^* = 450 \;,\; X_1^* = 0 \;,\; X_2^* = 150$
(2)	≥ 0.60	$Z^* = 538.11 \;,\; X_1^* = 0 \;,\; X_2^* = 179.37$
(3)	≥ 0.70	$Z^* = 707.07 \;,\; X_1^* = 0 \;,\; X_2^* = 235.69$

و من الجدول يتضح أنه كلما زادت قيمة γ أدى ذلك إلى زيادة قيمة دالة الهدف فى الحل الأمثل ويرجع ذلك إلى أن الدالة العكسية F^{-1} للمتغير $\tilde{b}$ دالة متزايدة فى مستوى المأمونية γ و بالتالى التأثير على فئة الحلول الممكنة (فراغ الحل). و كما ذكرنا فى المثال السابق (مثال ٣-١) أننا سوف نقدم فى الباب (٨) مقاييس الصلاحية للحل.



شكل (٣-٦)

(٣-٤) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع ذات الحدين

$\tilde{b}_i \sim$ Binomial Distribution

إذا أعتبرنا المعلمة العشوائية متغير متقطع يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين (n,p) و دالة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = C^{n}_{\tilde{b}_i}(P)^{\tilde{b}_i}(1-P)^{n-\tilde{b}_i} \quad , \quad \tilde{b}_i = 0,1,2,\dots.,n \quad , \quad 0 < P < 1$$

و من النظرية الأحصائية نجد أن الدالة التراكمية للمتغير $\tilde{b}_i$ على النحو التالى:

$$F\left(b_i^{\backslash}\right) = Pr\ \left(\tilde{b}_i \le b_i^{\backslash}\right) = \sum_{j=0}^{b^{\backslash}} c_j^n (p)^j (1-p)^{n-j} \qquad (3\text{-}13)$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى على النحو التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i$$

و عند مستوى المأمونية γ_i فإنه يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالى أعلاه على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \ \longrightarrow F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\right) = \gamma_i \ \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(\gamma_i) \qquad (3\text{-}14)$$

و القيد أعلاه قيد يقينى حيث يمكن بسهولة الحصول على قيم F_i^{-1}, F_i عند القيم المختلفة لـ γ_i لمتغير ذات الحدين بأستخدام الجداول الإحصائية الموجودة جزء منها بملحق رقم (٥) بمعلومية (n,p). و سوف نوضح ذلك في المثال التالى.

<u>ملاحظة</u>: إذا كان القيد على النحو:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i$$

فإنه يمكن أعادة صياغته على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \ \longrightarrow 1 - F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\right) = \gamma_i \ \longrightarrow$$

$$F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - 1\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) + 1 \quad (3\text{-}15)$$

مثال (٣-٣)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Max. } Z = 7X_1 + 9X_2 \quad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad -3X_1 + 2X_2 \le 6 \quad (2)$$
$$2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \quad (3)$$
$$X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2 \quad (4)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0 \quad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير عشوائى يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n_1 = 10, P_1 = 0.5$ كذلك يمثل $\tilde{b}_2$ متغير عشوائى يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n_1 = 17, P_1 = 0.1$.

المطلوب

١- أستبدال $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ فى الطرف الأيمن فى القيدين (2),(3) بـ $E(\tilde{b}_2)$ $E(\tilde{b}_1)$ على الترتيب، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ.

٢- عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \ge 0.62 \ , \ \gamma_2 = 0.84$ حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل.

الحل

١- من نظرية الأحتمالات نجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = n_1P_1 = 10(0.5) = 5$$

$$E(\tilde{b}_2) = n_2P_2 = 17(0.1) = 1.7$$

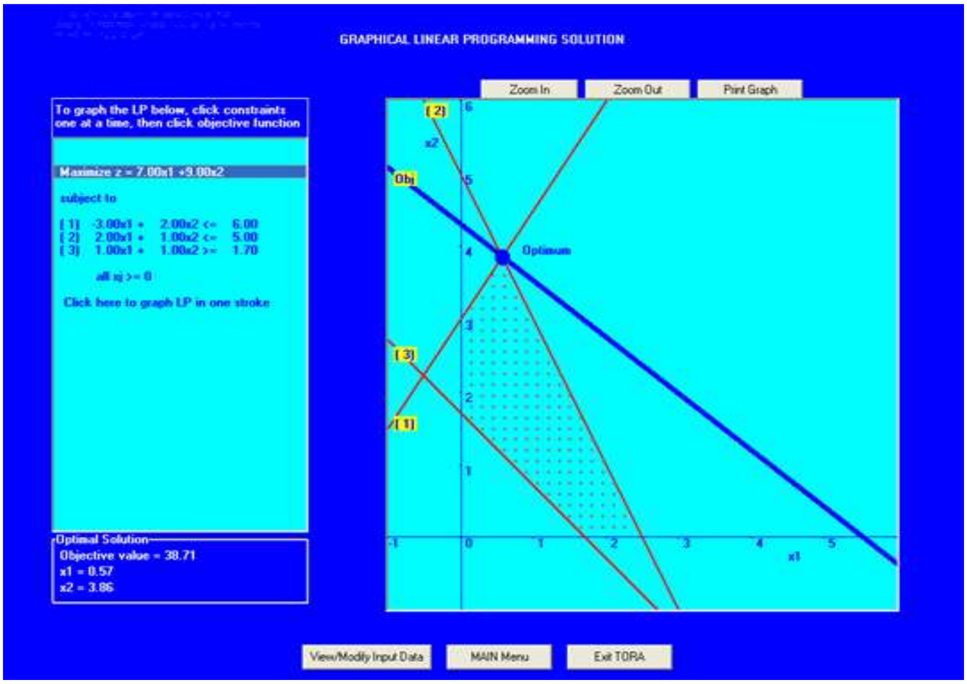
و يصبح النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى (1)-(5) فى هذه الحالة على النحو:

$$\text{Max. } Z = 7X_1 + 9X_2$$
$$\text{S.T.} \quad -3X_1 + 2X_2 \le 6$$
$$2X_1 + X_2 \le 5 \quad (6)$$
$$X_1 + X_2 \ge 1.7 \quad (7)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن حل النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$Z^* = 38.71 \quad , X_1^* = 0.57 \quad , X_2^* = 3.86 \qquad (8)$$

و الشكل التالى يوضح الحل البيانى للنموذج اليقينى فى هذه الحالة.



شكل (٣-٧): يوضح الحل الأمثل

٢- إذا كان $\gamma_1 \geq 0.62$ ، فإن القيد الأحتمالى رقم (3) يمكن صياغته على النحو التالى:

$$P_r(2X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1) \geq 0.62 \longrightarrow$$

$$1 - F(2X_1 + X_2 - 1) \geq 0.62 \longrightarrow$$

$$F(2X_1 + X_2 - 1) \leq (1 - 0.62) = 0.38$$

و من جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع ذات الحدين بملحق (٥) نجد أن:

$$2X_1 + X_2 - 1 \leq F^{-1}(0.38) = 4 \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5 \qquad (9)$$

بالمثل إذا فرضنا أن $\gamma_2 = 0.84$ فإن:

$$P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2) = 0.84 \longrightarrow F(X_1 + X_2) = 0.84 \longrightarrow$$

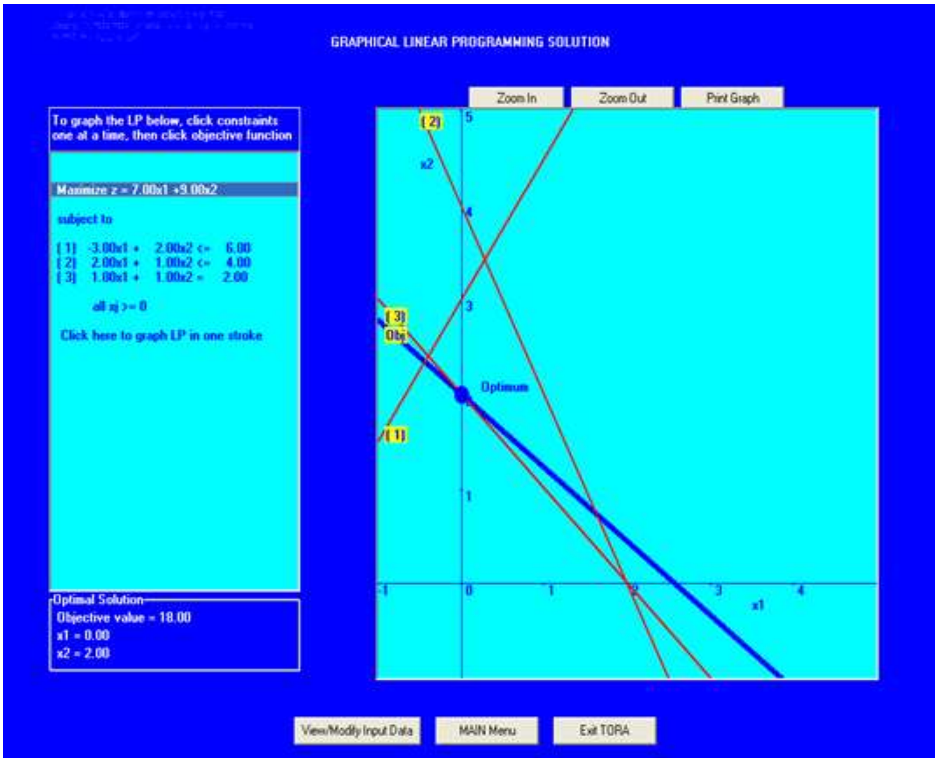
$$X_1 + X_2 = F^{-1}(0.84) \longrightarrow X_1 + X_2 = 2 \qquad (10)$$

و بأستبدال القيدين (3),(4) بالقيدين (9),(10) على الترتيب فى النموذج (1)-(5) يصبح الحل الأمثل للنموذج اليقينى المكافئ للنموذج (1)-(5) على النحو التالى:

$$Z^* = 18 \quad , X_1^* = 0 \quad , X_2^* = 2.0 \qquad (11)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.

<u>ملحوظة:</u> يمكن أستخدام توزيع بواسون أو التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع ذات الحدين فى كثير من الحالات التى تتوافر فيها شروط التقريب [١٢,151].



شكل (٣-٨): يوضح الحل الأمثل

(٣-٥) المعلمة $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع بواسون

$\tilde{b}_i \sim$ Poisson Distribution

إذا أعتبرنا المتغير $\tilde{b}_i$ متغير عشوائى متقطع يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ ودالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = \frac{\mathrm{Exp}\{-\lambda\}\, \lambda^{\tilde{b}_i}}{\tilde{b}_i!} \quad , \quad \tilde{b}_i = 0, 1, 2, 3, \dots \dots . \qquad (3\text{-}16)$$

و بالتالى فأن:

$$E(\tilde{b}_i) = \lambda \quad , \quad F_i(b^\backslash) = \sum_{j=0}^{b^\backslash} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$$

كذلك يوجد بملحق رقم (٦) جزء من الجداول الإحصائية الخاصة بالدالة التراكمية للمتغير بواسون F_i كذلك الدالة العكسية لها F_i^{-1} عند المستويات المختلفة لمستوى المأمونية γ.

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i$$

و عند مستوى المأمونية γ_i فإنه يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالى على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \;\longrightarrow 1 - F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\right) = \gamma_i \;\longrightarrow$$

$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\right) = 1 - \gamma_i \;\longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) + 1$$

و القيد أعلاه قيد يقينى حيث يمكن بأستخدام الجداول بملحق رقم (٦) الحصول على قيم $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ عند القيم المختلفة لـ γ_i، كما سوف نوضح ذلك فى المثال التالى.

مثال (٣-٤)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\mathrm{Min.}\, Z = 3\, X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad -6\,X_1 + 4\,X_2 \le 12 \qquad (2)$$
$$2\,X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \qquad (3)$$
$$X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2 \qquad (4)$$
$$X_1\,,\ X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

فإذا كان المتغيرين $(\tilde{b}_1), (\tilde{b}_2)$ كل منهما يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda_1 = 6\,,\lambda_2 = 2$ على الترتيب. و بأفتراض مستويات المأمونية $\gamma_1 \ge 0.5543\,,\gamma_2 \ge 0.6767$ يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالى:

$$1 - F(2\,X_1 + X_2 - 1) \ge 0.5543 \longrightarrow F(2\,X_1 + X_2 - 1) \le 0.4457 \longrightarrow$$

$$2\,X_1 + X_2 \le F^{-1}(0.4457) + 1 \qquad (6)$$

من جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع بواسون عند $\lambda = 6$ نجد أن:

$$F^{-1}(0.4457) = 5$$

بالتعويض فى الطرف الأيمن للقيد (6) نجد أن:

$$2\,X_1 + X_2 \le 6$$

بالمثل بالنسبة لتحويل القيد (4) إلى قيد يقينى على النحو التالى:

$$P_r(X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.6767 \longrightarrow F(X_1 + X_2) \ge 0.6767 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \ge F^{-1}(0.6767) \qquad (7)$$

و من جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع بواسون عند $\lambda = 2$ نجد أن:

$$F^{-1}(0.6767) = 2$$

و بالتعويض فى الطرف الأيمن للقيد (7) بـ $F^{-1}(0.6767)$ نجد أن:

$$X_1 + X_2 \ge 2 \qquad (8)$$

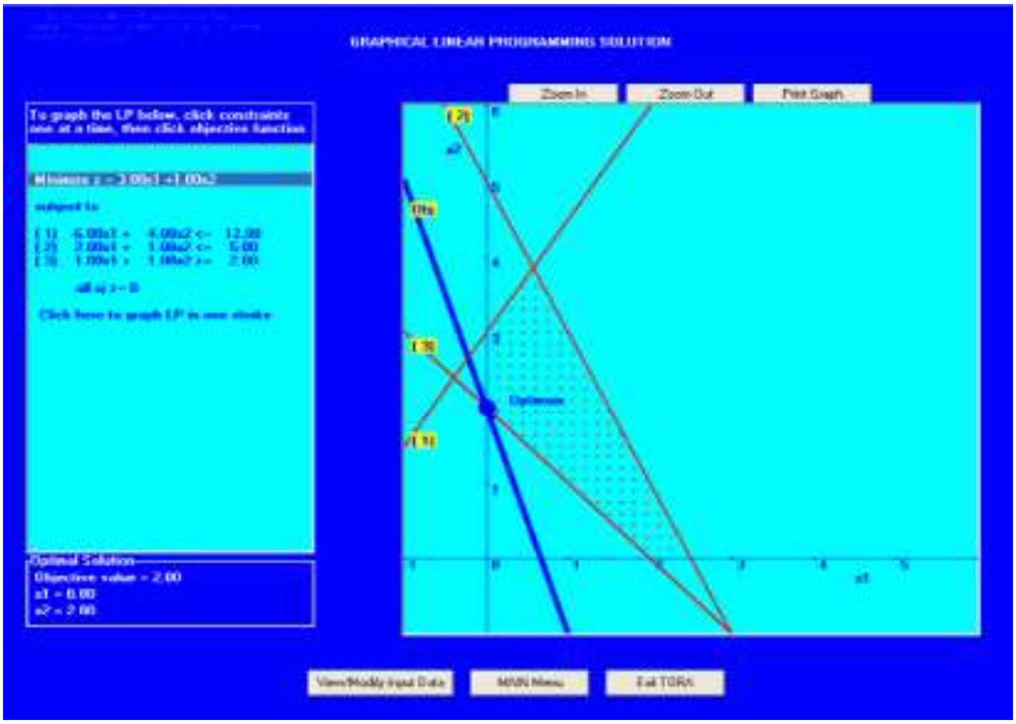
و بالتالي يصبح النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى (1)-(5) على النحو التالى:

$$\text{Min.}\,Z = 3\,X_1 + X_2$$
$$\text{S.T.} \quad -6\,X_1 + 4\,X_2 \le 12$$
$$2\,X_1 + X_2 \le 6$$
$$X_1 + X_2 \ge 2$$
$$X_1\,,\ X_2 \ge 0$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 2.0 \quad , X_1^* = 0.0 \quad , X_2^* = 2.0$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٣-٩): يوضح الحل الأمثل

(٣-٦) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٣-١)

تقوم إحدى شركات إنتاج بعض المستحضرات الدوائية بإنتاج ثلاثة أنواع من أحد الأدوية البديلة A,B,C (حيث الوحدة الواحدة من المنتج ١٠٠٠عبوة) و ذلك من خلال خطى إنتاج I,II. و الجدول التالى يوضح الزمن المطلوب لكل وحدة فى كل خط بالساعات و الوقت المتاح للعمل فى كل خط بالساعات أيضاً كذلك ربح الوحدة الواحدة بالجنيه. فإذا كان الطلب المحلى و الخارجي على كل بديل متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمات $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ على الترتيب.

جدول (٣-٤)

زمن الإنتاج المتاح بالساعات	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة بالساعات C	B	A	خطوط الإنتاج
	C	B	A	
600	2	3	5	I
561	5	4	3	II
	$\lambda_3 = 20$	$\lambda_2 = 18$	$\lambda_1 = 15$	المعلمة λ
	1000	1500	2000	ربح الوحدة بالجنية

المطلوب

١- تحديد الطلب المتوقع من A,B,C.

٢- تحديد الكميات المثلى التى يجب إنتاجها من A,B,C بحيث يكون الربح الكلي أكبر ما يمكن فى الحالات التالية:

أ. إذا كانت الكميات المنتجة أكبر من أو تساوى الطلب المتوقع.

ب. إذا كانت الكميات المنتجة أقل من الكميات المطلوبة بأحتمالات $\gamma_1 \geq 0.8752$ ، $\gamma_2 \geq 0.90$ ، $\gamma_3 \geq 0.98$ من المنتجات A,B,C على الترتيب.

٣- قارن بين الحل في (١) ، (٢).

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 تشير إلى الكميات التى يجب إنتاجها من A,B,C على الترتيب، كذلك أفتراض أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ تشير إلى الطلب على كل من A,B,C على الترتيب أيضاً. فإنه يمكن صياغة المشكلة على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2, X_3 التى تجعل

$$\text{Max. } Z = 2000\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.}\quad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600 \qquad (2)$$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561 \qquad (3)$$

$$X_1 \ge \tilde{b}_1 \qquad (4)$$

$$X_2 \ge \tilde{b}_2 \qquad (5)$$

$$X_3 \ge \tilde{b}_3 \qquad (6)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (7)$$

من نظرية الأحتمالات [٦] نجد أن توقعات الطلبات على النحو التالى:

$$E(\tilde{b}_3) = \lambda_3 = 20\ ,\ E(\tilde{b}_2) = \lambda_2 = 1\ ,\ E(\tilde{b}_1) = \lambda_1 = 15 \qquad (8)$$

و بالتعويض فى الطرف الأيمن فى القيود (4)-(6) بالقيم المتوقعة فى (8) يتحول النموذج الأحتمالى (1)-(7) إلى نموذج آخر يقينى مكافئ له. و نظراً لأن النموذج اليقينى المكافئ نموذج برمجة خطية فإنه يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس (أسلوب المرحلتين) و يكون الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 77{,}000\quad ,\quad X_1^* = 15\quad ,\quad X_2^* = 18\quad ,\quad X_3^* = 20 \qquad (9)$$

ملحوظة: الحل التفصيلي بملحق رقم (٧).

١- و عند مستويات المأمونية $\gamma_1 \ge 0.8752\ ,\ \gamma_2 \ge 0.90\ ,\ \gamma_3 \ge 0.98$ فإنه يمكن إعادة صياغة القيود الأحتمالية (4)-(6) على النحو التالى:

$$P_r(X_1 \ge \tilde{b}_1) \ge 0.8752 \;\longrightarrow\; F(X_1) \ge 0.8752 \;\longrightarrow$$

$$X_1 \ge F_1^{-1}(0.8752) \;\longrightarrow\; X_1 \ge 19 \qquad (10)$$

بالمثل:

$$P_r(X_2 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.9 \;\longrightarrow\; X_2 \ge 24 \qquad (11)$$

$$P_r(X_3 \ge \tilde{b}_3) \ge 0.98 \;\longrightarrow\; X_3 \ge 29 \qquad (12)$$

و بأستبدال القيود الأحتمالية (4)-(6)بالقيود اليقينية (10)-(12) فيصبح الحل الأمثل للنموذج

اليقينى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 167,425 \quad , \quad X_1^* = 65.75 \quad , \quad X_2^* = 89.75 \quad , \quad X_3^* = 29 \qquad (13)$$

٢- فى (١) تم التعبير عن المتغيرات الأحتمالية $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ بالقيم المتوقعة $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2), E(\tilde{b}_3)$ و نجد أن أحتمالات تحقق القيود (6)-(4) فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$\gamma_1^* \geq 0.5681 \quad , \quad \gamma_2^* \geq 0.5622 \quad , \quad \gamma_3^* \geq 0.5591 \qquad (14)$$

(أستخدام جداول الدالة التراكمية لتوزيع بواسون بملحق رقم (٥)). أدى ذلك إلى الحصول على الحل الأمثل للنموذج اليقينى كما هو موضح في (9). و لكن فى المطلوب (2) حيث زادت أحتمالات تحقق القيود (4)-(6) فى هذه الحالة على النحو:

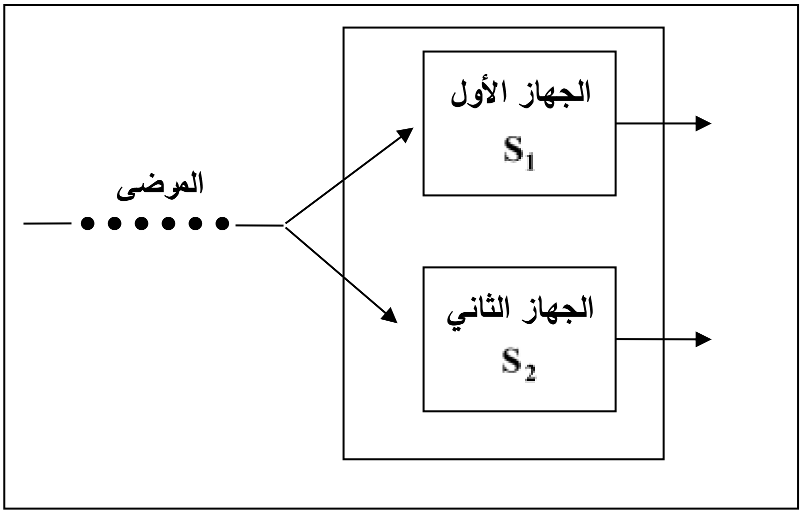
$$\gamma_1 \geq 0.8752 \ , \ \gamma_2 \geq 0.90 \ , \ \gamma_3 \geq 0.98 \qquad (15)$$

و يتضح من (14),(15) أن زيادة الحدود الدنيا لمستويات المأمونية أدى إلى زيادة قيم الدوال التراكمية العكسية المناظرة $F_1^{-1}, F_2^{-1}, F_3^{-1}$ مما أدى إلى زيادة قيمة دالة الهدف Z^* من $Z^* = 77,000$ إلى $Z^* = 167,425$.

تطبيق (٣-٢)

يوجد جهازين مستقلين و متماثلين و متكافئين لعلاج مرض الأورام بالعلاج الأشعاعى فى أحد المراكز الطبية، بحيث يعمل الجهازين على التوازى (أى يعمل الجهازين فى نفس الوقت).

فإذا كان المرضى المترددين على المراكز للعلاج بالأشعاع المقيدين للعلاج يمثل متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n = 50 \ , \ P = 0.7$، فإذا كان زمن خدمة المريض الواحد يساوى ١٠دقائق. فإذا كان متخذ القرار يرغب فى تحديد أقصى عدد من المرضى الذين يمكن أن يتم خدمتهم خلال يوم عمل (حيث يوم العمل ٧ساعات = ٤٢٠دقيقة). فإذا كان متخذ القرار يرغب فى تحديد أقصى عدد من المرضى الذين يمكن أن يتم خدمتهم خلال يوم عمل (حيث يوم العمل ٧ساعات = ٤٢٠دقيقة).



شكل (٣-١٠)

المطلوب

١- صياغة نموذج برمجة أحتمالية مناسب يمثل المشكلة بحيث تحقق هدف متخذ القرار.
٢- أستخدام القيمة المتوقعة لطلب العملاء على الخدمة لتحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ.

٣- تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستوى مأمونية $\gamma \leq 0.9$.
٤- قارن بين الحل فى (٢) ، (٣).

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 عدد المرضى الذين يتم خدمتهم فى الجهازين الأول و الثانى على الترتيب، كذلك $\tilde{b}$ هى عدد المرضى الذين يصلون إلى المركز خلال يوم العمل.

و بالتالى يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = X_1 + X_2 \quad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 10\,X_1 + 10\,X_2 \leq 420 \quad (2)$$
$$X_1 + X_2 > \tilde{b} \quad (3)$$
$$X_1 - X_2 \geq 0 \quad (4)$$

١- بما أن $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n = 50\ ,\ P = 0.7$، من نظرية الأحتمالات نجد أن:

$$E(\tilde{b}) = nP = 50(0.7) = 35 \text{ مريض}$$

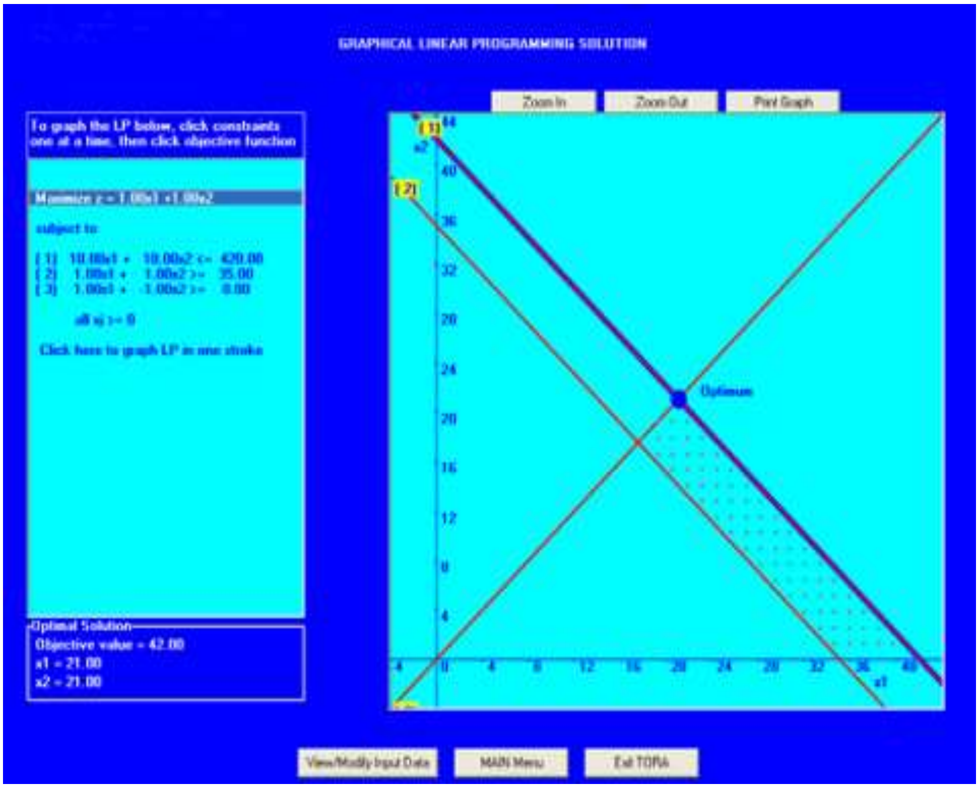
و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} & \text{Max. } Z = X_1 + X_2 \\ \text{S.T.} \quad & 10\,X_1 + 10\,X_2 \le 420 \\ & X_1 + X_2 > 35 \\ & X_1 - X_2 \ge 0 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

و بحل النموذج نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 42 \quad , \quad X_1^* = 21 \quad , \quad X_2^* = 21 \qquad (6)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً.



شكل (٣-١١)

٢- عند مستوى المأمونية γ بحيث $\gamma \leq 0.9$ فإنه يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالى:

$$P_r(X_1 + X_2 > \tilde{b}) \leq 0.9 \quad \longrightarrow \quad 1 - F(X_1 + X_2) \leq 0.9 \quad \longrightarrow$$

$$F(X_1 + X_2) \geq 0.1 \quad \longrightarrow \quad X_1 + X_2 \geq F^{-1}(0.1) \qquad (7)$$

و من جدول الأحتمالات التراكمية بملحق رقم (٥) و عند $P = 0.7$, $n = 50$ نجد أن:

$$F^{-1}(0.1) \approx 10 \qquad (8)$$

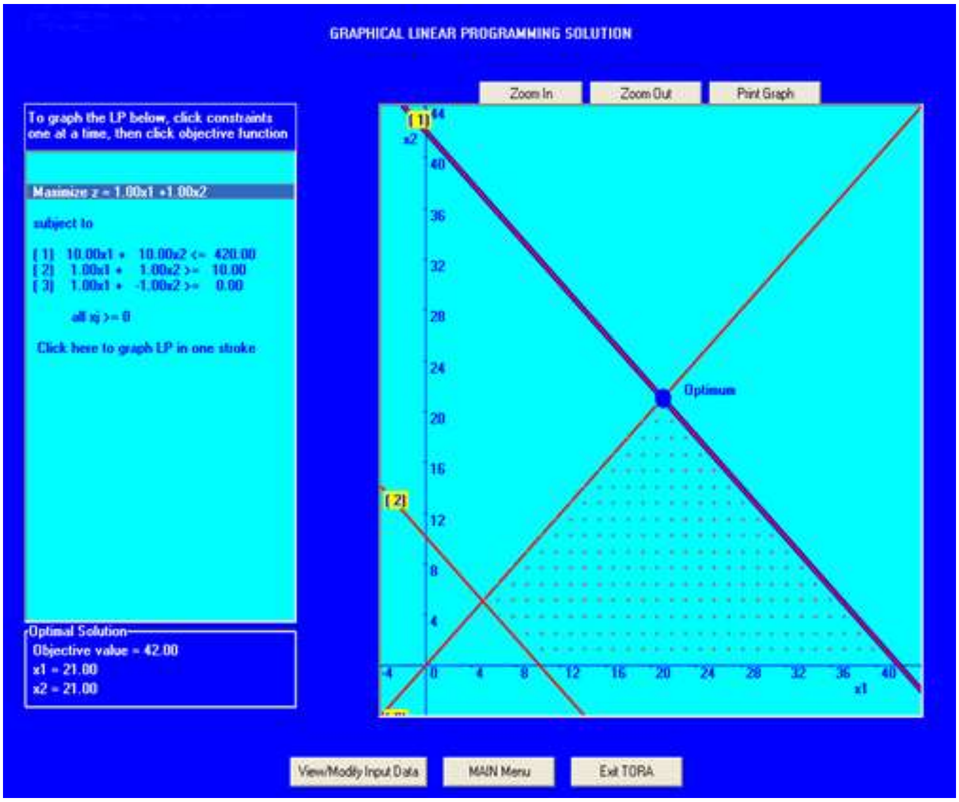
و بأستبدال الطرف الأيمن فى القيد (7) بالطرف الأيمن فى (8) نجد أن:

$$X_1 + X_2 > 10 \qquad (9)$$

و باستبدال القيد الأحتمالى فى (3) بالقيد اليقينى فى (9)، ثم حل النموذج اليقينى نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 42 \quad , \quad X_1^* = 21 \quad , \quad X_2^* = 21 \qquad (10)$$

و الشكل التالي يوضح الحل بيانياً.



شكل (٣-١٢)

تطبيق (٣-٣)

يقوم أحد المخابز بأحدى المحافظات بإنتاج ثلاثة أنواع A,B,C من المخبوزات من الدقيق من خلال خطى إنتاج I,II على التوالى. و الجدول التالى يوضح ما تتطلبه إنتاج الوحدة الواحدة (الوحدة الواحدة تساوى ١٠٠٠قطعة) من كل نوع فى كل خط من خطى الإنتاج I,II. كذلك المتاح اليومى من الدقيق ١٥٠٠ كيلوجرام بحيث تتطلب إنتاج الوحدة الواحدة ٣٠, ٢٥, ٢٠ كيلوجرام من A, B, C على الترتيب.

جدول (٣-٦)

المنتج / خطوط الإنتاج	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة بالدقائق			المتاح
	A	B	C	
I	30	40	50	18 ساعة
II	50	60	80	20 ساعة
ربح الوحدة الواحدة بالجنية	50	70	80	

فإذا كان الطلب على A,B معاً يمثل متغير عشوائى $\tilde{b}_1$ يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda_1 = 20$ ، كذلك أقل طلب على النوع C يمثل متغير عشوائى $\tilde{b}_2$ يتبع توزيع بواسون أيضاً بمعلمة $\lambda_2 = 6$.

و يرغب متخذ القرار فى تحديد الكميات التى يجب إنتاجها من A,B,C بحيث يكون ربح المخبز أكبر ما يمكن.

المطلوب

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية.
٢- حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى عند القيم المتوقعة للطلب الأحتمالى.
٣- بأستخدام أسلوب (CCP) حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستويات مأمونية $\gamma_1 \leq 0.8 \ \ , \ \ \gamma_2 \geq 0.9$.
٤- قارن بين الحل فى (٢) ، (٣).

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من A,B,C على الترتيب.

١- بالتالى يمكن صياغة المشكلة على النحو التالى:
أوجد قيم X_1, X_2, X_3 التى تعظم دالة الهدف Z:

$$\text{Max. } Z = 50\,X_1 + 70\,X_2 + 80\,X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.}\quad 20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \le 1500 \qquad (2)$$ قيد الدقيق

$$30\,X_1 + 40\,X_2 + 50\,X_3 \le 1080 \qquad (3)$$

$$50\,X_1 + 60\,X_2 + 80\,X_3 \le 1200 \qquad (4)$$

قيود الوقت فى خطوط الإنتاج (3)، (4)

$$X_1 + X_2 < \tilde{b}_1 \qquad (5)$$

$$X_3 \ge \tilde{b}_2 \qquad (6)$$

قيود الطلب (5)، (6)

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (7)$$

٢- بما أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين كل منهما يتبع توزيع بواسون، و من النظرية الأحصائية نجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \lambda_1 = 20 \quad , \quad E(\tilde{b}_2) = \lambda_2 = 6 \qquad (8)$$

و بالتالى يمكن إعادة صياغة القيدين (5),(6) على النحو:

$$X_1 + X_2 \le 20 \qquad (9)$$

$$X_3 \ge 6 \qquad (10)$$

و بأستبدال القيود الأحتمالية (5),(6) بـ (9),(10) فى النموذج أعلاه، يصبح النموذج يقينى و بحله بأستخدام أسلوب السمبلكس يكون الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 1320 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 12 \quad , \quad X_3^* = 6 \qquad (11)$$

٣- إذا أعتبرنا $\gamma_1 \le 0.8 \;,\; \gamma_2 \ge 0.9$ فإنه يمكن تحويل القيدين (5),(6) إلى قيود يقينية على النحو التالى:

$$P_r\left(X_1 + X_2 < \tilde{b}_1\right) > 0.8 \;\longrightarrow\; 1 - F(X_1 + X_2) \le 0.8 \;\longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \le F^{-1}(0.2) \;\longrightarrow$$

و من ملحق رقم (٦) نجد أن:

$$X_1 + X_2 \le 15 \qquad (12)$$

بالمثل:

$$P_r(X_3 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.9 \quad \longrightarrow \quad F(X_3) \ge 0.9 \quad \longrightarrow$$
$$X_3 \ge F^{-1}(0.9) \quad \longrightarrow \quad X_3 \ge 9 \qquad (13)$$

و بأستبدال القيدين الأحتماليين (5),(6) بالقيدين اليقينيين (12),(13) فى النموذج (1)-(7) نجد أن الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$Z^* = 1280 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 8 \quad , \quad X_3^* = 9 \qquad (14)$$

و الجدول التالى يوضح المقارنة بين الحلين المطلوبين فى (٢) ، (٣).

جدول (٣-٧)

الحالة	مستويات المأمونية	الحل
(٢)	$\gamma_1 \le 0.441 , \gamma_2 \ge 0.606$	$Z^* = 1320 ,\ X_1^* = 0 , X_2^* = 12 , X_3^* = 6$
(٣)	$\gamma_1 \le 0.8 , \gamma_2 \ge 0.9$	$Z^* = 1280 , X_1^* = 0 ,\ X_2^* = 8 , X_3^* = 9$

و من الجدول يتضح أن زيادة الحد الأعلى لـ γ_1 كذلك الحد الأدنى لـ γ_2 أدى إلى تراجع القيمة المثلى لـ Z, و الحل التفصيلى للتطبيق بملحق (٨).

<u>تطبيق (٣-٤)</u>

تقوم إحدى المطاعم بإنتاج ٤ أنواع من الوجبات السريعة A,B,C,D بحيث يدخل فى كل وجبة ثلاثة أنواع من المكونات الرئيسية، البروتين، الخضروات، الدقيق I, II, III . و الجدول

التالى يوضح الكميات اليومية المتاحة بالكيلوجرام من كل مكون، و النسبة المئوية للمكون فى الوحدة الواحدة من كل وجبه، كذلك سعر بيع الوحدة الواحدة بالجنيه، حيث أن وزن كل وجبة يساوى كيلوجرام واحد.

فإذا كان حجم الطلب على المنتجات A,B معاً يمثل متغير عشوائى $\tilde{b}_1$ يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 220$ و أنحراف معيارى $\sigma_1 = 10$. كذلك يؤول الطلب على المنتجات C,D إلى التوزيع المعتاد $\tilde{b}_2$ بتوقع $\mu_2 = 250$ و أنحراف معيارى $\sigma_2 = 15$.

جدول (٣-٨)

الكميات اليومية بالكيلوجرام	النسبة المئوية (%) المطلوبة من كل مكون لإنتاج الوحدة الواحدة من كل وجبة (نسبة المكون)				المكونات
	D	C	B	A	
100	38	33	27	15	I بروتين
120	20	27	13	35	II خضروات
300	42	40	60	50	III دقيق
	120	100	90	70	سعر بيع الوحدة بالجنية

و يرغب متخذ القرار فى المطعم تحديد عدد الوجبات التى يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون الإيرادات أكبر ما يمكن فى الحالتين التاليتين:

١- عندما يكون الطلب على كل نوع يساوى الطلب المتوقع.

٢- أستخدام أسلوب CCP عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \leq 0.9$, $\gamma_2 \geq 0.5$

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3, X_4 هى عدد الوجبات التى يجب إنتاجها

من A,B,C,D على الترتيب فى اليوم، حيث:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

و يصبح النموذج الأحتمالى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$\text{Max. } Z = 70\,X_1 + 90\,X_2 + 100\,X_3 + 120\,X_4 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 0.15\,X_1 + 0.27\,X_2 + 0.33\,X_3 + 0.38\,X_4 \leq 100 \qquad (2)$$

$$0.35\,X_1 + 0.13\,X_2 + 0.27\,X_3 + 0.20\,X_4 \leq 120 \qquad (3)$$

$$0.55\,X_1 + 0.60\,X_2 + 0.40\,X_3 + 0.42\,X_4 \leq 300 \qquad (4)$$

$$X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1 \qquad (5)$$

$$X_3 + X_4 \leq \tilde{b}_2 \qquad (6)$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \qquad (7)$$

١- بما أن:

$$E(\tilde{b}_1) = 220 \;\; , \; Var(\tilde{b}_1) = 100 \; , E(\tilde{b}_2) = 250 \;\; , \; Var(\tilde{b}_2) = 225$$

و بالتالى يمكن أستبدال القيدين الأحتماليين (5),(6) بالقيدين اليقينيين التاليين:

$$X_1 + X_2 \le 220 \qquad (8)$$
$$X_3 + X_4 \le 250 \qquad (9)$$

و بحل النموذج اليقينى بأحد طرق البرمجة الصحيحة integer programming [199] و بأستخدام حزمة Tora [١١]:

$$Z^* = 36540 \quad , \quad X_1^* = 219 \quad , \quad X_2^* = 1 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad X_4^* = 176$$

٢- يمكن إعادة صياغة القيد (5) و تحويله إلى قيد يقينى على النحو التالى:

$$P_r\left(X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1\right) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10} \le Z\right) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10}\right) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{X_1 + X_2 - 220}{10}\right) \ge 0.1 \longrightarrow \frac{X_1 + X_2 - 220}{10} \ge F^{-1}(0.1)$$

و باستخدام ملحق رقم (٢) نجد أن:

$$F^{-1}(0.1) = -1.28 \longrightarrow X_1 + X_2 \ge 207.2 \qquad (10)$$

بالمثل لتحويل القيد (6)

$$P_r\left(X_3 + X_4 \le \tilde{b}_2\right) \ge 0.5 \longrightarrow P_r\left(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15} \le Z\right) \ge 0.5 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\right) \ge 0.5 \longrightarrow F\left(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\right) \le 0.5 \longrightarrow$$

$$\frac{X_3 + X_4 - 250}{15} \ge F^{-1}(0.5)$$

و باستخدام ملحق رقم (٢) أيضاً نجد أن:

$$F^{-1}(0.5) = 0 \longrightarrow X_3 + X_4 \leq 250 \qquad (11)$$

و بأحلال القيدين اليقينيين $(10),(11)$ بدلاً من القيدين الأحتماليين $(5),(6)$ فى النموذج (1)-(7) و بأستخدام أسلوب البرمجة الصحيحة أيضاً نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$Z^* = 38,490 \quad , X_1^* = 258 \quad , X_2^* = 227 \quad , X_3^* = 0 \quad , X_4^* = 0$$

(٣-٧) تمرينات　　Exercises

(٣-١)

أعتبر نماذج البرمجة الأحتمالية التالية – حول **convert** كل منهم إلى نموذج يقينى مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية γ_i المناظرة للقيد الأحتمالى، ثم حل النموذج اليقينى بأستخدام الأسلوب المناسب.

$$\text{Max. } Z = 6\,X_1 + 3\,X_2 - 4\,X_1\,X_2 - 2\,X_1^2 - 3\,X_2^2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9$$

$$2\,X_1 + 3\,X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 1$.

أ. أثبت أن دالة الهدف دالة شديدة التقعر strictly concave [193].

ب. حل النموذج اليقينى المكافئ بأحد أساليب البرمجة غير الخطية.

(٣-٢)

تقوم إحدى شركات إنتاج تجميع مكونات إنتاج منتج معين بإنتاج منتج نهائى واحد (و لتكن الغسالة الأتوماتيك ٢٠برنامج) من خلال تجميع الوحدات المكونة للغسالة (موتور، جسم الغسالة، المكونات الكهربائية) حيث تتكون الوحدة الواحدة من هذا المنتج (الغسالة) من ٣ أجزاء المختلفة السابقة. و تقوم الشركة من خلال خط تجميع واحد بتجميع ٣ وحدات من المكونات المختلفة لتكوين وحدة واحدة من المنتج النهائى.

و الجدول التالى يوضح عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً فى كل قسم من أقسام الإنتاج كذلك عدد الساعات المطلوبة لتجميع الأجزاء الثلاثة فى كل خط.

جدول (٣-٩)

عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً	عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من كل مكون في الساعة (معدلات الإنتاج)			القسم
	مكون C المكون الكهربائى	مكون B جسم الغسالة	مكون A الموتور	
100	4	9	6	I
120	10	5	8	II

و تهدف الشركة إلى تحديد عدد ساعات العمل الأسبوعية فى كل قسم من أقسام الإنتاج بحيث تكون عدد الوحدات المنتجة من المنتج النهائى أكبر ما يمكن. أو بعبارة أخرى أن تكون عدد الوحدات غير المجمعة نتيجة وجود عجز فى جزء أو أكثر أقل ما يمكن.
علماً بأن الطلب على المنتج النهائى يمثل متغير عشوائى يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 20$

<u>المطلوب</u>

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية مناسب.
٢- تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستويات المأمونية $\gamma = 0.95$ ، $\gamma \geq 0.9$ ، $\gamma \geq 0.8$.
٣- حل النماذج اليقينية المكافئة – ثم عقب على الحل.

<u>(٣-٣)</u>

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية عند مستوى المأمونية المناظر فى الحالات التالية:

١- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.7$

$$5\,X_1 + 2\,X_2 - X_3 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.9$$

٢- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 5$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.8$$

٣- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بـ $\mu = 10\ ,\ \sigma = 2$

$$2\,X_1 - X_2 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.6$$

<u>(٣-٤)</u>

إذا فرضنا أن $\tilde{b}$ متغير عشوائى يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.2$ ، أوجد:

أ. دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{b}$.
ب. أعتبر القيد الأحتمالى التالى:

$$5\,X_1 + 4\,X_2 - 6\,X_3 \leq \tilde{b}$$

بأستخدام أسلوب (CCP) حول القيد الأحتمالى أعلاه إلى قيد يقينى مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.9$ ، $\gamma \geq 0.8$ ، $\gamma \geq 0.7$ ، $\gamma \geq 0.6$.

ج. أعتبر القيد الأحتمالي التالي:

$$2\,X_1 - X_2 + 3\,X_3 \geq \tilde{b}$$

حول القيد الأحتمالى إلى آخر قيد يقينى مكافئ بمستوى مأمونية $\gamma \geq 0.5$.

(٣-٥)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\begin{aligned} &\text{Max. } Z = 5\,X_1 + 3\,X_2 \\ &\text{S.T.} \quad 0.3\,X_1 + 1.2\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \\ &\qquad\quad 1.8\,X_1 + 0.9\,X_2 \leq \tilde{b}_2 \\ &\qquad\quad X_1 ,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فإذا كان كل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين عشوائيين مستقلين كل منها يتبع التوزيع المنتظم بحيث:

$$f(\tilde{b}_1) = \frac{1}{10} \qquad , \quad \tilde{b}_1 = 1, 2, \dots\dots, 10$$

$$f(\tilde{b}_2) = \frac{2}{10} \qquad , \quad \tilde{b}_2 = 2, 4, 6, 8, 10$$

حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج آخر يقينى مكافئ عند $\gamma_1 \geq 0.8 , \gamma_2 \geq 0.8$ ثم حل النموذج اليقينى.

(٣-٦)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\begin{aligned} &\text{Max. } Z = 8\,X_1 + 5\,X_2 \\ &\text{S.T.} \quad -5\,X_1 + 3\,X_2 \leq 11 \\ &\qquad\quad 4\,X_1 + 2\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \end{aligned}$$

$$2X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

حيث كل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران مستقلين كل منها يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمات $(n_1 = 8 , P_1 = 0.6)$، $(n_2 = 10 , P_2 = 0.2)$على الترتيب. أوجد:

١- الدالة التراكمية لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$.

٢- عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.5 \ , \ \gamma_2 \geq 0.6$ حول النموذج الأحتمالى إلى آخر يقينى مكافئ.

(٣-٧)

إذا فرضنا أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع بواسون بمعلمة

$\lambda_1 = 5 , \lambda_2 = 3$.

أ- أوجد الدالة التراكمية لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ ثم أوجد الدالة التراكمية العكسية لكل متغير.

ب- أعتبر القيود الأحتمالية التالية:

$$5X_1 - 4X_2 + 7X_3 \leq \tilde{b}_1$$
$$2X_1 + 5X_2 - X_3 \geq \tilde{b}_2$$

حول القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.9 , \gamma_2 \geq 0.8$.

(٣-٨)

أعتبر نماذج البرمجة الأحتمالية التالية:

حول convert كل منهم إلى نموذج يقينى مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية γ_i المناظرة للقيد الأحتمالى، ثم حل النموذج اليقينى بأستخدام الأسلوب المناسب.

$$1)\qquad \text{Max. } Z = 5X_1 + 2X_2$$
$$\text{S.T.}\quad 5X_1 + 7X_2 \leq \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9$$
$$8X_1 + 4X_2 \geq 32$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 32$ و أنحراف معيارى $\sigma = 3$.

$$\begin{aligned} 2\ ) \quad & \text{Max. } Z = 2\,X_1 + 3\,X_2 + X_3 \\ \text{S.T.} \quad & 4\,X_1 + X_2 + 3\,X_3 \leq 20 \\ & X_1 + 3\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 > 0.8 \\ & 2X_2 + X_3 \leq \tilde{b}_2 \quad , \quad \gamma_2 < 0.9 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda = 15$، كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 20$ و أنحراف معيارى $\sigma = 5$.

$$\begin{aligned} 3\ ) & \text{Max. } Z = 6\,X_1 + 3\,X_2 - 4\,X_1\,X_2 - 2\,X_1^2 - 3\,X_2^2 \\ \text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9 \\ & 2\,X_1 + 3\,X_2 \leq 4 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع الأسى العام بمعلمات $\lambda = 5, \mu = 10, \alpha = 2$.

أ. حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ.
ب. حل النموذج اليقيني المكافئ بأحد أساليب البرمجة الملائمة.

(٣-٩)

تقوم أحدى شركات إنتاج تجميع مكونات إنتاج منتج معين بإنتاج منتج نهائى واحد (و لتكن الغسالة الأتوماتيك ٢٠برنامج) من خلال تجميع الوحدات المكونة للغسالة (موتور، جسم الغسالة، المكونات الكهربائية) حيث تتكون الوحدة الواحدة من هذا المنتج (الغسالة) من ٣ أجزاء المختلفة السابقة. و تقوم الشركة من خلال خط تجميع واحد بتجميع ٣ وحدات من المكونات المختلفة لتكوين وحدة واحدة من المنتج النهائي.

و الجدول التالى يوضح عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً فى كل قسم من أقسام الإنتاج كذلك عدد الساعات المطلوبة لتجميع الأجزاء الثلاثة فى كل خط.

جدول (٣-١٠)

عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً	عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من كل مكون في الساعة (معدلات الإنتاج)			القسم
	مكون C المكون الكهربائي	مكون B جسم الغسالة	مكون A الماتور	
100	4	9	6	I
120	10	5	8	II

و تهدف الشركة إلى تحديد عدد ساعات العمل الأسبوعية فى كل قسم من أقسام الإنتاج بحيث تكون عدد الوحدات المنتجة من المنتج النهائى أكبر ما يمكن. أو بعبارة أخرى أن تكون عدد الوحدات غير المجمعة نتيجة وجود عجز في جزء أو أكثر أقل ما يمكن.
علماً بأن الطلب على المنتج النهائى يمثل متغير عشوائى يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 20$.

المطلوب

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية مناسب.
٢- تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستويات المأمونية $\gamma \geq 0.9$ ، $\gamma = 0.95$ ، $\gamma \geq 0.8$.
٣- حل النماذج اليقينية المكافئة – ثم عقب على الحل.

(٣-١٠)

١- حول النموذج الأحتمالى التالى إلى نموذج يقينى مكافئ إذا كان $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية 2 كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 5$ ، و أنحراف معيارى $\sigma = 1$.

$$\text{Max. } Z = X_1 + 2\,X_2 + 5\,X_3$$
$$P_r\left(2\,X_1 + X_2 + X_3 \leq \tilde{b}_1\right) \geq 0.86$$
$$P_r\left(3\,X_1 + 5\,X_2 + 2\,X_3 \leq \tilde{b}_2\right) \geq 0.75$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

٢- حل النموذج اليقيني المكافئ.

(٣-١١)

أعتبر النموذج الأحتمالى فى تمرين (٣-١٠)، و بأفتراض أن $\tilde{b}_1$ تتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 2$ وتباين $\sigma_1^2 = 1$ عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.9$ ، $\gamma_2 \geq 0.8$ حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ ثم أوجد الحل الأمثل.

(٣-١٢)

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية عند مستوى المأمونية المناظر فn الحالات التالية:

١- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.7$

$$5\,X_1 + 2\,X_2 - \,X_3 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.9$$

٢- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 5$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.8$$

٣- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بـــ $\mu = 10 \;,\; \sigma = 2$

$$2\,X_1 - \,X_2 \leq \tilde{b} \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq 0.6$$

الباب الرابع

القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية أحادية التوزيع $\tilde{a}_{ik}$

Chance Constraints with Univariate distributed Random Parameters $\tilde{a}_{ik}$

(٤-١) مقدمة

Introduction

(٤-٢) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع المنتظم

$\tilde{a}_{ik} \sim$ Uniform Distribution

(٤-٣) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع المعتاد

$\tilde{a}_{ik} \sim N(\mu_k, \sigma_k)$ Distribution

(٤-٤) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع توزيع الأسى

$\tilde{a}_{ik} \sim$ Exponential Distribution

(٤-٥) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع توزيع الأسى العام

$\tilde{a}_{ik} \sim GE(\lambda_{ik}, \mu_{ik}, \alpha_{ik})$ Distribution

(٤-٦) أمثلة تطبيقية

Applied Examples

(٤-٧) تمرينات

Exercises

(٤-١) مقدمة Introduction

يتناول هذا الباب القيود الاحتمالية عندما يحتوى القيد الواحد معلمة عشوائية واحدة $\tilde{a}_{ik}$ فى الطرف الأيسر للقيد.

حيث نتناول القيود الأحتمالية عندما $\tilde{a}_{ik}$ تتبع بعض التوزيعات الأحتمالية الأحادية مثل التوزيع المنتظم، الأسى، الاسى العام، المعتاد و تحويل هذه القيود إلى قيود يقينية مكافئة فى هذه الحالات.

كذلك الأشارة إلى بعض الحالات عندما $\tilde{a}_{ik}$ تتبع توزيعات أخرى مثل χ^2 أو جاما، يكون التحويل إلى قيد يقينى أكثر تعقيداً و نلجأ فى بعض الحالات إلى الأساليب التقريبية.

كذلك يمكن تحويل هذه القيود فى هذا الباب بأستخدام الأساليب التى سوف تقدم فى البابين ٧،٦ كحالات خاصة من التوزيعات الثنائية و المتعددة.

كذلك الحالات المقدمة فى هذا الباب تعتبر أيضاً حالات خاصة من الحالات التى سوف تقدم فى الباب ٧،٦.

هذا بالإضافة إلى تقديم بعض الأمثلة التطبيقية و بعض التمرينات.

(٤-٢) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع المنتظم
$\tilde{a}_{ik} \sim$ Uniform Distribution

إذا أعتبرنا القيد الاحتمالى

$$P_r\left\{\sum_{\substack{j=i \\ j\neq k_{\tilde{a}_{ik}}}}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{a}_{ik}x_k \le b_i\right\} \ge \gamma_i \qquad (4\text{-}1)$$

بحيث دالة كثافة الأحتمال و دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{a}_{ik}$ هى $F_i,\ f_i(\tilde{a}_{ik})$ على الترتيب على النحو التالى

$$f(\tilde{a}_{ik}) = \frac{1}{b-a} \quad , \qquad a \le \tilde{a}_{ik} \le b \qquad (4\text{-}2)$$

$$F(t) = \int_{\tilde{a}}^{t} \frac{1}{b-a}\, d\tilde{a}_{ik} = \frac{t-a}{b-a}\,, \qquad a < t < b \qquad (4\text{-}3)$$

يمكن أعادة كتابة القيد (4-1) على النحو التالى:

$$P_r\left\{\tilde{a}_{ik} \le \frac{b_i - \sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right\} \ge \gamma_i$$

و الطرف الايسر أعلاه هو دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{a}_{ik}$ عند القيمة

$$\left(\frac{b_i - \sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right)$$

و بالتالى فان القيد (4-1) يصبح مكافئ للقيد التالى:

$$F\left(\frac{b_i - \sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) \ge \gamma_i$$

$$\frac{b_i - \sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j}{x_k} \ge F^{-1}(\gamma_i) \qquad (4\text{-}4)$$

$$\sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j + (b-a)\gamma_i x_k \le b_i \qquad (4\text{-}5)$$

و نلاحظ ان القيد (4-5) اليقينى مكافئ للقيد الاحتمالى (4-1) قيد خطى أيضاً فى المتغيرات القرارية.

مثال (٤-١)

إذا فرضنا أن $2x_1 + 3x_2 + \tilde{a}_3x_3 \le 10$

وكان $f(\tilde{a}_3) = \dfrac{1}{15-5}\ ,\quad 5 \le \tilde{a}_3 \le 15$

المطلوب

١. حول القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى بإحتمال أكبر من 0.50.

٢. حول القيد الاحتمالى إلى قيد يقينى بإحتمال أكبر من 0.90.

الحل

١. $P_r(2x_1 + 3x_2 + \tilde{a}_3x_3 \le 10) \ge 0.50 \longrightarrow$

$$P_r\left(\tilde{a}_3 \le \frac{10 - 2x_1 - 3x_2}{x_3}\right) \ge 0.50 \longrightarrow$$

$$(2x_1 + 3x_2) + (15-5)(0.5)x_3 \le 10 \longrightarrow$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 10$$

٢. $P_r(2x_1 + 3x_2 + \tilde{a}_3x_3 \le 10) \ge 0.9$

$$(2x_1 + 3x_2) + (15-5)(0.9)x_3 \le 10 \longrightarrow$$

$$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 10$$

مثال (٤-٢)

أعتبر القيد الأحتمالى $P_r(3x_1 - \tilde{a}_2x_2 \le 12) \ge 0.8$ حول القيد إلى قيد يقينى

الحل

$$f(\tilde{a}_2) = \frac{1}{10}\ ,\qquad 0 < \tilde{a}_2 \le 10$$

$$P_r(\tilde{a}_2x_2 \ge 12 - 3x_1) \ge 0.8$$

$$P_r\left(\tilde{a}_2 \geq \frac{12-3x_1}{x_2}\right) \geq 0.8$$

$$1-F\left(\frac{12-3x_1}{x_2}\right) \geq 0.8$$

$$F\left(\frac{12-3x_1}{x_2}\right) \leq 0.2$$

$$\frac{12-3x_1}{10x_2} \leq 0.2 \quad \longrightarrow \quad 3x_1+2x_2 \geq 12$$

(٣-٤) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع المعتاد
$\tilde{a}_{ik} \sim N(\mu_k, \sigma_k)$ Distribution

إذا أعتبرنا المتغير $\tilde{a}_k$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ_{ik} و أنحراف معيارى σ_{ik} ، فإذا كان القيد الاحتمالى على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{a}_{ik}x_k \leq b_i\right) \geq \gamma_i \tag{4-6}$$

فإذا إفترضنا أن Z_k متغير معتاد قياسى [105،٦] فان

$$Z_k = \frac{\tilde{a}_{ik} - \mu_{ik}}{\sigma_{ik}} \tag{4-7}$$

فأن القيد (4-6) يمكن أعادة كتابته على النحو التالى

$$P_r\left\{z_k \leq \frac{b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - \mu_{ik}x_k}{x_k\sigma_k}\right\} \geq \gamma_i \rightarrow$$

$$F\left(\frac{b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - \mu_{ik}x_k}{x_k\sigma_{ik}}\right) \geq \gamma_i \rightarrow$$

$$\frac{b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - \mu_{ik}x_k}{x_k\sigma_{ik}} \geq F^{-1}(\gamma_i) \tag{4-8}$$

حيث يمكن إيجاد قيمة $F^{-1}(\gamma_i)$ من جدول التوزيع المعتاد القياسى (أنظر ملحق رقم (٢)).
و بالتالى يمكن أعادة كتابة القيد (4-8) على النحو التالى:

$$\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j + (\mu_k + \sigma_{ik}F^{-1}(\gamma_i))x_k \leq b_i \tag{4-9}$$

و يلاحظ ان القيد اليقينى أعلاه قيد خطى فى المتغيرات القرارية.

<u>مثال (٣-٤)</u>

إذا فرصنا أن القيد الاحتمالى:

$$P_r\{3x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + 5x_3 \leq 20\} \geq 0.88$$

حول القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى عندما $\tilde{a}_2 \sim N(3,2)$.

الحل:

$$P_r\{3x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + 5x_3 \leq 20\} \geq 0.88 \quad \longrightarrow$$

بتحويل المتغير $\tilde{a}_2$ إلى متغير معتاد قياسى نجد أن:

$$P_r\left\{Z \leq \frac{20 - 3x_1 - 5x_3 - 3x_2}{2x_2}\right\} \geq 0.88$$

و من ملحق (٢) نجد أن

$$\frac{20 - 3x_1 - 5x_3 - 3x_2}{2x_2} \geq 1.17 \longrightarrow$$

$$3x_1 + 4.17x_2 + 5x_3 \leq 20$$

مثال (٤-٤)

حول القيد الاحتمالى التالى إلى قيد يقينى حيث $\tilde{a}_1 \sim N(5,1)$

$$P_r\{\tilde{a}_1 x_1 - 4x_2 \geq 100\} \geq 0.90 \quad \longrightarrow$$

الحل:

$$P_r\left\{\tilde{a}_1 \geq \frac{100 + 4x_2}{x_1}\right\} \geq 0.90 \quad \longrightarrow$$

$$1 - P_r\left\{\tilde{a}_1 \leq \frac{100 + 4x_2}{x_1}\right\} \geq 0.90 \quad \longrightarrow$$

$$P_r\left\{Z \leq \frac{100 + 4x_2}{x_1}\right\} \leq 0.10 \quad \longrightarrow$$

$$3.72x_1 - 4x_2 \geq 100$$

(٤-٤) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع الأسى
$\tilde{a}_{ik} \sim$ Exponential Distribution

إذا فرضنا $\tilde{a}_{ik}$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين α_{ik} , λ_{ik} و بدالة كثافة أحتمال $F(\tilde{a}_i)$ و دالة توزيع تراكمية $F(a_\circ)$ بحيث

$$F(\tilde{a}_{ik}) = \lambda_{ik}\,\mathrm{Exp}\{-\lambda_{ik}\,(\tilde{a}_{ik} - \alpha_{ik})\} \quad , \qquad \tilde{a}_{ik} \geq \alpha_{ik} \geq 0 \qquad (4\text{-}10)$$

$$F(a_\circ) = \Pr(\tilde{a}_{ik} \leq a_\circ) = 1 - \mathrm{Exp}\{-\lambda_{ik}\,(a_\circ - \alpha_{ik})\} \qquad (4\text{-}11)$$

فإذا فرضنا القيد الاحتمالى على النحو التالى:

$$\sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{a}_{ik}\,x_k \leq b \qquad (4\text{-}12)$$

حيث x_j المتغيرات القرارية $j = 1, 2, \dots, n$ ، و المعلمات $b\,, a_{ij}$ مقادير ثابتة، و عند مستوى مأمونية اكبر من او يساوى γ فأنه يمكن أعادة صياغة القيد (4-12) على النحو التالى:

$$P_r\left(\tilde{a}_{ik} \leq \frac{b - \sum_{\substack{j=i \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) \geq \gamma \qquad (4\text{-}13)$$

و بأستخدام دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{a}_{ik}$ نجد ان

$$F\left(\frac{b - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - x_k\alpha_k}{x_k}\right) \geq \gamma \rightarrow \left(\frac{b - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - x_k\alpha_k}{x_k}\right) \geq F^{-1}(\gamma) \rightarrow$$

و بما أن

$$F\left(\frac{b - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) = 1 - \mathrm{Exp}\left[-\lambda_{ik}\left\{\left(\frac{b - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) - \alpha_{ik}\right\}\right] \geq \gamma \longrightarrow$$

$$\mathbf{Exp}\left[-\lambda_{ik}\ \left\{\frac{b-\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j-\alpha_{ik}x_k}{x_k}\right\}\right]\geq 1-\gamma \longrightarrow \qquad (4\text{-}14)$$

و بأخذ لوغاريتم الطرفين للمتباينة أعلاه، نجد ان:

$$\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j + x_k\left(\alpha_{ik}-\frac{1}{\lambda_{ik}}\ln(1-\gamma)\right)\leq b_i \qquad (4\text{-}15)$$

ملحوظة:

$$F^{-1}(\gamma)=\alpha_{ik}-\frac{1}{\lambda_{ik}}\ \ln(1-\gamma)$$

مثال (٤-٥)

إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1$ متغير عشوائى يتبع التوزيع اللأسى بمعلمتين $\alpha_1 = 5$ ، $\lambda_1 = 0.5$ ، حول القيد الأحتمالى التالى إلى قيد يقينى عند مستوى مأمونية أكبر من 0.90:

$$\tilde{a}_1x_1-7x_2-4x_3\leq 100$$

الحل

بما ان

$$P_r\left\{\tilde{a}_1\leq\frac{100+7x_2+4x_3}{x_1}\right\}\geq 0.90$$

و بتطبيق العلاقة (4.15) نجد أن القيد اليقينى على النحو:

$$-7x_2-4x_3+x_1\left(5-\frac{1}{0.5}\ \ln(0.10)\right)\leq 100 \longrightarrow$$

$$9.61x_1-7x_2-4x_3\leq 100$$

مثال (٤-٦)

إذا فرضنا أن $\tilde{a}_3$ متغير عشوائى يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda_3 = 2$ ، حول القيد الأحتمالى التالى إلى قيد يقينى عند مستوى مأمونية أكبر من 0.7:

$$5x_1-3x_2+\tilde{a}_3x_3\geq 20$$

الحل

$$P_r\left\{\tilde{a}_3\geq\frac{20-5x_1+3x_2}{x_3}\right\}\geq 0.7$$

$$1 - F\left(\frac{20 - 5x_1 + 3x_2}{x_3}\right) \geq 0.7 \longrightarrow F\left(\frac{20 - 5x_1 + 3x_2}{x_3}\right) \leq 0.3$$

$$\mathrm{Exp}\left[-\lambda\left(\frac{20 - 5x_1 + 3x_2}{x_3}\right)\right] \leq 0.3 \longrightarrow$$

$$\frac{20 - 5x_1 + 3x_2}{x_3} \leq \frac{-1}{\lambda} \ln(0.3) \longrightarrow$$

$$5x_1 - 3x_2 + 0.602x_3 \leq 20$$

(٤-٥) المعلمة $\tilde{a}_{ik}$ تتبع التوزيع الأسى العام
$\tilde{a}_{ik} \sim GE(\lambda_{ik}, \mu_{ik}, \alpha_{ik})$ Distribution

فى سنة ١٩٩٩ قدم كل من Gupta and Kundu التوزيع الأسى العام، فإذا فرضنا أن $\tilde{a}_{ik}$ متغير يتبع التوزيع الأسى العام فأن دالة كثافة الأحتمال $f(\tilde{a}_{ik})$ و الدالة التراكمية $F(a_\circ)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_{ik}) = \frac{\alpha_{ik}}{\lambda_{ik}}[\mathrm{Exp}\{-\lambda_{ik}(\tilde{a}_{ik} - \mu_{ik})\}][1 - \mathrm{Exp}\{-\lambda_{ik}(\tilde{a}_{ik} - \mu_{ik})\}]^{\alpha_{ik}-1} \quad (4\text{-}16)$$

$$F(a_\circ) = [1 - \mathrm{Exp}\{-\lambda_{ik}(a_\circ - \mu_{ik})\}]^{\alpha_{ik}} \quad (4\text{-}17)$$

حيث تمثل λ_{ik} معلمة التدرج Scale Parameter، μ_{ik} ترمز لمعلمة الموضع Location Parameter، α_{ik} معلمة الشكل Shape Parameter.
فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{a}_{ik}x_k \leq b_i\right) \geq \gamma_i \quad (4\text{-}18)$$

حيث $\tilde{a}_{ik} \sim GE(\lambda_{ik}, \mu_{ik}, \alpha_{ik})$.

فى سنة ٢٠١٨، قدمت El-Dash القيد اليقينى المكافئ للقيد (4-18) على النحو التالى [80]:

$$\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij} + x_k\left[\mu_{ik} - \frac{1}{\lambda_{ik}}\ln\left(1 - \gamma_i{}^{1/\alpha_{ik}}\right)\right] \leq b_i \quad (4\text{-}19)$$

كذلك إذا كان القيد الأحتمالى على النحو

$$P_r\left(\sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{a}_{ik}x_k \geq b_i\right) \geq \gamma_i \;\rightarrow \quad (4\text{-}20)$$

$$P_r\left(\tilde{a}_{ik} \geq \frac{b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) \geq \gamma_i$$

$$1 - F\left(\frac{b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j}{x_k}\right) \geq \gamma_i \;\rightarrow$$

$$\left[1-\operatorname{Exp}\left\{-\lambda_{ik}\left(\frac{b_i-\sum_{j\neq k}^{n}a_{ij}x_j-\mu_{ik}x_k}{x_k}\right)\right\}\right]^{\alpha_{ik}}\leq(1-\gamma_i)\ \rightarrow$$

$$\sum_{j\neq k}^{n}a_{ij}x_j+x_k\left[\mu_{ik}-\frac{1}{\lambda_{ik}}\ln(1-(1-\gamma_i)^{1/\alpha_{ik}}\right]\leq b_i \qquad (4\text{-}21)$$

مثال (٤-٧)

أعتبر القيدين الاحتماليين التاليين

$$P_r\left(5x_1-2x_2+\tilde{a}_3x_j\leq 10\right)\geq 0.9 \qquad (1)$$
$$P_r(\tilde{a}_1x_1+7x_2+8x_3\geq 5)\geq 0.9 \qquad (2)$$

حيث

$$\tilde{a}_3\sim GE(\lambda_3=2,\ \mu_3=5,\ \alpha_3=2)$$
$$\tilde{a}_1\sim GE(\lambda_1=10,\ \mu_1=8,\ \alpha_1=0.5)$$

الحل

بالنسبة للقيد (1) و بأستخدام العلاقة (4-19) نجد ان

$$5x_1-2x_2+x_3(5-\frac{1}{2}\ln\left(1-(0.9)^{1/2}\right)\leq 10 \qquad (3)$$
$$5x_1-2x_2+3.515x_3\leq 10 \qquad (4)$$

بالنسبة للقيد (2) و بأستخدام العلاقة (4-21) نجد ان:

$$7x_2+8x_3+x_1(8-\frac{1}{10}\ln\left(1-(0.1)^{1/0.5}\right)\geq 5\ \rightarrow$$

$$7.998x_1+7x_2+8x_3\geq 5 \qquad (5)$$

(٤-٦) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٤-١)

ترغب أحدى الشركات فى أستثمار أموالها فى 3 أنواع من الاستثمارات A,B,C ، فإذا كان العائد السنوي المتوقع من A,B,C يمثل متغير عشوائى $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ بحيث: $\tilde{a}_1 \sim N(\mu = 20, \sigma = 5)$ ، $\tilde{a}_2 \sim N(\mu = 22, \sigma = 5)$ ، $\tilde{a}_3 \sim N(\mu = 25, \sigma = 8)$. فإذا كان المبلغ الممكن استثماره $150,000$ جنيه و ترغب الشركة فى تحقيق عائد من الاستثمارات الثلاثة لا يزيد عن $20,000$، $100,000$، $80,000$، و ذلك بمستوى مأمونية لا يقل عن 0.85.

المطلوب

صياغة المشكلة أعلاه فى شكل نموذج برمجة احتمالية ثم تحديد المبالغ التى يجب أستثمارها فى A,B,C بحيث تكون المبالغ غير المستثمرة أقل ما يمكن.

الحل

إذا فرضنا أن x_1, x_2, x_3 هى المبالغ التى يجب أستثمارها فى A,B,C على الترتيب.

$$\text{Min. } Z = 150,000 - (x_1 + x_2 + x_3) \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 150,000 \qquad (2)$$
$$P_r(\tilde{a}_1 x_1 \leq 80,000) \geq 0.85 \qquad (3)$$
$$P_r(\tilde{a}_2 x_2 < 100,000) \geq 0.85 \qquad (4)$$
$$P_r(\tilde{a}_3 x_3 < 20,000) \geq 0.85 \qquad (5)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (6)$$

بالرجوع إلى الفصل (٤-٣) فأنه يمكن تحويل القيود (3)-(5) إلى القيود اليقينية التالية على الترتيب:

$$4.85x_1 \leq 80,000$$
$$16.85x_2 \leq 100,000$$

$$16.76x_3 \leq 20,000$$

و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\text{Min. } Z = 150{,}000 - (x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\text{S.T.} \qquad x_1 + x_2 + x_3 \le 150{,}000$$
$$4.85x_1 \le 80{,}000, \quad 16.85x_2 \le 100{,}000, \quad 16.76x_3 \le 20{,}000$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

و بحل النموذج بأستخدام أسلوب السمبلكس نجد أن الحل الأمثل

$$Z^* = 126{,}377.12 \,, x_1^* = 16{,}499.85 \,, x_2^* = 5{,}934.72 \,, x_3^* = 1{,}193.32$$

تطبيق (٤-٢)

تقوم أحدى شركات نقل القمامة من 3 مناطق A,B,C إلى مركز تجميع القمامة لأعادة تدويرها خارج هذه المناطق.
فإذا كانت طاقة النقل اليومية للشركة لا تزيد عن 100 طن يومياً. فإذا كانت الكميات التى يجب نقلها يومياً من هذه المناطق تمثل متغير يتبع التوزيع الأسى $(\lambda = 10, \ \mu = 25)$.
فإذا كانت تكلفة نقل الطن الواحد من كل منطقة إلى مركز التجميع بالحنيه على النحو

$$c_1 = 20, \qquad c_2 = 40, \qquad c_3 = 35$$

و التكاليف الكلية المسموح بها يومياً لا تزيد عن $7{,}000$ جنيه، و المطلوب تحديد الكميات التى يجب نقلها من كل منطقة بحيث تكون الكميات المنقولة اكبر ما يمكن و ذلك بمستوى مأمونية 95% على الأقل.

الحل

إذا فرضنا أن x_1, x_2, x_3 هى الكميات التى يجب نقلها من A,B,C على الترتيب.

$$\text{Max. } Z = x_1 + x_2 + x_3 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \qquad P_r[\tilde{a}(x_1 + x_2 + x_3) \le 100] \ge 0.95 \qquad (2)$$
$$20x_1 + 40x_2 + 35x_3 \le 7{,}000 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad (4)$$

الرجوع إلى الفصل (٤-٤) فان القيد الاحتمالى (2) يمكن تحويله إلى قيد يقينى على النحو التالى:

$$\frac{100 - 25(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} \ge \underbrace{\frac{-1}{10} \ln(0.05)}_{0.3} \rightarrow$$

$$100 - 25(x_1 + x_2 + x_3) \geq 0.3(x_1 + x_2 + x_3) \longrightarrow$$

$$25.3(x_1 + x_2 + x_3) \leq 100$$

و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى

$$\begin{gathered}
\text{Max. } Z = x_1 + x_2 + x_3 \\
25.3(x_1 + x_2 + x_3) \leq 100 \\
20x_1 + 40x_2 + 35x_3 \leq 7,000 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 3.95 \quad , \; x_1^* = 3.95 \quad , x_2^* = 0 \quad , x_3^* = 0$$

(٤-٧) تمرينات　　Exercises

(٤-١)

حول القيود الاحتمالية التالية إلى قيود يقينية

1) $P_r(\tilde{a}_1x_1 + 3x_2 \le 10) \ge 0.9\ ,\quad \tilde{a}_1 \sim Exp(\lambda = 5, \mu = 0)$
2) $P_r(5x_1 - \tilde{a}_2x_2 + 9x_3 \ge 8) \ge 0.9\ , \tilde{a}_2 \sim GExp(\lambda = 2, \mu = 5, \alpha = 3)$
3) $P_r(8x_1 + 4x_2 - \tilde{a}_3x_3 \le 10) \ge 0.9\ ,\quad \tilde{a}_3 \sim N(0, 1)$
4) $P_r(\tilde{a}_1x_1 + 8x_2 \le 9) \ge 0.5\ ,\quad \tilde{a}_1\ \chi^2_{(10)}$
5) $P_r(3x_1 - \tilde{a}_2x_2 + 5x_3 \ge 12) \ge 0.9\ ,\quad \tilde{a}_1 \sim N(5, 2)$
6) $P_r(\tilde{a}_1x_1 + 2x_2 \le 10) \ge 0.9\ ,\quad \tilde{a}_1 \sim Unf(a = 1, b = 10)$

(٤-٢)

أعتبر النموذج الاحتمالى التالى:

$$Max.\, Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$S.T.\quad P_r(\tilde{a}_1x_1 - x_2 + x_3 \le 20) \ge \gamma_1,\quad \tilde{a}_1 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2)$$
$$Pr(2x_1 + x_2 + 2x_3 \le b) \ge \gamma_2,\quad b \sim GExp(\lambda = 2, \mu = 10, \alpha = 1)$$
$$x_1 + x_2 + x_3, = 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

المطلوب

١. أوجد الحل الأمثل عندما $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.9$.
٢. أوجد الحل الأمثل عندما $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.8$.
٣. قارن بين (١)، (٢).

الجزء الثانى

البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات متعددة التوزيعات الاحتمالية

Chance-Constraints Programming with Multi-Variable Random Parameters

الباب الخامس: بعض التحويلات الأحتمالية

Some ProbabilityTransformations

الباب السادس: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية ثنائية التوزيعات الأحتمالية

Chance Constraints with Bivariate Distributed Random Parameters

الباب السابع: القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية متعددة التوزيعات الأحتمالية

Chance Constraints with Multi-Variate Distributed Random Parameters

الباب الثامن: دالة الهدف الأحتمالية

Random Objective Function $(\tilde{Z})$

الباب الخامس

بعض التحويلات الأحتمالية
Some ProbabilityTransformations

(٥-١) مقدمة

Introduction

(٥-٢) التوزيع الأحتمالى لدالة فى متغير عشوائى واحد متقطع

Probability distribution of a function with single discrete random variable

(٥-٣) التوزيع الأحتمالى لدالة فى متغير عشوائى واحد متصل

Probability distribution of a function with single continuous random variable

(٥-٤) التوزيع الأحتمالى لدالة فى n من المتغيرات العشوائية المتقطعة

Probability distribution of a function with n discrete random variables

(٥-٥) التوزيع الأحتمالى لدالة فى n من المتغيرات العشوائية المتصلة

Probability distribution of a function with n continuous random variables

(٥-٦) تمرينات

Exercises

(٥-١) مقدمة Introduction

تتطلب دراسة البرمجة الأحتمالية عندما تكون بعض (أو كل) معاملات دالة الهدف أو معاملات المتغيرات القرارية فى القيود الهيكلية متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة، ضرورة الإلمام الجيد بالتحويلات الأحتمالية.

و المقصود هنا بالتحويلات هو إيجاد التوزيع الأحتمالى لمتغير عبارة عن دالة فى متغير أو أكثر من المتغيرات العشوائية الأخرى أو بعبارة أخرى إيجاد التوزيع الأحتمالى للمتغير Y فى حالتين هما:

الحالة الأولى: عندما تكون Y دالة فى متغير واحد X أو بعبارة أخرى:

$$\mathbf{Y = g(X)} \qquad \text{(5-1)}$$

الحالة الثانية: عندما تكون Y دالة فى n من المتغيرات العشوائية $\mathbf{X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n}$ أو بعبارة أخرى:

$$\mathbf{Y = H(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)} \qquad \text{(5-2)}$$

و فى هذا الباب سوف نتناول الحالتين أعلاه عندما تكون المتغيرات $\mathbf{X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n}$ متغيرات متقطعة **discrete variables** أو متغيرات متصلة **continuous variables** على النحو الموضح فى الفصول التالية.
و يعتبر هذا الباب جزء أساسي لتناول و دراسة القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيعات الثنائية او المتعددة بالأبواب ٦، ٧، ٨.

(٥-٢) التوزيع الأحتمالى لدالة فى متغير عشوائى واحد متقطع
Probability distribution of a function with single discrete random variable

إذا أعتبرنا X متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ بأحتمالات $P_r(x_i)$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$ كذلك $g(X)$ دالة فى المتغير X، فإذا فرضنا أن:

$$Y = g(X)$$

و بالتالى فإن قيم المتغير Y تصبح على النحو التالى:

$$y_1 = g(x_1)\ , y_2 = g(x_2)\ , \ldots\ldots, y_n = g(x_n) \qquad (5\text{-}3)$$

و تصبح دالة الأحتمال للمتغير Y على النحو التالى:

$$P_r(Y = y_i) = P_r(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

مثال (٥-١)

إذا فرضنا أن X متغير عشوائى له التوزيع الأحتمالى الموضح فى الجدول التالى.

جدول (٥-١): يوضح التوزيع الأحتمالى لـ x

X	1	2	3	4	5	6	Σ
$P_r(x)$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1	1.0

فإذا كانت الدالة Y بحيث:

$$Y = g(X) = X + 10$$

فإن المتغير Y يأخذ القيم التالية:

$$Y_1 = X_1 + 10 = 11 \longrightarrow P_r(Y = 11) = P_r(X = 1) = 0.1$$
$$Y_2 = X_2 + 10 = 12 \longrightarrow P_r(Y = 12) = P_r(X = 2) = 0.2$$

$$Y_3 = X_3 + 10 = 13 \longrightarrow P_r(Y = 13) = P_r(X = 3) = 0.2$$

$$Y_4 = X_4 + 10 = 14 \longrightarrow P_r(Y = 14) = P_r(X = 4) = 0.3$$

$$Y_5 = X_5 + 10 = 15 \longrightarrow P_r(Y = 15) = P_r(X = 5) = 0.1$$

$$Y_6 = X_6 + 10 = 16 \longrightarrow P_r(Y = 16) = P_r(X = 6) = 0.1$$

مثال (٥-٢)

إذا فرضنا أن X متغير متقطع يأخذ القيم $0, 1, 2, 3, 4, 5$ بالأحتمالات التالية:

$$P_r(X = 0) = 0.12 \ , \ P_r(X = 1) = 0.13 \ , \ P_r(X = 2) = 0.25$$
$$P_r(X = 3) = 0.20 \ , \ P_r(X = 4) = 0.20 \ , \ P_r(X = 5) = 0.10$$

فإذا كانت: $Y = (X - 1)^2$

فإن المتغير Y يأخذ القيم التالية $0, 1, 4, 9, 16$ كذلك:

$$P_r(Y = 0) = P_r(X = 1) = 0.13$$

$$P_r(Y = 1) = P_r(X = 0) + P_r(X = 2) = 0.12 + 0.25 = 0.37$$

$$P_r(Y = 4) = P_r(X = 3) = 0.20$$

$$P_r(Y = 9) = P_r(X = 4) = 0.20$$

$$P_r(Y = 16) = P_r(X = 5) = 0$$

(٥-٣) التوزيع الأحتمالى لدالة فى متغير عشوائى واحد متصل Probability distribution of a function with single continuous random variable

أما إذا كان X متغير عشوائى متصل بدالة كثافة أحتمال $f(X)$ كذلك $Y = g(X)$ فإنه يمكن الحصول على دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y باستخدام النظرية التالية.

نظرية (٥-١)

إذا كان X متغير عشوائى متصل بدالة كثافة أحتمال $f(X)$ كذلك Y دالة فى X بحيث $Y = g(X)$ و بافتراض أن:

أ- العلاقة $Y = g(X)$ علاقة واحد – لواحد one-to-one.
ب- الدالة العكسية للدالة $g(X)$ هى $g^{-1}(Y)$ عند جميع قيم Y $= g(X)$.

فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y و سوف نشير لها بالرمز $/f(Y)$

$$/f(Y) = \left|\frac{d}{dY} g^{-1}(Y)\right| f(g^{-1}(Y)) \qquad (5\text{-}4)$$

الإثبات: أنظر مرجع [١٢, 145, 151].

مثال (٥-٣):

إذا فرضنا أن X متغير عشوائى له دالة كثافة الأحتمال $f(X)$ بحيث:

$$f(x) = \mathrm{Exp}\{-x\} \qquad , \; x > 0$$

فإذا فرضنا أن: $Y = C\,X$ ، حيث C مقدار ثابت، $C > 0$

أوجد دالة كثافة الأحتمال لـ Y.

الحل: بما أن $Y = C\,X$ بالتالى فإن $0 < Y < \infty$

$$\because\ Y = g(X) = C\,X \longrightarrow g^{-1}(Y) = \frac{Y}{C} \longrightarrow$$

$$\frac{d\,g^{-1}(Y)}{d\,Y} = \frac{1}{C}\ \ ,\ f(\,g^{-1}(Y)) = \mathrm{Exp}\{-(Y/C)\}$$

و بتطبيق نظرية (٥-١) حيث:

$$^{/}f(Y) = \left|\frac{d}{dY}g^{-1}(Y)\right| f(g^{-1}(Y)) = \left(\frac{1}{C}\right)(\mathrm{Exp}\{-(Y/C)\})$$

مثال (٥-٤)

إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع بيتا بمعلمتين (a,b) حيث:

$$f(X) = \frac{1}{B\,(a,b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1}\quad ,\quad 0 < X < 1\ \ ,\ \ a,b > 0$$

فإذا فرضنا أن $Y = -\ln(\,X)$. أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y.

الحل

$$Y = g(X) = -\ln(\,X) \longrightarrow\ \mathrm{Exp}\{-Y\} = X \longrightarrow\ g^{-1}(Y) = \mathrm{Exp}\{-Y\}$$

$$\frac{d\,g^{-1}(Y)}{d\,Y} = -\mathrm{Exp}\{-Y\}\ \ ,\ f\left(\,g^{-1}(Y)\right)$$

$$= \frac{1}{B\,(a,b)}(\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,a-1}(1-\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,b-1}$$

و بالتالى فإن:

$$^{/}f(Y) = \left|\frac{d}{dY}g^{-1}(Y)\right| f\left(g^{-1}(Y)\right)$$

$$= |-\mathrm{Exp}\{-Y\}|\left\{\frac{1}{B\,(a,b)}(\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,a-1}(1-\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,b-1}\right\}$$

$$= \mathrm{Exp}\{-Y\}\left\{\frac{1}{B\,(a,b)}(\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,-Ya+Y}(1-\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,b-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{B\,(a,b)}\mathrm{Exp}\{-aY\}(1-\mathrm{Exp}\{-Y\})^{\,b-1}$$

(٥-٤) التوزيع لأحتمالى لدالة فى n من المتغيرات العشوائية المتقطعة
Probability distribution of a function with n discrete random variable

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ تمثل عدد n من المتغيرات العشوائية المتقطعة و دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ سوف نشير لها بالرمز $f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$. فإذا فرضنا وجود المتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ بحيث:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

فإن دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ تكون على النحو:

$$P_r[Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k] = {}^{/}f(Y_1, Y_2, \ldots Y_k)$$

$$= \sum f(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (5\text{-}5)$$

و عملية المجموع Σ بالنسبة للقيم $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ المناظرة للقيم $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ كما سوف نوضح ذلك فى الأمثلة التالية.

مثال (٥-٥):

إذا فرضنا أن (X_1, X_2, X_3) ثلاث متغيرات كل منهم يأخذ القيم $0, 1$ و دالة الاحتمال المشتركة $f(X_1, X_2, X_3)$ على النحو الموضح فى الجدول التالى:

جدول (٥-٢): دالة الأحتمال $f(X_1, X_2, X_3)$

(x_1, x_2, x_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
$(0, 0, 0)$	$1/12$
$(0, 0, 1)$	$1/12$
$(0, 1, 0)$	$1/12$
$(1, 0, 0)$	$3/12$
$(1, 1, 0)$	$3/12$
$(1, 0, 1)$	$1/12$
$(0, 1, 1)$	$1/12$
$(1, 1, 1)$	$1/12$
$\sum$	$12/12 = 1$

أوجد دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 حيث تعرف كل من Y_1, Y_2 على النحو التالى:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2, X_3) = X_1\, X_2\, X_3$$

الحل: بما أن

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 \quad , \quad Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$$

و بالتالى $Y_1 = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad Y_2 = 0, 1$

كذلك التوزيع الأحتمال المشترك لـ Y_1, Y_2 و سوف نشير له بالرمز $f_2(Y_1, Y_2)$ على النحو التالى:

جدول (٥-٣): التوزيع الأحتمالى المشترك

(y_1, y_2)	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$	$(3, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(3, 0)$
$f_2(y_1, y_2)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0

حيث:

$$/f_2(Y_1 = 0,\ Y_2 = 0) = P_r(X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0) = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} /f_2(Y_1 = 1,\ Y_2 = 0) &= P_r(X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0) \\ &+P_r(X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0) \\ &+P_r(X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /f_2(Y_1 = 2,\ Y_2 = 0) &= P_r(X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0) \\ &+P_r(X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1) \\ &+P_r(X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$/f_2(Y_1 = 3,\ Y_2 = 0) = P_r(\phi) = 0,\ /f_2(Y_1 = 0,\ Y_2 = 1) = P_r(\phi) = 0$$

$$/f_2(Y_1 = 1,\ Y_2 = 1) = P_r(\phi) = 0,\ /f_2(Y_1 = 2,\ Y_2 = 1) = P_r(\phi) = 0$$

$$/f_2(Y_1 = 3,\ Y_2 = 1) = P_r(X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1) = \frac{1}{12}$$

ملحوظة: ϕ تشير إلى الفئة الخالية empty set.

(٥-٥) التوزيع لأحتمالى لدالة فى n من المتغيرات العشوائية المتصلة Probability distribution of a function with n countinous random variable

أما إذا كان $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ تمثل عدد n من المتغيرات المتصلة continuous variables معرفة فى n من المحاور n-dimensions بدالة كثافة أحتمال مشتركة سوف نشير لها بالرمز $f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$. كذلك إذا كان $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ عدد k من المتغيرات العشوائية التى تمثل دوال فى المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ على النحو:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

حيث $1 \leq k \leq n$. و تتم عملية التحويل من عدد n من المحاور فى X إلى عدد n من المحاور فى Y. وعندما $k < n$ ففى هذه الحالة نقدم متغيرات إضافية للمتغيرات Y_i متمثلة فى الدوال التالية:

$$Y_j = g_j(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \quad , \quad j = k+1, k+2, \ldots, n \qquad (5\text{-}6)$$

و الحصول على دالة كثافة أحتمال مشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ ثم الحصول على دالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ من الدالة المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ فهى تمثل الدالة الهامشية marginal function للمتغيرات

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$. و لتوضيح إجراء عملية التحويل سوف نبدأ أولاً بمتغيرين عشوائيين X_1, X_2 أو بعبارة أخرى $n = 2$ كذلك لدينا دالتين Y_1, Y_2 أو بعبارة أخرى $k = 2$ حيث:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) \quad , \quad Y_2 = g_2(X_1, X_2) \qquad (5\text{-}7)$$

حيث علاقة كل من Y_1, Y_2 بـ $g_1(X_1, X_2)$, $g_2(X_1, X_2)$ علاقة واحد-لواحد one-to-one

و بالتالى فإنه يمكن الحصول على الدوال العكسية للدالتين $g_1(X_1, X_2)$, $g_2(X_1, X_2)$ أو بعبارة أخرى الحصول على g_1^{-1}, g_2^{-1} على النحو التالى:

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2) \quad , \quad X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2) \qquad (5\text{-}8)$$

نظرية (٥-٢)

إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين متصلين لهما دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(X_1, X_2)$ و بافتراض أن:

(١) $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ دالتين بحيث العلاقة بين Y_1, Y_2 و كل من $g_1(X_1, X_2)$, $g_2(X_1, X_2)$ علاقة واحد-لواحد.

(٢) المشتقات الجزئية الأولى first partial derivatives لكل من $X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2)$, $X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2)$ دوال متصلة.

(٣) محدد determinant المشتقات الجزئية لـ X_1, X_2 بالنسبة لـ Y_1, Y_2

والمسمى بـ Jacobian و سوف نشير له بالرمز J بحيث J لا يساوى صفر. حيث:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5\text{-}9)$$

فأن دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2 على النحو:

$$f'(Y_1, Y_2) = |J|\, f\left[g_1^{-1}(Y_1, Y_2), g_2^{-1}(Y_1, Y_2)\right] \qquad (5\text{-}10)$$

الإثبات : أنظر مرجع [118 ,120].

و سوف نوضح تطبيق النظرية من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٥-٦)

إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين بدالة كثافة أحتمال مشتركة

$f(X_1, X_2)$

بحيث:

$$f(X_1, X_2) = \mathrm{Exp}\{-(X_1 + X_2)\} \qquad 0 < X_1, X_2 < \infty$$

و بافتراض أن:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \quad , \quad 0 < Y_1 < \infty$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = 2X_1 \quad , \quad 1 < Y_2 < \text{Exp}$$

أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2.

الحل:

$$1) \because Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = \text{Exp}(x^2) \quad , \quad 0 < Y_1 < \infty \, , \; 1 < Y_2 < \text{Exp}$$

$$\longrightarrow$$

$$X_1 = Y_1\text{-}\ln(Y_2) \quad , \quad X_2 = \ln(Y_2)$$

$$2) \because \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{Y_2} \\ 0 & \frac{1}{Y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{Y_2}$$

$$3) \because {}^{/}f(Y_1, Y_2) = |\mathbf{J}| \, f\left[g_1^{-1}(Y_1, Y_2), g_2^{-1}(Y_1, Y_2)\right]$$

$$= \left|\frac{1}{Y_2}\right| \text{Exp}\{-(Y_1 - \ln Y_2 + \ln Y_2)\}$$

$${}^{/}f(Y_1, Y_2) = (Y_2)^{-1}\text{Exp}(-Y_1) \quad , \quad 0 < Y_1 < \infty \quad , \quad 1 < Y_2 < \text{Exp}$$

و بالتالى فإن:

$${}^{/}f(Y_1) = \int_1^{\text{Exp}} (Y_2)^{-1}\text{Exp}(-Y_1) \; dY_2$$

$$= \text{Exp}(-Y_1)[\ln Y_2]_1^{\text{Exp}}$$

$$= \text{Exp}(-Y_1)[\ln(\text{Exp}) - \ln(1)]$$

$$= \mathbf{Exp}(-\mathbf{Y_1})(\mathbf{1}-\mathbf{0}) = \mathbf{Exp}(-\mathbf{Y_1}) \quad , \quad \mathbf{0} < \mathbf{Y_1} < \infty$$

$$/\mathbf{f}(\mathbf{Y_2}) = \int_{0}^{\infty} (\mathbf{Y_2})^{-1} \mathbf{Exp}(-\mathbf{Y_1})\ \mathbf{dY_1}$$

$$= (\mathbf{Y_2})^{-1} \int_{0}^{\infty} \mathbf{Exp}(-\mathbf{Y_1})\ \mathbf{dY_1}$$

$$= (\mathbf{Y_2})^{-1}(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Y_2}} \quad , \quad \mathbf{1} < \mathbf{Y_2} < \mathbf{Exp}$$

مثال (٥-٧)

إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المنتظم فى الفترة $(0,1)$ بدالة كثافة أحتمال $f(X_1, X_2) = 1$ بحيث:

و بافتراض أن: $Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2 - X_1$

أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2 و كذلك الدوال الهامشية لـ Y_1, Y_2.

الحل

$$\because\ \mathbf{Y_1} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} \ , \ \mathbf{Y_2} = \mathbf{X_2} - \mathbf{X_1} \ , \ \mathbf{0} < \mathbf{Y_1} < \mathbf{2} \ , \ -\mathbf{1} < \mathbf{Y_2} < \mathbf{1}$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{X_1} = \mathbf{g_1^{-1}}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y_1} - \mathbf{Y_2}) \ , \ \mathbf{X_2} = \mathbf{g_2^{-1}}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2})$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\because\ \mathbf{f}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}) = |\mathbf{J}|\ \mathbf{f}[\mathbf{g_1^{-1}}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}) \ , \ \mathbf{g_2^{-1}}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2})] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1}) \ \longrightarrow$$

$$/f(Y_1) = \int_{-1}^{1} f(Y_1, Y_2)\, dY_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\ \ dY_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$$

$$/f(Y_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\ \ dY_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$$

نظرية (٥-٣)

إذا فرضنا أن $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ عدد n من المتغيرات العشوائية المتصلة بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ ، و إذا فرضنا أن الفئة χ بحيث [151]:

$$\chi = \{(X_1, X_2, \ldots., X_n): f(X_1, X_2, \ldots., X_n)\}$$

و بافتراض أن الفئة χ يمكن تجزئتها إلى n من الفئات الجزئية $\chi_1, \chi_2, \ldots., \chi_m$ ، و بافتراض أن الدوال Y_j بحيث:

$$Y_j = g_j(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \quad , \quad j=1, 2, \ldots, n \qquad (5\text{-}11)$$

و العلاقة بين Y_j ، $g_j(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ علاقة واحد لواحد. كذلك:

$$X_1 = g_{1i}^{-1}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\ , \ldots\ldots , X_n = g_{ni}^{-1}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

حيث تشير g_{ji}^{-1} إلى الدالة العكسية المناظرة لـ X_j على الفئة الجزئية χ_i كذلك يشير المحدد J_i بحيث:

$$J_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5\text{-}12)$$

فإن دالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ تصبح على النحو التالى:

$$/f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} |J_i| f\left[g_{1i}^{-1}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\right.$$

و

$$g_{2i}^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \;, \dots\dots , X_n = g_{ni}^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] \qquad (5\text{-}13)$$

ملحوظة: و فى الحالة الخاصة عندما $m = 1$ أو بعبارة أخرى الفئة χ فئة واحدة غير مجزئة، فى هذه الحالة:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial Y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial Y_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial Y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} \qquad (5\text{-}14)$$

$$/f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \;|J_i|f\left[g_1^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)\right.$$

و

$$g_2^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \;, \dots\dots , X_n = g_n^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] \qquad (5\text{-}15)$$

مثال (٥-٨)

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية متصلة مستقلة كل منها يتبع التوزيع الأسى بمعلمات $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2, X_3)$ حيث:

$$f(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \mathrm{Exp}\left\{-\left(\frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{X_2}{\lambda_2} + \frac{X_3}{\lambda_3}\right)\right\} \;,\; 0 < X_1, X_2, X_3 < \infty$$

فإذا فرضنا أن:

$$Y_1 = X_1 \;, Y_2 = (X_1 + X_2) \;, Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3) \;,\; 0 < Y_1, Y_2, Y_3 < \infty$$

و بافتراض أن $m = 1$. أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لكل من Y_1, Y_2, Y_3 ثم أوجد الدوال الهامشية لكل من Y_1, Y_2, Y_3.

الحل

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3) = Y_1 \quad , \quad X_2 = Y_2 - X_1 = Y_2 - Y_1$$

$$X_3 = Y_3 - Y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$/f(Y_1, Y_2, Y_3) = |J| \; f\begin{bmatrix} g_1^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3), g_2^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3), \\ g_3^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3) \end{bmatrix}$$

$$= 1\left(\frac{1}{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}\right) \text{Exp}\left\{-\left(\frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{(Y_2 - Y_1)}{\lambda_2} + \frac{(Y_3 - Y_2)}{\lambda_3}\right)\right\}$$

$$= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1} \text{Exp} - \{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2$$

$$+ \lambda_3 Y_3\} \longrightarrow$$

$$/f(Y_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(Y_1, Y_2, Y_3)\, dY_2\, dY_3$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1} \text{Exp} - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2 + \lambda_3 Y_3\right\} dY_3\right] dY_2$$

$$= \int_0^\infty (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \text{Exp} - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2\right\} \; dY_2$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3\right)^{-1} \text{Exp} - \; \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1\right\} \qquad , \quad 0 < Y_1 < \infty$$

بالمثل يمكن الحصول على $/f(Y_2), /f(Y_3)$.

مثال (٥-٩)

إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2)$ بحيث:

$$f(X_1,X_2)=\left[2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2{}_{X_1,X_2}}\right]^{-1}\ \mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2{}_{X_1,X_2}\right)}\right.$$

$$\left[\left(\frac{X_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2-\ 2\rho_{X_1,X_2}\left(\frac{X_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)\left(\frac{X_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{X_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right]\right\} \qquad (1)$$

حيث ρ_{X_1,X_2} معامل الأرتباط بين X_1,X_2.

فإذا فرضنا أن: $Y_1=(X_1+X_2)\quad,\quad Y_2=X_2$

أوجد دالة الأحتمال المشتركة بين Y_1,Y_2 ثم أوجد الدوال الهامشية لـ Y_1,Y_2.

<u>الحل</u>

$$\because\ Y_1=X_1+X_2\quad,\quad Y_2=X_2\longrightarrow$$
$$X_1=g_1^{-1}(Y_1,Y_2)=Y_1-Y_2\quad,\quad X_2=g_2^{-1}(Y_1,Y_2)=Y_2$$

$$J=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad (2)$$

$$\because\ X_1=Y_1-Y_2\quad\longrightarrow\quad \mu_{X_1}=\mu_{Y_1}-\mu_{Y_2} \qquad (3)$$

$$X_2=Y_2\quad\longrightarrow\quad \mu_{X_2}=\mu_{Y_2} \qquad (4)$$

كذلك:

$$\sigma^2_{X_1}=\sigma^2_{(Y_1-Y_2)}=\sigma^2_{Y_1}+\sigma^2_{Y_2}+\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)\longrightarrow \qquad (5)$$

$$\sigma_{X_1}=\sigma_{(Y_1-Y_2)}=\sqrt{\sigma^2_{Y_1}+\sigma^2_{Y_2}+\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)} \qquad (6)$$

و بما أن:

$$\rho_{X_1,X_2}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}=\frac{E(Y_1Y_2)-\mu_{Y_1}\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}\sigma_{Y_2}}-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} \qquad (7)$$

و من (7) فإنه يمكن إستنتاج أن:

$$\rho_{X_1,X_2} = \rho_{Y_1,Y_2}\left[\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}\right] - \frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} \qquad (8)$$

بالتعويض بـ (8)-(2) فى (1) نجد أن:

$$^{/}f(Y_1,Y_2) = |1|\ f\left[g_1^{-1}(Y_1,Y_2), g_2^{-1}(Y_1,Y_2)\right]$$

$$= \left[2\pi\sigma_{Y_{1-Y_2}}\sigma_{Y_2}\sqrt{1-\left[\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} - \frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}\right]^{-1}}\ \right]^{-1} \mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left[1-\left(\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} - \frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}\right)\right]\left[\left(\frac{(Y_1-Y_2)-\left(\mu_{Y_1}-\mu_{Y_2}\right)}{\sigma_{Y_{1-Y_2}}}\right)\right.$$

$$-2\left(\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} - \frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}\right)\Bigg]\left[\left(\frac{(Y_1-Y_2)-\left(\mu_{Y_1}-\mu_{Y_2}\right)}{\sigma_{Y_{1-Y_2}}}\right)\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{Y_2-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}}\right)+\left(\frac{Y_2-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}}\right)^2\right]\right\} \qquad (9)$$

(٥-٦) تمرينات　　　　Exercises

(٥-١)

إذا فرضنا أن X متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين σ^2 كذلك $Y = kX$ حيث k مقدار ثابت.

أ- أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y.

ت- أثبت أن $E(Y) = k\mu \;,\; Var(Y) = k^2\sigma^2$.

(٥-٢)

بأفتراض أن X_1, X_2 متغيرين غير مرتبطين، أوجد معامل الارتباط بين $(X_1 + X_2)$، $(X_1 - X_2)$ بدلالة $Vax(X_1), Vax(X_2)$.

(٥-٣)

بافتراض أن X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية غير مرتبطة uncorrelated random variables و لكل منهم نفس التباين σ^2.

أوجد معامل الارتباط بين Y_1, Y_2 بحيث:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2 + X_3$$

(٥-٤)

بأفتراض أن X_1, X_2 متغيران مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد القياسى.

١- أوجد التوزيع المشترك للمتغيرات Y_1, Y_2 حيث:

$$Y_1 = \frac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{2}} \quad , \quad Y_2 = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$$

٢- أثبت أن التوزيع الأحتمالي للمتغير Y_1 هو نفس التوزيع للمتغير Y_2 حيث:

$$Y_1 = 2X_1\, X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2^2 - X_1^2$$

ملحوظة:

$$X_2^2 - X_1^2 = 2\left[\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}\right]$$

(٥-٥)

إذا فرضنا أن المتغيرات X_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ متغيرات مستقلة و كل منها يتبع التوزيع الأسى بمعلمة λ_i . و بافتراض أن $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

أثبت أن المتغير Y يتبع توزيع جاما ثم أوجد عدد درجات الحرية.

(٥-٦)

بأفتراض أن X متغير عشوائى بدالة توزيع تراكمية:

$$F(X) = \mathrm{Exp}[-\mathrm{Exp}(-(x-\alpha)/\beta)]$$

و بافتراض أن Y متغير بحيث:

$$Y = \mathrm{Exp}[-(X-\alpha)/\beta]$$

أوجد التوزيع الأحتمالى للمتغير Y.

(٥-٧)

إذا فرضنا أن X متغير عشوائي بدالة كثافة الأحتمال $f(X)$ ،

$$f(X) = \left(\frac{1}{B(a,b)}\right)\left(\frac{X^{a-1}}{(H\,X)^{a+b}}\right) \quad , \quad a,b > 0 \quad , \quad 0 < X < \infty$$

أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y حيث:

$$\mathbf{Y = \frac{1}{1+X}}$$

(٥-٨)

بأفتراض أن (X, Y) متغيرين لهما التوزيع المعتاد الثنائى.
أوجد دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرين (aX, bY) ,(cX, dY) بحيث تحقق المقادير الثابتة a,b,c,d العلاقة التالية:

$$\mathbf{ad - bc \neq 0}$$

(٥-٩)

إذا كان $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد بتوقع

و تباين μ_i, σ_i^2، $i = 1, 2, \ldots, n$.

بافتراض أن $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. أثبت أن المتغير Y يتبع التوزيع المعتاد أيضاً بتوقع يساوى مجموع توقعات المتغيرات. و تباين يساوى مجموع تباينات المتغيرات أيضاً.

الباب السادس

القيود الأحتمالية بمعلمات عشوائية ثنائية التوزيعات الأحتمالية

Chance Constraints with Bivariate Distributed Random Parameters

(٦-١) مقدمة

Introduction

(٦-٢) التوزيع المعتاد الثنائى

Bivariate Normal Distribution

(٦-٣) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع المعتاد الثنائى

Chance Constraints with $\tilde{a}_{ij} \sim$ Bivariate Normal Distribution

(٦-٤) التوزيع الأسى الثنائى

Bivariate Exponential Distribution

(٦-٥) القيود بمعلمات تتبع التوزيع الأسى الثنائى

with $\tilde{a}_{ij} \sim$ Bivariate Exponential Distribution Constraints

(٦-٦) القيود الأحتمالية المشتركة

Joint Chance Constraints

(٦-٧) تمرينات

Exercises

(٦-١) مقدمة Introduction

يتناول هذا الباب القيود الأحتمالية التى تشمل على بعض المعلمات العشوائية المرتبطة **dependent random parameter** (أو غير مرتبطة **independent**) و تتبع توزيعات أحتمالية ثنائية.

لذلك سوف نتناول أولاً بعض أهم التوزيعات الأحتمالية الثنائية الأكثر تطبيقاً مثل:

- التوزيع المعتاد الثنائى **Bivariate Normal Distribution**
- التوزيع الأسى الثنائى **Bivariate Exponential Distribution**

ثم أستخدام هذه التوزيعات فى كيفية تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة.
كذلك تقديم القيود المشتركة **joint constraints** فى حالة أرتباط المعلمات العشوائية و أيضاً حالات عدم أستقلال المعلمات.
هذا بالأضافة إلى تقديم مجموعة من الأمثلة توضح كيفية تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة بالأضافة إلى تقديم مجموعة من التمرينات المتنوعة.

(٦-٢) التوزيع المعتاد الثنائى
Bivariate Normal Distribution

إذا فرضنا أن X,Y متغيرين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد و غير مستقلين dependent بمعامل أرتباط ρ حيث $-1 \leq \rho \leq 1$ ، و مصفوفة التباين و التغاير Σ حيث:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \tag{6-1}$$

حيث σ_x , σ_y تشير إلى الأنحراف المعيارى للمتغير X و المتغير Y على الترتيب. فأن دالة كثافة الأحتمال المشتركة joint density function للمتغيرين (X,Y) على النحو التالى:

$$f(x,y) = \left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} \operatorname{Exp}\left\{\frac{-1}{2(1-\rho)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\} \tag{6-2}$$

<u>ملحوظة:</u> و عندما يكون المتغيرين X,Y متغيرين مستقلين يكون $\rho = 0$ و فى هذه الحالة بالتعويض بـ $\rho = 0$ فى الدالة (6-2) فأن:

$$f(x,y) = \left(2\pi\sigma_x\sigma_y\right)^{-1} \operatorname{Exp}\left\{\frac{-1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\} \tag{6-3}$$

<u>نظرية (٦-١):</u>

إذا فرضنا أن المتغير $\tilde{h}$ دالة خطية فى المتغيران X,Y بحيث:

$$\tilde{h} = ax + by \tag{6-4}$$

حيث a,b مقادير ثابتة، فأن المتغير $\tilde{h}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد (الطبيعى) بحيث

$$E(\tilde{h}) = \mu = aE(x) + bE(y) = a\mu_x + b\mu_y \tag{6-5}$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{h}) = \sigma^2 = \mathrm{Var}(ax+by) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y$$

و دالة كثافة أحتمال المتغير $\tilde{h}$ ، $f(\tilde{h})$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{Exp}\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad , \quad -\infty < h < \infty \qquad (6\text{-}6)$$

الأثبات: بأستخدام أسلوب التحويلات transformation [129]

نتيجة (١):

فى حالة إذا كان x,y كل منهما يتبع التوزيع المعتاد القياسى و الثوابت a,b بحيث $a = b = 1$ فأن [206]:

$$E(\tilde{h}) = 0 \qquad (6\text{-}7)$$

$$\sigma_{\tilde{h}}^2 = \mathrm{Var}(\tilde{h}) = 2 + 2\rho$$

و بالتالى فأن $\tilde{z}$ بحيث:

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{h}}{\sqrt{2+2\rho}} \qquad (6\text{-}8)$$

يمثل متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسى بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{z})$:

$$f(\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}\,\left(\sqrt{1+\rho}\right)}\,\mathrm{Exp}\left\{\frac{-1}{4(1+\rho)}\,\tilde{z}^2\right\} \quad , \quad -\infty < \tilde{z} < \infty \qquad (6\text{-}9)$$

الأثبات: بالتعويض فى (6-6) بـ (6-8) و (6-7) نحصل على (6-9).

خصائص التوزيع الأحتمالى المعتاد الثنائى [202]

يعتبر التوزيع المعتاد الثنائى من التوزيعات الممتازة حيث:

١- الدالة الهامشية لكل من y أو x تمثل دالة كثافة أحتمال للتوزيع المعتاد الأحادى.
٢- التوزيع الشرطى لكل من y أو x يمثل توزيع معتاد أيضاً.
٣- التوليفة الخطية linear combination فى x,y تمثل متغير يتبع التوزيع المعتاد

أيضاً.

فى سنة ١٩٩٠ قدم Sungur تقريب لدالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرين x,y حيث يتبع كل من x,y التوزيع المعتاد القياسى بدالة كثافة أحتمال $f(x), f(y)$ على الترتيب و معامل الأرتباط بينهما ρ، حيث أشار إلى دالة كثافة الاحتمال المشتركة التقريبية بالرمز $\tilde{f}(x, y)$ بحيث [206, 191]:

$$\tilde{f}(x, y) = f(x)f(y)[1 + \rho xy] \qquad (6\text{-}10)$$

حيث أستخدام تقريب تيلور من الترتيب الأول فى معامل الأرتباط first order approximation.

(٦-٣) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع المعتاد الثنائى

Chance Constraints with $\tilde{a}_{ij} \sim$ Bivariate Normal Distribution

إذا فرضنا $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ متغيرين عشوائيين غير مستقلين لهما التوزيع المعتاد الثنائى بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2})$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}) = \left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-1} \operatorname{Exp}\left\{\frac{-1}{2(1-\rho)}\left[\left(\frac{\tilde{a}_{i1}-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\tilde{a}_{i1}-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\tilde{a}_{i2}-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\tilde{a}_{i2}-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad (6\text{-}11)$$

حيث:

معامل الأرتباط بين $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$	ρ:
توقع $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ على الترتيب	μ_1, μ_2:
الانحراف المعيارى لـ $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ على الترتيب	σ_1, σ_2:
مقادير ثابتة $j = 3, \dots, n$	a_{ij}, b_i:
المتغير القرارى رقم j ، $j = 3, \dots, n$	x_j:

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالى

$$P_r\left\{\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge \gamma_i \ , \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (6\text{-}12)$$

حيث γ_i تشير إلى مقياس المأمونية للقيد رقم (i) (أى أحتمال تحقق القيد i).

فإذا فرضنا أن $\tilde{h}_i$ بحيث:

$$\tilde{h}_i = \tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 \quad , \ x_1, x_2 \ge 0 \qquad (6\text{-}13)$$

فأن المتغير $\tilde{h}_i$ متغير معتاد ايضاً (أنظر نظرية (٦-١)) و يمكن تحويله إلى متغير معتاد قياسى حيث:

$$E(\tilde{h}_i) = \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{h}_i) = \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 \qquad (6\text{-}14)$$

فإذا فرضنا أن F_i, F_i^{-1} هى دالة التوزيع التراكمية و الدالة العكسية لها لمتغير معتاد قياسى فأن القيد (6-12) يصبح على النحو التالى:

$$P_r\left\{z \le \frac{b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j - \mu}{\sigma}\right\} \ge \gamma_i \longrightarrow$$

حيث z متغير معتاد قياسى، و بالتالى يمكن أعادة كتابة القيد أعلاه على النحو التالى:

$$F\left(\frac{b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j - \mu}{\sigma}\right) \ge \gamma_i \longrightarrow \qquad (6\text{-}15)$$

أو

$$\frac{b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j - \mu}{\sigma} \ge F^{-1}(\gamma_i)$$

حيث $F^{-1}(\gamma_i)$ هى قيمة الدالة العكسية للدالة F (حيث F هى دالة التوزيع التراكمية للمتغير المعتاد القياسى) عند قيمة γ_i.

حيث يمكن الحصول على هذه قيمة $F^{-1}(\gamma_i)$ العددية من جدول التوزيع المعتاد القياسى بملحق رقم (٢).

و بالتالى يصبح القيد اليقينى المكافئ للقيد (6-12) على النحو:

$$\sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j - \mu + \sigma F^{-1}(\gamma_i) \le b_i \longrightarrow$$

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j + F^{-1}(\gamma_i)\left\{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2\right\}^{\frac{1}{2}} \le b_i \qquad (6\text{-}16)$$

و رغم أن القيد الأحتمالى فى (6-12) قيد خطى فى المتغيرات القرارية x_j ، $j = 1, 2, \dots, n$ ،
فأن القيد اليقينى المكافئ له فى (6-16) قيد غير خطى فى المتغيرين القرارين x_1, x_2 الذين يمثلين معاملات المعلمات العشوائية $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$.

مثال (٦-١)

إذا أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$P_r\{\tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 - 5x_3 + 9x_4 \leq 100\} \geq 0.9 \qquad (1)$$

حيث $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المعتاد الثنائى بحيث:

$$\rho = 0.9\,,\ \mu_1 = 4\,,\ \mu_2 = 6\,,\ \sigma_1 = 1\,,\ \sigma_2 = 3$$

حول القيد الاحتمالى إلى قيد يقينى مكافئ.
إذا فرضنا أن

$$\tilde{h} = \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 \longrightarrow$$

$$E(\tilde{h}) = 4x_1 + 6x_2 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{h}) &= 1x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_1x_2(0.9)(1)(3) \\ &= x_1^2 + 9x_2^2 + 5.4x_1x_2 \qquad (3) \end{aligned}$$

و بتحويل القيد (1) إلى قيد أحتمالى على النحو التالى:

$$P_r\left\{z \leq \frac{100 + 5x_3 - 9x_4 - (4x_1 + 6x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 9x_2^2 + 5.4x_1x_2}}\right\} \geq 0.9 \longrightarrow$$

$$\frac{100 + 5x_3 - 9x_4 - (4x_1 + 6x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 9x_2^2 + 5.4x_1x_2}} \geq F^{-1}(0.9) = 1.28$$

$$4x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 9x_4 + 1.28\sqrt{x_1^2 + 9x_2^2 + 5.4x_1x_2} \leq 100 \qquad (4)$$

مثال (٦-٢)

إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيرين لهما التوزيع المعتاد الثنائى بمعلمات:

$$\rho = 0.6\,,\ \mu_1 = 2\,,\ \mu_2 = 5\,,\ \sigma_1 = 1\,,\ \sigma_2 = 1$$

حول القيد الاحتمالى التالى إلى قيد يقينى

$$P_r(\tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2) \geq 0.80 \tag{1}$$

$$\tilde{h} = \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2$$

$$E(\tilde{h}) = 2x_1 + 5x_2$$

$$Var(\tilde{h}) = 1 + 1 + 2(0.8)x_1x_2(1)(1) = 2 + 1.6x_1x_2$$

$$P_r(\tilde{h} \geq 12) = 1 - P_r(\tilde{h} \leq 12) \geq 0.8 \quad \longrightarrow$$

$$P_r(\tilde{h} \leq 12) \leq 0.2 \quad \longrightarrow P_r\left(z \leq \frac{12 - 2x_1 - 5x_2}{\sqrt{2 + 1.6x_1x_2}}\right) \leq 0.2 \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{12 - 2x_1 - 5x_2}{\sqrt{2 + 1.6x_1x_2}}\right) \leq 0.2 \quad \longrightarrow \frac{12 - 2x_1 - 5x_2}{\sqrt{2 + 1.6x_1x_2}} \leq F^{-1}(0.2) = -0.84$$

$$2x_1 + 5x_2 - 0.84\sqrt{2 + 1.6x_1x_2} \geq 12 \tag{2}$$

(٦-٤) التوزيع الأسى الثنائى
Bivariate Exponential Distribution

يعتبر التوزيع الاسى الثنائى من التوزيعات الأحتمالية الثنائية الهامة نظراً لأستخدامه فى كثير من التطبيقات الأجتماعية **social applications** مثل التطبيقات فى التامين **insurance** أو فى قياس الصلاحية **reliability** أو التطبيقات الهندسية و الطبية،.... $[17, 21, 67]$.

و منذ سنة ١٩٦٠ و قدمت العديد من النماذج المختلفة للتوزيع الأحتمالى الأسى الثنائى.

و فى هذا الفصل سوف نعرض بعض أهم هذه النماذج ، و ذلك بهدف أستخدام هذه النماذج فى أسلوب (CCP) كما سوف نوضح ذلك فى الفصل التالى.

(١) نموذج **Gumbel** سنة ١٩٦٠ $[24, 23]$،
(٢) نموذج **Farlie, Gumbel and Morgenstern** سنة ١٩٦٠ $[85, 83]$،
(٣) نموذج **Freund** سنة ١٩٦١ $[128, 82]$،
(٤) نموذج **Moran and Downton** سنة ١٩٦٧ [62]،
(٥) نموذج **Hafez and El-Dash** سنة ٢٠١٨ [100]،
(٦) نموذج **El-Dash** سنة ٢٠١٩ [82]،
(٧) نموذج **El-Dash** سنة ٢٠١٩ [83].

نموذج (١)

فى سنة ١٩٦٠ أفترض **Gumbel** و أخرين أن المتغيرين العشوائيين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ (حيث يمثل كل منهما فترة صلاحية المكون $1, 2$ على الترتيب فى نظام معين) كل منهما يتبع التوزيع الاسى بمعلمة λ_1, λ_2 على الترتيب بحيث $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، و قدموا دالة كثافة الأحتمال المشتركة لهما $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \text{Exp}\{-(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \theta\tilde{a}_1\tilde{a}_2)\}\{(1 + \theta\tilde{a}_1)(1 + \theta\tilde{a}_2) - \theta\} \quad (6\text{-}17)$$

$$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \geq 0\,, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

و قد أثبتوا أن دالة التوزيع التراكمية $F(a_1, a_2)$ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2) &= P(\tilde{a}_1 \le a_1\,, \tilde{a}_2 \le a_2) \\ &= 1 - \mathrm{Exp}\{-a_1\} - \mathrm{Exp}\{-a_2\} + \mathrm{Exp}\{-(a_1 + a_2 + \theta a_1 a_2)\} \end{aligned} \tag{6-18}$$

نموذج (٢)

فى سنة ١٩٦٠ قدم كل من **Farlie, Gumbel and Morgenstern** تطوير لنموذج (١) فى حالة $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ أيضاً، حيث أفترضوا أن دالة كثافة الاحتمال $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو:

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) &= \mathrm{Exp}\{-(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)\}\,[1 + \alpha\,(2\,\mathrm{Exp}\{-\tilde{a}_1\} - 1) \\ &\quad \cdot (2\,\mathrm{Exp}\{-\tilde{a}_2\} - 1)]\ , \qquad |\alpha| < 1 \end{aligned} \tag{6-19}$$

و اثبتوا أن دالة التوزيع التراكمية $F(a_1, a_2)$ على النحو:

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2) &= [1 - \mathrm{Exp}(-a_1)][1 - \mathrm{Exp}(-a_2)] \\ &\quad \cdot \big[1 + \alpha\,\mathrm{Exp}\big(-(a_1 + a_2)\big)\big] \end{aligned} \tag{6-20}$$

و فى حالة الأستقلال الأحصائى للمتغيرين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ فأن $\alpha = 0$ و بالتالى فأن:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \mathrm{Exp}\{-(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)\} \tag{6-21}$$

كذلك

$$F(a_1, a_2) = \{1 - \mathrm{Exp}(-a_1)\}\{1 - \mathrm{Exp}(-a_2)\} \tag{6-22}$$

و قد أثبتوا أن معامل الارتباط ρ , $\mathrm{corr}\,(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ بين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ على النحو:

$$\rho = \frac{1}{4}\,\alpha \;\longrightarrow\; -\frac{1}{4} < \rho < \frac{1}{4} \tag{6-23}$$

نموذج (٣)

فى سنة ١٩٦١ أفترض **Freund** أن المتغيران $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ بمعلمات $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ و أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لهما على النحو:

$$f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2) =$$

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2^{\backslash}\mathrm{Exp}\left(-\lambda_2^{\backslash}\tilde{a}_2-\gamma_2\tilde{a}_1\right) \quad , \quad 0\le \tilde{a}_1<\tilde{a}_2 & (6\text{-}24)\\ \lambda_1^{\backslash}\lambda_2\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1^{\backslash}\tilde{a}_1-\gamma_1\tilde{a}_2\right) \quad , \quad 0\le \tilde{a}_2<\tilde{a}_1 & (6\text{-}25)\end{cases}$$

$$\lambda_1^{\backslash}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,,\lambda_2^{\backslash}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,,\gamma_i=\lambda_1+\lambda_2-\lambda_i^{\backslash}\ ,$$

$$i = 1, 2 \qquad (6\text{-}26)$$

و أثبت أن دالة التوزيع التراكمية $F(a_1,a_2)$ على النحو:

$$F(a_1,a_2)=\begin{cases}\frac{\lambda_1}{\gamma_2}\{1-\mathrm{Exp}(-\gamma_2 a_1)\}\left\{1-\mathrm{Exp}\left(-\lambda_2^{\backslash}a_2\right)\right\}\ ,0\le a_1<a_2 & (6\text{-}27)\\ \frac{\lambda_2}{\gamma_1}\left\{1-\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1^{\backslash}a_1\right)\right\}\{1-\mathrm{Exp}(-\gamma_1 a_2)\}\,,0\le a_2<a_1 & (6\text{-}28)\end{cases}$$

<u>نموذج (٤)</u>

فى سنة ١٩٦٧ قدما **Morn and Downton** نموذج آخر للتوزيع الأسى الثنائى، حيث أفترضا وجود نظام مكون من جزئين بحيث $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$ تشير إلى فترة صلاحية تشغيل المكون الأول و الثانى على الترتيب و معامل الارتباط بينهما ρ و افترضا أن $f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-\rho)}\ I_{\circ}\left(\frac{2\sqrt{\rho\lambda_1\lambda_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2}}{1-\rho}\right)\ \mathrm{Exp}\ \left(\frac{-\lambda_1\tilde{a}_1-\lambda_2\tilde{a}_2}{1-\rho}\right)$$

حيث

$$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\ge 0\ \ ,\ \ \lambda_1,\lambda_2>0\ \ ,\ \ 0\le\rho\le 1 \qquad (6\text{-}29)$$

$$I_{\circ}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(z/_2\right)^{2J}}{j!} \qquad (6\text{-}30)$$

و تسمى الدالة $I_{\circ}(z)$ بدالة بازل المعدلة **modified Bassel function** من النوع الأول و الترتيب **ordered** صفر (أنظر ملحق (٩))، حيث يمثل المتغير **z** عدد مرات حدوث عطل فى النظام (نتيجة حدوث عطل فى الجزء الأول أو الثانى أو الأثنين معاُ). و فى حالة عدم حدوث أى عطل فأن $z = 0$ و بالتالى فأن $I_{\circ}(z) = 1$.

و انتشر تطبيق هذا النموذج باسم **Downton** و يرجع ذلك إلى العديد من التطبيقات لهذا التوزيع التى قدمها **Downton** [62, 23].

و يلاحظ أنه عندما يكون المتغيران $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ مستقلين فأن $\rho = 0$ و فى هذه الحالة تصبح $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1\lambda_2 \, \mathrm{Exp}\{-(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)\} \tag{6-31}$$

نموذج (٥)

فى سنة ٢٠١٨ قدما **Hafez and El-Dash** تقريب لتوزيع **Downton** . فمن العلاقتين (6-29)، (6-30) و أستخدام نظرية تيلور نجد ان:

$$I_\circ\left(\frac{2\sqrt{\rho\lambda_1\lambda_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2}}{1-\rho}\right) = 1 + \left(\frac{4(\rho\lambda_1\lambda_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2)}{1!\ (1-\rho)}\right) + \left(\frac{16(\rho\lambda_1\lambda_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2)^2}{2!\ (1-\rho)^2}\right) + \cdots \tag{6-32}$$

فأن:

$$I_\circ\left(\frac{2\sqrt{\rho\lambda_1\lambda_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2}}{1-\rho}\right) \simeq 1 \tag{6-33}$$

و يعتبر هذا التقريب صحيح فى أستخدام تقريب لنموذج **Downton** فى أسلوب **(CCP)**، حيث يمثل تقريب الدالة $I_\circ$ إلى 1 "حالة تحقيق القيد" كما سوف نوضح فيما يلى.

و بالتالى فأن دالة كثافة الأحتمال التقريبية المشتركة و دالة التوزيع التراكمية المشتركة التقريبية تصبحا على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-\rho)^2} \, \mathrm{Exp}\left\{\frac{-(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)}{1-\rho}\right\} \tag{6-34}$$

$$F(a_1, a_2) = \left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1 a_1}{1-\rho}\right)\right]\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2 a_2}{1-\rho}\right)\right]$$

و نلاحظ أنه فى حالة أستقلال $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ فأن $\rho = 0$ و فى هذه الحالة تصبح $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1\lambda_2 \, \mathrm{Exp}\{-(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)\} \tag{6-35}$$

كذلك $F(a_1, a_2)$ على النحو:

$$F(a_1, a_2) = \{1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_1 a_1)\}\{1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_2 a_2)\} \qquad (6\text{-}36)$$

نموذج (٦)

فى سنة ٢٠١٩ قدمت El-Dash تطوير لنموذج (٢) الذى قدمه Farlie, Gumbel and Morgenstern حيث أفترضت أن $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ لأن معظم التطبيقات الفعلية لا يتوافر فيها شرط $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و قدمت $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1 \lambda_2 \,\mathrm{Exp}\{-(\lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2)\}\{1 + \alpha\,[2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_1 \tilde{a}_1) - 1]\,[2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_2 \tilde{a}_2) - 1]\} \qquad (6\text{-}37)$$
$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \;,\; |\alpha| < 1$$

و يمكن أثبات أن: $\int_0^\infty \int_0^\infty f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)\, d\tilde{a}_1\, d\tilde{a}_2 = 1$

و أثبتت أن دالة التوزيع التراكمية على النحو التالى:

$$F(a_1, a_2) = [1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_1 a_1)][1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_2 a_2)]\,\big[1 + \alpha\,\mathrm{Exp}[-(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)]\big] \qquad (6\text{-}38)$$

ا

كذلك يمكن أثبات أن معامل الارتباط فى هذه الحالة على التالى النحو :

$$\rho = \frac{1}{4}\alpha \longrightarrow -\frac{1}{4} < \rho < \frac{1}{4} \quad , \quad \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 > 0$$

أيضاً.

و فى حالة أستقلال المتغيرين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ فأن $\alpha = 0$ و فى هذه الحالة نجد ان:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1 \lambda_2 \,\mathrm{Exp}\{-(\lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2)\} \qquad (6\text{-}39)$$

$$F(a_1, a_2) = [1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_1 a_1)][1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_2 a_2)] \;,\; a_1, a_2 > 0 \qquad (6\text{-}40)$$

نموذج (٧)

فى سنة ٢٠١٩ قدمت El-Dash أيضاً تطوير لنموذج Freund (نموذج (٣)) حيث أفترضت أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \begin{cases} C\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\right) \operatorname{Exp}\{-\lambda_1\tilde{a}_1 - (\lambda_2+\theta)\tilde{a}_2\}, \tilde{a}_2 > \tilde{a}_1 \geq 0 & (6\text{-}41) \\ C\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\theta}\right) \operatorname{Exp}\{-(\lambda_1+\theta)\tilde{a}_1 - \lambda_2\tilde{a}_2\}, \tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 \geq 0 & (6\text{-}42) \end{cases}$$

حيث

$$C = \frac{(\lambda_1+\theta)(\lambda_2+\theta)(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad (6\text{-}43)$$

و يمكن أثبات أن: $\int_0^\infty \int_0^\infty f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)\, d\tilde{a}_1\, d\tilde{a}_2 = 1$

و فى حالة أستقلال $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ تكون $\theta = 0$ و بالتالى $C = \lambda_1\lambda_2$ و تصبح دالة كثافة الاحتمال المشتركة على النحو التالى

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1\lambda_2 \operatorname{Exp}\{-\lambda_1\tilde{a}_1 - \lambda_2\tilde{a}_2\}, \quad \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \geq 0$$

$$F(a_1, a_2) = \{1 - \operatorname{Exp}(-\lambda_1 a_1)\}\{1 - \operatorname{Exp}(-\lambda_2 a_2)\}$$

كذلك دالة التوزيع التراكمية المشتركة $F(a_1, a_2)$

$$F(a_1, a_2) = \int_0^{a_1}\int_0^{a_2} C\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\right) \operatorname{Exp}\{-\lambda_1\tilde{a}_1 - (\lambda_2+\theta)\tilde{a}_2\}\, d\tilde{a}_1\, d\tilde{a}_2$$
$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} \{1 - \operatorname{Exp}(-\lambda_1 a_1)\}\{1 - \operatorname{Exp}[-(\lambda_2+\theta)a_2]\},$$
$$a_2 > a_1 \qquad (6\text{-}44)$$

بالمثل عندما $a_1 > a_2$ فأن

$$F(a_1, a_2) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} \{1 - \operatorname{Exp}[-(\lambda_1+\theta)a_1]\}\{1 - \operatorname{Exp}(-\lambda_2 a_2)\},$$
$$a_1 > a_2 \qquad (6\text{-}45)$$

(٦-٥) القيود بمعلمات تتبع التوزيع الأسى الثنائى

Constraints with $\tilde{a}_{ij} \sim$ Bivariate Exponential Distribution

فى الفصل السابق تناولنا بشئ من التفصيل بعض النماذج المختلفة للتوزيع الأسى الثنائى الأكثر أستخداماً.

و يهدف هذا الفصل إلى تقديم أستخدام بعض التوزيعات الأسية الثنائية فى أسلوب البرمجة الاحتمالية المقيدة بقيود أحتمالية (CCP)، عندما توجد معلمتين عشوائيتين لهما التوزيع الأسى الثنائى.

و سوف يقتصر أستخدامنا للنماذج المقدمة فى الفصل السابق على النماذج (٥)-(٧).

فإذا أعتبرنا القيود الاحتمالية التالية:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right) \ge \gamma_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m^{\backslash} \qquad (6\text{-}46)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i\right) \ge \gamma_i \quad , \quad i = m^{\backslash} + 1, \dots, m \qquad (6\text{-}47)$$

حيث المتغيرات العشوائية $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ تتبع التوزيع الاسى الثنائى بمعلمتين $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ وفقاً للنماذج (٥)-(٧) السابق تقديمها فى الفصل السابق كذلك a_{ij}, b_i مقادير ثابتة، γ_i تمثل مستوى المأمونية للقيد رقم i ، $0 < \gamma_i < 1$ ، x_j ، $j = 1, 2, \dots, n$ تشير إلى المتغيرات القرارية $x_j \ge 0$.

فإذا فرضنا أن المتغير $\tilde{z}_i$ دالة فى $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ على النحو التالى:

$$\tilde{z}_i = \tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 \qquad (6\text{-}48)$$

و فيما يلى سوف نقدم كيفية تحويل القيود الاحتمالية (6-47)،(6-46) إلى قيود يقينية بأستخدام النماذج (٥)-(٧).

(٦-٥-١): أستخدام النموذج (٥)

إذا كان $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ متغيران عشوائيين على الترتيب و لهما التوزيع الاسى الثنائى وفقاً لنموذج (٥) حيث العلاقة بينهما علاقة موجبة (طردية) positive relation و بمعامل أرتباط

ρ , $0 \le \rho \le 1$ و بأستخدام أسلوب التحويلات transformation [أنظر الفصل (٥-٥)] فأننا نحصل على دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\tilde{z}$ و لتكن $f(\tilde{z})$ على النحو التالى [101]:

$$f(\tilde{z}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(1-\rho)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1(1-\rho)}\,\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2(1-\rho)}\,\tilde{z}\right)\right\} \quad , \quad \tilde{z}>0 \qquad (6\text{-}49)$$

كذلك $\int_0^\infty f(\tilde{z})\,d\tilde{z} = 1$

كذلك دالة التوزيع التراكمية $F(z)$ على النحو:

$$F(z) = P_r(\tilde{z} \le z) = \int_0^z f(\tilde{z})\,d\tilde{z}$$

$$= \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2(1-\rho)}\,z\right) - 1\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1(1-\rho)}\,z\right) - 1\right\}$$

$$= \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\,\mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_2}{x_2(1-\rho)}\,z\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\,.\,\mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_1}{x_1(1-\rho)}\,z\right\} + 1 \qquad (6\text{-}50)$$

و نلاحظ أنه فى حالة أستقلال المتغيران $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}$ فأن $\rho = 0$ و فى هذه الحالة تصبح $F(z)$, $f(\tilde{z})$ على النحو التالى [156]:

$$f(\tilde{z}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\,\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\,\tilde{z}\right)\right\} \qquad (6\text{-}51)$$

$$F(z) = P_r(\tilde{z} \le z) = \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\,z\right) - 1\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\,z\right) - 1\right\}$$

$$= \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\ \mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_2}{x_2}\ z\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_1}{x_1}\ z\right\} + \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} + \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}$$

$$= \frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\ \mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_2}{x_2}\ z\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \mathrm{Exp}\left\{\frac{-\lambda_1}{x_1}\ z\right\} + 1 \qquad (6\text{-}52)$$

و فيما يلى سوف نوضح كيفية تحويل القيود الاحتمالية فى (6-46)،(6-47) إلى قيود يقينية على النحو التالى:

١) بالنسبة للقيد (6-46)

$$P_r\left(\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$P_r\left(\tilde{z} \le b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right) \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$F\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right) \ge \gamma_i \qquad (6\text{-}53)$$

و من تعريف دالة التوزيع التراكمية $F(z)$ فى (6-50) و التعويض فى الطرف الايسر للمتباينة (6-53) نجد أن القيد اليقينى المكافئ على النحو:

$$\frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_2}{x_2(1-\rho)}\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_1}{x_1(1-\rho)}\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} + 1 \ge \gamma_i \qquad (6\text{-}54)$$

مكافئ للقيد الأحتمالى (6-46).

٢) بالمثل بالنسبة للقيد (6-47) يمكن أعادة كتابته على النحو التالى:

$$P_r\left(\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 \ge b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right) \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$1 - F\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right) \geq \gamma_i \longrightarrow$$

$$F\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}\right) \leq 1 - \gamma_i \qquad (6\text{-}55)$$

و من تعريف $F(z)$ فى (6-50) و بالتعويض فى الطرف الأيسر للمتباينة أعلاه نجد ان القيد الأحتمالى (6-47) مكافئ للقيد اليقينى التالى:

$$\frac{\lambda_1 x_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_2}{x_2(1-\rho)}\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} - \frac{\lambda_2 x_1}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\left\{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_1}{x_1(1-\rho)}\left(b_i - \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} + 1 \leq 1 - \gamma_i \qquad (6\text{-}56)$$

مثال (٦-٣)

إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيرين لهما التوزيع الأسى الثنائى بمعلمات $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ و معامل الارتباط بينهما $\rho = 0.7$ أعتبر نموذج برمجة الهدف الأحتمالية التالى:
أوجد x_1, x_2 التى تجعل:

$$\text{Max. } H = 4x_1 + 3x_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \qquad (2)$$

$$10x_1 + 3x_2 \leq 30 \qquad (3)$$

$$P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 \leq 15) \geq 0.80 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

المطلوب

أ. حول القيد الاحتمالى (4) إلى قيد يقينى مكافئ،
ب. حل النموذج اليقينى المكافئ،
ج. علق على الحل.

الحل

أ) بأفتراض أن $\tilde{z} = \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2$ فأن القيد (4) يصبح على النحو التالى

$$P_r(\tilde{z} \leq 15) \geq 0.80 \qquad (6)$$

من أستخدام العلاقة (6-54) و التعويض بقيم $\lambda_1, \lambda_2, \rho$ نحصل على:

$$\frac{2x_2}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-15}{0.3x_2}\right)-\frac{x_1}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-2(15)}{0.3x_1}\right)+1\geq 0.8 \longrightarrow$$

$$\frac{x_1}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-30}{0.3x_1}\right)-\frac{2x_2}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-15}{0.3x_2}\right)-1\leq -0.8$$

ب) و يصبح النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:
أوجد x_1, x_2 التى تجعل

$$\begin{aligned} &\text{Max. } H = 4x_1+3x_2\\ \text{S.T.}\quad &5x_1+7x_2\leq 35\\ &10x_1+3x_2\leq 30 \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-30}{0.3x_1}\right)-\frac{2x_2}{(x_1-2x_2)}\,\mathrm{Exp}\left(\frac{-15}{0.3x_2}\right)\leq 0.2 \qquad (7)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و نلاحظ أن القيد (7) المكافئ للقيد الاحتمالى الخطى (فى المتغيرات القرارية) قيد غير خطى فى المتغيرات القرارية و بالتالى يمكن حل النمودج غير الخطى أعلاه بأحد أساليب البرمجة غير الخطية [٨, 64].

كذلك يمكن أيضاً تقريب القيد (7) إلى قيد خطى بأستخدام نظرية تيلور [٧, 151] و يصبح على النحو التالى:

$$0.03x_1-0.02x_2\leq 0.19^{*} \qquad (8)$$

و بالتالى يصبح النموذج (8)،(5)،(3)-(1) نموذج خطى يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس و يكون الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$z^{*}=18.55 \;,\quad x_1^{*}=1.91 \quad,\quad x_2^{*}=3.64$$

مثال (٦-٤)

أعتبر النموذج الاحتمالى التالى:

أوجد x_1, x_2, x_3 التى تجعل

$$\text{Min. } H = 2x_1 + x_2 + x_3 \quad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + 3x_3 \le 60) \ge 0.6 \quad (2)$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 15 \quad (3)$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 24 \quad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad (5)$$

حيث $\gamma = 0.6 \ , \ \rho = 0.5 \ , \ \lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = 8$

المطلوب

١- تحويل القيد الأحتمالى (2) إلى قيد يقينى ثم تقريبه إلى قيد خطى
٢- حل النموذج الخطى بأستخدام السمبلكس

الحل

١- $P_r(z \le 60 - 3x_3) \ge 0.6 \longrightarrow$

$$\frac{8x_1}{(8x_1 - 5x_2)} \text{Exp}\left\{\frac{-5}{0.5x_1}(60 - 3x_3)\right\} - \frac{5x_2}{(8x_1 - 5x_2)} \text{Exp}\left\{\frac{-8}{0.5x_2}(60 - 3x_3)\right\} \le 0.4 \quad (6)$$

و بتقريب القيد (6) إلى قيد خطى بأستخدام نظرية تيلور أيضاً فيصبح على النحو التالى:

$$0.1628x_1 + 0x_2 - 0.098x_3 \le 0.6294\ ^{*} \quad (7)$$

و الحل الأمثل فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$z^* = 5.29 \ , \quad x_1^* = 0.86 \quad , \quad x_2^* = 3.57 \quad , \quad x_3^* = 0$$

(٦-٥-٢): أستخدام النموذج (٦)

إذا فرضنا أن المتغيرين العشوائيين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ يتبعا التوزيع الاسى الثنائى المقدم فى النموذج (٦) بالفصل السابق، و النظرية التالية توضح كيفية تحويل القيد الاحتمالى إلى فيد يقينى مكافئ.

* النقطة التى تم التقريب حولها $(x_1^\circ = 20 \ , \ x_2^\circ = 15)$ فى مثال (٦- ٣)

نظرية (٦-١)

إذا فرضنا أن دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ و دالة التوزيع التراكمية المشتركة $F(a_1, a_2)$ للمتغيرين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ و معمل الارتباط بينهما ρ على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1\lambda_2 \text{Exp}[-(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)]\{1 + \alpha[2\,\text{Exp}(-\lambda_1\tilde{a}_1) - 1] \cdot [2\,\text{Exp}(-\lambda_2\tilde{a}_2) - 1]\}\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0\ ,\ |\alpha| < 1 \quad (6\text{-}57)$$

$$F(a_1, a_2) = [1 - \text{Exp}(-\lambda_1 a_1)][1 - \text{Exp}(-\lambda_2 a_2)] \Big[1 + \alpha\big[\text{Exp}\big(-(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\big)\big]\Big] \quad (6\text{-}58)$$

$$\rho = \frac{1}{4}\alpha \quad \longrightarrow -\frac{1}{4} \le \rho \le \frac{1}{4} \quad (6\text{-}59)$$

و بأفتراض أن $\tilde{z} = \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2\ ,\ \ x_1, x_2 \ge 0$ فأن دالة كثافة الأحتمال و دالة التوزيع التراكمية $F(z)$ و $f(\tilde{z})$ للمتغير $\tilde{z}$ على الترتيب، على النحو التالى [83]:

$$\begin{aligned} f(\tilde{z}) = {} & \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \left[\text{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \text{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right] \\ & + \alpha\lambda_1\lambda_2 \left\{ \left[\frac{3\,\text{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - 2\,\text{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right)\right) - \text{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right] \right. \\ & - \frac{2\left[\text{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \text{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right)\tilde{z}\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)} \\ & \left. - \frac{2\left[\text{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \text{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right]}{(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right\} \ ,\lambda_2 x_1 \ne \lambda_1 x_2 \qquad (6\text{-}60) \end{aligned}$$

---

* النقطة التى تم التقريب حولها $(x_1^{\circ} = 4\ ,\ x_2^{\circ} = 2\ ,\ x_3^{\circ} = 4)$ في مثال (٦- ٤)

$$\mathbf{F(z) = P_r(\tilde{z} \le z) = \int_0^z f(\tilde{z})\, d\tilde{z} \quad , \qquad z \ge 0}$$

$$= \left\{ \frac{\lambda_2 x_1 \left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right] - \lambda_1 x_2 \left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right\}$$

$$+ \alpha \left\{ \left[\frac{3x_1\lambda_2(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right] \right.$$

$$-2 \left[\frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 \left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2} z\right)\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right]$$

$$- \left[\frac{\lambda_1 x_2 (2\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right]$$

$$-2 \left[\frac{\lambda_2 x_1 (\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 \left[1 - \left(\mathrm{Exp} - \left(\frac{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2} z\right)\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right]$$

$$\left. - \left[\frac{2\lambda_2 x_1 \left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right] - \lambda_1 x_2 \left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2} z\right)\right]}{(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \right] \right\} \tag{6-61}$$

<u>الأثبات:</u> بما أن

$$\mathbf{f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \lambda_1\lambda_2 \mathrm{Exp}[-(\lambda_1\tilde{a}_1 + \lambda_2\tilde{a}_2)]\{1 + \alpha(2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_1\tilde{a}_1) - 1)}$$
$$\mathbf{(2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_2\tilde{a}_2) - 1)\}}$$

و بأفتراض أن

$$\mathbf{\tilde{z} = g_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 \longrightarrow \tilde{k} = g_2(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \tilde{a}_2 x_2}$$

$$\tilde{a}_1 = \frac{1}{x_1}\left(\tilde{z}-\tilde{k}\right) = g_1^{-1}(\tilde{z},\tilde{k}) \longrightarrow \tilde{a}_2 = \frac{1}{x_1}\tilde{k} = g_2^{-1}(\tilde{z},\tilde{k})$$

و بأستخدام أسلوب التحويلات **transformation technique** (أنظر الفصل (٥-٥)) فأن:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}(\tilde{z},\tilde{k})}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial g_1^{-1}(\tilde{z},\tilde{k})}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{\partial g_2^{-1}(\tilde{z},\tilde{k})}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial g_2^{-1}(\tilde{z},\tilde{k})}{\partial \tilde{k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{-1}{x_1} \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$f\left(\tilde{z},\tilde{k}\right) = |J|\ f\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{x_1x_2}\ \mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_1}{x_1}\left(\tilde{z}-\tilde{k}\right) - \frac{\lambda_2}{x_2}\ \tilde{k}\right]\left\{1+\alpha\left[2\ \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\left(\tilde{z}-\tilde{k}\right)\right)-1\right]\right.$$
$$\left.\left[2\ \mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda_2}{x_2}\ \tilde{k}\right)-1\right]\right\}$$

و بالتالى فأن:

$$f(\tilde{z}) = \int_0^{\tilde{z}} f\left(\tilde{z},\tilde{k}\right) d\tilde{k}$$

$$f(\tilde{z}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2x_1-\lambda_1x_2)}\left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right]$$
$$+\alpha\lambda_1\lambda_2\left\{\left[\frac{3\ \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\ \tilde{z}\right) - 2\ \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2x_1-\lambda_1x_2}{x_1x_2}\right)\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\ \tilde{z}\right)}{(\lambda_2x_1-\lambda_1x_2)}\right]\right.$$

$$-\frac{2\left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\ \tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_2x_1-\lambda_1x_2}{x_1x_2}\right)\tilde{z}\right)\right]}{(\lambda_2x_1-2\lambda_1x_2)}$$
$$\left.-\frac{2\left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\ \tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2}\ \tilde{z}\right)\right]}{(2\lambda_2x_1-\lambda_1x_2)}\right\} \quad ,\lambda_2x_1 \neq \lambda_1x_2$$

و بالتالى فأن

$$F(z) = P_r(\tilde{z} \le z) = \int_0^z f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \int_0^z \left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}$$

$$+\lambda_1\lambda_2\,\alpha\left\{\frac{1}{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}\int_0^z \left[3\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - 2\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right)\tilde{z}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}$$

$$- \frac{2}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \int_0^z \left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right)\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}$$

$$\left.- \frac{2}{(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)} \int_0^z \left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\lambda_2 x_1\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right] - \lambda_1 x_2\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right\}$$

$$+\alpha\left\{\left[\frac{3x_1\lambda_2(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right]\right.$$

$$-2\left[\frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right) z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{\lambda_1 x_2(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right]$$

$$-2\left[\frac{\lambda_2 x_1(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1} z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{x_1 x_2}\right) z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1 - 2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{2\lambda_2 x_1\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}z\right)\right]-\lambda_1 x_2\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2}z\right)\right]}{(2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]\Bigg]\Bigg\}$$

مثال (٦-٥)

إذا كان معامل الارتباط بين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ يساوى ρ بحيث $\rho = 0.2$ و بالتالى من العلاقة (6-59) فأن $\alpha = 0.8$. حول القيود الاحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة.

1) $P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 \le 10) \ge 0.9$

2) $P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 - 5x_3 \ge 25) \ge 0.7$

حيث $\lambda_2 = 5$, $\lambda_1 = 2$

الحل

1) $P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 \le 10) \ge 0.9 \longrightarrow$

$P_r(\tilde{z} \le 10) \ge 0.9 \longrightarrow F(10) \ge 0.9$ (١)

و بالتعويض فى الطرف الايسر بالدالة فى (6-61) نجد أن

$$=\left\{\frac{\lambda_2 x_1\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}z\right)\right]-\lambda_1 x_2\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right\}$$

$$+\alpha\left\{\left[\frac{3x_1\lambda_2(2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]\right.$$

$$-2\left[\frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2\left[1-\operatorname{Exp}\left(-\left(\frac{2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2}{x_1 x_2}z\right)\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)(2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{\lambda_1 x_2(2\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]$$

$$-2\left[\frac{\lambda_2 x_1(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}z\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2\left[1-\left(\mathrm{Exp}-\left(\frac{\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2}{x_1 x_2}z\right)\right)\right]}{(\lambda_2 x_1-2\lambda_1 x_2)(\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]$$

$$\left.-\left[\frac{2\lambda_2 x_1\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}z\right)\right]-\lambda_1 x_2\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda_2}{x_2}z\right)\right]}{(2\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2)}\right]\right\}\geq 0.9$$

و بالتعويض بقيم α , λ_2 , λ_1 , $z=10$ نجد أن

$$=\left\{\frac{5x_1\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-20}{x_1}\right)\right]-2x_2\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-50}{x_2}\right)\right]}{(5x_1-2x_2)}\right\}+0.8\left\{\right.$$

$$\left[\frac{15x_1(10x_1-2x_2)\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-20}{x_1}\right)\right]-20x_1x_2\left[1-\left(\mathrm{Exp}-\left(\frac{100x_1-20x_2}{x_1x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1-2x_2)(10x_1-2x_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{2x_2(10x_1-2x_2)\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-50}{x_2}\right)\right]}{(5x_1-2x_2)(10x_1-2x_2)}\right]$$

$$-2\left[\frac{5x_1(5x_1-2x_2)\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-20}{x_1}\right)\right]-10x_1x_2\left[1-\left(\mathrm{Exp}-\left(\frac{100x_1-20x_2}{x_1x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1-4x_2)(5x_1-2x_2)}\right]$$

$$\left.-\left[\frac{10x_1\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-20}{x_1}\right)\right]-2x_2\left[1-\mathrm{Exp}\left(\frac{-100}{x_2}\right)\right]}{(10x_1-2x_2)}\right]\right\}$$

و واضح أن القيد اليقينى أعلاه قيد غير خطى و يمكن تقريبه إلى قيد خطى كما ذكرنا فى الأمثلة السابقة.

2) $P_r(\tilde{a}_1x_1+\tilde{a}_2x_2-5x_3\geq 25)\geq 0.7 \longrightarrow$
$1-P_r(\tilde{z}\leq 25+5x_3)\geq 0.7 \longrightarrow$

$$P_r(\tilde{z} \leq 25 + 5x_3) \leq 0.3 \longrightarrow F(25 + 5x_3) \leq 0.3$$

و بالتعويض بـ λ_2 , λ_1 , α فى (6-61) كذلك $z = 25 + 5x_3$ نجد أن

$$= \left\{ \frac{5x_1\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{10x_3 + 50}{x_1}\right)\right)\right] - 2x_2\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{25x_3 + 125}{x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 2x_2)} \right\}$$

$$+0.8\left\{\left[\frac{15x_1(10x_1 - 2x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{10x_3 + 50}{x_1}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 2x_2)(10x_1 - 2x_2)}\right.\right.$$

$$-\left[\frac{20x_1x_2\left[1 - \left(\mathrm{Exp} - \left(\frac{(10x_1 - 2x_2)(5x_3 + 25)}{x_1x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 2x_2)(10x_1 - 2x_2)}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2x_2(10x_1 - 2x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{25x_3 + 125}{x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 2x_2)(10x_1 - 2x_2)}\right]\right]$$

$$-2\left[\frac{5x_1(5x_1 - 2x_2)\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{10x_3 + 50}{x_1}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 4x_2)(5x_1 - 2x_2)}\right.$$

$$\left.-\frac{10x_1x_2\left[1 - \left(\mathrm{Exp} - \left(\frac{(5x_1 - 2x_2)(5x_3 + 25)}{x_1x_2}\right)\right)\right]}{(5x_1 - 4x_2)(5x_1 - 2x_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{10x_1\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{10x_3 + 50}{x_1}\right)\right)\right]}{(10x_1 - 2x_2)}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2x_2\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{50x_3 + 250}{x_2}\right)\right)\right]}{(10x_1 - 2x_2)}\right]\right\} \leq 0.30$$

(٦-٥-٣) أستخدام النموذج (٧)

فى الفصل السابق قدمنا نموذج (٧) حيث دالة كثافة الأحتمال المشتركة و دالة التوزيع التراكمية المشتركة $F(a_1,a_2)$, $f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)$ على النحو[82]:

$$f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2) = \begin{cases} c\dfrac{\lambda_1}{(\lambda_1+\theta)}\mathrm{Exp}[-\lambda_1\tilde{a}_1-(\lambda_2+\theta)\tilde{a}_2] \;,\; \tilde{a}_2>\tilde{a}_1\geq 0 \\ c\dfrac{\lambda_2}{(\lambda_2+\theta)}\mathrm{Exp}[-(\lambda_1+\theta)\tilde{a}_1-\lambda_2\tilde{a}_2] \;,\; \tilde{a}_1>\tilde{a}_2\geq 0 \end{cases} \quad (6\text{-}62)$$

$$c=\frac{(\lambda_1+\theta)(\lambda_2+\theta)(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} \quad (6\text{-}63)$$

$$F(a_1,a_2)=P_r(\tilde{a}_1\leq a_1 \;,\tilde{a}_2\leq a_2)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}\{1-\mathrm{Exp}[-\lambda_1 a_1]\}\{1-\mathrm{Exp}[-(\lambda_2+\theta)a_2]\}\,, a_2>a_1 \\ \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}\{1-\mathrm{Exp}[-(\lambda_1+\theta)a_1]\}\{1-\mathrm{Exp}[-\lambda_2 a_2]\}\,, a_1>a_2 \end{cases} \quad (6\text{-}64)$$

نظرية (٦-٢)

إذا فرضنا أن دالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرين $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$ الدالة فى (6-63)
و بأفتراض أن التغير $\tilde{z}$ بحيث [82]:

$$\tilde{z}=\tilde{a}_1x_1+\tilde{a}_2x_2 \;,\qquad x_1,x_2\geq 0 \quad (6\text{-}65)$$

فأن دالة كثافة الأحتمال و دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{z}$ ، $F(z)$, $f(\tilde{z})$ على الترتيب على النحو التالى:

$$f(\tilde{z}) = \begin{cases} g_1(x_1,x_2)\left\{\mathrm{Exp}\left[\dfrac{-\lambda_1}{x_1}\right]\tilde{z}-\mathrm{Exp}\left[\dfrac{-(\lambda_2+\theta)}{x_2}\right]\tilde{z}\right\} \;,\tilde{a}_2>\tilde{a}_1 & (6\text{-}66) \\ g_2(x_1,x_2)\left\{\mathrm{Exp}\left[\dfrac{-(\lambda_1+\theta)}{x_1}\right]\tilde{z}-\mathrm{Exp}\left[\dfrac{-\lambda_2}{x_2}\right]\tilde{z}\right\} \;,\tilde{a}_1>\tilde{a}_2 & (6\text{-}67) \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} g_1(x_1,x_2)\left\{\frac{x_1}{\lambda_1}\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\right)z\right]\right. \\ g_2(x_1,x_2)\left\{\frac{x_1}{(\lambda_1+\theta)}\left[1-\operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_1+\theta)}{x_1}\right]z\right]\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{x_2}{(\lambda_2+\theta)}\left[1-\operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_2+\theta)}{x_2}\right]z\right]\Big\}, a_2 > a_1 & \text{(6-68)} \\ -\frac{x_2}{\lambda_2}\left[1-\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\right)z\right]\Big\} \quad , a_1 > a_2 & \text{(6-69)} \end{cases}$$

$$g_1(x_1,x_2) = \frac{c\lambda_1}{(\lambda_1+\theta)[(\lambda_2+\theta)x_1-\lambda_1x_2]} \qquad \text{(6-70)}$$

$$g_2(x_1,x_2) = \frac{c\lambda_2}{(\lambda_2+\theta)[\lambda_2x_1-(\lambda_1+\theta)x_2]} \qquad \text{(6-71)}$$

<u>**الأثبات:**</u> بما ان $\tilde{z} = \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 \;,\; x_1,x_2 \geq 0$

أولاً: ١- إذا كان $\tilde{a}_2 > \tilde{a}_1$ ، و فرضنا أن $\tilde{k} = \tilde{a}_1x_1$ بالتالى فأن:

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{x_2}(\tilde{z}-\tilde{k}) \quad , \quad \tilde{a}_1 = \frac{1}{x_1}\tilde{z}$$

و بالتالى فأن:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\tilde{a}_1}{\partial\tilde{z}} & \frac{\partial\tilde{a}_1}{\partial\tilde{k}} \\ \frac{\partial\tilde{a}_2}{\partial\tilde{z}} & \frac{\partial\tilde{a}_2}{\partial\tilde{k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{-1}{x_2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{x_1x_2}\right| = \frac{1}{x_1x_2}$$

و بأستخدام أسلوب التحويلات (أنظر الباب الخامس) فأن:

$$f(\tilde{z},\tilde{k}) = \frac{1}{x_1x_2}\, c\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\right)\operatorname{Exp}\left\{\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{k} - (\lambda_2+\theta)\left(\frac{\tilde{z}-\tilde{k}}{x_2}\right)\right\}$$
$$, \quad \tilde{a}_2 > \tilde{a}_1 \qquad \text{(6-72)}$$

و بالتالى فأن

$$\mathbf{f}(\tilde{z}) = \int_0^{\tilde{z}} \mathbf{f}(\tilde{z}, \tilde{k})$$
$$= \frac{c\lambda_1}{x_1 x_2(\lambda_1 + \theta)} \operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_2 + \theta)}{x_2}\right] \int_0^{\tilde{z}} \operatorname{Exp}\left[\frac{-1}{x_1 x_2}(\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 - \theta x_1)\tilde{k}\right] d\tilde{k}$$

$$= \frac{c\lambda_1}{(\lambda_1 + \theta)[(\lambda_2 + \theta)x_1 - \lambda_1 x_2]} \left[\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \operatorname{Exp}\left(\frac{-(\lambda_2 + \theta)}{x_2}\tilde{z}\right)\right] \quad (6\text{-}73)$$

٢- إذا كان $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2$ بالمثل فأننا نفترض أن

$$\tilde{k} = \tilde{a}_2 x_2 \longrightarrow \tilde{a}_1 = \frac{1}{x_1}(\tilde{z} - \tilde{k}) \quad , \tilde{a}_2 = \frac{1}{x_2}\tilde{k}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{-1}{x_1} \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{x_1 x_2}\right| = \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$\mathbf{f}(\tilde{z}, \tilde{k}) = \frac{1}{x_1 x_2} \left(\frac{c\lambda_2}{\lambda_2 + \theta}\right) \operatorname{Exp}\left\{\frac{-(\lambda_1 + \theta)}{x_1}(\tilde{z} - \tilde{k}) - \left(\frac{\lambda_2 \tilde{k}}{x_2}\right)\right\} \longrightarrow$$

$$\mathbf{f}(\tilde{z}) = \frac{c\lambda_2}{x_1 x_2(\lambda_2 + \theta)} \operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_1 + \theta)}{x_1 x_2}\tilde{z}\right] \int_0^{\tilde{z}} \operatorname{Exp}\left[\frac{-\lambda_2 x_1 - (\lambda_1 + \theta)x_2}{x_1 x_2}\right] d\tilde{k}$$

$$= \frac{c\lambda_2}{(\lambda_2 + \theta)[-\lambda_2 x_1 - (\lambda_1 + \theta)x_2]} \left\{\operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_1 + \theta)}{x_1}\tilde{z}\right] - \operatorname{Exp}\left[\frac{-\lambda_2}{x_1}\tilde{z}\right]\right\} (6\text{-}74)$$

ثانياً: ١- عندما $a_2 > a_1$ فأن

$$F(z) = \int_0^z f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

$$= \int_0^z g_1(x_1, x_2) \left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-(\lambda_2+\theta)}{x_2}\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}$$

$$= g_1(x_1, x_2)\left\{\int_0^z \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\tilde{z}\right) d\tilde{z} - \int_0^z \mathrm{Exp}\left(\frac{-(\lambda_2+\theta)}{x_2}\tilde{z}\right) d\tilde{z}\right\}$$

$$= g_1(x_1, x_2)\left\{\frac{x_1}{\lambda_1}\left[1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_1}{x_1}\right) z\right] - \frac{x_2}{(\lambda_2+\theta)}\left[1 - \mathrm{Exp}\left[\frac{-(\lambda_2+\theta)}{x_2}\right] z\right]\right\} \quad (6\text{-}75)$$

٢- بالمثل عندما $a_1 > a_2$

$$F(z) = \int_0^z f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

$$= \int_0^z g_2(x_1, x_2) \left[\mathrm{Exp}\left(\frac{-(\lambda_1+\theta)}{x_1}\tilde{z}\right) - \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right)\right] d\tilde{z}$$

$$= g_2(x_1, x_2)\left\{\int_0^z \mathrm{Exp}\left(\frac{-(\lambda_1+\theta)}{x_1}\tilde{z}\right) d\tilde{z} - \int_0^z \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_2}{x_2}\tilde{z}\right) d\tilde{z}\right\}$$

$$= g_2(x_1, x_2)\left\{\frac{x_1}{\lambda_1+\theta}\left[1 - \mathrm{Exp}\frac{-(\lambda_1+\theta)}{x_1}\tilde{z}\right] - \frac{x_2}{\lambda_2}\left[1 - \mathrm{Exp}\left[\frac{-\lambda_2}{x_2}\right]\tilde{z}\right]\right\} \quad (6\text{-}76)$$

مثال (٦-٦)

أعتبر مثال (٦-٣) بحيث $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\theta = 0.7$ و أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + 2x_3 \le 15) \ge 0.80 \longrightarrow$$

$$P_r(\tilde{z} \leq 15 - 2x_3) \geq 0.80 \longrightarrow$$

$$F(15 - 2x_3) \geq 0.80 \qquad (1)$$

و بأستخدام الدالة $F(z)$ فى (6-75) و التعويض فى الطرف الأيسر لـ (1) حيث:

$$c = \frac{(\lambda_1 + \theta)(\lambda_2 + \theta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{(2.7)(1.7)(3.7)}{3} = 5.661$$

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{c\lambda_1}{(\lambda_1 + \theta)[(\lambda_2 + \theta)x_1 - \lambda_1 x_2]} = \frac{5.661(2)}{(2.7)(1.7)[1.7x_1 - 2x_2]}$$
$$= \frac{11.322}{[7.803x_1 - 9.18x_2]}$$

$$g_2(x_1, x_2) = \frac{c\lambda_2}{(\lambda_2 + \theta)[\lambda_2 x_1 - (\lambda_1 + \theta)x_2]} = \frac{5.661}{(1.7)[x_1 - 4.59x_2]}$$

$$g_2(x_1, x_2)\left\{\frac{x_1}{1 + 0.7}\left[1 - \text{Exp}\,\frac{-(2 + 0.7)}{x_1}(15 - 2x_3)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{x_2}{1}\left[1 - \text{Exp}\left[\frac{-1}{x_2}\right](15 - 2x_3)\right]\right\} \geq 0.8$$

$$\frac{5.661}{(1.7x_1 - 4.59x_2)}\left\{\frac{x_1}{1.7}\left[1 - \text{Exp}\left(\frac{-(40.5 - 5.4x_3)}{x_1}\right)\right]\right.$$
$$\left. - x_2\left[1 - \text{Exp}\left(\frac{-(15 - 2x_3)}{x_2}\right)\right]\right\} \geq 0.8 \qquad (2)$$

و بأستخدام نظرية تيلور يمكن تقريب الطرف الأيسر للقيد (2) إلى دالة خطية *

$$98.37 - 6.6x_1 - 181.81x_2 - 0.058x_3 \geq 0.8 \longrightarrow$$

* تم استخدام التقريب حول النقطة الافتراضية $(x_1^\circ = 1\ ,\ x_2^\circ = 0.5\ ,\ x_3^\circ = 1)$

$$6.6x_1 + 181.81x_2 + 0.058x_3 \leq 97.57$$

و يصبح النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى على النحو التالى:

$$\text{Max. } H = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 5x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 35 \qquad (2)$$
$$10x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \qquad (3)$$
$$6.6x_1 + 181.81x_2 + 0.058x_3 \leq 97.57 \qquad (4)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (5)$$

و بأستخدام طريقة السمبلكس، نجد أن الحا الأمثل للنموذج (5)-(1) على النحو التالى:

$$H^* = 15.79 \;, \quad x_1^* = 0 \;, \quad x_2^* = 0.53 \;, \quad x_3^* = 14.2$$

(٦-٦) القيود الأحتمالية المشتركة

Joint Chance Constraints

فى الأبواب السابقة تناولنا بشئ من التفصيل القيود الأحتمالية chance-constraints و كيفية تتحويلها لقيود يقينية مكافئة. حيث أن جميع الحالات التى تم تناولها، كانت القيود الأحتمالية قيود منفصلة individual constraints بمعنى يتم تناول كل قيد على حدة و بمقياس مأمونية واحد γ_i بالنسبة للقيد (i)

و لكن فى كثير من المشاكل الفعلية مثل مشاكل تحقيق السعر التوازنى فى السوق حيث نجد أن قيود العرض مرتبطة بقيود الطلب [١٢, 133, 136, 199]، كذلك فى مشاكل الخدمات مثل صفوف الأنتظار فى المراكز الطبية حيث يوجد أرتباط بين القيود الممثلة لأزمنة وصول المرضى و القيود المرتبطة بأزمنة دخول المرضى للخدمة و مشاكل أخرى كثيرة [٨]، حيث يوجد أرتباط بين القيود الأحتمالية و تسمى فى هذه الحالة بالقيود المشتركة (أو المرتبطة) joint (dividual) constraints و يتم التعامل مع القيود الأحتمالية المشتركة كقيد أحتمالى واحد بمستوى مأمونية واحد لكل القيود المرتبطة.

فإذا فرضنا أن القيود الأحتمالية المنفصلة و عددها m يتم كتابتها على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_j a_{ij}x_j \le b_i\right) \ge \gamma_i \ , \ i = 1, 2, \ \ , m \qquad (6\text{-}77)$$

و هذا يعنى وجود عدد m من القيود الأحتمالية بعدد m من مستويات المأمونية.

و كما سبق يتم تحويل كل قيد احتمالى (i) إلى قيد يقينى مكافئ و بالتالى فأن عدد القيود اليقينية المكافئة يساوى (m) أيضاً.

أما القيود المشتركة و التى عددها (m) تكتب على النحو التالى [182, 199]:

$$P_r\left(\sum_j a_{ij}x_j \le b_i \ , \ i = 1, 2, \ \ , m\right) \ge \gamma \qquad (6\text{-}78)$$

و هذا القيد يعنى أحتمال تحقيق فئة القيود العشوائية معاً أكبر من أو يساوى γ عند وجود بعض المعلمات a_{ij}, b_i متغيرات عشوائية.

و يعتبر Miller and Wagner سنة ١٩٦٥ أول من قدما القيود الأحتمالية المشتركة و كيفية تحويلها إلى قيود مكافئة يقينية فى حالة أستقلال المعلمات العشوائية [199].

ثم تولت بعد ذلك العديد من الأبحاث فى هذا المجال مثل بحيث Prekopa سنة ١٩٧٠، و بحيث Jaganathan سنة ١٩٧٤ و حديثاً بحيث كل من El-Dash and Hafez سنة ٢٠١٨ [٨١] كذلك قدمت العديد من الدراسات التطبيقية [99, 201] منذ ١٩٦٥ و حتى الآن.

و فى هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا على تحويل قيدين أحتماليين مشتركين (مرتبطين) إلى قيد واحد يقينى مكافئ فى حالة عدم أستقلال بعض المعلمات العشوائية و حالة الاستقلال ايضاً.

و فى الباب التالى (السابع) يمكن أستخدام هذا الأسلوب فى حالة أكثر من قيدين مشتركين (تعدد القيود المشتركة joint multi-chance constraints).

و يعتبر هذا الفصل تطبيق للتوزيعات الأحتمالية الثنائية المقدمة فى الفصل (٦-٤)، كذلك يمكن أستخدام نفس الأسلوب بالنسبة للقيود المشتركة التى تتبع توزيعات أخرى.

و فيما يلى سوف نقدم كيفية تحويل كل القيد الأحتمالى يمثل مجموعة من القيود فى الحالات التالية:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le b_2\right) \ge \gamma_1 \qquad (6\text{-}79)$$

أو

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \le b_3\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j \ge b_4\right) \ge \gamma_2 \qquad (6\text{-}80)$$

أو

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j \ge b_5\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j \ge b_6\right) \ge \gamma_3 \qquad (6\text{-}81)$$

و فى هذا الفصل سوف نتناول الحالات السابقة بأستخدام التوزيعات الثنائية الأسية فى الفصل (٦-٤) بالنسبة للمعلمات العشوائية التالية:

<u>أولاً:</u> $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ يتبعا أحد التوزيعات الأسية الثنائية

<u>ثانياً:</u> $(\tilde{a}_{1j}, \tilde{a}_{2j})$ يتبعا أحد التوزيعات الأسية الثائية.

(٦-٦-١): $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ يتبعا أحد التوزيعات الأسية الثنائية

إذا فرضنا أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران يتبعا التوزيع الأسى الثنائى بمعلمتين λ_1, λ_2 على الترتيب. وفيما يلى سوف نستخدم التوزيعات الأحتمالية المشتركة فى النماذج (٥)-(٧) ، فى الفصل (٦-٤) لتحويل القيود الأحتمالية فى (6-81) - (6-79) إلى قيود يقينية.

أولاً: أستخدام النموذج (٥)

إذا فرضنا أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ يتبعا التوزيع الأسى الثنائى التقريبى فى نموذج (٥) عندما يتبع كل من $\tilde{b}_i$, $i = 1, 2$ التوزيع الأسى بمعلمتين [101]، و للتبسيط سوف نستخدم التوزيع الأسى بمعلمة واحدة على النحو التالى.

من الفصل (٦-٤) إذا أعتبرنا دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ و الدالة التراكمية المشتركة $F(b_1, b_2)$ حيث:

$$f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1-\rho)^2} \operatorname{Exp}\left[\frac{-(\lambda_1 \tilde{b}_1 + \lambda_2 \tilde{b}_2)}{(1-\rho)}\right] \quad , \quad 0 \le \rho \le 1$$

$$, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 > 0 \quad \text{(6-82)}$$

$$F(b_1, b_2) = \left[1 - \operatorname{Exp}\left(-\frac{\lambda_1 b_1}{1-\rho}\right)\right]\left[1 - \operatorname{Exp}\left(-\frac{\lambda_2 b_2}{1-\rho}\right)\right] \quad \text{(6-83)}$$

١- فإذا أعتبرنا القيد المشترك (6-79) فأن القيد اليقينى المناظر له على النحو التالى

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le \tilde{b}_1 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \le \tilde{b}_2\right) \ge \gamma_1 \quad \longrightarrow \quad \text{(6-84)}$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j}^{\infty} \int_{\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j}^{\infty} f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)\, d\tilde{b}_1\, d\tilde{b}_2$$

$$= \int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j}^{\infty} \frac{\lambda_1}{(1-\rho)} \operatorname{Exp}\left(-\frac{\lambda_1 \tilde{b}_1}{1-\rho}\right)\left[\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j}^{\infty} \frac{\lambda_2}{(1-\rho)} \operatorname{Exp}\left(-\frac{\lambda_2 \tilde{b}_2}{1-\rho}\right) d\tilde{b}_2\right] d\tilde{b}_1$$

$$= \operatorname{Exp}\left(-\lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j\right) \int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j}^{\infty} \frac{\lambda_1}{(1-\rho)} \operatorname{Exp}\left(-\frac{\lambda_1 \tilde{b}_1}{1-\rho}\right) d\tilde{b}_1$$

$$= \mathbf{Exp}\left(-\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right).\mathbf{Exp}\left(-\lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)$$

$$= \mathbf{Exp}\left[-\left(\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\right] \qquad (6\text{-}85)$$

و بالتعويض فى (6-79) بـ (6-85) نحد أن

$$\mathbf{Exp}\left(-\left(\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\right) \geq \gamma_1$$

و بأخذ لوغاريتم الطرفين فان:

$$-\left(\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right) \geq \mathbf{Ln}\ \gamma_1 \qquad (6\text{-}86)$$

و نلاحظ أن القيد (6-86) المكافئ للقيد (6-84) قيد خطى، و بما أن كل من , $\tilde{b}_1 \geq 0$ $\tilde{b}_2 \geq 0$ فأن ذلك يتطلب تحقيق الشروط التالية أيضاً.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \geq 0\ , \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \geq 0 \qquad (6\text{-}87)$$

و سوف نوضح ذلك فى مثال (٦-٧) التالى.

٢- إذا أعتبرنا القيد المشترك (6-80) فأن

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \leq b_3\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j \geq b_4\right) \geq \gamma_2 \qquad (6\text{-}88)$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty} \int_{0}^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} f\left(\tilde{b}_3, \tilde{b}_4\right) d\tilde{b}_3\, d\tilde{b}_4 =$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty} \int_{0}^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} \frac{\lambda_3\lambda_4}{(1-\rho)^2} \mathbf{Exp}\left(-\frac{\lambda_3\tilde{b}_3 + \lambda_4\tilde{b}_4}{1-\rho}\right) d\tilde{b}_3\, d\tilde{b}_4 =$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty} \frac{\lambda_3}{(1-\rho)} \mathbf{Exp}\left(-\frac{\lambda_3\tilde{b}_3}{1-\rho}\right)\left[\int_{0}^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} \frac{\lambda_4}{(1-\rho)} \mathbf{Exp}\left(-\frac{\lambda_4\tilde{b}_4}{1-\rho}\right) d\tilde{b}_4\right] d\tilde{b}_3$$

و بالتالى فأن:

$$\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_4\sum_{j=1}^{n}a_{4j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_3\sum_{j=1}^{n}a_{3j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]\geq\gamma_1 \quad (6\text{-}89)$$

٣- بالمثل بالنسبة للقيد (6-81) نجد أن

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j\geq\tilde{b}_5\ ,\ \sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j\geq\tilde{b}_6\right)\geq\gamma_3\longrightarrow$$

الطرف الأيسر

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j}\int_0^{\sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j}f\left(\tilde{b}_5,\tilde{b}_6\right)d\tilde{b}_5\,d\tilde{b}_6=$$

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j}\frac{\lambda_5}{(1-\rho)}\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_5\tilde{b}_5}{1-\rho}\right)\right)\left[\int_0^{\sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j}\frac{\lambda_6}{(1-\rho)}\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_6\tilde{b}_6}{1-\rho}\right)\right)d\tilde{b}_6\right]d\tilde{b}_5$$

$$=\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_5\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_6\sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]$$

و بالتالى فأن:

$$=\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_5\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\left(\frac{\lambda_6\sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j}{1-\rho}\right)\right)\right]\geq\gamma_3 \quad (6\text{-}90)$$

مثال (٦-٧)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى بمعلمات $\tilde{b}_1,\tilde{b}_2$ متغيران يتبعا التوزيع الأسى الثنائى بمعلمات $\lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=5$ و معامل أرتباط $\rho_1=0.6$ ، كذلك المتغيران $\tilde{b}_3,\tilde{b}_4$ بمعلمتين $\lambda_3=1\ ,\ \lambda_4=3$ و معامل أرتباط $\rho_2=0.8$

$$\mathrm{Max.}\,z=5x_1+8x_2 \qquad (1)$$

$$P_r\left(3x_1+x_2-4\leq\tilde{b}_1\ ,\ 2x_1+x_2\leq\tilde{b}_2\right)\geq0.8 \qquad (2)$$

$$P_r\left(x_1 + x_2 - 2.1 \le \tilde{b}_3 \ \ , \ 2x_1 + x_2 \le \tilde{b}_4\right) \le 0.5 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (4)$$

<u>المطلوب</u>

١- حول القيود الأحتمالية المشتركة إلى قيود يقينية مكافئة.

٢- حل النموذج المكافئ ثم عقب على النتائج.

<u>الحل</u>

من العلاقة (6-86) يمكن تحويل القيد (2) إلى قيد يقينى على النحو التالى:

$$-[2(3x_1 + x_2 - 4) + 5(2x_1 + x_2)] \le Ln(0.8) \longrightarrow$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 4.22 \qquad (5)$$

بالمثل بالنسبة للقيد الأحتمالى (3) باستخدام العلاقة (6-86) أيضاً نجد أن:

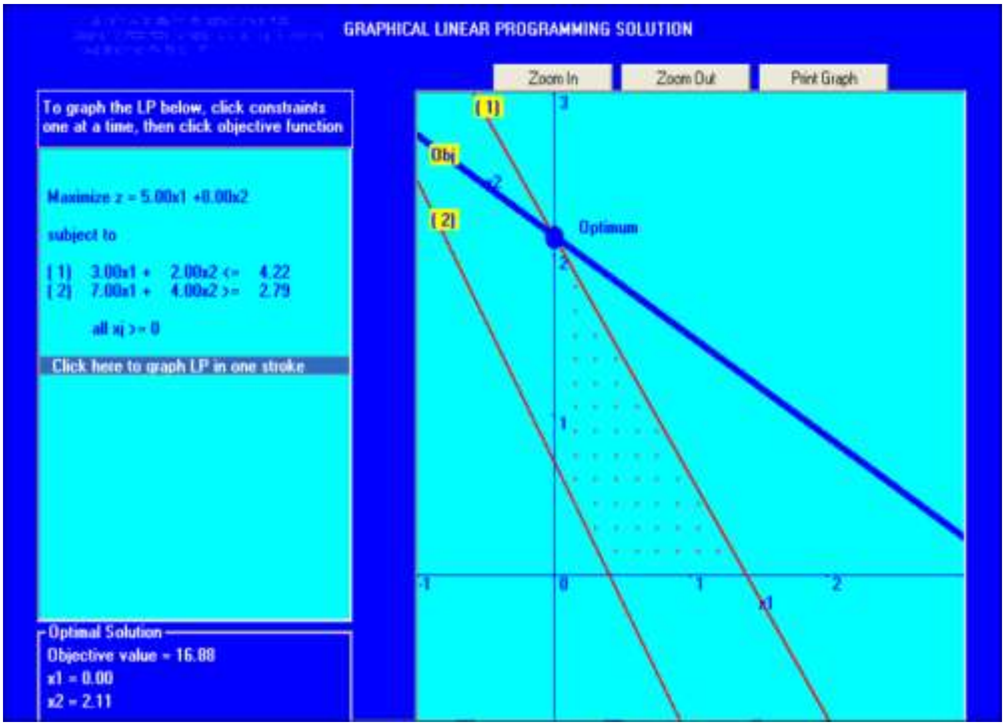
$$-[1(x_1 + x_2 - 2.1) + 3(2x_1 + x_2)] \le Ln(0.5) \longrightarrow$$

$$7x_1 + 4x_2 \le 2.79 \qquad (6)$$

٢- نجد أن النموذج (4),(6),(5),(1) نموذج برمجة خطية يمكن حله بأستخدام السمبلكس

أو بيانياً (أنظر الشكل التالى) على النحو:

$$z^* = 16.88 \quad , \quad x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 2.11$$



شكل (٦-١)

ثانياً: أستخدام النموذج (٦)

و إذا أعتبرنا $f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$،$F(b_1, b_2)$ على النحو التالى [83]:

$$\begin{aligned} f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \lambda_1\lambda_2 \mathrm{Exp}[-(\lambda_1\tilde{b}_1 + \lambda_2\tilde{b}_2)]\{1 \\ +\alpha[2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_1\tilde{b}_1) - 1][2\,\mathrm{Exp}(-\lambda_2\tilde{b}_2) - 1]\} \end{aligned} \tag{6-91}$$

$$\begin{aligned} F(b_1, b_2) = [1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_1 b_1)][1 - \mathrm{Exp}(-\lambda_2 b_2)]\{1 \\ +\alpha[\mathrm{Exp}(-(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2))]\} \end{aligned} \tag{6-92}$$

١- إذا أعتبرنا القيد (6-79) فأن

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le \tilde{b}_1 \;,\; \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le \tilde{b}_2\right) \ge \gamma_1 \longrightarrow$$

الطرف الأيسر

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j}^{\infty}\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j}^{\infty} \lambda_1\lambda_2 \mathrm{Exp}\left[-\left(\lambda_1\tilde{b}_1+\lambda_2\tilde{b}_2\right)\right]\{1 +\alpha\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1\tilde{b}_1\right)-1\right]\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_2\tilde{b}_2\right)-1\right]\}\; d\tilde{b}_1\, d\tilde{b}_2$$

$$=\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j}^{\infty} \lambda_1 \mathrm{Exp}\left(-\lambda_1\tilde{b}_1\right)\{\mathrm{Exp}\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\left[1+\alpha\left(2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1\tilde{b}_1\right)-1\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)-1\right)\right]\}d\tilde{b}_1$$

$$=\mathrm{Exp}\left[-\left(\lambda_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+\lambda_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\right]\left[1+\alpha\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)-1\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)-1\right)\right]$$

و بالتالى نجد أن:

$$\mathrm{Exp}\left[-\left(\lambda_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+\lambda_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\right]\left[1+\alpha\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)-1\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)-1\right)\right]\geq\gamma_1 \qquad (6\text{-}93)$$

٢- كذلك إذا أعتبرنا القيد (6-80) فنجد ان

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\leq\tilde{b}_1\;,\;\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\geq\tilde{b}_2\right)\geq\gamma_2\longrightarrow$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty}\int_{0}^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} f\left(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2\right)d\tilde{b}_1\,d\tilde{b}_2=$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty}\int_{0}^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} \lambda_3\lambda_4 \mathrm{Exp}\left[-\left(\lambda_3\tilde{b}_3+\lambda_4\tilde{b}_4\right)\right]\{1 +\alpha\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3\tilde{b}_3\right)-1\right]\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_4\tilde{b}_4\right)-1\right]\}\; d\tilde{b}_3\, d\tilde{b}_4$$

$$=\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty} \lambda_3 \mathrm{Exp}\left(-\lambda_3\tilde{b}_3\right)\{\left[1-\mathrm{Exp}\left(-\lambda_4\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right]\left[1+\mathrm{Exp}\left(-\lambda_4\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\left(2\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)-1\right)\right]\}d\tilde{b}_3$$

$$= \left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_4 \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right]\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right)\left[1 + \alpha \left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_4 \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right)\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right) - 1\right)\right]$$

و بالتالى فأن:

$$\left[\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right)\right]\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_4 \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right]\left[1 + \alpha \left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_4 \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right)\left(\left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right)\right) - 1\right)\right] \geq \gamma_2 \qquad (6\text{-}94)$$

٣- إذا أعتبرنا القيد (6-81) فنجد أن

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j \geq \tilde{b}_5 \;,\; \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j \geq \tilde{b}_6\right) \geq \gamma_3 \longrightarrow$$

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j} \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j} f\left(\tilde{b}_5, \tilde{b}_6\right) d\tilde{b}_5 \, d\tilde{b}_6 =$$

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j} \lambda_5 \mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \tilde{b}_5\right) \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j} \lambda_6 \mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \tilde{b}_6\right)\left\{1 + \alpha\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \tilde{b}_5\right) - 1\right]\left[2\,\mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \tilde{b}_6\right) - 1\right]\right\} d\tilde{b}_5 \, d\tilde{b}_6$$

$$= \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j} \lambda_5 \mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \tilde{b}_5\right)\left\{\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right]\left[1 + \alpha \left(\mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right)\left(\left(2\mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j\right)\right) - 1\right)\right]\right\} d\tilde{b}_5$$

$$= \left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right]\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j\right)\right]\left[1 + \alpha\left(\mathrm{Exp}\left(-\left(\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j + \lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right)\right)\right] \longrightarrow$$

$$\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j\right)\right]\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right]\left[1 + \alpha\left(\mathrm{Exp}\left(-\left(\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j + \lambda_6 \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right)\right)\right)\right] \geq \gamma_3 \qquad (6\text{-}95)$$

مثال (٦-٨)

أعتبر القيود الأحتمالية المشتركة التالية:

$$1)\quad P_r\{3x_1 + 4x_2 \le \tilde{b}_1 \;, \qquad 5x_1 - x_2 \ge \tilde{b}_2\} \ge 0.9$$
$$2)\quad P_r\{4x_1 - 7x_2 + x_3 \ge \tilde{b}_3 \;, \qquad x_1 - x_2 + 3x_3 \ge \tilde{b}_4\} \ge 0.8$$

حيث $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ يتبعا التوزيع الأسى الثنائى فى نموذج (٦)، كذلك $\tilde{b}_3, \tilde{b}_4$ يتبعا نموذج (٦) أيضاً بمعلمات $\lambda_1 = 2 \,,\; \lambda_2 = 1 \,,\; \rho_1 = 0.2$ ، $\lambda_3 = 0.5 \,,\; \lambda_4 = 0.1 \,,\; \rho_2 = -0.1$
حول القيود الاحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة

1) من العلاقة (6-80) نجد:

$$\rho_1 = 0.2 \longrightarrow \alpha_1 = 0.8 \,, \rho_2 = -0.1 \longrightarrow \alpha_2 = 0.4$$

و بتطبيق العلاقة (6-94) نجد أن:

$$[\mathrm{Exp}(-6x_1 - 8x_2)][1 - \mathrm{Exp}(-5x_1 + x_2)][1 + 0.8[(\mathrm{Exp}(-5x_1 + x_2))(\mathrm{Exp}(-6x_1 - 8x_2)) - 1]] \ge 0.9 \qquad (1)$$

بالمثل

2) بتطبيق العلاقة (6-95) ، نجد أن القيد اليقينى المكافئ للقيد الاحتمالى

$$P_r\{4x_1 - 7x_2 + x_3 \ge \tilde{b}_3 \;, \qquad x_1 - x_2 + 3x_3 \ge \tilde{b}_4\} \ge 0.8$$

على النحو التالى:

$$[1 - \mathrm{Exp}(2x_1 - 3.5x_2 + 0.5x_3)][1 - \mathrm{Exp}(-0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.3x_3)][1 + 0.4\,\mathrm{Exp}(-2.1x_1 + 3.6x_2 - 0.8x_3)] \ge 0.8$$

ثالثاً: أستخدام النموذج (٧)

إذا كان المتغيران $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ يتبعا التوزيع الأسى الثنائى وفقاً للنموذج (٧) حيث دالة كثافة الأحتمال و الدالة التراكمية المشتركة على النحو التالى:

$$f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \begin{cases} c\dfrac{\lambda_1}{(\lambda_1+\theta)} Exp\left[-\lambda_1\tilde{b}_1 - (\lambda_2+\theta)\tilde{b}_2\right] \ , \ \tilde{b}_2 > \tilde{b}_1 \geq 0 & (6\text{-}96) \\ c\dfrac{\lambda_2}{(\lambda_2+\theta)} Exp\left[-(\lambda_1+\theta)\tilde{b}_1 - \lambda_2\tilde{b}_2\right] \ , \ \tilde{b}_1 > \tilde{b}_2 \geq 0 & (6\text{-}97) \end{cases}$$

$$c = \frac{(\lambda_1+\theta)(\lambda_2+\theta)(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$F(b_1, b_2) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}\{1 - Exp[-\lambda_1 b_1]\}\{1 - Exp[-(\lambda_2+\theta)b_2]\}, b_2 > b_1 & (6\text{-}98) \\ \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)}\{1 - Exp[-(\lambda_1+\theta)b_1]\}\{1 - Exp[-\lambda_2 b_2]\}, b_1 > b_2 & (6\text{-}99) \end{cases}$$

١- بنفس الأسلوب السابق نجد أن القيد الأحتمالى (6-79) عندما $\tilde{b}_2 > \tilde{b}_1$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leq \tilde{b}_1 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leq \tilde{b}_2\right) \geq \gamma_1 \longrightarrow$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j}^{\infty} \int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j}^{\tilde{b}_2} c\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\right) Exp\left[-\lambda_1\tilde{b}_1 - (\lambda_2+\theta)\tilde{b}_2\right] d\tilde{b}_1\, d\tilde{b}_2 =$$

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j}^{\infty} c\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\right) Exp\left[-(\lambda_2+\theta)\tilde{b}_2\right] \left[\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j}^{\tilde{b}_2} Exp\left(-\lambda_1\tilde{b}_1\right) d\tilde{b}_1\right] d\tilde{b}_2$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} Exp\left\{\left[-\left(\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right) - (\lambda_2+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right]\right\} - \frac{(\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} Exp\left[-(\lambda_1+\lambda_2+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right] \geq \gamma_1 \quad (6\text{-}100)$$

و عندما $\tilde{b}_1 > \tilde{b}_2$ فأن

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} Exp\left\{\left[-(\lambda_1+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - \left(\lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\right]\right\} - \frac{(\lambda_2+\theta)}{(\lambda_1+\lambda_2)} Exp\left[-(\lambda_1+\lambda_2+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right] \geq \gamma_1 \quad (6\text{-}101)$$

٢- كذلك بالنسبة القيد (6-80) عندما $\tilde{b}_4 > \tilde{b}_3$ نجد أن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \le \tilde{b}_3 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j \ge \tilde{b}_4\right) \ge \gamma_2 \longrightarrow \qquad (6\text{-}102)$$

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} \int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\tilde{b}_4} C\left(\frac{\lambda_3}{(\lambda_3+\theta)}\right) \mathrm{Exp}\left[-\lambda_3\tilde{b}_3 - (\lambda_4+\theta)\tilde{b}_4\right] d\tilde{b}_3\, d\tilde{b}_4 =$$

$$\frac{(\lambda_3+\lambda_4+\theta)}{(\lambda_3+\lambda_4)} \mathrm{Exp}\left(-\lambda_3 \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right)\left\{1 - \mathrm{Exp}\left[-(\lambda_4+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right]\right\} - \frac{(\lambda_4+\theta)}{(\lambda_3+\lambda_4)} \cdot \left\{1 - \mathrm{Exp}\left[-(\lambda_3+\lambda_4+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right]\right\} \ge \gamma_2 \quad (6\text{-}103)$$

و عندما $\tilde{b}_3 > \tilde{b}_4$ فأن:

$$\int_{\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j}^{\infty} \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j} C\left(\frac{\lambda_4}{(\lambda_4+\theta)}\right) \mathrm{Exp}\left[-(\lambda_3+\theta)\tilde{b}_3 - \lambda_4\tilde{b}_4\right] d\tilde{b}_3\, d\tilde{b}_4 =$$

$$\frac{(\lambda_3+\lambda_4+\theta)}{(\lambda_3+\lambda_4)} \mathrm{Exp}\left[-(\lambda_3+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j\right]\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_4 \sum_{j=1}^{n} a_{4j}x_j\right)\right] \ge \gamma_2 \quad (6\text{-}104)$$

٣- كذلك بالنسبة القيد (6-81) عندما $\tilde{b}_6 > \tilde{b}_5$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j \ge \tilde{b}_5 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j \ge \tilde{b}_6\right) \ge \gamma_3 \longrightarrow$$

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j} \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j} C\left(\frac{\lambda_5}{(\lambda_5+\theta)}\right) \mathrm{Exp}\left[-\lambda_5\tilde{b}_5 - (\lambda_6+\theta)\tilde{b}_6\right] d\tilde{b}_5\, d\tilde{b}_6 =$$

$$\frac{(\lambda_5+\lambda_6+\theta)}{(\lambda_5+\lambda_6)} \left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_5 \sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j\right)\right]\left\{1 - \mathrm{Exp}\left[(-\lambda_6+\theta)\sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j\right]\right\} \ge \gamma_3 \quad (6\text{-}105)$$

بالمثل عندما $\tilde{b}_5 > \tilde{b}_6$ فأن

$$\int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{5j}x_j} \int_0^{\sum_{j=1}^{n} a_{6j}x_j} C\left(\frac{\lambda_6}{(\lambda_6+\theta)}\right) \mathrm{Exp}\left[-(\lambda_5+\theta)\tilde{b}_5 - \lambda_6\tilde{b}_6\right] d\tilde{b}_5\, d\tilde{b}_6 =$$

$$\frac{(\lambda_5+\lambda_6+\theta)}{(\lambda_5+\lambda_6)}\ \left\{1-\mathrm{Exp}\left[(-\lambda_5+\theta)\sum_{j=1}^{n}a_{5j}x_j\right]\right\}\left[\ 1-\mathrm{Exp}\left(-\lambda_6\sum_{j=1}^{n}a_{6j}x_j\right)\right]\geq\gamma_3 \quad (6\text{-}106)$$

ملحوظة: و نلاحظ أن القيود اليقينية فى (6-106)-(6-105) قيود غير خطية.

مثال (٦-٩)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\mathrm{Max.\,H}=4x_1+3x_2+x_3 \qquad (1)$$
$$\mathrm{S.T.}\qquad 2x_1+x_2-3x_3\leq 8 \qquad (2)$$
$$x_1+2x_2+x_3\leq 10 \qquad (3)$$
$$P_r(\tilde{a}_1x_1+2x_2-x_3\leq 40\ ,\tilde{a}_2x_1+4x_2\geq 10\ )\geq 0.8 \qquad (4)$$
$$x_1,x_2x_3\geq 0 \qquad (5)$$

بحيث $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$ متغيرين يتبع كل منهما التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ و بتوزيع مشترك وفقاً للتوزيع الأسى الثنائى بالنموذج (٧)، $\tilde{a}_2>\tilde{a}_1$ ، $\theta=0.6$

المطلوب

١) حول القيد الاحتمالى إلى قيد يقينى مكافئ
٢) حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى
٣) حل النموذج اليقينى

الحل

١) بما أن $\tilde{a}_2>\tilde{a}_1$ فأن دالة كثافة الاحتمال المشتركة على النحو التالى:

$$f(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=c\frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\theta)}\ \mathrm{Exp}[-\lambda_1\tilde{a}_1-(\lambda_2+\theta)\tilde{a}_2]\ ,\ \tilde{a}_2>\tilde{a}_1 \qquad (6)$$

و بالتالى فأن

$$P_r(\tilde{a}_1x_1+2x_2-x_3\leq 40\ ,\tilde{a}_2x_1+4x_2\geq 10\ )\geq 0.8\ \longrightarrow$$

$$\mathbf{P_r}\left(\tilde{\mathbf{a}}_1 \leq \frac{\mathbf{40 - 2x_2 + x_3}}{\mathbf{x_1}}\ ,\tilde{\mathbf{a}}_2 \geq \frac{\mathbf{10 - 4x_2}}{\mathbf{x_1}}\right) \geq \mathbf{0.8} \longrightarrow$$

و من العلاقة (6-104) نجد أن:

$$\frac{\mathbf{3.6}}{\mathbf{3}}\left[\mathbf{Exp(1.6)}\left(\frac{\mathbf{40 - 2x_2 + x_3}}{\mathbf{x_1}}\right)\right]\left[\mathbf{1 - Exp(-2)}\left(\frac{\mathbf{10 - 4x_2}}{\mathbf{x_1}}\right)\right] \geq \mathbf{0.8} \longrightarrow$$

(٦-٧) تمرينات Exercises

(٦-١)

إذا فرضنا أن المتغيرين $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين معتادين غير مستقلين بمعامل أرتباط $\rho = 0.9$

بحيث: $\mu_x = E(x) = 2 \quad , \mu_y = E(y) = 5 \quad , \quad \sigma_x = 1 \quad , \quad \sigma_y = 2$

المطلوب

١- أكتب دالة كثافة الأحتمال المشتركة لكل من x,y

٢- أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة التقريبية لـ x١,y١

٣- أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة التقريبية لـ x١,y١ بأستخدام تقريب Sungur.

٤- أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة التقريبية لـ x,y

(٦-٢)

إذا فرضنا أن x,y متغيرين يتبعا التوزيع المعتاد الثنائىز أوجد دالة كثافة الاحتمال للمتغير k_1, k_2, k_3 حيث:

$$k_1 = x + y$$
$$k_2 = 2x + y$$
$$k_3 = \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2$$

بحيث:

$$\mu_x = 3 \quad , \quad \mu_y = 4 \quad , \quad \sigma_x = 1 \quad , \quad \sigma_y = 2 \quad , \quad \rho = 0.1$$

(٦-٣)

إذا فرضنا القيود الأحتمالية التالية بحيث:

١) $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ يتبعا التوزيع المعتاد الثنائى بمعلمات

$$E(\tilde{b}_1) = 5 \quad , E(\tilde{b}_2) = 10 \quad , \quad \sigma_1 = 2 \quad , \quad \sigma_2 = 3 \quad , \quad \rho = 0.75$$

$$P_r\left(5x_1 + 4x_2 - x_3 \le \tilde{b}_1 \;, \qquad 10x_1 - x_2 + 4x_3 \le \tilde{b}_2\right) \ge 0.85$$

حول القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية مكافئة.

٢) أعتبر $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران يتبعا التوزيع الأسى الثنائى بمعلمتين $\lambda_1 = 2 , \lambda_2 = 4$ على الترتيب، وفقاً للنموذج (٧).

حول القيد الأحتمالى التالى إلى قيد يقينى

$$P_r(\tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 - 5x_3 \le 100) \ge 0.9$$

(٦-٤)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\begin{aligned} &\text{Max.}\, k = 5x_1 + 7x_2 \\ \text{S.T.} \quad &P_r(\tilde{a}_1x_1 - 5x_2 \le 12) \ge 0.85 \\ &P_r(\tilde{a}_3x_1 + \tilde{a}_4x_2 \ge 15) \ge 0.85 \\ &4x_1 + 7x_2 \le 28 \\ &-2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

بأفتراض أن $\tilde{a}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسى العام بمعلمات $(\lambda = 3 , \mu = 5 , \alpha = 1.5)$، و المعلمات $\tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ يتبعان التوزيع الأسى الثنائى وفقاً للنموذج (٦) و بمعامل أرتباط $\rho = 0.2$.

المطلوب

١- حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة.

٢- حل النموذج اليقينى المكافئ.

(٦-٥)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية فى (٦-٤)، أعتبر المعلمتين $\tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ يتبعا التوزيع الأسى الثنائى وفقاً لنموذج (٦) بمعلمة $\theta = 0.9$.

حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ ثم حل النموذج اليقينى ثم عقب على الحل.

(٦-٦)

أعتبرالقيود المشتركة التالية:

$$P_r\left(5x_1 - 2x_2 + x_3 \geq \tilde{b}_1 \;, \qquad 4x_2 + 5x_3 \leq \tilde{b}_2\right) \geq 0.8$$

فإذا كان $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين يتبعان التوزيع الأسى الثنائى وفقاً للنموذج (٧)، $\theta = 0.4$.

حول القيود الأحتمالية إلى قيد يقينى مكافئ.

(٦-٧)

أعتبر نموذج البرمجة الاحتمالى التالى:

$$\text{Min. } H = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_2 \leq 18$$
$$P_r(\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 - 5x_3 \geq 45) \geq 0.8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حول النموذج إلى نموذج يقينى مكافئ ثم أوجد الحل للنموذج اليقينى عندما $\tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ يتبعا التوزيع الأسى الثنائى وفقاً لنموذج (٥) و بمعامل أرتباط $\rho = 0.6$.

(٦-٨)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى

$$\text{Max. } z = 5x_1 + 8x_2$$
$$\text{S.T.} \qquad P_r\left(2x_1 + x_2 \leq \tilde{b}_1 \;, x_1 + 3x_2 \geq \tilde{b}_2\right) \geq 0.6$$
$$9x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين مستقلين يتبع كل منهما التوزيع الأسى بمعلمة λ_1, λ_2 على الترتيب.
حول النموذج الأحتمالى إلى نوذج يقينى مكافئ.

الباب السابع

القيود الأحتمالية بمعلمات متعددة التوزيعات الأحتمالية
Chance Constraints with Multi-Variate Distributed Random Parameters

(٧-١) مقدمة
Introduction

(٧-٢) التوزيع المعتاد (الطبيعى) المتعدد
Multi-Variate Normal Distribution

(٧-٣) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع المعتاد المتعدد
Chance-Constraints with Multi-Variate Normal Distributed Parameters

(٧-٤) التوزيع الأسى المتعدد
Multi-Variate Exponential Distribution

(٧-٥) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع الأسى المتعدد
Chance-Constraints with Multi-Variate Exponential Distributed Parameters

(٧-٦) تمرينات
Exercises

(٧-١) مقدمة Introduction

فى الباب السابق تناولنا بشئ من التفصيل القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع المعتاد الثنائى و التوزيع الأسى الثنائى سواء كانت قيود مرتبطة **joint constraints** أو قيد غير مرتبط.

و لكن فى كثير من المشاكل التطبيقية قد تحتوى القيود على أكثر من معلمتين (ثلاثة معلمات أو أكثر) تمثل متغير عشوائية لها توزيعات أحتمالية متعددة.

و فى هذا الفصل سوف نتناول القيود الاحتمالية بمعلمات تمثل متغيرات تتبع التوزيعات الأحتمالية المتعددة.

و سوف تقتصر دراستنا فى هذا الباب على المعلمات التى تتبع التوزيع المعتاد (الطبيعى)، كذلك التوزيع الأسى المتعدد و ذلك يرجع إلى أستخدامهما فى كثير من المجالات التطبيقية.

و سوف نتناول القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيعات المتعددة فى حالتين

الحالة الأولى: القيود المنفصلة **individual constraints**.
الحالة الثانية: القيود المرتبطة **joint (dividual) constraints**.

و حتى الآن تعتبر الدراسات المقدمة فى أستخدام التوزيعات الأحتمالية المتعددة فى أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً نادرة نسبياً. لذلك أعتقد أن هذا الموضوع يتطلب الكثير من الدراسات و الأبحاث المستقبلية لوجود كثير من النقاط التى تتطلب مزيد من الدراسات النظرية و التطبيقية أيضاً.

(٧-٢) التوزيع المعتاد (الطبيعى) المتعدد
Multi-Variate Normal Distribution

يعتبر التوزيع المعتاد (الطبيعى) المتعدد و أحياناً يسمى بتوزيع جاوس المتعدد **Multi-variate Gauss distribution** نسبة إلى العالم جاوس.

فمنذ عام ١٨٢٣ قدم العالم جاوس و آخرين العديد من الدراسات فى التوزيعات المعتادة المتعددة، كذلك العديد من تطبيقاتها [129, 120].

فإذا فرضنا أن المعلمات $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ تمثل متغيرات عشوائية كل منهم يتبع التوزيع المعتاد (الطبيعى) بتوقع μ_j ، و تباين σ_j^2 ، و بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{a}_j)$ بحيث:

$$f(\tilde{a}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \operatorname{Exp}\left\{\frac{-1}{2}\left[\frac{\tilde{a}_j - \mu_j}{\sigma_j}\right]^2\right\} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad (7\text{-}1)$$

فإذا فرضنا أن المتجهات البديلة التالية:

$$\tilde{a}^{\backslash} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_j, \dots, \tilde{a}_n]^{\backslash} \quad , \quad \mu^{\backslash} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j] \qquad (7\text{-}2)$$

و مصفوفة التباين و التغاير للمتغيرات العشوائية $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ هى المصفوفة Σ حيث

$$\Sigma = [\sigma_{ij}]_{n.n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}3)$$

حيث: التغاير بين $\tilde{a}_i , \tilde{a}_j$ على النحو σ_{ij} ، $\operatorname{Cov}(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) = \sigma_{ij} \quad , \quad i \neq j$

كذلك تباين $\tilde{a}_j$: على النحو σ_j^2 ، $\sigma_j^2 = \sigma_{jj} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$

و المصفوفة Σ مصفوفة متماثلة **symmetric** حيث $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ كذلك Σ مصفوفة غير شاذة **non-singular matrix** و قيمة محددها $|\Sigma| \neq 0$ كذلك قيمة محددها موجبة بحيث $|\Sigma| > 0$.

فإذا فرضنا أن $f(\tilde{a})$ تشير إلى دالة كثافة الأحتمال المشتركة **joint density function** للمتغيرات $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ فأن

$$\mathbf{f(\tilde{a}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} Exp\left\{\frac{-1}{2}(\tilde{a}-\mu)^{\backslash}\,\Sigma^{-1}(\tilde{a}-\mu)\right\}} \qquad (7\text{-}4)$$

حيث $|\Sigma|$ يشير إلى محدد المصفوفة (Σ)

و دالة التوزيع التراكمية للمتجه $\tilde{a}$ عند القيم a هى $F(a)$ على النحو

$$\mathbf{F(a) = \int_{-\infty}^{a_1}\int_{-\infty}^{a_2}\int_{-\infty}^{a_n} f(\tilde{a})\, d\tilde{a}_1\, d\tilde{a}_2 \ldots d\tilde{a}_n} \qquad (7\text{-}5)$$

حيث Σ^{-1} تشير إلى معكوس المصفوفة Σ و فى حالة أستقلال المتغيرات $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$ فأن المصفوفة Σ تكون مصفوفة قطرية عناصر قطرها σ_j^2 ، $j = 1, 2, \ldots, n$ و باقى العناصر كل منهم يساوى صفر، كذلك فى هذه الحالة تكون المصفوفة Σ^{-1} مصفوفة قطرية أيضاًعناصر قطرها الرئيسى $\frac{1}{\sigma_j^2}$ ،
$j = 1, 2, \ldots, n$ و باقى العناصر كل منها يساوى صفر أيضاً.

نظرية (٧-١)

إذا فرضنا أن $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$ متغيرات تتبع التوزيع المعتاد بتوقع و تباين μ_j, σ_j^2 على الترتيب، σ_{ij} تمثل التغلير بين $\tilde{a}_i, \tilde{a}_j$ ، $i \neq j$ ، فإذا فرضنا أن المتغير $\tilde{y}$ بحيث:

$$\mathbf{\tilde{y} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 + \cdots \tilde{a}_n x_n\,, \quad x_j \geq 0} \qquad (7\text{-}6)$$

فأن $\tilde{y}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد الأحادى univariate normal بتوقع و تباين على النحو التالى:

$$\mathbf{E(\tilde{y}) = x_1 E(\tilde{a}_1) + x_2 E(\tilde{a}_2) + \cdots + x_n E(\tilde{a}_n)} \qquad (7\text{-}7)$$

$$\mathbf{Var(\tilde{y}) = x_1^2 Var(\tilde{a}_1) + x_2^2 Var(\tilde{a}_2) + \cdots + x_n^2 Var(\tilde{a}_n) + 2\sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \sum_j x_i x_j\, Cov(x_i, x_j)} \qquad (7\text{-}8)$$

و فى حالة أستقلال المتغيرات $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$ فأن:

$$\mathbf{Var(\tilde{y}) = x_1^2 Var(\tilde{a}_1) + x_2^2 Var(\tilde{a}_2) + \cdots + x_n^2 Var(\tilde{a}_n)} \qquad (7\text{-}9)$$

الأثبات: [151, 129]

و كما ذكرنا فى الباب السابق أن التوزيع المعتاد (الطبيعى) من التوزيعات المثالية للأسباب سابقة الذكر فى الفصل (٦-٢)، كذلك لوجود جداول أحصائية محسوب فيها قيمة دالة التوزيع التراكمية F (و بالتالى الدالة العكسية لها F^{-1}) عند القيم المختلفة للمتغير $\tilde{y}$ كما هو موضح بملحق رقم (٢).

(٧-٣) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع المعتاد المتعدد
Chance-Constraints with Multi-Variate Normal Distributed Parameters

فى هذا الفصل سوف نتناول القيود الأحتمالية فى الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: عندما تكون بعض المعلمات العشوائية $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع المعتاد المتعدد.
الحالة الثانية: بعض القيود المرتبطةعندما تكون بعض المعلمات العشوائية $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع المعتاد المتعدد.

الحالة الأولى

إذا أعتبرنا القيد الأحتمالى التالى:

$$P_r\left\{\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_j x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_j x_j \le b\right\} \ge \gamma \qquad (7\text{-}10)$$

بحيث $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n^{\backslash}$ متغيرات تتبع التوزيع المعتاد المتعدد بتوقع μ_j و تباين σ_j^2، و تغاير σ_{jk} ، $k \neq j$ فأن القيد (7-10) يمكن أعادة كتابته على النحو التالى

$$P_r\left(\tilde{y} \le b - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_j x_j\right) \ge \gamma \quad \longrightarrow$$

$$P_r\left(\tilde{y} \le \frac{b - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_j x_j - E(\tilde{y})}{\sqrt{Var(\tilde{y})}}\right) \ge \gamma \quad \longrightarrow$$

$$F\left(\tilde{y} \le \frac{b - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_j x_j - E(\tilde{y})}{\sqrt{Var(\tilde{y})}}\right) \ge \gamma \longrightarrow$$

$$\frac{b - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_j x_j - E(\tilde{y})}{\sqrt{Var(\tilde{y})}} \ge F^{-1}(\gamma) \qquad (7\text{-}11)$$

حيث F, F^{-1} تشير إلى دالة التوزيع التراكمية و الدالة العكسية على الترتيب للمتغير المعتاد القياسى و التى يمكن الحصول على $F^{-1}(\gamma)$ من جدول الأحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسى فى ملحق (٢).

و سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالى:

مثال (٧-١)

حول القيد الأحتمالى التالى إلى قيد يقينى مكافئ.
حيث

$$P_r\{\tilde{a}_1x_1 - \tilde{a}_2x_2 + \tilde{a}_3x_3 + 3x_4 \le 100\} \ge 0.9$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{a}_1) &= 5\ , & \sigma_1 &= 3\ , & \sigma_{12} &= -1.5\\
E(\tilde{a}_2) &= 6\ , & \sigma_2 &= 1\ , & \sigma_{13} &= 4.8\\
E(\tilde{a}_3) &= 2\ , & \sigma_3 &= 2\ , & \sigma_{23} &= 1.2
\end{aligned}$$

فإذا فرضنا أن

$$\tilde{y} = \tilde{a}_1x_1 - \tilde{a}_2x_2 + \tilde{a}_3x_3$$

$$P_r\{\tilde{y} \le 100 - 3x_4\} \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left\{\tilde{z} \le \frac{100 - 3x_4 - (5x_1 - 6x_2 + 2x_3)}{\sqrt{9x_1 + x_2 + 4x - 3x_1x_2 + 9.6x_1x_3 + 2.4x_2x_3}}\right\} \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$\frac{100 - 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 3x_4}{\sqrt{9x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_1x_2 + 9.6x_1x_3 + 2.4x_2x_3}} \ge F^{-1}(0.9)$$

و بما أن $F^{-1}(0.9) = 1.29$ من جدول المعتاد القياسى ملحق (٢) فأن:

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1.29(9x_1 + x_2 + 4x - 3x_1x_2 + 9.6x_1x_3 + 2.4x_2x_3)^{\frac{1}{2}} \le 100$$

ملحوظة: و رغم أن القيد الأحتمالى قيد خطى فى المتغيرات القرارية و لكن القيد اليقينى قيد غير خطى.

الحالة الثانية

إذا أعتبرنا القيود الأحتمالية المشتركة التالية

$$P_r\{\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \tilde{b}_i \ , \ i = 1, 2, \dots, m\} \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}12)$$

حيث المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المعتاد $\tilde{b}$ متجه للمعلمات $\tilde{b}_i$ بدالة كثافة احتمال مشتركة

$$f(\tilde{b}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \operatorname{Exp}\left\{\frac{-1}{2}(\tilde{b}-\mu)^{\backslash}\Sigma^{-1}(\tilde{b}-\mu)\right\} \qquad (7\text{-}13)$$

حيث μ تشير إلى متجه التوقعات للمتغيرات $\tilde{b}_i$ ، Σ^{-1} تشير إلى المصفوفة العكسية للمصفوفة Σ فأن القيد (7-12) يمكن تحويله على النحو التالى:

$$P_r\left[\tilde{z}_i \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i}{\sigma_i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m\right] \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}14)$$

حيث $\tilde{z}_i$ متغير معتاد قياسى بدالة توزيع تراكمية F_i و بالتالى فأن القيد فى (7-14) مكافئ للقيد التالى:

$$F\{[(\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i)/\sigma_i] \ , \ i = 1, 2, \dots, m\} \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}15)$$

حيث F هى دالة التوزيع التراكمية المشتركة للمتغيرات المعتادة القياسية $\tilde{z}_i$ ، $i = 1, 2, \dots, m$.

و للتبسيط إذا أعتبرنا حالة أستقلال المتغيرات $\tilde{b}_i$ و بالتالى أستقلال المتغيرات $\tilde{z}_i$ فأنه يمكن أعادة كتابة القيود فى (7-15) على النحو التالى:

$$\textstyle\prod_{i=1}^{m} F_i[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i)/\sigma_i] \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}16)$$

و يمثل القيد أعلاه قيد واحد غير خطى فى المتغيرات القرارية x_j.
و لكن ممكن تحويل هذا القيد غير خطى إلى عدد (m) من القيود الخطية على النحو التالى

$$\textstyle\prod_{i=1}^{m} F_i[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i)/\sigma_i] \geq \prod_{i=1}^{m}\left(\gamma^{\backslash}\right)^{1/m} \qquad (7\text{-}17)$$

أو

$$F_i\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i\right)/\sigma_i\right] \ge \left(\gamma^{\backslash}\right)^{1/m} \longrightarrow$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \mu_i}{\sigma_i} \ge F_i^{-1}\left(\gamma^{\backslash}\right)^{1/m}, \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (7\text{-}18)$$

حيث F_i^{-1} هى الدالة التراكمية العكسية للمتغير المعتاد القياسى الممكن الحصول على قيمتها من الجداول بملحق (٢) عند $\left(\gamma^{\backslash}\right)^{1/m}$. و يمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى.

مثال (٧-٢)

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة

$$(i) \qquad P_r\left(x_1 + x_2 \ge \tilde{b}_1, \quad x_1 \ge \tilde{b}_2, \quad 15x_1 - 10x_2 \ge \tilde{b}_3\right) \ge 0.8$$

$$(ii) \qquad P_r\left(2x_1 + 3x_2 \le \tilde{b}_1, \quad -3x_1 + 2x_2 \le \tilde{b}_2, \quad x_2 \le \tilde{b}_3\right) \ge 0.9$$

حيث المتغيرات $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ متغيرات معتادة مستقلة كذلك

$$\tilde{b}_1 \sim N(\mu_1 = 1, \quad \sigma_1 = 0.4)$$
$$\tilde{b}_2 \sim N(\mu_2 = 2, \quad \sigma_2 = 1)$$
$$\tilde{b}_3 \sim N(\mu_3 = -3, \quad \sigma_3 = 1)$$

بالتعويض فى الطرفين للعلاقة (7-17) نجد أن:

(i)

$$F_1\left(2.5(x_1 + x_2 - 1)\right)F_2(x_1 - 2)F_3(15x_1 - 10x_2 - 3) \ge \prod_{i=1}^{3}\left[(0.8)^{1/3}\right] \longrightarrow$$

$$F_1\left(2.5(x_1 + x_2 - 1)\right) \ge 0.923 \longrightarrow 2.5x_1 + 2.5x_2 - 2.5 \ge F^{-1}(0.923)$$

و من ملحق (٢) نجد أن $F^{-1}(0.923) = 1.42$ ، و بالتالى فأن:

$$2.5x_1 + 2.5x_2 - 2.5 \ge 1.42 \longrightarrow 2.5x_1 + 2.5x_2 \ge 3.92$$

كذلك

$$x_1 - 2 \ge 1.42 \longrightarrow x_1 \ge 3.42 \qquad (1)$$
$$15x_1 - 10x_2 - 3 \ge 1.42 \longrightarrow 15x_1 - 10x_2 \ge 4.42 \qquad (2)$$

(ii)

بما أن $\tilde{b}_i$ ، $i = 1, 2, 3$ متغيرات مستقلة فأن

$$P_r\left(2x_1 + 3x_2 \leq \tilde{b}_1 , -3x_1 + 2x_2 \leq \tilde{b}_2 , x_2 \leq \tilde{b}_3\right) \geq 0.9$$

$$P_r\left(2x_1 + 3x_2 \leq \tilde{b}_1\right). P_r\left(-3x_1 + 2x_2 \leq \tilde{b}_2\right). P_r\left(x_2 \leq \tilde{b}_3\right) \geq 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left(\frac{2x_1+3x_2-1}{0.4} \leq \tilde{z}_1\right). P_r\left(\frac{-3x_1+2x_2-2}{1} \leq \tilde{z}_2\right). P_r\left(\frac{x_2+3}{1} \leq \tilde{z}_3\right) \geq \left[(0.9)^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$\left[1 - F_1\left(\frac{2x_1 + 3x_2 - 1}{0.4}\right)\right]. [1 - F_2(-3x_1 + 2x_2 - 2)]. [1 - F_3(x_2 + 3)] \geq (0.97)^3$$

$$\longrightarrow$$

$$1 - F_1\left(\frac{2x_1 + 3x_2 - 1}{0.4}\right) \geq 0.97 \rightarrow F_1\left(\frac{2x_1 + 3x_2 - 1}{0.4}\right) \leq 0.03 \longrightarrow$$ (١

$$\frac{2x_1 + 3x_2 - 1}{0.4} \leq F^{-1}(0.03) = -1.89 \longrightarrow$$

٢) بالمثل

$$2x_1 + 3x_2 = 0.244 \qquad (3)$$

$$1 - F_2(-3x_1 + 2x_2 - 2) \geq 0.97 \longrightarrow$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2 \leq F^{-1}(0.03) \longrightarrow -3x_1 + 2x_2 \leq 0.11 \qquad (4)$$

٣) بالمثل $$1 - F_3(x_2 + 3) \geq 0.97 \longrightarrow F_3(x_2 + 3) \leq 0.03$$

$$x_2 + 3 \leq F_3^{-1}(0.03) = -1.89 \longrightarrow$$

$$x_2 \leq -4.89 \qquad (5)$$

(٧-٤) التوزيع الأسى المتعدد
Multi-Variate Exponential Distribution

فى الفصل (٦-٤) تناولنا بشئ من التفصيل التوزيع الأسى الثنائى، و ذكرنا أنه يوجد نماذج مختلفة للتوزيع الأسى الثنائى، تختلف عن بعضها وفقاً للفروض التابعة لها [23].

بالمثل بالنسبة للتويع الأسى المتعدد فأنه يوجد نماذج مختلفة للتوزيع الأسى المتعدد وفقاً للفروض التابع لها كل نموذج.

منذ الستينات و حتى الآن قدمت عديد من النماذج، على سبيل المثال النموذج المقدم من Weinman سنة ١٩٦٦، و النموذج المقدم من Marshall and Olkin سنة ١٩٦٧، و النموذج المقدم من Cramer and Kamps سنة ١٩٩٧، ...إلخ [32].

و لكن معظم هذه النماذج لا تتناسب فروضها لأستخدامها فى البرمجة الاحتمالية المقيدة فى حالة عدم أستقلال المعلمات العشوائية، لذلك سوف تقتصر دراستنا فى هذا الباب على التوزيع الأسى المتعدد فى حالة أستقلال المعلمات العشوائية و ذلك للتبسيط فقط.

فإذا فرضنا أن $\tilde{a}_{ij}$ ، $j = 1, 2, \dots, n^{\backslash}$ متغيرات عشوائية مستقلة فأن $F(a_{ij}), f(\tilde{a}_{ij})$ تشير إلى دالة كثافة الأحتمال و دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{a}_{ij}$ على الترتيب بحيث

$$f(\tilde{a}_{ij}) = \lambda_{ij}\ \mathrm{Exp}(\lambda_{ij}\tilde{a}_{ij})\ ,\ \ \lambda_{ij} > 0\ , \tilde{a}_{ij} \geq 0 \qquad (7\text{-}19)$$

$$F(a_{ij}) = [1 - \ \mathrm{Exp}(-\lambda_{ij}a_{ij})]\ ,\ \ j = 1, 2, \dots, n^{\backslash} \qquad (7\text{-}20)$$

فإذا أعتبرنا المتجهات

$$\tilde{a}_i = [\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in^{\backslash}}]^{\backslash}\ ,\qquad a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \qquad (7\text{-}21)$$

حيث $\tilde{a}_{ij}, a_{ij} > 0$

فأن دالة كثافة الاحتمال المشتركة و دالة التوزيع التراكمية المشتركة على النحو:

$$f(\tilde{a}_i) = \prod_{j=1}^{n^{\backslash}} [\lambda_{ij}\ \mathrm{Exp}(\lambda_{ij}\tilde{a}_{ij})] \qquad (7\text{-}22)$$

$$F(a_i) = \prod_{j=1}^{n^{\backslash}} [1 - \ \mathrm{Exp}(-\lambda_{ij}a_{ij})] \qquad (7\text{-}23)$$

ملحوظة: إذا كان $\tilde{a}_{ij}$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين يمكن الرجوع إلى المراجع $[100, 99]$.

و يتطلب أستخدام التوزيع فى (7-23),(7-22) فى تحويل القيود الاحتمالية إلى قيود يقينية الحصول على التوزيع الأحتمالى للمتغير $\tilde{y}_i$ حيث:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij} x_j$$

و قدمت عدة دراسات لأيجاد التوزيع الأحتمالى الصحيح **exact** أو التقريبى **approximate** للمتغير $\tilde{y}$ و كان من أهمها التوزيع التقريبى الذى قدمه **Sengupta** سنة ١٩٧٢ فقد أثبت أن توزيع كا٢ غير المركزى **non-central χ^2 distribution** يعتبر تقريب لتوزيع المتغير $\tilde{y}_i$ $[161, 182]$. و لكن كان غير ممكن أستخدام جداول توزيع كا٢ غير المركزى لتحويل القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى لأن درجات الحرية للتوزيع التقريبى تمثل دالة فى المتغيرات القرارية غير المعلومة.

فى سنة ١٩٨٤ قدمت **El-Dash** التوزيع الأحتمالى الصحيح للمتغير $\tilde{y}_i$ بأستخدام أسلوب التحويلات **transformation** و نظرية بوكس **Box's theorem** $[41, 64]$ و استخدمت هذا التوزيع فى تحويل القيود الاحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة.

فى سنة ١٩٩٨ قدم **Biswal and Duan** التوزيع الصحيح للمتغير $\tilde{y}_i$ أيضاً و هو نفس التوزيع السابق تقديمه من **El-Dash** سنة ١٩٨٤ و لكن بأستخدام أسلوب أبسط حيث أستخدموا أسلوب الاستنتاج الرياضى **mathematical induction** و حصلوا أيضاً على القيود اليقينية السابق الحصول عليها سنة ١٩٨٤ $[64, 39]$.
و فى هذا الفصل سوف نقدم التوزيع الاحتمالى للمتغير $\tilde{y}_i$ بأستخدام أسلوب الأستنتاج الرياضى من خلال النظرية التالية.

نظرية (٧-٢)

إذا فرصنا أن $\tilde{a}_{ij}$ ، $j = 1, 2, \dots, n\backslash$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منهم يتبع التوزيع الأسى فى (7-20),(7-19)، و بأفتراض أن $\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij} x_j$, $x_j \geq 0$ فأن دالة كثافة الاحتمال و دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{y}_i$ على النحو التالى:

$$f(\tilde{y}_i) = \prod_{j=1}^{n\backslash} \lambda_{ij} \left\{ \sum_{K=1}^{n\backslash} \frac{x_k^{n\backslash -2}\, \mathrm{Exp}\left(\frac{-\lambda_{ik}}{x_k}\right) \tilde{y}_i}{\prod_{\substack{\iota=1,\\ \iota\neq k}}^{n\backslash} (x_k \lambda_{i\iota} - x_\iota \lambda_{ik})} \right\} ,\tilde{y}_i > 0 \qquad (7\text{-}24)$$

$$F(y_i) = \prod_{j=1}^{n^\backslash} \lambda_{ij} \left\{ \sum_{K=1}^{n^\backslash -1} \left[\frac{x_k^{n^\backslash -2}\left[1 - \operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{in^\backslash}}{x_{n^\backslash}} y_i\right)\right]}{\lambda_{ik}\lambda_{in^\backslash} \prod_{\substack{\iota=1,\\ \iota\neq k}}^{n^\backslash -1} (x_k\lambda_{i\iota} - x_\iota\lambda_{ik})} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{x_k^{n^\backslash -1}\left[\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{ik}}{x_k} y_i\right) - \operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{in^\backslash}}{x_{n^\backslash}} y_i\right)\right]}{\lambda_{ik} \prod_{\substack{\iota=1,\\ \iota\neq k}}^{n^\backslash -1} (x_k\lambda_{i\iota} - x_\iota\lambda_{ik})} \right\} \qquad (7\text{-}25)$$

الأثبات

١- عندما $n^\backslash = 1$ من العلاقة (7-19) نجد أن $f(\tilde{y}_i) = \frac{\lambda_{i1}}{x_1}\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right)\tilde{y}_i$ تعويض فى (7-24) بـ $n^\backslash = 1$ نجد أن:

$$f(\tilde{y}_i) = \frac{\lambda_{i1}}{x_1}\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right)\tilde{y}_i \qquad (7\text{-}26)$$

$$F(y_i) = P_r(\tilde{y}_i \le y_i) = \int_0^{y_i} \frac{\lambda_{i1}}{x_1}\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right)\tilde{y}_i \, d\tilde{y}_i$$

$$= 1 - \operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right) y_i \qquad (7\text{-}27)$$

و بالتعويض $n^\backslash = 1$ فى (7-25),(7-24) نجد أن العلاقة(٧-٢٤) , (7-25) صحيحة عند $n^\backslash = 1$.

٢- عندما $n^\backslash = 2$ فأن $\tilde{y}_i = \tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2$، و بأستخدام أسلوب التحويلات (أنظر الباب الخامس) حيث:

$$f(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}) = \lambda_{i1}\lambda_{i2}\operatorname{Exp}[-\lambda_{i1}\tilde{a}_{i1} - \lambda_{i2}\tilde{a}_{i2}]$$

نجد ان

$$f(\tilde{y}_i) = \frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}\operatorname{Exp}\left(\frac{\lambda_{i1}}{x_1}\right)\tilde{y}_i}{x_1\lambda_{i2} - x_2\lambda_{i1}} + \frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}\operatorname{Exp}\left(\frac{\lambda_{i2}}{x_2}\right)\tilde{y}_i}{x_2\lambda_{i1} - x_1\lambda_{i2}} \quad , \tilde{y}_i > 0 \qquad (7\text{-}28)$$

$$F(y_i) = 1 + \frac{x_1\lambda_{i2}\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right) y_i}{x_2\lambda_{i1} - x_1\lambda_{i2}} - \frac{x_1\lambda_{i2}\operatorname{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right) y_i}{x_2\lambda_{i2} - x_1\lambda_{i2}}$$

$$-\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right)y_i \quad (7\text{-}29)$$

و بالتعويض فى $(7\text{-}25),(7\text{-}24)$ بـ $n^{\backslash}=2$ نجد أنها مكافئة $(7\text{-}29),(7\text{-}28)$ على الترتيب و بالتالى فأن العلاقة صحيحة عندما $n^{\backslash}=2$

٣- بالمثل عندما $n^{\backslash}=3$ فأن $\tilde{y}_i=\tilde{a}_{i1}x_1+\tilde{a}_{i2}x_2+\tilde{a}_{i3}x_3$، و بأستخدام أسلوب التحويلات أيضاً (أنظر الباب الخامس) عندما:

$$f(\tilde{a}_{i1},\tilde{a}_{i2},\tilde{a}_{i3})=\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}\mathbf{Exp}[-\lambda_{i1}\tilde{a}_{i1}-\lambda_{i2}\tilde{a}_{i2}-\lambda_{i2}\tilde{a}_{i3}] \quad (7\text{-}30)$$

فأن

$$f(\tilde{y}_i)=\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}\left\{\frac{x_1\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right)\tilde{y}_i}{(x_1\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i1})(x_1\lambda_{i3}-x_3\lambda_{i1})}+\frac{x_2\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right)\tilde{y}_i}{(x_2\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i2})(x_2\lambda_{i3}-x_3\lambda_{i2})}+\frac{x_3\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i3}}{x_3}\right)\tilde{y}_i}{(x_3\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i3})(x_3\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i3})}\right\},\ \tilde{y}_i>0 \quad (7\text{-}31)$$

$$\begin{aligned}F(y_i)=\Bigg\{&1-\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i3}}{x_3}\right)y_i+\frac{x_2\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right)y_i}{x_3\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i3}}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right)y_i\\&-\frac{x_2}{x_3\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i3}}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i3}}{x_3}\right)y_i\\&+\frac{x_2\lambda_{i1}\lambda_{i2}}{(x_2\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i2})(x_3\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i3})}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i3}}{x_3}\right)y_i\\&-\frac{x_1^2\lambda_{i1}\lambda_{i3}}{(x_2\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i2})(x_3\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i3})}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i1}}{x_1}\right)y_i\\&+\frac{x_1x_2\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{(x_2\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i2})(x_3\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i3})}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i2}}{x_2}\right)y_i\\&-\frac{x_1x_2\lambda_{i1}\lambda_{i3}}{(x_2\lambda_{i1}-x_1\lambda_{i2})(x_3\lambda_{i2}-x_2\lambda_{i3})}\mathbf{Exp}\left(\frac{-\lambda_{i3}}{x_3}\right)y_i\Bigg\}\end{aligned} \quad (7\text{-}32)$$

و بالتعويض فى (7-25),(7-24) نجد أنها مكافئة للعلاقة فى (7-32),(7-31) و بالتالى فأن

العلاقة صحيحة عندما $n^{\backslash} = 3$

٤- بأفتراض أن العلاقة (7-25),(7-24) صحيحة عندما $n^{\backslash} = s$ فسوف تثبت أن العلاقة صحيحة عندما $n^{\backslash} = s + 1$ على النحو التالى

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{s+1} \tilde{a}_{ij} x_j = \tilde{a} + \tilde{a}_{i,s+1} x_{s+1} \tag{7-33}$$

حيث أن

$$f(\tilde{a}) = \prod_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \left[\sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{s-2} \operatorname{Exp}\left(\frac{\lambda_{ik}}{x_k}\right) a}{\prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq k}}^{s} (x_k \lambda_{i\iota} - x_\iota \lambda_{ik})} \right] \tag{7-34}$$

$$f(\tilde{a}_{i,s+1}) = \lambda_{i,s+1} \operatorname{Exp}(-\lambda_{i,s+1} \tilde{a}_{i,s+1}), \qquad \tilde{a}_{i,s+1} > 0 \tag{7-35}$$

و بأستخدام أسلوب التحويلات أيضاً فأن:

$$F(y_i) = \int_{\tilde{a}_{i,s+1}}^{y_i/x_{s+1}} \int_{\tilde{a}=0}^{y_i - a_{s+1} x_{s+1}} f(\tilde{a}) f(\tilde{a}_{i,s+1}) \, d\tilde{a} \, d\tilde{a}_{i,s+1} \tag{7-36}$$

أو

$$F(y_i) = \int_{\tilde{a}_{i,s+1}}^{y_i/x_{s+1}} \int_{\tilde{a}=0}^{y_i - a_{s+1} x_{s+1}} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{s+1} \lambda_{ij} \right) \operatorname{Exp}(-\tilde{a}_{i,s+1} \lambda_{i,s+1}) \cdot \left[\sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{s-2} \operatorname{Exp}\left(\frac{\lambda_{ik}}{x_k}\right) \tilde{a}}{\prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq k}}^{s} (x_k \lambda_{i\iota} - x_\iota \lambda_{ik})} \right] \right\} d\tilde{a} \, d\tilde{a}_{i,s+1}$$

$$F(y_i) = \int_{\tilde{a}_{i,s+1}}^{y_i/x_{s+1}} \prod_{j=1}^{s+1} \lambda_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^{s} \frac{x_k^{s-1} \left[\operatorname{Exp}(-\tilde{a}_{i,s+1} \lambda_{i,s+1}) \right.}{\lambda_{ik} \prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq k}}^{s} (x_k \lambda_{i\iota} - x_\iota \lambda_{ik})} \frac{\left. - \operatorname{Exp}\left[\frac{\lambda_{ik} y_i}{x_k} - \tilde{a}_{i,s+1} (x_k \lambda_{i,s+1} - x_{s+1} \lambda_{ik}) \right] \right]}{\lambda_{ik} \prod_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq k}}^{s} (x_k \lambda_{i\iota} - x_\iota \lambda_{ik})} \right\} d\tilde{a}_{i,s+1} \tag{7-37}$$

أو

$$\mathbf{F(y_i)=\prod_{j=1}^{s+1}\lambda_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{s}\left\{\frac{x_k^{s-1}\left[1-Exp\left(\frac{\lambda_{i,s+1}}{x_{s+1}}\right)y_i\right]}{\lambda_{ik}\lambda_{i,s+1}\prod_{\substack{\iota=1\\ \iota\neq k}}^{s}(x_k\lambda_{i\iota}-x_\iota\lambda_{ik})}-\frac{x_k^{s}\left[Exp\left(\frac{-\lambda_{ik}}{x_k}y_i\right)-Exp\left(\frac{\lambda_{i,s+1}}{x_{s+1}}y_i\right)\right]}{\lambda_{ik}\prod_{\substack{\iota=1\\ \iota\neq k}}^{s}(x_k\lambda_{i\iota}-x_\iota\lambda_{ik})}\right\}\right\}} \quad \mathbf{(7\text{-}38)}$$

وبأجراء تفاضل طرفى العلاقة أعلاه نحصل على دالة كثافة الأحتمال $f(\tilde{y}_i)$ على النحو فى (٧ . ٢٤) .

(٧-٥) القيود الأحتمالية بمعلمات تتبع التوزيع الأسى المتعدد
Chance-Constraints with Multi-Variate Exponential Distributed Parameters

فى هذا الفصل سوف نقدم كيفية تحويل القيد الاحتمالى إلى قيد يقينى مكافئ عند تتبع المعلمات العشوائية التوزيع الأسى المتعدد السابق تقديمه فى حالتى الأستقلال و عدم الأستقلال للمعلمات فى الفصل السابق فى حالتين:

الحالة الأولى: عندما تكون القيود غير مرتبطة و المعلمات العشوائية $\tilde{a}_{ij}$

الحالة الثانية: عندما تكون القيود مرتبطة و المعلمات العشوائية b_i

<u>الحالة الأولى:</u> إذا فرضنا القيد الأحتمالى التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n\backslash}\tilde{a}_{ij}x_j+\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\right)\ge\gamma_i\quad,\quad i=1,2,\dots,m$$

حيث $\tilde{a}_{ij}\sim Exp\left(\lambda_{ij}\right)$ ، بالتالى فأن

$$P_r\left(\tilde{y}_i\le b_i-\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\right)\ge\gamma_i\quad\longrightarrow$$

$$F\left(b_i-\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\right)\ge\gamma_i$$

بالتعويض فى الطرف الأيسر للقيد أعلاه بالطرف الايسر فى (7-37) فان

$$\prod_{j=1}^{n\backslash}\lambda_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{n\backslash-1}\left[\frac{x^{n\backslash-2}\left[1-Exp\left(\frac{-\lambda_{in\backslash}\left(b_i-\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\right)}{x_{n\backslash}}\right)\right]}{\lambda_{ik}\lambda_{in\backslash}\prod_{\substack{\iota=1\\ \iota\ne k}}^{n\backslash-1}(x_k\lambda_{i\iota}-x_\iota\lambda_{ik})}-\frac{x_k^{n\backslash-1}\left[Exp\left(\frac{-\lambda_{ik}\left(b_i-\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\right)}{x_k}\right)-Exp\left(\frac{-\lambda_{in\backslash}\left(b_i-\sum_{j=n\backslash+1}^{n}a_{ij}x_j\right)}{x_{n\backslash}}\right)\right]}{\lambda_{ik}\prod_{\substack{\iota=1\\ \iota\ne k}}^{n\backslash-1}(x_k\lambda_{i\iota}-x_\iota\lambda_{ik})}\right]\right\}$$

و فيما يلى سوف نوضح كيفية تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة من خلال المثال التالى:

مثال (٧-٣)

أعتبر القيد الاحتمالى التالى:

$$P_r\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + 5x_4 \le 100\} \ge 0.9 \qquad (1)$$

بأفتراض ان

$$\tilde{a}_j \sim Exp(\lambda_j)\,, \qquad \lambda_1 = 2\,, \qquad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 3$$

يمكن أعادة كتابة القيد (1) على النحو التالى

$$P_r(\tilde{y} \le 100 - 5x_4) \ge 0.9 \longrightarrow F(100 - 5x_4) \ge 0.9$$

و بالتعويض فى الطرف الأيسر $F(100 - 5x_4)$ من العلاقة (7-23) نجد ان:

$$(30)\left\{\left[\frac{x_1\left[1-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{6(5x_1-2x_2)} - \frac{x_1^2\left[Exp\left(\frac{-2(100-5x_4)}{x_1}\right)-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{2(5x_1-2x_2)}\right]\right.$$
$$+\left[\frac{x_2\left[1-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{15(2x_2-5x_1)} - \frac{x_2^2\left[Exp\left(\frac{-5(100-5x_4)}{x_2}\right)-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{5(2x_2-5x_1)}\right]$$
$$\left.+\left[\frac{x_3\left[1-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{9(2x_3-3x_1)(5x_3-3x_2)} - 0\right]\right\} \ge 0.9$$

أو

$$(30)\left\{\left[\frac{(3x_1^2-x_1)Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)-3x_1^2Exp\left(\frac{-2(100-5x_4)}{x_1}\right)+x_1}{6(5x_1-2x_2)}\right]+\right.$$
$$\left[\frac{(3x_2^2-x_2)Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)-3x_2^2Exp\left(\frac{-5(100-5x_4)}{x_2}\right)+x_2}{15(2x_2-5x_1)}\right]$$
$$\left.+\left[\frac{x_3\left[1-Exp\left(\frac{-3(100-5x_4)}{x_3}\right)\right]}{9(2x_3-3x_1)(5x_3-3x_2)} - 0\right]\right\} \ge 0.9 \qquad (2)$$

الحالة الثانية: إذا فرضنا أن $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة $i = 1, 2, \dots, m_1$ ، $i^{\backslash} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$، و أعتبرنا القيود المشتركة على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \tilde{b}_i , \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \tilde{b}_{i^{\backslash}}, i = 1, 2, \dots, m_1, \; i^{\backslash} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m\right) \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}39)$$

فأنه يمكن تحويل القيود أعلاه إلى قيد يقينى مكافئ على النحو التالى:

$$\left\{\prod_{i=1}^{m} F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right\}.\left\{\prod_{i^{\backslash}=m_1+1}^{m}\left(1 - F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right)\right\} \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}40)$$

كذلك

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0, \; \sum_{j=1}^{n} a_{i^{\backslash}j}x_j \geq 0 \;, i = 1, 2, \dots, m_1, i^{\backslash} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m \qquad (7\text{-}41)$$

أو

$$\left\{\prod_{i=1}^{m_1}\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\}.\left\{\prod_{i^{\backslash}=m_1+1}^{m}\left[\mathrm{Exp}\left(-\lambda_{i^{\backslash}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} \geq \gamma^{\backslash} \qquad (7\text{-}42)$$

و القيد أعلاه قيد غير خطى و لكن يمكن تحويله إلى عدد m من القيود الخطية على النحو التالى:

$$\left\{\prod_{i=1}^{m_1}\left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\}.\left\{\prod_{i^{\backslash}=m_1+1}^{m}\left[\mathrm{Exp}\left(-\lambda_{i^{\backslash}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right]\right\} \geq \left[\sqrt[m]{\gamma^{\backslash}}\right]^{m} \qquad (7\text{-}43)$$

و بالتالى يمكن تحويل القيد (7-43) إلى عدد m من القيود الخطية التالية

$$1 - \mathrm{Exp}\left(-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \geq \sqrt[m]{\gamma^{\backslash}} \;\longrightarrow$$

$$-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \mathrm{Ln}\left(1 + \sqrt[m]{\gamma^{\backslash}}\right) \;, \; i = 1, 2, \dots, m_1 \qquad (7\text{-}44)$$

كذلك

$$\mathrm{Exp}\left(-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \geq \sqrt[m]{\gamma^{\backslash}} \;\longrightarrow$$

$$-\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \mathrm{Ln}\left(\sqrt[m]{\gamma^{\backslash}}\right) \ ,\ \ i^{\backslash} = m_1+1, m_1+2, \dots, m \qquad (7\text{-}45)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge 0,\ \ i = 1, 2, \dots, m \qquad (7\text{-}46)$$

مثال (٧-٤)

أعتبرالقيود الاحتمالية المشتركة التالية:

$$P_r\{5x_1 + 2x_2 - 5x_3 \ge \tilde{b}_1, x_1 - 2x_3 \ge \tilde{b}_2, 3x_1 - 4x_2 + x_3 \le \tilde{b}_3\} \ge 0.9 \ (1)$$

حيث $\tilde{b}_i$ متغير يتبع التوزيع الاسى بمعلمة λ_i، $i = 1, 2, 3$

$$\lambda_1 = 0.2\ , \qquad \lambda_2 = 0.4, \qquad \lambda_3 = 0.7$$

حول القيد الاحتمالى فى (1) إلى قيود يقينية مكافئة

١- بما أن $\gamma^{\backslash} = 0.9$ بالتالى فأن $\sqrt[3]{0.9} = 0.949$، و من العلاقة (7-46),(7-44)

$$-0.2(5x_1 + 2x_2 - 5x_3) \ge \mathrm{Ln}(1.949) \qquad (2)$$

$$-5x_1 - 2x_2 + 5x_3 \le 3.34 \qquad (3)$$

كذلك

٢- $-0.4(x_1 - 2x_3) \ge \mathrm{Ln}(1.949) \longrightarrow x_1 - 2x_3 \le -1.67$

$$-x_1 + 2x_3 \ge 1.67 \qquad (4)$$

٣- بالنسبة للقيد الأخير

$$-0.7(3x_1 - 4x_2 + x_3) \ge \mathrm{Ln}(0.949) \longrightarrow$$

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 0.075 \qquad (5)$$

(٧-٦) تمرينات Exercises

(٧-١)

أعتبر القيود الأحتمالية التالية حيث $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, 3$ تتبع التوزيع المعتاد الطبيعى المتعدد بمعلمات $\sigma_j = [2 \quad 3 \quad 1]^\backslash$, $\mu_j = [5 \quad 7 \quad 3]^\backslash$

(i) $P_r\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j x_j \le 100\right) \ge 0.9$

(ii) $P_r\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j x_j + 5x_4 \ge 20\right) \ge 0.9$

(iii) $P_r\left(\sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_j x_j - 5x_3 + 8x_4 \le 25\right) \le 0.5$

حول القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية مكافئة ثم علق على هذه القيود اليقينية.

(٧-٢)

أعتبر القيود الأحتمالية التالية حيث $\tilde{a}_j$ ، $j = 1, 2, 3$ تمثل المعلمات العشوائية، و تمثل متغيرات تتبع التوزيع الأسى بمعلمات $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة

(i) $P_r\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j x_j + 10x_4 \le 50\right) \ge 0.9$

(ii) $P_r\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j x_j \le 20\right) \le 0.5$

(٧-٣)

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة

$$P_r\left(5x_1 - 2x_2 \le \tilde{b}_1 \;, 4x_1 + 9x_2 - x_3 \ge \tilde{b}_2\right) \ge 0.9$$

حيث $\tilde{b}_1 , \tilde{b}_2$ متغيران مستقلان كل منهما يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda_1 = 5 , \lambda_2 = 2$ على الترتيب.

(٧-٤)

حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود مكافئة حيث $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المعتاد المتعدد بتوقع $\mu_j = 2, 1, 3$ و أنحراف معيارى $\sigma_j = 1, 0.5, 2$ على الترتيب

$$P_r(2x_1 + 5x_2 \le \tilde{b}_1 \ , 3x_1 - x_2 \ge \tilde{b}_2 \ , 5x_1 + x_2 \le \tilde{b}_3) \ge 0.9$$

(٧-٥)

أعتبر القيد الأحتمالى التالى

$$P_r(\tilde{a}_1 x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10 \ , 2x_1 - x_2 \ge \tilde{b}_2 \ , x_1 + x_2 \le \tilde{b}_3) \ge 0.9$$

حول القيد الأحتمالى إلى قيد يقينى مكافئ حيث

$$\tilde{a}_1 \sim N(\mu_1 = 5, \sigma_1 = 2)$$
$$\tilde{b}_2 \sim N(\mu_2 = 1, \sigma_2 = 0.5)$$
$$\tilde{b}_3 \sim N(\mu_3 = 4, \sigma_3 = 1)$$

(٧-٦)

إذا فرضنا أن المتغير $\tilde{a}_j$ يتبع التوزيع الأسى بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{a}_j)$ حيث

$$f(\tilde{a}_j) = \lambda_j \left[\mathrm{Exp}\left(-\lambda_j (\tilde{a}_j - \alpha_j) \right) \right] \ , \qquad \tilde{a}_j, \lambda_j > 0 \ , \alpha_j < \tilde{a}_j$$

أعتبر القيد الاحتمالى التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j x_j + 5x_4 \le 10\right) \ge 0.9$$

١) حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ حيث $\tilde{a}_j$ متغيرات مستقلة.
٢) أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{a}_j$.

الباب الثامن

دالة الهدف الاحتمالية

Random Objective Function $(\tilde{Z})$

(٨-١) مقدمة	Introduction
(٨-٢) معيار القيمة المتوقعة	Expected Value Criterion
(٨-٣) معيار تصغير التباين	Minimum Variance Criterion
(٨-٤) معيار تعظيم دالة الإمكان	Maximum Likelihood Criterion
(٨-٥) معيار الحدود المثلى	Optimum Limits Criterion
(٨-٦) برمجة الصلاحية	Reliability Programming
(٨-٧) تمرينات	Exercises

(٨-١) مقدمة Introduction

فى الأبواب السابقة تناولنا بشئ من التفصيل كيفية تحويل نماذج البرمجة الخطية (و أيضاً ممكن تكون نماذج غير خطية) الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون بعض أو كل المعلمات فى الطرف الأيمن للقيود $(\tilde{b}_i)$ و أيضاً عندما تكون بعض أو كل معاملات المتغيرات القرارية فى الطرف الأيسر للقيود $(\tilde{a}_{ij})$ $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots n$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة، و ذلك عند مستويات مأمونية γ_i معلومة أيضاً بأستخدام أسلوب (CCP).

و يرتبط هذا الباب أرتباط وثيق بالأبوب (٤)-(٧) و يمكن أن نطلق عليه تطبيق مباشر للطرق السابق تقديمها فى الأبواب السابق الأشارة إليها.

و فى هذا الباب سوف نتناول تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون بعض (أو كل) معاملات المتغيرات القرارية فى دالة الهدف متغيرات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة، و عادةً يتم هذا التحويل وفقاً لعدة معايير مختلفة ممثلة فى القواعد القرارية decision's rules التى يتم على أساسها تكوين دالة هدف يقينية.

القواعد القرارية: يتم تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية مكافئة بأساليب مختلفة تعتمد على طبيعة المشكلة و طبيعة التوزيعات الأحتمالية للمعلمات الأحتمالية $\tilde{C}_j$ و بالتالى التوزيع الأحتمالي لدالة الهدف $\tilde{Z}$.

و عادة يتم هذا التحويل وفقاً لعدة معايير من أهمها المعايير التالية:

١- معيار القيمة المتوقعة Expected Value Criterion لدالة الهدف. و صياغة المشكلة فى هذه الحالة يسمى بـ E-model [52].
٢- معيار تصغير التباين Minimum Variance Criterion لدالة الهدف. وصياغة المشكلة في هذه الحالة يسمى بـ V-model [51].
٣- معيار تعظيم دالة الأمكان Maximum Likelihood Criterion لدالة الهدف الأحتمالية و صياغة المشكلة فى هذه الحالة يسمى بـ P-model [50]. وعادةً يتم أفتراض قيم معينة لمستويات المأمونية γ_i , $i = 1, 2, \ldots$.

و لكن فى كثير من الحالات يكون متخذ القرار غير قادر على تحديد قيم γ_i، و فى هذه الحالة يمكن أعتبار مستويات المأمونية γ_i متغيرات قرارية أيضاً و يتم دمجها بأساليب

مختلفة فى دالة الهدف اليقينية، و تندرج هذه الأساليب المختلفة تحت عنوان برمجة الصلاحية Reliability Programming [177, 162].

٤- معيار الحدود المثلى لدالة الهدف Optimum Limits Objective Function Criterion.

و في هذا الباب بالإضافة إلى تقديم المعايير المذكورة أعلاه بالتفصيل سوف نتناول أيضاً بعض الأساليب للحصول على القيم المثلى لمقاييس الصلاحية Reliability Measures للنظام (أو لحل المشكلة) بأستخدام أسلوب برمجة الصلاحية.

كذلك سوف نتناول فى هذا الباب أيضاً عدة أمثلة تطبيقية فى حالة دالة الهدف الأحتمالية و أيضاً دالة الهدف و بعض القيود الأحتمالية بالإضافة إلى قياس صلاحية النظام.

(٨-٢) معيار القيمة المتوقعة
Expected Value Criterion

إذا فرضنا أن دالة الهدف الأحتمالية على النحو التالي:

$$\text{Max. (or Min.) } \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{C}_j X_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} C_j X_j \qquad (8\text{-}1)$$

حيث X_j تشير إلى المتغيرات القرارية، C_j معاملات X_j فى الحالة اليقينية (أي C_j معلمات غير عشوائية)، $\tilde{C}_j$ معلمات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة.

و منذ الستينات و قدمت عدة معايير على أساسها يتم تحويل الدالة الأحتمالية إلى دالة يقينية.

فى سنة (١٩٦٦) قدم كل من Charnes and Kirly نموذج E-model [52] و أعتبرا معيار التحويل هو أستبدال الدالة الأحتمالية بالقيمة المتوقعة لها حيث تشير E إلى القيمة المتوقعة Expectation، و بالتالى أستبدال الدالة فى (8-1) بالدالة التالية:

$$\text{Max. (or Min.) } E(\tilde{Z}) = \sum_{j=1}^{n\backslash} X_j \; E(\tilde{C}_j) + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} C_j X_j \qquad (8\text{-}2)$$

حيث $E(\tilde{Z})$ يشير إلى توقع $\tilde{Z}$، كذلك $E(\tilde{C}_j)$ يشير إلى توقع المتغير $\tilde{C}_j$. و يلاحظ أن أستخدام هذا المعيار لا يتطلب معلومية التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{Z}$ أو خصائص التوزيع أيضاً.

<u>مثال (٨-١):</u>

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } \tilde{Z} = \tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \geq 10 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq 40 \qquad (3)$$

$$X_2 \leq 2 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{C}_1 \sim N(\mu = 3, \sigma = 1)$, $\tilde{C}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 4)$.

المطلوب

١- حول الدالة $\tilde{Z}$ إلى دالة يقينية.
٢- حل النموذج اليقينى ثم عقب على الناتج.

الحل

١- بأستبدال الدالة الأحتمالية فى (1) بالقيمة المتوقعة لها لتصبح:

$$\text{Max. } E(\tilde{Z}) = 3\, X_1 + 10\, X_2 \qquad (6)$$

٢- و بحل النموذج (5)-(2) (6) , كنموذج برمجة خطية نجد أن الحل الأمثل

$$E^*(\tilde{Z}) = 34.4 \quad , \quad X_1^* = 4.8 \quad , \quad X_2^* = 2.0 \qquad (7)$$

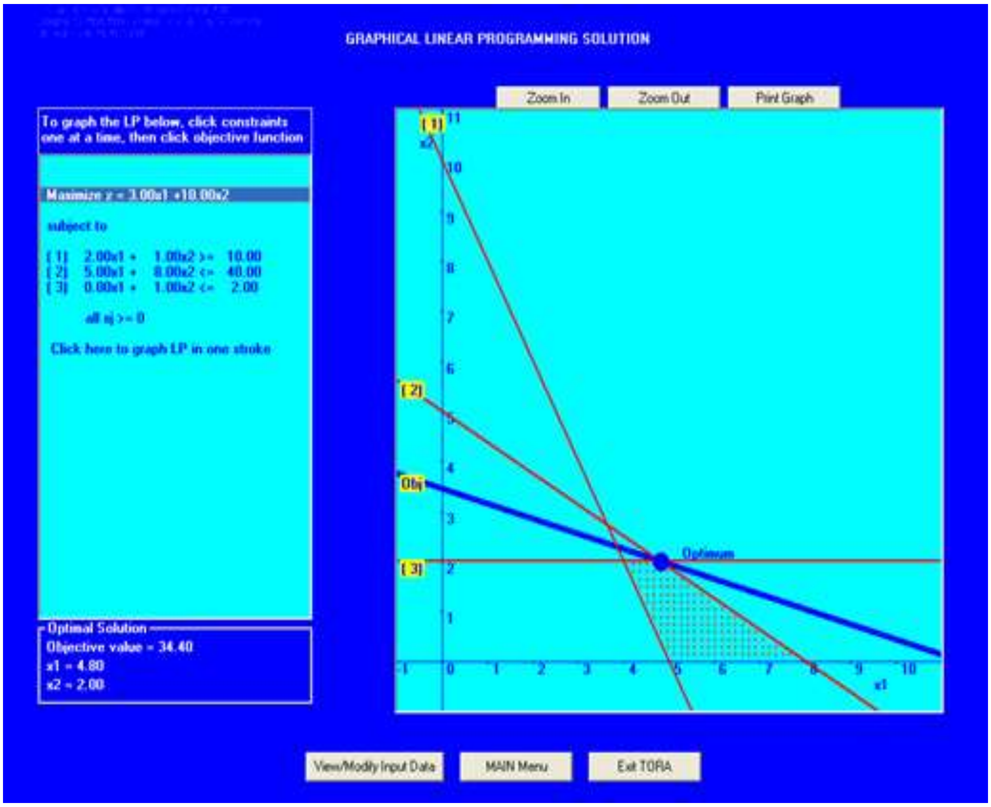
و الشكل التالى (٨-١) يوضح الحل البيانى للنموذج اليقينى.

و بما أن $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ تتبع كل منها التوزيع المعتاد بالتالى $\tilde{Z}$ تتبع التوزيع المعتاد أيضاً و بالتالى فإن أحتمال أن تكون $\tilde{Z}$ أقل من او تساوى 34.4 يساوى 0.5 أو بعبارة أخرى:

$$P_r(\tilde{Z} \leq 34.4) = 0.5 \qquad (8)$$

و الحل فى (7) يمثل الحل الأمثل للقيمة المتوقعة للدالة $\tilde{Z}$، و لكن لم يأخذ فى الأعتبار:

أ- تباين المتغير $\tilde{Z}$.
ب- التوزيع الأحتمالى للمتغيران $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ و بالتالى التوزيع الأحتمالى لـ $\tilde{Z}$.
ج- النموذج اليقينى المحول أعلاه لا يعطى القيمة المثلي لدالة الهدف عند أحتمال معين يحدده متخذ القرار يختلف عن القيمة 0.5.



شكل (٨-١)

و فى الفصول التالية سوف تأخذ هذه البنود (أ)-(ج) فى الأعتبار عند أستخدام المعايير الأخرى.

مثال (٨-٢)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } \tilde{Z} = 10\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3\,X_1 + 2\,X_2 \geq \tilde{b} \qquad (2)$$

$$X_1 - X_2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$X_1 \leq 5 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0\ ,\ E(\tilde{C}_2) = 10 \qquad (5)$$

$\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد $\tilde{b} \sim N(0,1)$ - حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى بمستوى مأمونية لتحقيق القيد (2) أكبر من 0.95.

الحل

$$\text{Max. } E(\tilde{Z}) = 10\, X_1 + 10\, X_2 \qquad (6)$$

و يمكن تحويل القيد الأحتمالى:

$$P_r(3\, X_1 + 2\, X_2 \geq \tilde{b}) \geq 0.95 \qquad (7)$$

و بالرجوع إلى الباب (٢) فإنه يمكن تحويل القيد (7) إلى قيد يقينى بأستخدام جداول المعتاد القياسى بملحق (٢) على النحو التالى:

$$F(3\, X_1 + 2\, X_2) \geq 0.95 \;\longrightarrow\; 3\, X_1 + 2\, X_2 \geq F^{-1}(0.95)$$

$$\longrightarrow\; 3\, X_1 + 2\, X_2 \geq 1.65 \qquad (8)$$

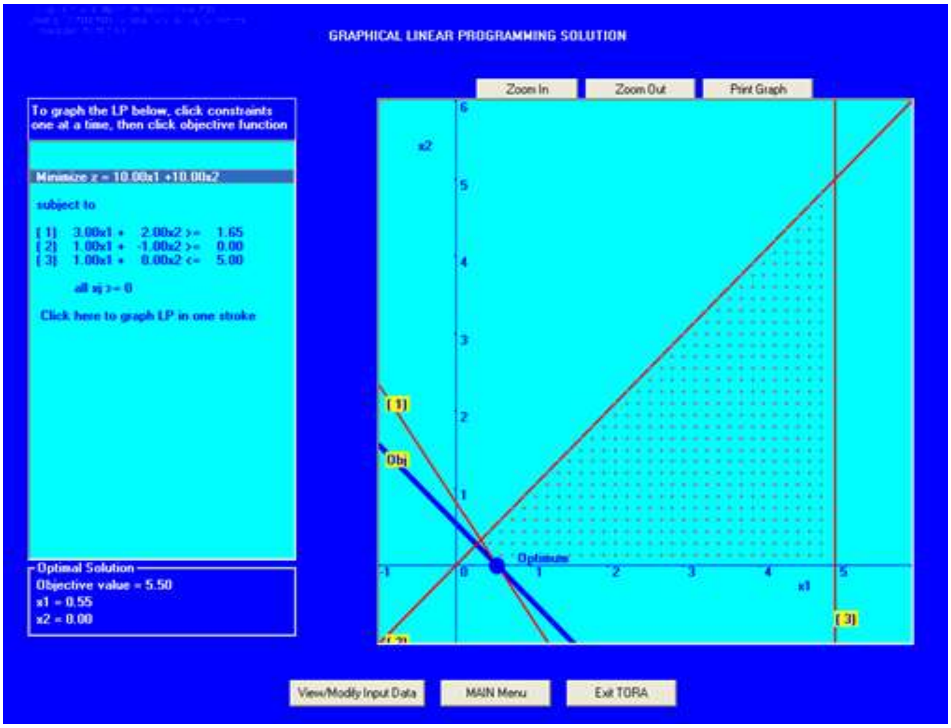
و يصبح النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned}
& \text{Max. } E(\tilde{Z}) = 10\, X_1 + 10\, X_2 \\
\text{S.T.} \quad & 3\, X_1 + 2\, X_2 \geq 1.65 \\
& X_1 - X_2 \geq 0 \\
& X_1 \leq 5 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

و بحل النموذج اليقينى أعلاه كنموذج برمجة خطية نجد أن الحل الأمثل

$$E^*(\tilde{Z}) = 5.5 \quad , \quad X_1^* = 0.55 \quad , \quad X_2^* = 0$$

و الشكل التالى يوضح الحل البيانى للنموذج اليقينى


GRAPHICAL LINEAR PROGRAMMING SOLUTION
Zoom In
Zoom Out
Print Graph
To graph the LP below, click constraints one at a time, then click objective function
Minimize z = 10.00x1 +10.00x2
subject to
[1] 3.00x1 + 2.00x2 >= 1.65
[2] 1.00x1 + -1.00x2 >= 0.00
[3] 1.00x1 + 0.00x2 <= 5.00
all xj >= 0
Click here to graph LP in one stroke
Optimal Solution
Objective value = 5.50
x1 = 0.55
x2 = 0.00
x2
x1
Obj
Optimum
[1]
[3]
View/Modify Input Data
MAIN Menu
Exit TORA

شكل (٨-٢)

(٨-٣) معيار تصغير التباين
Minimum Variance Criterion

فى سنة ١٩٧٢ أقترح **Charnes** و آخرين أمكانية أستخدام تصغير تباين دالة الهدف الأحتمالية $\tilde{Z}$ فى العلاقة (8-1) كمعيار لتحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة هدف يقينية [51, 52]. حيث أن تصغير تباين الدالة $(\tilde{Z})$ يعني إيجاد قيم X_j، $j = 1, 2, \ldots, n$ التى تجعل متوسط مجموع أنحرافات قيم الدالة $\tilde{Z}$ عن توقعها $E(\tilde{Z})$ أقل ما يمكن، أو بعبارة أخرى:

$$\text{Min. } V(\tilde{Z}) = \{\textstyle\sum_t [\tilde{Z}_t - E(\tilde{Z}_t)]^2\} \div N \qquad (8\text{-}3)$$

حيث $V(\tilde{Z})$ تشير إلى تباين $(\tilde{Z})$، و **N** عدد مفردات المجتمع، أما إذا أستخدمت عينة فيتم استبدال **N** بـ $(n - 1)$ حيث **(n)** حجم العينة [٣، ٩].

و بما أن **N** أو $(n - 1)$ مقادير ثابتة بالتالى فيمكن أستخدام معيار تصغير التباين على أنه مجموع مربعات أنحرافات $\tilde{Z}$ عن قيمتها المتوقعة $E(\tilde{Z})$.

فإذا أعتبرنا دالة الهدف الأحتمالية $\text{Min. } (\tilde{Z})$ على النحو التالى:

$$\text{Min. } \tilde{Z} = \textstyle\sum_{j=1}^{n^\backslash} \tilde{C}_j X_j + \sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j X_j \qquad (8\text{-}4)$$

حيث أن المعلمات $\tilde{C}_j$ ، $j = 1, 2, \ldots, n^\backslash$ متغيرات عشوائية مستقلة. فأقترحوا أستبدال دالة الهدف الأحتمالية فى (8-4) بدالة الهدف اليقينية التي تمثل تصغير تباين الدالة $(\tilde{Z})$ على النحو التالى:

$$\text{Min. } V(\tilde{Z}) = \textstyle\sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j^2\, V(\tilde{C}_j) \qquad (8\text{-}5)$$

حيث $V(\tilde{C}_j)$ تشير إلى تباين المتغير $(\tilde{C}_j)$ ، $j = 1, 2, \ldots, n^\backslash$.

<u>و نلاحظ ما يلى</u>

١- دالة الهدف فى (8-5) دالة غير خطية في X_j ، $j = 1, 2, \ldots, n^\backslash$ تربيعية محدبة **quadratic function convex** فى المتغيرات القرارية X_j التى تمثل

معاملات للمعلمات العشوائية $\tilde{C}_j$ ، $j = 1, 2, \dots, n^\backslash$.

٢- المتغيرات القرارية X_j ، $j = n^\backslash + 1, n^\backslash + 2, \dots, n$ غير ممثلة فى دالة الهدف اليقينية فى (8-5) علماً بأنها ممثلة فى دالة الهدف الأحتمالية فى (8-4) فى الحد غير العشوائى $\left(\sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j\, X_j\right)$ و هذا يجعل تمثل دالة الهدف اليقينية غير مكافئ لدالة الهدف الأصلية الأحتمالية.

٣- يمكن التغلب على (٢) بأقتراح أن تكون دالة الهدف اليقينية عبارة عن تصغير مجموع توقع و تباين المتغير $\tilde{Z}$ فى حالة إذا كان الهدف فى الدالة الأحتمالية تصغير، و سوف نشير لها بالرمز K حيث:

$$K = E(\tilde{Z}) + V(\tilde{Z}) \tag{8-6}$$

و تصبح دالة الهدف اليقينية على النحو التالى:

$$\text{Min. } K = \left\{\sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j\, X_j + \sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j\, E\left(\tilde{C}_j\right)\right\} + \left\{\sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j^2\, V\left(\tilde{C}_j\right)\right\} \tag{8-7}$$

و نلاحظ أن الدالة K دالة غير خطية مربعة و محدبة أيضاً. و بالتالى فى حالة القيود الخطية نحصل على الحل الأمثل المطلق (أنظر [193, 165]) للنموذج اليقينى وفقاً للمعيار فى (8-7).

٤- أما إذا كان الهدف هو تعظيم الدالة $(\tilde{Z})$ فإنه يمكن إضافة التباين إلى التوقع للمتغير $\tilde{Z}$ بإشارة سالبة و تصبح الدالة اليقينية فى هذه الحالة:

٥-

$$\text{Max. } K = \left\{\sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j\, X_j + \sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j\, E\left(\tilde{C}_j\right)\right\} - \left\{\sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j^2\, V\left(\tilde{C}_j\right)\right\} \tag{8-8}$$

ونـلاحظ أن الـدالـة K فى (8-8) دالة مقعرة concave حيـث $(\text{Min. } V(\tilde{Z}) = \text{Max. } (-V(\tilde{Z}))$ [193,٨]. و بالتالى يمكن الحصول على الحل الأمثل المطلق للنموذج فى هذه الحالة عندما تكون قيود النموذج قيود خطية.

مثال (٨-٣)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Min. } \tilde{Z} = 10\, X_1 + \tilde{C}_2\, X_2 \tag{1}$$
$$\text{S.T.} \quad 3\, X_1 + 5\, X_2 \le 15 \tag{2}$$
$$5X_1 + 2\, X_2 \ge 10 \tag{3}$$

$$X_2 \geq 1 \tag{4}$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث $\tilde{C}_2$ متغير عشوائى يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 5 وتباين 2.

المطلوب

١- حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار توقع دالة الهدف $\tilde{Z}$، ثم حل النموذج اليقينى فى هذه الحالة.

٢- حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار تصغير تباين دالة الهدف $\tilde{Z}$. ثم حل النموذج اليقينى فى هذه الحالة.

الحل

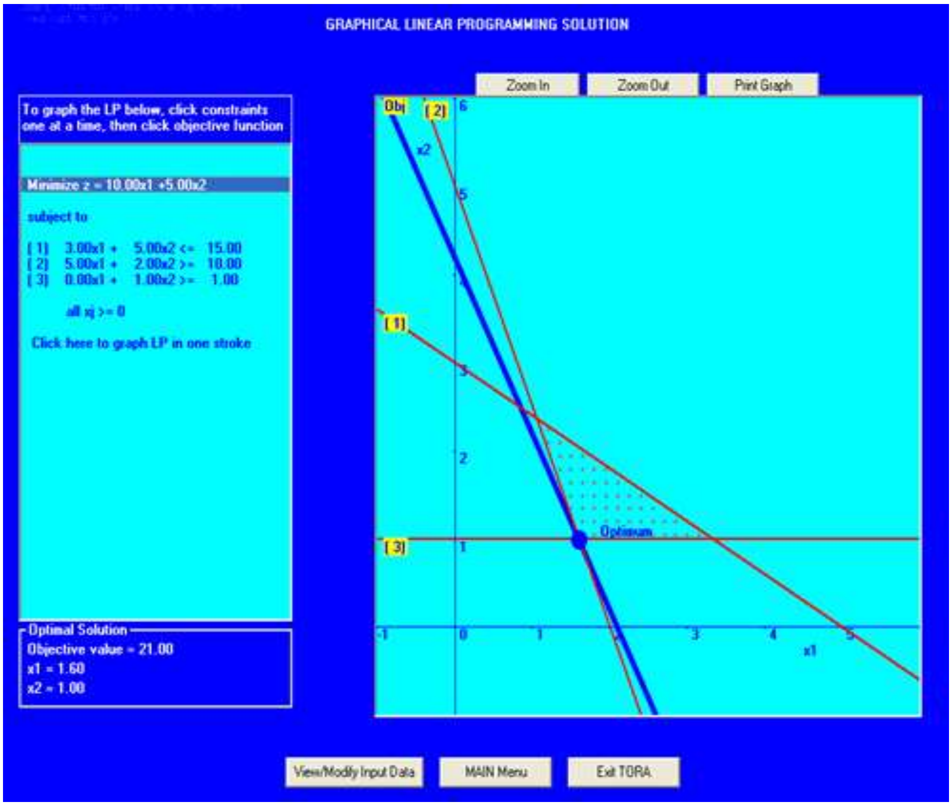
١- إذا أخذنا بمعيار تصغير توقع الدالة $\tilde{Z}$ فإن دالة الهدف اليقينية تصبح:

$$\text{Min. } E(\tilde{Z}) = 10\,X_1 + 5\,X_2 \tag{5}$$

و بحل النموذج اليقينى فى (4)-(2),(5) نجد أن الحل الأمثل

$$E^*(\tilde{Z}) = 21 \quad , \quad X_1^* = 1.6 \quad , \quad X_2^* = 1$$

و الشكل التالى يوضح نقطة الحل المثلى



شكل (٨-٣)

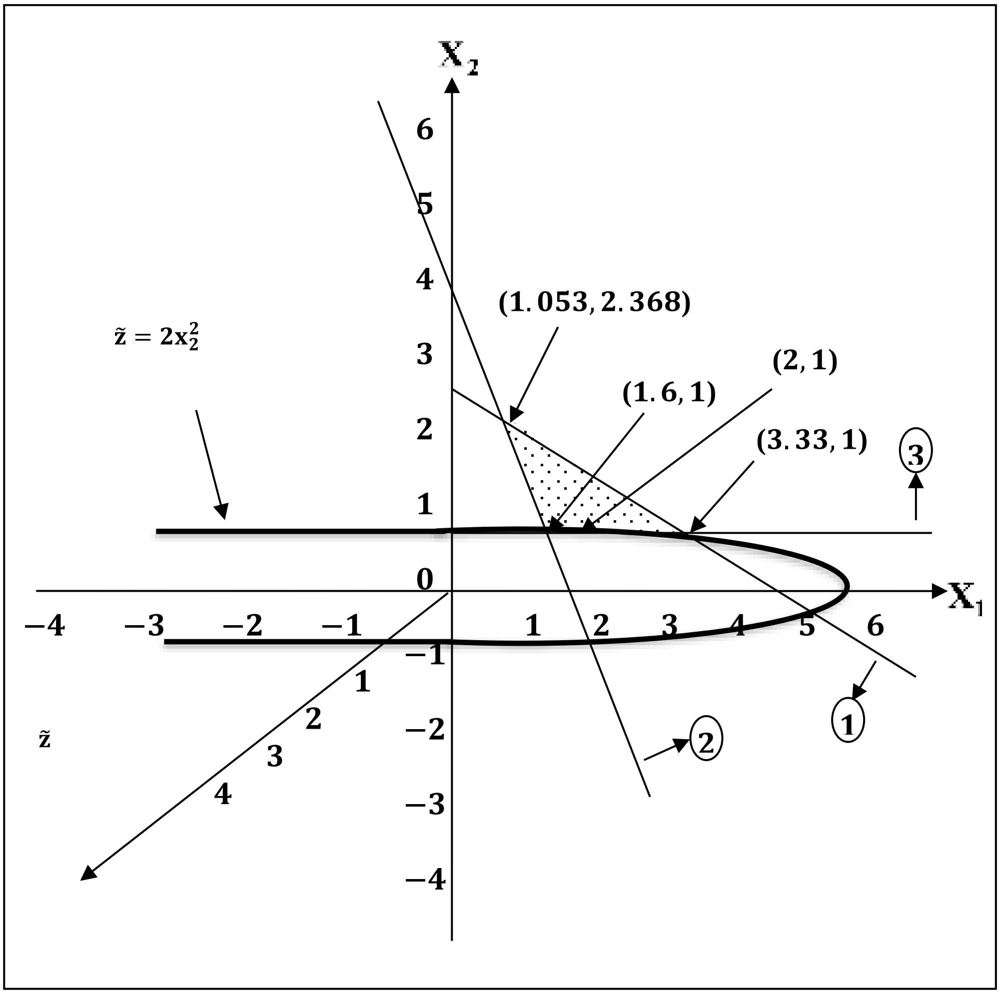
٢- ووفقاً لمعيار أقل تباين للدالة $(\tilde{Z})$ فإن دالة الهدف اليقينية فى هذه الحالة تصبح على النحو التالى:

$$\text{Min. } V(\tilde{Z}) = 2\, X_2^2 \qquad (6)$$

و نلاحظ أن الدالة فى (6) دالة غير خطية محدبة. و بحل النموذج غير الخطى (4)-(2),(6) بأستخدام طريقة لأجرانج [٨,160] نجد أن الحل الأمثل:

$$V^*(\tilde{Z}) = 2 \quad , \quad X_1^* = 2 \quad , \quad X_2^* = 1$$

و يمكن توضيح الحل بيانياً كما هو موضح فى الشكل التالى (أنظر ملحق رقم١٠):



X_2
X_1
$\tilde{z} = 2x_2^2$
$(1.053, 2.368)$
$(2, 1)$
$(1.6, 1)$
$(3.33, 1)$
3
1
2
$\tilde{z}$
6
5
4
3
2
1
0
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4

شكل (٨-٤)

(٨-٤) معيار تعظيم دالة الإمكان
Maximum Likelihood Criterion

قدم Charnes و آخرين سنة ١٩٦٧ معيار تعظيم أحتمال تحقق دالة الهدف عند حد معين certain limit لقيمة الهدف، عندما يوجد معلمة أو أكثر فى دالة الهدف تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة. فهم يعتبروا أول من أقترحوا وضع دالة الهدف فى شكل دالة أحتمال.

فإذا أعتبرنا دالة الهدف الأحتمالية $(\tilde{Z})$ فى (8-1) فقد أفترضوا وجود حد أدنى معلوم $(L_\circ)$ في حالة إذا كان الهدف تعظيم وحد أعلى $(U_\circ)$ معلوم أيضاً فى حالة التصغير. حيث يتم تحديد $L_\circ$ $U_\circ$ عن طريق متخذ القرار.
و بالتالى أعتبروا المعيار:

$$\mathbf{Max.\,P_r(\tilde{Z} > L_\circ)} \longleftarrow \text{فى حالة التعظيم} \qquad (8\text{-}9)$$

أو:

$$\mathbf{Min.\,P_r(\tilde{Z} \le U_\circ)} \longleftarrow \text{فى حالة التصغير} \qquad (8\text{-}10)$$

و أطلقوا على النموذج الأحتمالى بعد تحويل دالة الهدف الأحتمالية فى (8-10),(8-9) إلى دالة يقينية و أطلقوا على النموذج بنموذج الأحتمال أو بـ P-model نسبة إلى كلمة أحتمال Probability. و الدالة فى (8-9) هى عبارة عن مكمل الدالة التراكمية للمتغير العشوائي $\tilde{Z}$ أو بعبارة أخرى:

$$\mathbf{P_r(\tilde{Z} \ge L_\circ) = 1 - F(L_\circ)} \qquad (8\text{-}11)$$

حيث F دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{Z}$ ، كذلك بالنسبة للدالة فى (8-10) نجد أن:

$$\mathbf{P_r(\tilde{Z} \le U_\circ) = F(U_\circ)} \qquad (8\text{-}12)$$

حيث أن الدالة التراكمية F دالة فى المتغيرات القرارية.

و رغم أن هذا المعيار يعد معيار جيد لأنه يأخذ فى الأعتبار شكل التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{Z}$ و لكن من الناحية النظرية فقط للأسباب التالية:

أ. الدالة فى (8-12)-(8-11) عادةً دالة غير خطية فى المتغيرات القرارية X_j

حتى فى حالة إذا كانت دالة الهدف الأحتمالية $\tilde{Z}$ دالة خطية فى المتغيرات القرارية X_j ، $j = 1, 2, \dots, n^{\backslash}, n^{\backslash} + 1, \dots, n$.

ب. قيمة الدالة التراكمية F تنحصر بين الصفر و الواحد $(0 \leq F \leq 1)$ مما يجعل أي تقريب للدالة F مؤثر على الحل الأمثل للمشكلة تأثير كبير. و بصفة خاصة فى المشاكل التطبيقية ذات الحجم الكبير.

للأسباب المذكورة أعلاه أقترح Sengupta و آخرين أستخدام القيد الأحتمالى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ و لكن بأسلوب آخر كما سوف نوضح ذلك فى الفصل التالى.

(٨-٥) معيار الحدود المثلى
Optimum Limits Criterion

المقصود هنا بالحدود المثلى هى الحدود المثلى لدالة الهدف الأحتمالية فى (8-1) كما سوف نوضح فيما يلى.

فى سنة ١٩٧٢ قدم Sengupta معيار أخر هو تعظيم (أو تصغير) الحد الأدنى لدالة الهدف ($L_\circ$) فى حالة التعظيم أو تصغير الحد الأعلى ($U_\circ$) فى (8-10),(8-9) فالمعيار المقترح يعتمد على تحويل دالة الهدف الأحتمالية ($\tilde{Z}$) إلى قيد أحتمالى بوضع حد $L_\circ$ أو $U_\circ$ غير معلوم و مستوى مأمونية γ معلوم. و تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية تهدف إلى تعظيم $L_\circ$ أو تصغير $U_\circ$ كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية، و من خلال الأمثلة سوف نوضح أهم مزايا أستخدام معايير الحدود المثلى.

و تحويل دالة الهدف إلى قيد أحتمالى يمكننا من أستخدام جميع التحويلات transformations التى سبق تقديمها فى الأبواب ٧،٦،٤.

و يعتبر هذا المعيار أفضل من المعايير السابقة (التوقع و التباين) فهو يأخذ شكل التوزيع الأحتمالى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ فى الأعتبار، حيث يمكن متخذ القرار من الحصول على معلومات أكثر من المعلومات التى يتم الحصول عليها بأستخدام المعايير السابقة كل على حده كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة.

<u>مثال (٨-٤)</u>

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى، حيث المعلمة $\tilde{C}_1$ متغير عشوائى يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 10 وتباين 4.

$$\text{Max.}\ \tilde{Z} = \tilde{C}_1\, X_1 + 10\, X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.}\quad 2\, X_1 + 5\, X_2 \le 15 \qquad (2)$$
$$5\, X_1 + 2\, X_2 \le 10 \qquad (3)$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

المطلوب

١- حول دالة الهدف الأحتمالية فى (1) إلى دالة هدف يقينية بأستخدام معيارين تعظيم الحد الأدنى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ و ذلك بمستوى مأمونية

أ- $\gamma = 0.5$ ب- $\gamma = 0.9$

٢- حل النموذج اليقيني فى (1) فى كل حالة من (أ) ، (ب).

٣- قارن بين النتائج فى (أ) ، (ب).

الحل

إذا فرضنا أن L_0 هو الحد الأدنى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ فإنه يمكن تحويل الدالة فى (1) إلى قيد أحتمالى على النحو التالى:

$$P_r(\tilde{C}_1 X_1 + 10 X_2 \geq L_\circ) = \gamma \rightarrow P_r\left(\tilde{C}_1 \leq \left\{\frac{L_\circ - 10 X_2}{X_1}\right\}\right) = 1 - \gamma \qquad (5)$$

و بما أن المتغير $\tilde{C}_1$ متغير معتاد بالتالى يمكن تحويله إلى متغير معتاد قياسي (أنظر الباب ٤) و تصبح المعادلة (5) مكافئة للمعادلة التالية:

$$P_r\left(Z \leq \left\{\frac{L_\circ - 10 X_2 - 10 X_1}{2 \ X1}\right\}\right) = 1 - \gamma$$

أو بعبارة أخرى:

$$F\left(\frac{L_\circ - 10 X_2 - 10 X_1}{2 X_1}\right) = 1 - \gamma \qquad (6)$$

و بأستخدام ملحق (٢) للدالة التراكمية للمتغير المعتاد القياسي Z نجد أن:

أ. عند $\gamma = 0.5$ فأن $F = 0$

$$\frac{L_\circ - 10 X_2 - 10 X_1}{2 X_1} = 0 \longrightarrow L_\circ = 10 X_1 + 10 X_2 \qquad (7)$$

و تصبح دالة الهدف اليقينية المكافئة فى هذه الحالة:

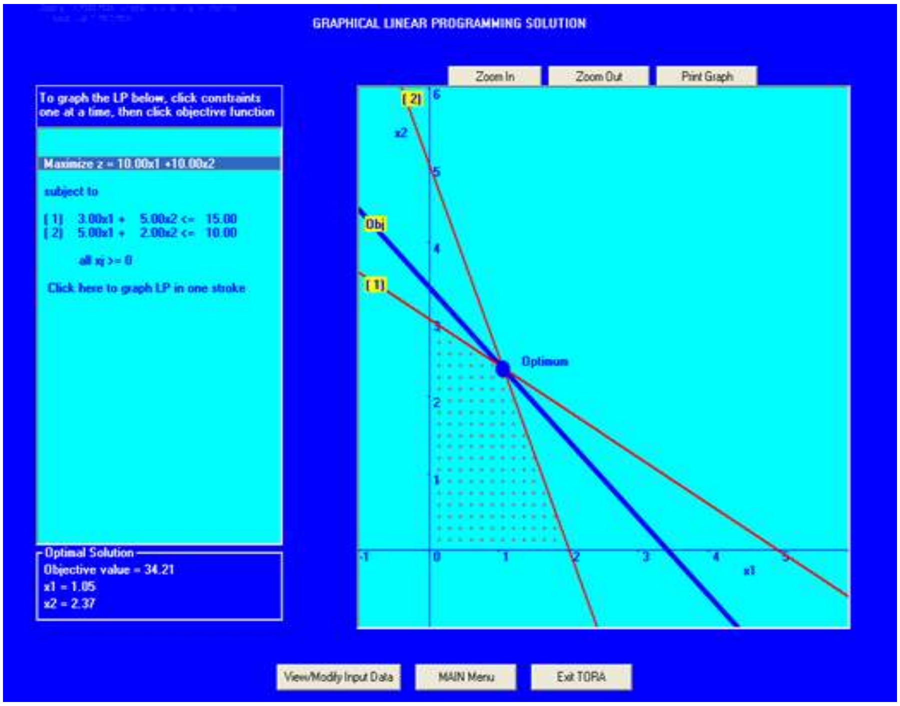
$$\text{Max.}\, L_\circ = 10 X_1 + 10 X_2 \qquad (8)$$

و يلاحظ أن دالة الهدف فى هذه الحالة دالة خطية و بالتالى يصبح النموذج اليقينى (4)-(2),(8)

المكافئ للنموذج الأحتمالى فى (4)-(1) نموذج برمجة خطية. و بحل النموذج نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$L_{\circ}^{*} = 34.21 \quad , \quad X_1^{*} = 1.053 \quad , \quad X_2^{*} = 2.368 \qquad (9)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً



شكل (٨-٥)

و الحل فى (9) مكافئ للحل بأستخدام معيار التوقع E، و الحل فى (9) يعنى أيضاً أن دالة الهدف الأحتمالية فى (9) تزيد عن القيمة 34.21 بأحتمال 0.50 (50%).

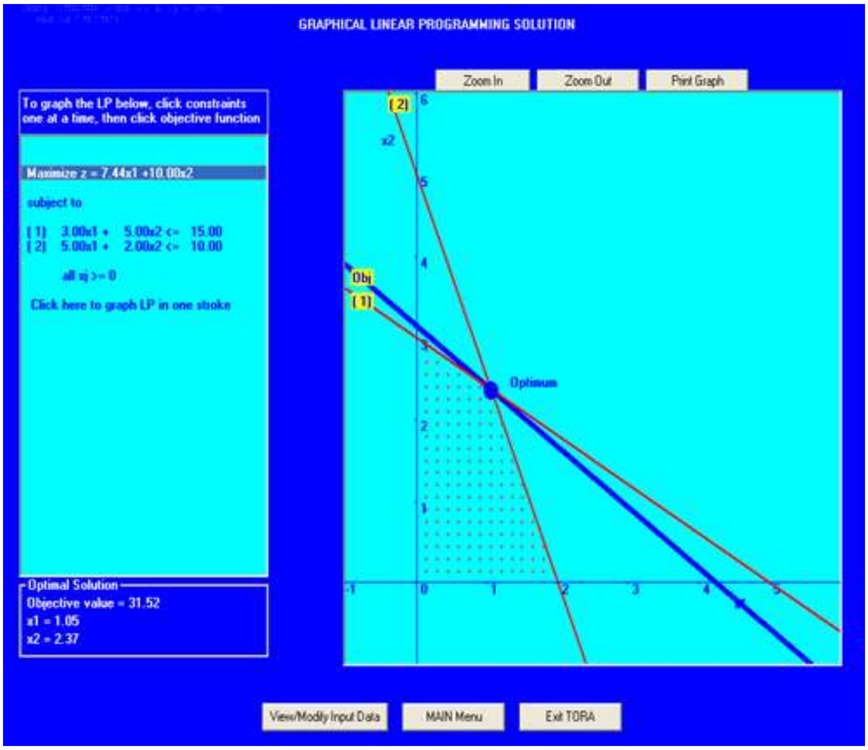
ب. و عند $\gamma = 0.9$ نجد $F^{-1}(1-\gamma) = -1.28$ و بالتعويض فى (6) نجد أن:

$$\frac{L_{\circ} - 10\,X_2 - 10\,X_1}{2\,X_1} = -1.28 \longrightarrow L_{\circ} = 7.44\,X_1 + 10\,X_2$$

و تصبح دالة الهدف اليقينية المكافئة فى هذه الحالة:

$$\text{Max.}\,L_{\circ} = 7.44\,X_1 + 10\,X_2 \qquad (10)$$

و الشكل التالى يوضح الحل الأمثل بيانياً



شكل (٨-٦)

و بحل النموذج (4)-(2),(10)نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$L_{\circ}^{*} = 31.514 \quad , \quad X_{1}^{*} = 1.053 \quad , \quad X_{2}^{*} = 2.368 \qquad (11)$$

و الحل فى (11) يعني أن دالة الهدف الأحتمالية فى (1) تزيد عن القيمة 31.514 بأحتمال 0.90 (90%)، كذلك نلاحظ أن زيادة مستوى المأمونية γ من 0.50 إلى 0.90 أدي إلى نقص الحد الأدنى الأمثل $L_{\circ}^{*}$ من 34.21 إلى 31.514 على الترتيب.

مثال (٨-٥)

اعتبر نموذج برمجة الهدف الأحتمالى التالى:

$$\text{Min. } \tilde{Z} = 100 + \tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + 5X_2 \le 15 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 2X_2 \ge 10 \qquad (3)$$

$$X_2 \geq \tilde{b} \quad (4)$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad (5)$$

حيث:

$\tilde{C}_1 \sim N(\mu = 3, \sigma = 1), \tilde{C}_2 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2), \tilde{b} \sim \exp(\lambda = 5, \alpha = 1.32)$

و تمثل متغيرات عشوائية مستقلة.

<u>المطلوب</u>

١- حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة هدف يقيني بمستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

٢- حول القيد الأحتمالى (4) إلى قيد يقينى عند مستوى مأمونية $\gamma_2 = 0.8$.

٣- قارن بين النموذج الأحتمالى و النموذج اليقينى المكافئ.

<u>الحل</u>

بما أن $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيران معتادين مستقلين، بالتالى فإن $\tilde{Z}$ متغير عشوائى يتبع التوزيع المعتاد أيضاً (أنظر الفصل (٦-٣)).

$$E(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2) = 3 X_1 + 5 X_2 \ , \ V(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2) = X_1^2 + 4 X_2^2 \longrightarrow$$

$$P_r(\tilde{Z} \leq U_\circ) = 0.9 \longrightarrow P_r(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \leq U_\circ - 100) = 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left(\tilde{Z} \leq \frac{U_\circ - 100 - 3 X_1 - 5 X_2}{\sqrt{X_1^2 + 4 X_2^2}}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

و تصبح دالة الهدف اليقينية فى هذه الحالة:

$$\text{Min.}\, U_\circ = 100 + 3 X_1 + 5 X_2 + 1.28\sqrt{X_1^2 + 4 X_2^2} \quad (6)$$

٢- يمكن أعادة كتابة القيد الأحتمالى (4) على النحو التالى:

$$P_r(X_2 \geq \tilde{b}) \geq 0.8 \longrightarrow F(X_2) \geq 0.8 \longrightarrow \quad (7)$$

و من نظرية الأحتمالات يمكن كتابة (7) على النحو التالى:

$$X_2 \geq F^{-1}(0.8) \longrightarrow X_2 \geq 1.32 - 0.32 \longrightarrow X_2 \geq 1.0 \qquad (8)$$

و يصبح النموذج اليقينى فى هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \text{Min. } U_\circ &= 3\,X_1 + 5\,X_2 + 1.28\sqrt{X_1^2 + 4\,X_2^2} + 100 \\ S.T. \quad & 3\,X_1 + 5\,X_2 \leq 15 \\ & 5\,X_1 + 2\,X_2 \geq 10 \\ & X_2 \geq 1.642 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

٣- أ) النموذج الأحتمالى فى (5)-(1) نموذج برمجة خطية فى المتغيرات القرارية X_j، $j = 1, 2$ و النموذج اليقينى أعلاه نموذج غير خطى، و لكن نموذج محدب convex فجميع القيود خطية و دالة الهدف غير خطية و لكنها دالة محدبة convex أيضاً [193,٨]، يمكن حله بأستخدام أحد أساليب البرمجة غير الخطية [193, 165] و الحصول على الحل الأمثل المطلق.

ب) دالة الهدف اليقينية فى (6) هي عبارة عن مجموع مرجح للتوقع و الانحراف المعيارى للدالة الأحتمالية $\tilde{Z}$، و هذا يعنى أن تصغير الحد $U_\circ$ يعنى تصغير للتوقع و الانحراف المعيارى وفقاً لأوزان الترجيح لـ $\tilde{Z}$، أو بعبارة أخرى فأن هذا المعيار جامع بين معيارى التوقع و التباين معاً فى هذه الحالة.

<u>**مثال (٨-٦)**</u>

أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالى:

$$\text{Max. } \tilde{Z} = 4\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} S.T. \quad 10\,X_1 + 8\,X_2 &\leq 80 && (2) \\ 6\,X_1 + 12\,X_2 &\leq 72 && (3) \\ X_1, X_2 &\geq 0 && (4) \end{aligned}$$

حيث $\tilde{C}_2$ متغير عشوائى يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين $(\lambda = 2, \alpha = 10)$.

المطلوب

١- حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى عند مستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

٢- قارن النموذج الأحتمالى بالنموذج اليقينى.

الحل

إذا أعتبرنا أن الحد الأدنى لدالة الهدف $L_\circ$ فإن:

$$P_r(\tilde{Z} \geq L_\circ) = 0.9 \longrightarrow P_r\left(\tilde{C}_2 \geq \left\{\frac{L_\circ - 4X_1}{X_2}\right\}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{L_\circ - 4X_1}{X_2}\right) = 0.10 \longrightarrow (L_\circ - 4X_1) - \alpha X_2 = \frac{-X_2}{\lambda}\ln(0.9) \longrightarrow$$

$$L_\circ = 4X_1 + 10.053X_2 \qquad (5)$$

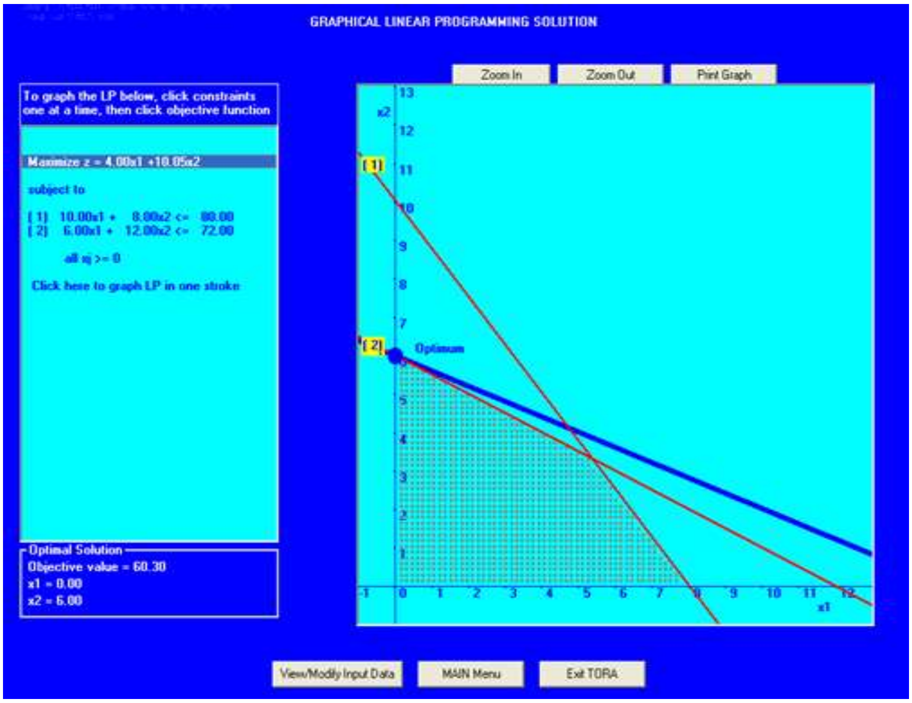
و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } L_\circ &= 4X_1 + 10.053X_2 \\ \text{S.T.} \quad 10X_1 + 8X_2 &\leq 80 \\ 6X_1 + 12X_2 &\leq 72 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

٢- و نلاحظ أن النموذج اليقينى أعلاه نموذج برمجة خطية يمكن حله بيانياً أو بأستخدام طريقة السمبلكس و يكون الحل الأمثل على النحو التالى:

$$L_\circ^* = 60.30 \quad , \quad X_1^* = 0.00 \quad , \quad X_2^* = 6.0$$

و الشكل التالى يوضح الحل البيانى


GRAPHICAL LINEAR PROGRAMMING SOLUTION
Zoom In
Zoom Out
Print Graph
To graph the LP below, click constraints one at a time, then click objective function
Maximize z = 4.00x1 +10.05x2
subject to
(1) 10.00x1 + 8.00x2 <= 80.00
(2) 6.00x1 + 12.00x2 <= 72.00
all xj >= 0
Click here to graph LP in one stroke
Optimal Solution
Objective value = 60.30
x1 = 0.00
x2 = 6.00
x2
x1
(1)
(2)
Optimum
View/Modify Input Data
MAIN Menu
Exit TORA

شكل (٨٢٣-٧)

(٨-٦) برمجة الصلاحية

Reliability Programming

بالنسبة للأنظمة الأحتمالية probabilistic systems مثل أنظمة الصفوف queue systems أو أنظمة الإنتاج Production systems أو أنظمة العرض و الطلب، يكون من الأهمية تحديد أحتمال عمل النظام بكفاءة (حيث يوجد أحتمال موجب لعدم عمل النظام بكفاءة). و يسمى أحتمال عمل النظام بكفاءة بمقياس (أو مؤشر) الصلاحية reliability measure فإذا أشرنا لهذا المؤشر بالرمز R فإن $0 < R \leq 1$.

ومنذ ١٩٥٠ و يزداد الأهتمام بتقديم تعريفات مختلفة لمقياس الصلاحية R، فقدمت نظرية الصلاحية reliability theory التى تتناول العلاقة بين R و التوزيع العمرى the age distribution لكل مكون من مكونات النظام الأحتمالى محل الأعتبار [182, 180, 131, 104, 67].

و بالنسبة لنماذج البرمجة الاحتمالية فهى تمثل أنظمة أحتمالية ، و بالتالي يعرف مقياس الصلاحية لنموذج البرمجة الأحتمالية بأنه أحتمال تحقيق القيود الأحتمالية و الهدف الأحتمالى أيضاً أن وجد.

و برمجة الصلاحية هو أسلوب من أساليب البرمجة التى تأخذ فى الإعتبار تعظيم مقياس الصلاحية (أى تعظيم إحتمال تحقيق القيود و الهدف) للحل أو بعبارة أخري تصغير مقياس المخاطرة و المتمثل فى عدم تحقيق قيد أو أكثر، و يمكن الإشارة له بالرمز $\mathbf{R}^{\circ}$ حيث أن $\mathbf{R}^{\circ} = \mathbf{1} - \mathbf{R}$.

و من مزايا أستخدام أسلوب CCP فى تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ أنه يمكننا من دمج مؤشر الصلاحية (أو المخاطرة) فى دالة الهدف اليقينية بعد التحويل، و سوف نوضح ذلك فيما يلى.

فإذا كان مستوى المأمونية tolerance measure للقيد رقم (i) يساوى γ_i و كما

ذكرنا سابقاً فإن γ_i هى أحتمال تحقق القيد (i)، و بالتالى فإن مقياس الصلاحية لتحقيق القيد رقم (i) يساوي γ_i أيضاً [180].

و بالتالى فإن مقياس صلاحية الحل هو دالة فى المؤشرات γ_i و يمكن أن يأخذ صياغات مختلفة على النحو التالى:

$$\text{i) } R_1 = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i \qquad (8\text{-}13)$$

و فى هذه الحالة يكون مقياس صلاحية الحل هو أحتمال أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود فى نفس الوقت.

$$\text{ii) } R_2 = 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)\right] \qquad (8\text{-}14)$$

و فى هذه الحالة يكون مقياس الصلاحية هو أحتمال أن يحقق الحل الأمثل واحد أو أكثر من القيود. حيث يمثل المقدار $\left[\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)\right]$ أحتمال عدم تحقق القيود معاً أو ما يسمى بالمخاطرة risk و سوف نرمز للمخاطرة بالرمز $R_2^{\backslash}$ على النحو التالى:

$$\text{iii) } R_2^{\backslash} = 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)\right] \qquad (8\text{-}15)$$

بالنسبة للمقياس R_1 فى حالة وجود واحد على الأقل من العناصر γ_i يساوي صفر فإن هذا يؤدى إلى أن $R_1 = 0$، و لمعالجة ذلك في هذه الحالة يمكن أفتراض أن $\gamma_i = \varepsilon_i$ ، $\varepsilon_i \to 0$ بالمثل بالنسبة للمقياس $R_2^{\backslash}$ عند وجود واحد من العناصر $(1-\gamma_i)$ يساوى صفر فأن هذا يؤدى إلى أن $R_2^{\backslash}$ يساوى صفر أيضاً. و يمكن أيضاً أفتراض أن $(1-\gamma_i) = \varepsilon_i$ ، $\varepsilon_i \to 0$.

و فى كثير من الحالات يكون متخذ القرار غير قادر على تحديد المؤشرات γ_i أو $(1-\gamma_i)$، و في هذه الحالة يمكن أعتبار γ_i ، $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ متغيرات قرارية غيرمعلومة unknown decisions variables أيضاً و تعامل كمتغيرات قرارية، و بالتالى يصبح

متخذ القرار يرغب فى تحقيق:

$$\text{Max. } R_1 = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i$$

أو

$$\text{Max. } R_2 = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)$$

أو

$$\text{Min. } R_2^{\backslash} = 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)\right]$$

$$0 < \gamma_i \le 1 \;,\; 0 < R_1, R_2, R_2^{\backslash} \le 1 \qquad (8\text{-}16)$$

و فى الأمثلة التالية سوف نوضح كيفية دمج أحد المقاييس فى (8-15) فى دالة الهدف. و يلاحظ أن المقاييس فى (8-14)-(8-13) دوال غير خطية فى المتغيرات γ_i ، $i = 1, 2, \ldots\ldots, m$ و لكن يمكن تحويلها إلى دوال خطية على النحو:

إذا فرضنا أن $R_1 = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i$ فبأخذ اللوغاريتم للطرفين نجد أن:

$$\ln\ R_1 = \sum_{i=1}^{m} \ln\ \gamma_i \qquad (8\text{-}17)$$

و بما أن γ_i بحيث $1 > \gamma_i > 0$ فإن الدالة $\ln \gamma_i$ دالة تأخذ قيم سالبة، فإذا عرفنا المتغير y_i بحيث $y_i = \ln \gamma_i$، $y_i \geq 0$ يمثل دالة متناقصة فى γ_i و بالتالى فإن $Max.\, R_1$ تكافئ $Max.\,(-\sum_{i=1}^{m} y_i)$ [193, ٨].

و فى الأمثلة التالية سوف نوضح كيفية دمج مقياس الصلاحية (أو مقياس المخاطرة) فى دالة الهدف، الذى يؤدى إلى دالة هدف غير خطية و لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بأستخدام التحويل فى (8-17).

مثال (٢٣-٧)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$Max.\, Z = 2\,X_1 + 3\,X_2 \qquad (1)$$

$$S.T.\quad P_r\left(2\,X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1\right) \geq \gamma_1 \qquad (2)$$

$$P_r\left(X_1 + 2\,X_2 \leq \tilde{b}_2\right) \geq \gamma_2 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 6)$, $\tilde{b}_2 \sim Exp(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 4)$

حيث $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران مستقلان

المطلوب

١- تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ وفقاً لأولويات متخذ القرار w_1, w_2

٢- تحويل النموذج اليقينى غير الخطي إلى نموذج خطى

٣- حل النموذج الخطى عند قيم مختلفة لأولويات متخذ القرار w_1, w_2

الحل

من الباب الثانى نجد أن القيد اليقينى المكافئ للقيد (2) على النحو التالى:

$$-\lambda_1(2\,X_1 + X_2 - \alpha_1) \geq \ln\ \gamma_1 \rightarrow 2\,X_1 + X_2 + 0.5\ \ln\ \gamma_1 \leq 6 \qquad (5)$$

بالمثل بالنسبة للقيد (3)، نجد أن القيد اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$-\lambda_2(X_1 + 2\,X_2 - \alpha_2) \geq \ln\ \gamma_2 \rightarrow X_1 + 2\,X_2 + \ln\ \gamma_2 \leq 4 \qquad (6)$$

فإذا كان مقياس الصلاحية

$$R_1 = \gamma_1\,\gamma_2 \qquad (7)$$

و يصبح نموذج برمجة الصلاحية اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max.}\, Z &= w_1(2\,X_1 + 3\,X_2) + w_2(\gamma_1\,\gamma_2) \\ \text{S.T.}\quad & 2\,X_1 + X_2 + 0.5\ \ln\ \gamma_1 \leq 6 \\ & X_1 + 2\,X_2 + \ln\ \gamma_2 \leq 4 \\ & w_1, w_2 > 0\ ,\ X_1, X_2 \geq 0\ ,\ 0 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 1 \end{aligned}$$

حيث w_1, w_2 تشير إلى أوزان ترجيحية فى دالة الهدف توضح الأولوية لأهداف متخذ القرار فى

تعظيم دالة الهدف Z ، و بحل النموذج نحصل على الحل الكفئ **efficient solution** و هو يعتبر حل أمثل مطلق فى هذه الحالة أيضا [١٠, 150].

٢- و النموذج أعلاه نموذج برمجة غير خطية و لكن يمكن تحويله إلى برمجة خطية و ذلك بافتراض أن $y_2 = -\ln\ \gamma_2$ ، $y_1 = -\ln\ \gamma_1$.

و يمكن تحويل نموذج برمجة الصلاحية غير الخطي إلى نموذج برمجة خطية على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max.}\, Z^{\backslash} &= w_1(2\,X_1 + 3\,X_2) - w_2(\gamma_1 + \gamma_2) \\ \text{S.T.}\quad & 2\,X_1 + X_2 - 0.5y1 \leq 6 \\ & X_1 + 2\,X_2 - y_2 \leq 4 \\ & X_1, X_2, y_1, y \geq 0 \end{aligned}$$

و النموذج أعلاه نموذج برمجة خطية يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس. و الجدول التالى يعطى الحل الأمثل للنموذج عند قيم أفتراضية مختلفة لأولويات متخذ القرار w_1, w_2.

ومن الجدول نجد أن أفضل حلين هما برقم (2),(4) حيث أن مؤشر الصلاحية الأمثل R_1^* يساوى (1)

جدول (٨-١)

الرقم	w_1	w_2	Z^{*w}	$R_1^* = \gamma_1^* \gamma_2^*$	نقط الحلول المثلى
1	1	1	10.00	0.00034	$X_1^* = 0, X_2^* = 6, \gamma_1^* = 1, \gamma_2^* = 0.00034$
2	1	2	7.33	1.000	$X_1^* = 2.67, X_2^* = 0.67, \gamma_1^* = 1, \gamma_2^* = 1 \leftarrow$
3	2	1	28.00	0.00034	$X_1^* = 0, X_2^* = 6, \gamma_1^* = 1, \gamma_2^* = 0.00034$
4	1	3	10.00	1.000	$X_1^* = 2, X_2^* = 2, \gamma_1^* = 1, \gamma_2^* = 1 \leftarrow$

مثال (٨-٨)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Min. } Z = 2\,X_1 + X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_1) \geq \gamma_1 \qquad (2)$$
$$P_r(5\,X_1 + 8\,X_2 \leq \tilde{b}_2) \leq (1 - \gamma_2) \qquad (3)$$
$$X_1, X_2 \geq 0\,, \gamma_1 \geq 0.8\,,\ \gamma_2 \geq 0.5 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 4)$, $\tilde{b}_2 \sim Exp(\lambda_2 = 5, \alpha_2 = 40)$

و حيث γ_1, γ_2 تشير إلى أحتمال تحقق القيدين (3),(2)على الترتيب.

المطلوب

١- تحويل القيدين (3),(2) إلى قيدين يقينيين.

٢- كون نموذج صلاحية يقينى مكافئ للنموذج فى (4)-(1) بحيث تكون قيمة مؤشر المخاطرة $\left(R_2^{\backslash}\right)$ أقل ما يمكن (أو بعبارة أخرى تعظيم مقياس الصلاحية R_2)، وفقاً للأوزان الترجيحية w_1, w_2.

٣- حول النموذج اليقينى غير الخطي فى (٢) إلى نموذج خطى، و أوجد الحل الأمثل عند قيم مختلفة لـ w_1, w_2.

الحل

إذا فرضنا أن $(y_i = -\ln(1-\gamma_i)$ ، $i = 1, 2$ ، حيث y_i دوال متناقصة فى $(1-\gamma_i)$ ، $0 < \gamma_i < 1$. و يمكن تحويل القيدين (3),(2) إلى (6),(5)على النحو التالى:

$$X_1 + X_2 - 0.5\, y_1 \geq 4 \qquad (5)$$
$$5X_1 + 8\, X_2 - 0.2\, y_2 \leq 40 \qquad (6)$$

٢- إذا فرضنا أن مؤشر المخاطرة $R_2^{\backslash}$ فإن:

$$R_2^{\backslash} = \prod_{i=1}^{2}(1-\gamma_i) \longrightarrow \ln R_2^{\backslash} = \ln(1-\gamma_1) + \ln(1-\gamma_2) \qquad (7)$$

و فى هذه الحالة يصبح مقياس الصلاحية R_2 بحيث $R_2 = 1 - R_2^{\backslash}$. و بإدماج الدالة $\ln R_2^{\backslash}$ فى دالة الهدف يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Min.}\, Z &= w_1(2\, X_1 + X_2) + w_2\left(\prod_{i=1}^{2}(1-\gamma_i)\right) \\ \text{S.T.}\quad & X_1 + X_2 + 0.5\ \ln\ (1-\gamma_1) \geq 4 \\ & 5X_1 + 8\, X_2 + 0.2\ \ln\ (1-\gamma_2) \leq 40 \\ & X_1, X_2 \geq 0\, , \gamma_1 \geq 0.8\, , \gamma_2 \geq 0.5 \end{aligned}$$

و النموذج أعلاه نموذج برمجة غير خطية يمكن تحويله إلى نموذج خطى على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Min.}\, Z^{\backslash\backslash} &= w_1(2\, X_1 + X_2) + w_2(y_1 + y_2) \\ \text{S.T.}\quad & X_1 + X_2 - 0.5\, y_1 \geq 4 \\ & 5X_1 + 8\, X_2 - 0.2\, y_2 \leq 40 \\ & X_1, X_2 \geq 0\ ,\ \ y_1 \geq 1.6094\ ,\ y_2 \geq 0.69315 \end{aligned}$$

و الجدول التالى يوضح الحل الأمثل للنموذج أعلاه عند القيم المختلفة لـ w_1, w_2.

جدول (٨-٢)

الرقم	w_1	w_2	Z^{*W}	R_2^{*W}	$R_2^{*}=1-R_2^{*W}$	نقط الحلول المثلى
1	1	1	2.51	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.81, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 0.5$
2	2	1	7.31	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.0, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 5$
3	1	2	2.21	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.81, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 0.5$

مثال (٨-٩)

أعتبر التطبيق رقم (٢-١) بالفصل (٢-٧). فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من المنتج A يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى و سوف نشير له بالرمز $\tilde{C}$ بحيث:

$$\tilde{C} \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 5, \alpha = 2000)$$

المطلوب

١- **صياغة دالة الهدف للمشكلة كدالة أحتمالية ثم تحويلها إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار القيمة المتوقعة، ثم كون النموذج اليقينى بأحتمالات تحقق القيود الأحتمالية γ_1, γ_2 وحدود قيمة مؤشر الصلاحية للحل فى هذه الحالة.**

٢- **معيار تعظيم الحد الأدنى لدالة الهدف باحتمال $\gamma \geq 0.9$ ، ثم كون النموذج اليقينى فى هذه الحالة و حدد قيمة مؤشر الصلاحية فى هذه الحالة.**

الحل

بما أن $\tilde{C}$ متغير فإن دالة الهدف فى هذه الحالة على النحو:

$$\mathrm{Max.}\, \tilde{Z} = \tilde{C}\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3$$

و بما أن $\tilde{C}$ متغير يتبع التوزيع الأسى فإن:

$$E(\tilde{C}) = \frac{1}{\lambda} + \alpha = 0.2 + 2000 = 2000.2 \qquad (1)$$

و بالتالى فإن:

$$P_r(\tilde{C} \geq E(\tilde{C})) = P_r(\tilde{Z} \geq E(\tilde{Z})) = 0.961 \longrightarrow \gamma = 0.961$$

و بأستبدال $\tilde{Z}$ بالقيمة المتوقعة $E(\tilde{Z})$ يصبح النموذج اليقينى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$\text{Max. } E(\tilde{Z}) = 2000.2\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3 \qquad (2)$$

$$\text{S.T.} \quad 5\, X_1 + 3\, X_2 + 2\, X_3 \leq 600 \qquad (3)$$

$$3\, X_1 + 4\, X_2 + 5\, X_3 \leq 561 \qquad (4)$$

$$X_1 \geq 19\,,\ X_2 \geq 24\,,\ X_3 \geq 29 \qquad (5)$$

و بحل النموذج (5)-(2) بأستخدام طريقة السمبلكس [143,٨] نجد أن الحل الأمثل:

$$E^*(\tilde{Z}) = 258199.55 \ \ ,\ \ X_1^* = 83.04 \ \ ,\ \ X_2^* = 41.22 \ \ ,\ \ X_3^* = 29 \qquad (6)$$

و الحل فى (6) يعنى أن أكبر قيمة متوقعة لـ $\tilde{Z}$ تساوى 358199.55 بحيث أن القيم المثلى لكل من X_1, X_2, X_3 على النحو:

$$X_1^* = 83.04 \ \ ,\ \ X_2^* = 41.22 \ \ ,\ \ X_3^* = 29$$

و فى هذه الحالة تكون قيمة مؤشر الصلاحية R_1^* على النحو التالى:

$$R_1^* = \gamma\, \gamma_1\, \gamma_2 = 0.961(0.9)(0.98) = 0.848 \qquad (7)$$

$$P_r(\tilde{Z} > L_\circ) = P_r(\tilde{C}\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3 > L_\circ) = 0.90 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{L_\circ - 1500X_2 + 1000X_3}{X_1}\right) = 0.90 \longrightarrow$$

$$L_\circ = 1500\, X_2 + 1000\, X_3 + 2000\, X_1 - 4.5\, X_1 \longrightarrow$$

$$\text{Max. } L_\circ = 1995.5\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3 \qquad (8)$$

$$\text{S.T.} \quad 5\, X_1 + 3\, X_2 + 2\, X_3 \leq 600$$

$$3\, X_1 + 4\, X_2 + 5\, X_3 \leq 561$$

$$X_1 \geq 19\,,\ X_2 \geq 24\,,\ X_3 \geq 29$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$L_{\circ}^{*} = 277853.33 \quad , \quad X_1^{*} = 106.67 \quad , \quad X_2^{*} = 24 \quad , \quad X_3^{*} = 29 \qquad (9)$$

و قيمة مقياس الصلاحية فى هذه الحالة على النحو:

$$R_1^{*} \geq (0.9)(0.9)(0.9) = 0.729 \qquad (10)$$

(٨-٧) تمرينات Exercises

(٨-١)

بأستخدام معيار القيمة المتوقعة حول دوال الهدف الأحتمالية التالية إلى دوال هدف يقينية، ثم أحسب أحتمال تحقق الهدف:

(1) $$\text{Max. } \tilde{Z} = \tilde{a}_1 X_1 + 3 X_2 - 5 X_3$$

حيث أن المتغير $\tilde{a}_1$ متغير يتبع التوزيع المنتظم بدالة أحتمال $f(\tilde{a}_1)$ حيث:

$$f(\tilde{a}_1) = \frac{1}{10} \quad , \quad \tilde{a}_1 = 1, 2, \ldots\ldots, 10$$

(2) $$\text{Min. } \tilde{Z} = 5 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \tilde{a}_3 X_3 + 10 X_4$$

حيث $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ متغيران عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمات $(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 5)$, $(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 7)$ على الترتيب:

(3) $$\text{Min. } \tilde{Z} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$$

حيث $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد
$$\tilde{a}_1 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2) \quad , \tilde{a}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 3)$$

أعتبر المشكلة أعلاه (3) و أعتبر المتغيران $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران عشوائيين (4) غير مستقلين بمعامل أرتباط $\rho = 0.7$.

(٨-٢)

أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } \tilde{Z} = 10 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1$$
$$0 \le X_1, X_2 \le 3$$

أعتبر $\tilde{a}_2, \tilde{b}_1$ متغيران عشوائيين مستقلين بحيث:

$$\tilde{a}_2 \sim N(\mu = 7, \sigma = 1) \quad , \tilde{b}_1 \sim Exp(\lambda = 1, \alpha = 5)$$

أ. حول النموذج الأحتمالى أعلاه إلى نموذج يقينى بأخذ معيار القيمة المتوقعة لكل من $\tilde{a}_2, \tilde{b}_1$ على الترتيب.

ب. عند مستوى مأمونية $\gamma = 0.9, \gamma_1 = 0.9$ حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى - حل النموذج اليقينى - ثم أوجد صلاحية الحل.

ج. إذا فرضنا أن قيم γ, γ_1 غير معلومة - حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مناسب - ثم حل النموذج و أوجد قيمة مؤشر صلاحية الحل.

د. قارن بين الحل فى كل من (أ)،(ب)،(ج).

(٨-٣)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\begin{aligned}
\text{Max. } \tilde{Z} &= 4\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + \tilde{C}_3\,X_3 \\
\text{S.T.} \quad \tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + 5\,X_3 &\le 20 \\
2\,X_1 + 4X_2 - X_3 &\le \tilde{b}_2 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

حيث $\tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ متغيران عشوائيين مستقلين يتبع كل منهما التوزيع المعتاد بتوقع $2, 3$ وتباين $1, 1$ على الترتيب. كذلك $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد:

$$\tilde{a}_1 \sim N(\mu_1 = 2, \sigma_1 = 1) \ , \ \tilde{a}_2 \sim N(\mu_2 = 5, \sigma_2 = 1) \ , \ \tilde{b}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 1)$$

أ. حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستويات المأمونية التالية $\gamma = 0.7, \gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.9$ - ثم حل النموذج اليقينى.

ب. بأفتراض أن $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ غير معلومة، كون نموذج برمجة صلاحية مناسب و حل النموذج.

ج. قارن بين الحل فى (أ)،(ب).

(٨-٤)

أعتبر التمرين (٨-١) في الفصل (٨-٥). أذا أعتبرنا دوال الأهداف على النحو التالى:

$$(1) \qquad \text{Max.}\,\tilde{Z} = \tilde{a}_1\, X_1 + 2\, X_2 + \tilde{a}_3\, X_3$$

حيث $\tilde{a}_1$ متغير عشوائى يتبع $\text{Exp}(\lambda = 1, \alpha = 5)$ و مستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

$$(2) \qquad \text{Max.}\,\tilde{Z} = 2\, X_1 + 3\, X_2 + \tilde{a}_3\, X_3$$

حيث $\tilde{a}_3 \sim N(\mu = 2, \sigma = 1)$ و مستوى مأمونية $\gamma = 0.8$.

فى كل من (٢),(١):

أ. حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى وفقاً لمعيار القيمة المتوقعة، ثم حل النموذج و أوجد قيمة مقياس صلاحية الحل فى هذه الحالة.

ب. حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى وفقاً لمعيار الحدود المثلى لدالة الهدف، ثم حل النموذج و أوجد قيمة مقياس الصلاحية للحل.

ج. أعتبر مؤشرات المأمونية $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ غير معلومة - كون نموذج برمجة صلاحية مناسب ثم أوجد حل النموذج و أوجد قيمة مقياس الصلاحية للحل.

د. قارن بين الحلول فى (أ)،(ب)،(ج).

(٨-٥)

أعتبر النموذج الأحتمالى التالى:

$$\begin{aligned} \text{Min.}\,\tilde{Z} &= \tilde{C}_1\, X_1 + \tilde{C}_2\, X_2 + 10\, X_3 \\ \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 &\geq 10 \\ 2\, X_1 + X_2 &\leq 50 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب

١) إذا كانت $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيران يتبعا التوزيع الأسى الثنائى وفقاً للنموذج (٥) و بمعامل أرتباط $\rho = 0.8$.

حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مناسب ثم حا النموذج اليقينى.

٢) أعتبر النموذج أعلاه إذا كانت $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيران مستقلين يتبع كل منهم التوزيع الأسى العام الثنائى.
حول النموذج الاحتمالى إلى نموذج يقينى مناسب.

(٨-٦)

أعتبر النموذج الأحتمالى فى تمرين (٨-٥)

المطلوب

١- إذا كانت $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيران يتبعا التوزيع الأسى الثنائى وفقاً للنموذج (٧)، بالباب (٦)، $\theta = 0.8$.
حول النموذج الاحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ ثم حل النموذج اليقينى

٢- إذا كان المتغيران $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ مستقلين و بالتالى $\theta = 0$
حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى

الجزء الثالث

برمجة الهدف الاحتمالية

Probabilistic Goal Programming

الباب التاسع: برمجة الهدف الخطية

Linear Goal Programming (LGP)

الباب العاشر: نماذج برمجة الهدف بمعلمات عشوائية $\left(\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}\right)$

Goal Programming Models with Random Parameters$\left(\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}\right)$

الباب التاسع

برمجة الهدف الخطية

Linear Goal Programming (LGP)

(٩-١) مقدمة
Introduction

(٩-٢) مفاهيم أساسية
Basic Concepts

(٩-٣) صياغة المشكلة
Formulation Problem

(٩-٤) النموذج العام
General Model

(٩-٥) طريقة الحل البيانى
Graphical solution Method

(٩-٦) طريقة الحل المتتالى
Sequential (Iterative) Solution Method

(٩-٧) تمرينات
Exercises

(٩-١) مقدمة Introduction

منذ نشر طريقة السمبلكس سنة ١٩٤٧ التى قدمها Dantzing لحل مشاكل البرمجة الخطية على نطاق واسع، تكونت العديد من المدارس العلمية لتطوير و تطبيق أسلوب البرمجة الخطية [59, ١٠].

و من أهم المدارس التى تم تكوينها المدرسة العلمية التى كونها كل من Charles and Cooper، فقد تناولا العديد من المشاكل الصناعية [54, 48] التى يمكن صياغتها فى شكل نماذج برمجة خطية و لكن غير قابلة للحل بأستخدام أساليب حل مشاكل البرمجة الخطية وأطلقا عليها أسم "مشاكل برمجة خطية غير قابلة للحل .Unsolvable Linear Prog Problems". و من أمثلة هذه المشاكل المشاكل المرتبطه بالمجالات الصناعية، الإقتصادية، المالية ...... إلخ. حيث تتصف هذه المشاكل بالمرونة حيث يمكن صياغة المشكلة فى أحد الاشكال التالية:

- نموذج برمجة خطية يوجد به بعض (أو كل) القيود الهيكلية قيود متعارضة conflicting constraints و لكنها تتصف بالمرونة فى نفس الوقت كما سوف نوضح فيما بعد.
- نموذج برمجة خطية و لكن يوجد أكثر من هدف Multi-objectives .
- نموذج برمجة خطية و لكن يرتبط الهدف objective (أو الأهداف) بمستوى (أو مستويات) معين مرجو تحقيقه aspiration level يحدده متخذ القرار.

و فى سنة ١٩٦١ قدما Charles and Cooper للمرة الأولى أسلوب برمجة الهدف Goal Programming Technique، الذى يمكن بأستخدامه الحصول على أفضل حلول توافقية best compromise solutions للمشاكل التى أطلقوا عليها أسم مشاكل غير قابلة للحل باستخدام أسلوب البرمجة الخطية. ثم تطور الى أسلوب برمجة الهدف و تم تطبيقه على نطاق واسع بصفة خاصة فى حل المشاكل الإدارية و المحاسبية و الاقتصادية من خلال الدراسات التى قدمها Ijiri سنة ١٩٦٥، ثم Lee سنة ١٩٧٢، ثم Ignizio سنة ١٩٧٦، و آخرين [110, 107].

و بصفة عامة فإنه يمكن أستخدام أسلوب برمجة الهدف فى حالة وجود واحد على الأقل من الحالات التالية. و بحل المشكلة بأستخدام أسلوب برمجة الهدف نحصل على أفضل حل توافقى [109, ١٠].

الحالة الأولى

عند وجود بعض (أو كل) القيود الهيكلية المتعارضة، و لكن فى نفس الوقت تتصف بالمرونة elastic constraints، بمعنى أمكانية عدم تحقق القيد فى الحل النهائي و لكن الوصول إلى أفضل حل توافقى يجعلنا أقرب ما يمكن لتحقيق القيد كما سوف نوضح ذلك فى المثال التالى.

مثال (٩-١)

تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات البديلة A,B ، بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من A أربعون دقيقة و الوحدة من B تستغرق ثلاثون دقيقة و زمن التشغيل المتاح فى اليوم 20 ساعة، فإذا كان الطلب فى السوق على المنتجين A,B معاً لا يقل عن 50 وحدة يومياً. و إذا كان ربح الوحدة من A يساوي 35 جنيه و من B يساوى 40 جنيه. و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها يومياً من A,B بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن.

المطلوب

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.
٢- وضح بيانياً أن القيود الهيكلية متعارضة.

الحل

١- إذا فرضنا ان X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التى يتم إنتاجها من A,B على الترتيب فإن نموذج البرمجة الخطية الذى يمثل المشكلة على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

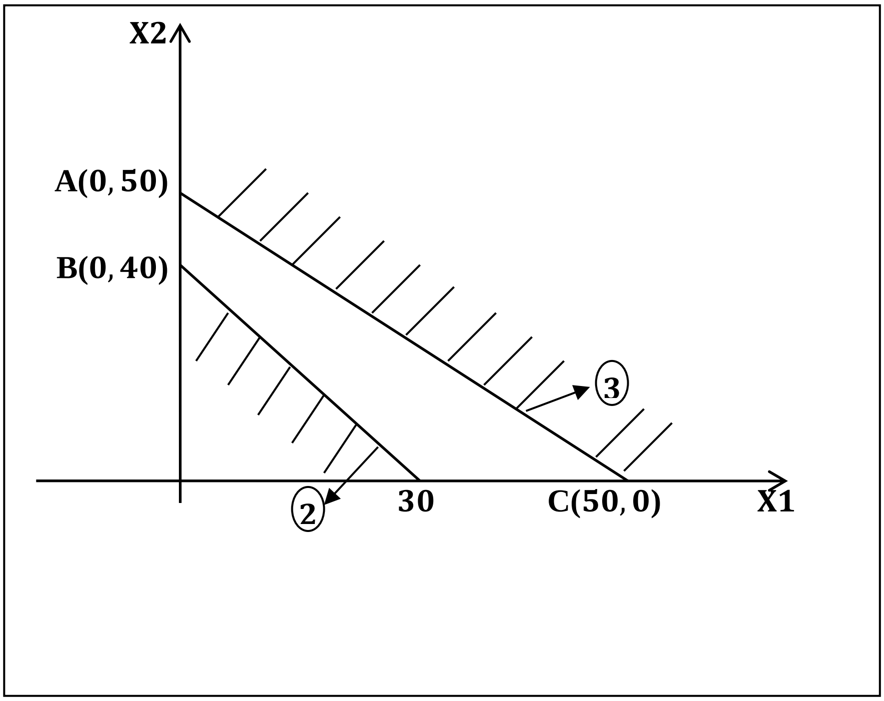
$$\text{Max. } Z = 35X_1 + 40X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 40X_1 + 30X_2 \le 1200 \qquad (2)$$

$$X_1 + X_2 \ge 50 \qquad (3)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- و برسم قيود النموذج السابق (4)-(1) نجد أن القيدين (3),(2) قيود متعارضة و بالتالى منطقة الحلول الممكنة فئة خالية [٦] و بالتالى لا يمكن أستخدام أسلوب البرمجة الخطية فى الحل.



شكل (٩-١): يوضح القيود المتعارضة

و لكن أسلوب برمجة الهدف الخطية يمكن استخدامه للحصول على أفضل حل توافقى لهذا النوع من المشاكل كما سوف نوضح ذلك فى الفصول التالية. و من الرسم نجد أن أفضل حل توافقى

$$(X^*_1 = 0 \quad , \quad X^*_2 = 40 \quad , \quad Z^* = 1600)$$

و هذا عند النقطة $B(0,40)$ حيث نجد أن هذا الحل يحقق القيد الهيكلي (2) و لا يحقق القيد الهيكلي (3) و لكن يكون أقرب ما يمكن من تحقيق القيد (3) حيث نجد أن النقطة $B(0,40)$ تمثل أقرب نقطة لتحقيق القيد (3).

الحالة الثانية

و فى هذه الحالة يوجد أكثر من هدف multi-objectives و يرغب متخذ القرار فى تحقيقها وفقاً لأولوياته.

و فى كثير من المشاكل تكون هذه الأهداف متعارضة و متنافسة competitive and conflecting objectives هذا بالإضافة لوجود مستوى لكل هدف يأمل متخذ القرار فى الوصول إليه (أو اقرب ما يمكن له) و عادة يسمى بالمستوى المرجو تحقيقه aspiration Level- و عادة يحدد هذا المستوى متخذ القرار. و سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالى:

مثال (٩-٢)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنظفات A,B و يتطلب الإنتاج من A,B نوعين من مستلزمات الأنتاج I,II و الجدول التالى يوضح متطلبات الوحدة الواحدة من A,B من كل مستلزم، كذلك المتاح من المستلزمين I,II و ربح الوحدة الواحدة من A,B ، كذلك الوقت المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من A,B.

جدول (٩-١)

الكمية المتاحة من مستلزمات الإنتاج	متطلبات الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج B	متطلبات الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج A	مستلزمات الإنتاج
1200	40	30	I
50	1	2	II
	50	30	ربح الوحدة الواحدة
	20	15	زمن إنتاج الوحدة بالدقائق

و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يجب أنتاجها من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية:

١. تعظيم الربح من A,B.
٢. تصغير الزمن المطلوب للإنتاج.

الحل

يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية متعددة الأهداف على النحو التالى:

إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من A,B على الترتيب بالتالى يصبح النموذج على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Max. } Z_1 = 30X_1 + 50X_2 \quad (1)$$

$$\text{Min. } Z_2 = 15X_1 + 20X_2 \quad (2)$$

$$\text{S.T.} \quad 30X_1 + 40X_2 \le 1200 \quad (3)$$

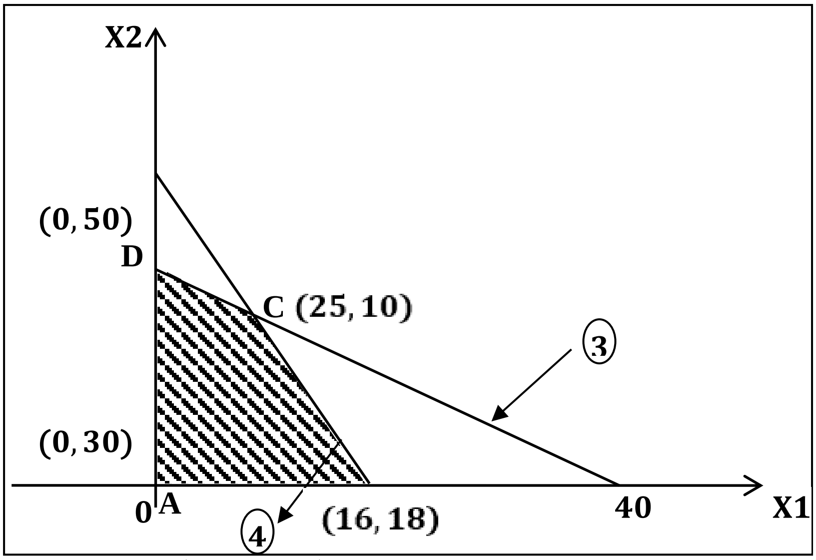
$$2X_1 + X_2 \le 50 \quad (4)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \quad (5)$$

و الشكل التالى يوضح منطقة الحلول الممكنة ABCD للقيود (5)-(3) و لكن تواجهنا مشكلة وجود هدفين (2),(1) و هما هدفين متعارضين و متنافسين أيضاً.

حيث الهدف (1) له أولوية فى تحقيقة عن الهدف (2) أو بعبارة أخرى أهم من الهدف (2). و فى هذه الحالة، فإنه يمكن أستخدام أسلوب برمجة الهدف للحصول على أفضل حل توافقى - كما سوف نوضح ذلك فى الفصول التالية.

و سوف تقتصر دراستنا فى هذا الباب على أسلوب برمجة الهدف الخطية Linear Goal Prog. Technique . و في الفصل التالى سوف نقدم أهم المفاهيم الأساسية لأسلوب برمجة الهدف الخطية.



شكل (٩-٢): يوضح نقطة الحلول الممكنة

(٩-٢) مفاهيم أساسية

Basic Concepts

يبنى أسلوب برمجة الهدف على بعض المفاهيم الأساسية فى صياغة المشكلة و حلها أيضاً. و فيما يلى سوف نقدم أهم هذه المفاهيم التى سوف نتناولها فى الفصول التالية :[109, 107, ١٠]

(١) **الهدف العام Objective**: الهدف العام هو عبارة عامة نسبياً Relatively General Statement تعكس رغبة متخذ القرار. ففى البرمجة الخطية مثلاً تكون رغبة متخذ القرار تعظيم دالة الربح او تصغير دالة التكاليف حيث تكون دالة الربح أو دالة التكلفة دوال خطية فى المتغيرات القرارية.

(٢) **المستوى المرجو تحقيقه aspiration Level**: هو قيمة معينة مقترنه يرغبه متخذ القرار أو هو المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام acceptable Level of achievement of an Objective.

(٣) **الهدف Goal**: الهدف هو عبارة عن رغبة متخذ القرار و لكنها مقترنه بالمستوى المرجو تحقيقه أيضاً. و بهذا المفهوم للهدف يتطلب أن يكون لمتخذ القرار رؤية للمستوى المرجو تحقيقه و ليس رغبة فقط و بهذا التعريف يصبح الهدف عبارة عن قيد فى شكل متساوية أو متباينة كما سوف نوضح فيما بعد.

(٤) **المتغيرات الانحرافية deviational Variables**: يرتبط بالطرف الأيسر لكل هدف Goal و ليكن الهدف (i) متغيرين أنحرافيين يشار إليهما بـ $\mathbf{d_i^-}, \mathbf{d_i^+}$ و هما عبارة عن الفرق بين المستوى المرجو تحقيقه و ليكن $(\mathbf{b_i})$ و ما يتم تحقيقه فعلاً. و عادة قد يكون ما تم تحقيقه للهدف $\mathbf{G_i}$ مساوى للمستوى المرجو $\mathbf{b_i}$ فى هذه الحالة يكون $\mathbf{d_i^-} = \mathbf{d_i^+} = \mathbf{0}$. كذلك فى حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أقل من المستوى المرجو فى هذه الحالة يكون $\mathbf{d_i^-} > \mathbf{0}$ ، $\mathbf{d_i^+} = \mathbf{0}$ ، بالمثل فى حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أكبر من المستوى المرجو فى هذه الحالة يكون $\mathbf{d_i^+} > \mathbf{0}$ ، $\mathbf{d_i^-} = \mathbf{0}$ ، و بالتالى فإن فى جميع الحالات تكون $\mathbf{d_i^-}, \mathbf{d_i^+} \geq \mathbf{0}$ كذلك وجود قيمة موجبة لأحداهما سواء $\mathbf{d_i^-}$ أو $\mathbf{d_i^+}$ يؤدى

إلى أن تكون قيمة المتغير الأخرى تساوي صفر (أى وجود أحدهما يمنع وجود الأخر) أو بعبارة أخرى دائما حاصل ضرب d_i^- فى d_i^+ يساوى صفر، أو بعبارة أخرى:

$$d_i^- * d_i^+ = 0 \qquad (9\text{-}1)$$

حيث يسمى المتغير d_i^- بالأنحراف السالب الذى يمثل المقدار الأقل من إنجاز الهدف under-achievement (أى الفرق بين المستوى المرجو و ما يتم تحقيقه) كذلك يسمى المتغير d_i^+ بالأنحراف الموجب الذى يمثل المقدار الأكبر عن إنجاز الهدف over-achievement (أى الفرق بين ما يتم تحقيقه و المستوى المرجو).

(٥) صياغة الهدف Goal Formulation: إذا اعتبرنا الدالة $f_i(x)$ ، حيث X متجه المتغيرات القرارية $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$، b_i تشير إلى المستوى المرجو تحقيقه المرتبط بالدالة $f_i(x)$.

فى هذه الحالة يكون لدينا ثلاث أمكانيات لصياغة الهدف رقم i و سوف نشير له بالرمز G_i و يمكن أن يأخذ الهدف أحد الحالات التالية:

1) $f_i(x) \le b_i$ أى القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ لا تزيد عن b_i

2) $f_i(x) \ge b_i$ أى القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ تزيد عن b_i

3) $f_i(x) = b_i$ أى القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ تساوي b_i

و الجدول التالى يوضح صياغة الهدف رقم (i)

جدول (٩-٢): يوضح كيفية صياغة الهدف

Goal	صياغة الهدف في أسلوب برمجة الهدف	المتغيرات الانحرافية التى يجب تصغيرها
1) $f_i(x) \le b_i$	$G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^+ (9-2)
2) $f_i(x) \ge b_i$	$G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^- (9-3)
3) $f_i(x) = b_i$	$G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	$d_i^- + d_i^+$ (9-4)

و سوف نوضح فى الفصول التالية أنه فى المشاكل التى يتم صياغتها فى شكل نموذج برمجة هدف فإنه يتم تحويل الأهداف العامة Objectives و القيود Constraints إلى أهداف Goals.

(٦) الأولويات المرتبة Preemptive Priorities: و بالنسبة للمشاكل متعددة الأهداف أو المشاكل ذات القيود المتعارضة فأستخدام أسلوب برمجة هدف يتطلب من متخذ القرار ضرورة ترتيب أهدافه goals وفقاً لأولوياتها.

(٧) القيود Constraints: فى البرمجة الخطية لأبد أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود و هذا يعني عدم وجود قيود متعارضة. أما بالنسبة لأسلوب برمجة الهدف نميز بين نوعين من القيود، قيود لأبد أن تتحقق فى الحل النهائى للمشكلة و هى ما تسمي بالقيود الصارمة rigid constraints و يوجد نوع آخر من القيود لا تتحقق فى الحل النهائى و لكن يكون عدم تحققها أقل ما يمكن و يمكن تسميت هذا النوع من القيود بالقيود المرنة elastic constraints. و فى أسلوب برمجة الهدف يتم تحويل القيود (الصارمة و المرنة) إلى أهداف goals بإضافة المتغيرات الأنحرافية.

(٨) الأولوية المطلقة absolute Priority: فى العديد من المشاكل يرغب متخذ القرار فى تحقيق القيود الصارمة rigid constraints و فى هذه الحالة يتم تمثيل هذه القيود فى الأولوية الأولى first priority و تسمي فى هذه الحالة أولوية مطلقة كما سوف نوضح فيما يلى.

(٩) دالة الإنجاز Achievement Function: هى عبارة عن متجه كل عنصر فيه يمثل دالة هدف عام فى المتغيرات الانحرافية $\mathbf{d^-, d^+}$ فقط تقيس مدى إنجاز الأهداف $\mathbf{G_i}$ و ذلك وفقاً لأولويات، فإذا أشرنا لهذا المتجه بالرمز a فإن:

$$\mathbf{a = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_k]} \qquad \textbf{(9-5)}$$

حيث تعتبر الدالة $\mathbf{a_{j-1}}$ أهم من الدالة $\mathbf{a_j}$ حيث $\mathbf{j = 2, 3, \dots, k}$. و كل دالة خطية $\mathbf{a_j}$ دالة فى المتغيرات الانحرافية $\mathbf{d_i^-, d_i^+}$ ، حيث $\mathbf{i = 1, 2, \dots, m}$ ، $\mathbf{j = 2, 3, \dots, k}$.

و فى أسلوب برمجة الهدف يتم تصغير عناصر المتجه (a) وفقاً لأولوياتها Lexicographic Minimum a.

(١٠) أفضل حل توافقى Best Compromise Solution: هو الحل الذي يتم الحصول عليه باستخدام أسلوب برمجة الهدف و هو يمثل أفضل حل توافقى كما سوف نوضح ذلك فى الفصول (٩-٥)، (٩-٦).

(٩-٣) صياغة المشكلة
Formulation Problem

في هذا الفصل سوف نوضح كيفية صياغة بعض المشاكل الخطية فى شكل نماذج برمجة هدف و ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٩-٣)

تقوم أحدى شركات إنتاج دهانات الحوائط بإنتاج نوعين A,B من الدهانات معبأة فى وحدات، الوحدة الواحدة جالون من المنتج. و يدخل فى إنتاج كل وحدة من B أو A، ثلاثة أنواع من المواد الكيمائية I,II,III و الجدول التالى يوضح احتياج الوحدة الواحدة من B أو A من كل مادة كيمائية I,II,III كذلك الكميات المتاحة من المواد الكيمائية بالكيلوجرام كذلك ربح الوحدة من B او A.

جدول (٩-٣): يوضح متطلبات الانتاج

ربح الجالون الواحد بالجنيه	الكميات المطلوبة من كل مادة كيمائية لإنتاج الوحدة الواحدة من B أو A			نوع المنتج
	III	II	I	
80	1	4	4	A
100	0	2	5	B
	6	48	80	الكميات المتاحة يومياً بالكيلوجرام

و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات المنتجة يومياً من B أو A التى تحقق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) لا يمكن زيادة المواد الكيماوئية المتاحة يومياً، (أو بعبارة أخرى القيود المرتبطة بالمواد الكيماوئية المتاحة يومياً تمثل قيود صارمة Rigid Constraints).

(٢) الربح اليومى من B أو A لا يقل عن 1000 جنيه.
(٣) تقليل استخدام المادة الكيمائية III بقدر الإمكان.
(٤) تقليل العدد الإجمالى للجالونات من B أو A معاً لظروف النقل أو مساحات التخزين.

بحيث يرى متخذ القرار أن المستوى المرجو لتحقيقه يساوي 10 جالونات يومياً.

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 هى عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من A , B على الترتيب. و فيما يلي سوف نوضح كيفية صياغة هذه المشكلة فى شكل نموذج برمجة هدف خطى على النحو التالى:

١) من الجدول السابق نجد أنه بالنسبة للمواد الكيمائية القيود التالية يمكن تحويلها إلى أهداف Goals على النحو التالى:

$$4X_1 + 5X_2 \le 80 \quad \longrightarrow \quad G_1: 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 \le 48 \quad \longrightarrow \quad G_2: 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \qquad (2)$$

$$X_1 \le 6 \quad \longrightarrow \quad G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \qquad (3)$$

و بما أن الأولوية الأولى لمتخذ القرار هو تحقيق القيود بالتالى فإن دالة الهدف العام المرتبطة بهذه الأولوية يصبح على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_1 = g_1(d^-, d^+) = (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+) \qquad (4)$$

٢) بما أن الهدف و الأولوية الثانية هو تحقيق ربح لا يقل عن 1000 جنيه:

$$80X_1 + 100X_2 \ge 1000 \longrightarrow G_4: 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000 \quad (5)$$

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_4^-$$

٣) و بما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو أستخدام أقل ما يمكن من المادة الكيمائية III:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_3^+ \qquad (6)$$

٤) و بما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تقليل عدد الجالونات، فيصبح الهدف:

$$G_5: X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \quad \longrightarrow \text{Min. } a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^+ \quad (7)$$

مما سبق نجد ان دالة الإنجاز تصبح على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Minimize } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$= \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), g_3(d^-, d^+), g_4(d^-, d^+)\} \quad (8)$$

حيث d^- متجه المتغيرات الانحرافية السالبة، d^+ متجه المتغيرات الانحرافية الموجبة.

من (8)-(1) نجد ان نموذج برمجة الهدف تصبح على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_4^+), (d_3^+), (d_5^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & G_1: 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ & G_2: 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \\ & G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ & G_4: 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000 \\ & G_5: X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \\ & X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5 \\ & (d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

مثال (٩-٤)

تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات A,B من خلال ثلاثة ماكينات I,II,III و الجدول التالn يوضح الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من A,B فى كل ماكينة كذلك الزمن الشهرى المتاح لتشغيل كل ماكينة فى الشهر بالساعات.

جدول (٩-٤): يوضح متطلبات النتاج

ثمن بيع الوحدة بالجنية	الزمن المطلوب بالساعة لإنتاج الوحدة الواحدة			المنتج
	III	II	I	
500	8	3	3	A
750	10	6	4	B
	700	620	500	الزمن المتاح بالساعة
	90	70	50	تكلفة الساعة الواحدة فى كل ماكينة بالجنية

فإذا كان الطلب الشهري على المنتج A لا يقل عن 250 وحدة و من B لا يزيد عن 400 وحدة. و يرغب متخذ القرار فى تحقيق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) تحقيق الطلب فى السوق.
(٢) تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات I,II,III بحيث لا تزيد عن 10000.
(٣) تصغير زمن التشغيل الإضافى Overtime باستخدام الماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة.
(٤) تعظيم إيرادات بيع الوحدات من A,B بحيث تزيد عن $125,000$ جنيه.

صيغ المشكلة أعلاه كمشكلة برمجة هدف.

<u>الحل</u>

إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى عدد الوحدات التى يتم إنتاجها من المنتج i حيث $i = 1,2$ بأستخدام الماكينة j حيث $j = 1,2,3$ ، $X_{ij} \geq 0$.
من الجدول و وفقاً للأولويات نجد أن:

١) الأهداف المتعلقة بالطلب فى السوق

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 250 \longrightarrow G_1: X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 250 \quad (1)$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 400 \longrightarrow G_2: X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 400 \quad (2)$$

$$\text{Min. } a_1 = g_1(d^-, d^+) = (d_1^+ + d_2^+) \quad (3)$$

٢) و بما أن الهدف ذو الأولوية الثانية هو تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات الثلاثة:

$$50(3X_{11} + 4X_{21}) + 70(3X_{12} + 6X_{22}) + 90(8X_{13} + 10X_{23}) \leq 10,000$$

$$\longrightarrow$$

$$G_3: 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10,000 \quad (4)$$

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^+ \quad (5)$$

٣) و بما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو تصغير الزمن الإضافى للماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة.

$$3X_{12} + 6X_{22} \le 620 \longrightarrow G_4: 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620 \qquad (6)$$

و بما أن d_4^+ تشير إلى ساعات التشغيل الإضافية بالتالى فإن:

$$d_4^+ \le 80 \longrightarrow G_5: d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80 \qquad (7)$$

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_{41}^+ \qquad (8)$$

٤) و بما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تعظيم الإيرادات بحيث تزيد عن $125,000$ جنية.

$$500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \ge 125,000 \longrightarrow$$
$$G_6: 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + d_5^- - d_5^+ = 125,000 \qquad (9)$$

$$\text{Min.} a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^- \qquad (10)$$

و من (10)-(1) نجد أن نموذج برمجة الهدف على النحو التالى:
أوجد قيم X_{ij} بحيث $i = 1, 2\ ,\ j = 1, 2, 3$ التى تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_{41}^+), (d_3^+), (d_5^+)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & G_1: X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 250 \\
& G_2: X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 400 \\
& G_3: 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} \\
& \qquad + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10,000 \\
& G_4: 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620 \\
& G_5: d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80 \\
& G_6: 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \\
& \qquad + d_5^- - d_5^+ = 125,000 \\
& G_7: 3X_{11} + 4X_{21} + d_6^- - d_6^+ = 500 \\
& G_8: 8X_{13} + 10X_{23} + d_7^- - d_7^+ = 700 \\
& X_{ij}, d_i^-, d_i^+, d_{41}^-, d_{41}^+ \ge 0 \\
& (d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\
& (d_{41}^-)(d_{41}^+) = 0
\end{aligned}$$

(٩-٤) النموذج العام
General Model

من الفصل السابق نخلص إلى أن الصياغة العامة لنموذج برمجة الهدف على النحو التالى:

أوجد X_j بحيث $j = 1, 2, \ldots, n$ التى تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), \ldots, g_k(d^-, d^+)\} \quad (9\text{-}6)$$

$$\text{S.T. } G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad (9\text{-}7)$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\; , \;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;\; , i = 1, 2, \ldots, m \, , j = 1, 2, \ldots, n \quad (9\text{-}8)$$

خصائص النموذج:

١- يوجد عدد **k** من الأولويات مرتبطة بعدد أكبر من أو يساوي **k** من الأهداف **goals**. جميع الدوال $g_j(d^-, d^+)$ ، $t= 1, 2, \ldots, k$ دوال خطية فى المتغيرات الإنحرافيه d^-, d^+.

٢- جميع الأهداف العامة، و القيود يتم تحويلها إلى أهداف G_i ، بحيث $i = 1, 2, \ldots, m$ الطرف الأيسر من كل منها دالة خطية فى المتغيرات القرارية X_j بحيث $j = 1, 2, \ldots, n$ ، و المتغيرات الانحرافية d_i^-, d_i^+ كذلك ممكن أن يكون الهدف دالة خطية فى المتغيرات الأنحرافية بنفس الهدف و الأهداف الأخرى أنظر G_5 بـ (7) فى المثال السابق.

٣- نظراً لأن دوال الإنجاز $g_t(d^-, d^+)$ ، $t = 1, 2, \ldots, k$ ، و الأهداف G_i ، $i = 1, 2, \ldots, m$ دوال خطية بالتالى فإنه يمكن تطويع طريقة السمبلكس لحل هذا النموذج. و يوجد طريقتين لتطويع طريقة السمبلكس لحل نماذج برمجة الهدف الخطية هما:-

أ) طريقة السمبلكس المعدلة **Modified Simplex Method** [109, 107,١٠].

ب) طريقة الحل المتتالى **Sequential (Iterative) Solution Method** [197, 189, 109,١٢,١٠]

و فى حالة تضمن المشكلة متغيرين قراريين فقط فإنه يمكن حلها بيانياً أو بأحد الطريقتين المذكورتين أعلاه. و سوف نتناول فى الفصل التالى حل مشكلة برمجة الهدف الخطية بيانياً.

كذلك سوف نقدم فى الفصل (٩-٦) طريقة الحل المتتالى وفقاً لطريقة السمبلكس. حيث أنها تتميز بالآتى عن طريقة السمبلكس المعدلة [١٠]:

١- طريقة السمبلكس المعدلة تستخدم فى حل المشاكل ذات الحجم الصغير و التى يمكن حلها يدويا، أما طريقة الحل المتتالى يتيح أستخدامها فى حالة المشاكل ذات الحجم الكبير.

٢- يمكن أستخدام برامج الحاسب المتوفرة لحل مشاكل البرمجة الخطية بأستخدام طريقة السمبلكس مثل Tora أو Maple فى حالة أستخدام طريقة الحل المتتالى.

٣- أستخدام طريقة الحل المتتالي تتيح لمتخذ القرار أجراء تعديلات أثناء الحل على الأولويات أو الأوزان الترجيحية لـ d^-, d^+ داخل الأولوية الواحدة.

(٩-٥) طريقة الحل البيانى
Graphical solution Method

في هذا الفصل سوف نقدم الحل البيانى لمشكلة برمجة الهدف الخطية التى تتضمن متغيرين قراريين على الأكثر و ذلك بهدف توضيح المفاهيم الأساسية لبرمجة الهدف مثل:

(١) المتغيرات الانحرافية.
(٢) الأهداف المرتبطة بالمستويات المرجوة goals.
(٣) الأهداف objectives وفقاً للأولويات.
(٤) أفضل حل توافقى.

و ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٩-٤)

شركة تقوم بإنتاج نوعين من الأثاث المكتبى الخشبى A,B من خلال خط إنتاج واحد بحيث تتطلب الوحدة الواحدة من المنتج A خمسة ساعات، و الوحدة الواحدة من B أربعة ساعات فى خط الإنتاج حيث أن المتاح أسبوعياً للخط 80 ساعة فى الظروف العادية، كذلك ربح الوحدة من A يساوي 500 جنيه، و من B يساوى 400 جنيه. كذلك إفادة إدارة التسويق أن الطلب الأسبوعي فى السوق على المنتج B يزيد عن 30 وحدة أسبوعياً. و يرغب متخذ القرار فى تحقيق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

(١) عدم اللجوء إلى زمن تشغيل أضافى على خط الإنتاج.
(٢) تحقيق ربح أسبوعى لا يقل عن 10,000 جنيه أسبوعياً.
(٣) إشباع الطلب فى السوق من المنتج B.

الحل

يمكن صياغة المشكلة على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+), (d_2^-), (d_3^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1: 5X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (2)$$

$$G_2: 500X_1 + 400X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10,000 \qquad (3)$$

$$G_3: X_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \qquad (4)$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \quad i = 1,2,3 \qquad (5)$$

حيث تشير:

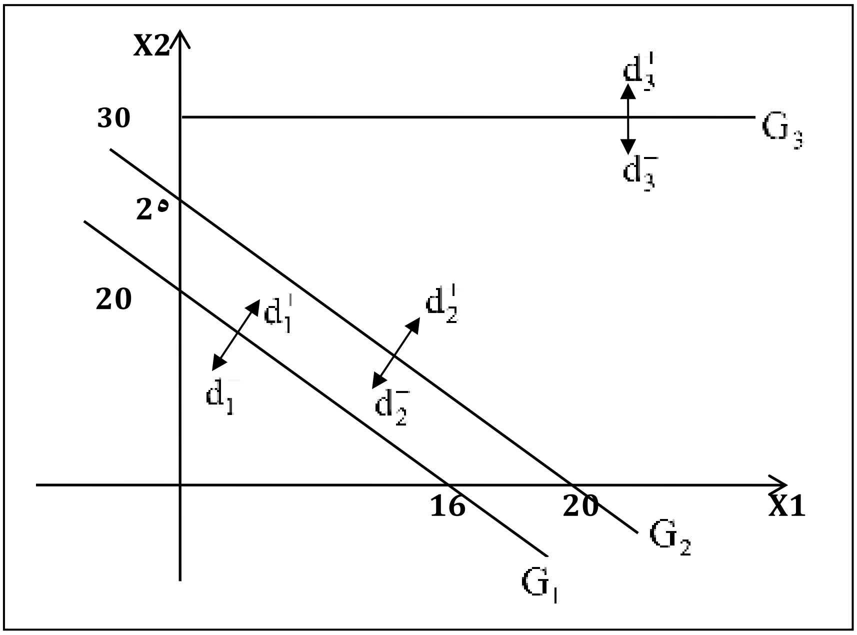
d_1^- :	زمن التشغيل الفائض (غير المستخدم) الأسبوعى على خط التشغيل
d_1^+ :	زمن التشغيل الإضافى الأسبوعى على خط التشغيل
d_2^- :	النقص فى الربح المحقق عن $10,000$ جنيه
d_2^+ :	الزيادة فى الربح المحقق عن $10,000$ جنيه
d_3^- :	مقدار النقص فى العرض من B عن الطلب
d_3^+ :	مقدار الزيادة فى العرض من B عن الطلب

و الشكل التالى يوضح الأهداف G_i، و المتغيرات الأنحرافية d_i^-, d_i^+ فى النموذج (5)-(1). فنجد أن أفضل حل توافقى على النحو التالى:

$$\left.\begin{array}{l} a^* = \{0, 2000, 10\} \\ X_1^* = 0 \qquad , \ X_2^* = 20 \\ d_1^- = d_1^+ = ٠ \ \ , \ d_2^- = 2000 \ , \ d_2^+ = 0 \ , \ d_3^- = 10 \ , \ d_3^+ = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

و الحل فى (6) يفيد أنه فى حالة إنتاج عدد $X_2^* = 20$ و عدم إنتاج أى وحدة من A حيث $X_1^* = 0$ فإنه:

١- يتم تحقيق الهدف الأول بعدم استخدام ساعات تشغيل إضافية ($d_1^+ = 0$).
٢- فى ضوء (أو بأخذ الهدف الأول فى الاعتبار) فإنه فى هذه الحالة الربح الذي يتم تحقيقه يساوى 8000 أى بنقص يساوى 2000 جنيه عن المستوى المرجو $d_5^- = 2000$.
٣- الكمية التى يتم عرضها من B أى $X_2^* = 20$ تقل عن الطلب المتوقع في السوق بـ 10 وحدات $d_3^- = 10$.



شكل (٩-٣): يوضح أتجاهات الأنحرافات الموجبة و السالبة

مثال (٩-٥)

أعتبر نموذج برمجة الهدف التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_3^+ + d_4^+), (d_1^+), (d_3^- + d_4^-)\} \quad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1: 4X_1 + 3X_2 + d_1^- - d_1^+ = 120 \quad (2)$$

$$G_2: 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 \quad (3)$$

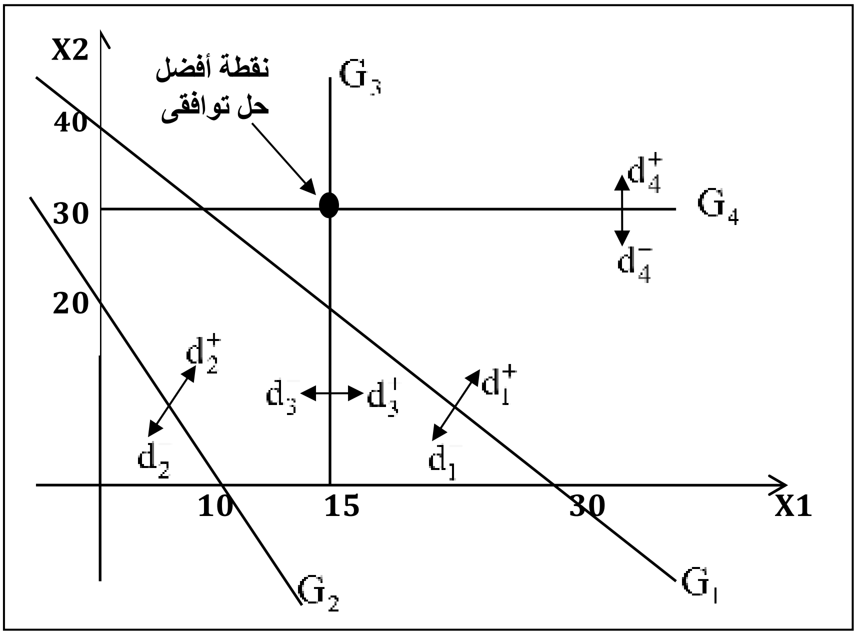
$$G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 15 \quad (4)$$

$$G_4: X_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \quad (5)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;,\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad (6)$$

الحل

الشكل التالى يوضح الأهداف G_i، و المتغيرات الأنحرافية d_i^-, d_i^+.



شكل (٩-٤)

و من الشكل نجد أن أفضل حل توافقى للنموذج أعلاه على النحو التالى:

$$\mathbf{a}^* = \{0, 30, 0\}$$

$$\mathbf{X}_1^* = 7.5 \quad , \quad \mathbf{X}_2^* = 30$$

$$\mathbf{d}_1^{-*} = 0 \quad , \quad \mathbf{d}_1^{+*} = 30 \quad , \quad \mathbf{d}_2^{-*} = 0 \quad , \quad \mathbf{d}_2^{+*} = 40 \quad ,$$

$$\mathbf{d}_3^{-*} = \mathbf{d}_3^{+*} = 0 \quad , \quad \mathbf{d}_4^{-*} = \mathbf{d}_4^{+*} = 0$$

مثال (٩-٥)

تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأدوات الكهربائية المنزلية A,B، بحيث يدخل فى إنتاج الوحدة الواحدة من A أو B مكون متاح منه 100 وحدة أسبوعياً، كذلك ربح الوحدة

من A يساوى 500 جنيه و من B يساوى 450 جنيه، فإذا كان الطلب فى السوق على A لا يزيد عن 90 وحدة و من B لا يزيد عن 80 وحدة.

و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من المنتج A,B بحيث يكون ربحه الأسبوعى أكبر ما يمكن.

المطلوب

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.
٢- حل النموذج بيانياً و إيجاد الحل الأمثل.
٣- صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف.
٤- حل نموذج برمجة الهدف بيانياً.
٥- قارن بين الحل فى (٢) ، و الحل فى (٤).

الحل

إذا فرضنا أن X_1 تشير إلى عدد الوحدات التى يتم إنتاجها من A فى الأسبوع، كذلك X_2 تشير إلى عدد الوحدات التى يتم إنتاجها من B فى الأسبوع.

١- فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية على النحو التالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Max. } Z = 500X_1 + 450X_2 \qquad (1)$$

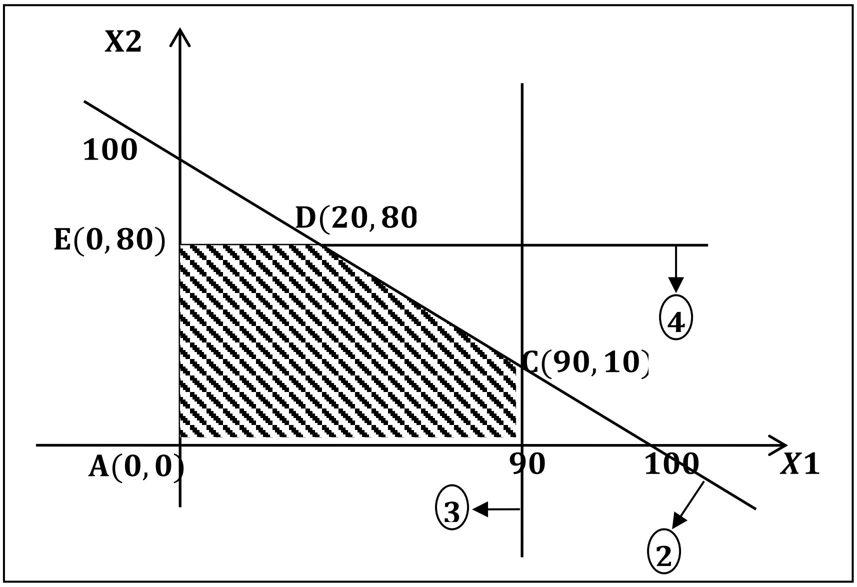
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \leq 100 \qquad (2)$$

$$X_1 \leq 90 \qquad (3)$$

$$X_2 \leq 80 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

٢- الشكل التالى يوضح الحل الأمثل للنموذج (5)-(1) و من الشكل يتضح أن جميع القيود غير متعارضة و منطقة الحلول الممكنة فئة مغلقة محدبة [٨].



شكل (٩-٥)

من الرسم يتضح أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 49,500 \quad , \quad X_1^* = 90 \quad , \quad X_2^* = 10$$

٣- و يمكن صياغة المشكلة السابقة كنموذج برمجة هدف على النحو التالى:

إذا فرضنا أن المستوى المرجو للربح 100,000 جنيه مثلاً. و بالتالى يمكن تحويل الهدف العام فى (1) إلى هدف مقترن بالمستوى المرجو و إضافة المتغيرات الانحرافية على النحو التالى:

$$G_1: 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000$$

و بما أن القيود (4)-(2) يجب تحقيقها فى شكل قيود أى تعتبر قيود صارمة، فأنه يمكن تحويلها إلى أهداف على النحو التالى:

$$G_2: X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$
$$G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90$$
$$G_4: X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80$$

و يصبح الهدف ذو الأولوية الأولى على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_1 = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+), (d_1^-)\}$$

و يصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالى:
أوجد X_1, X_2 بحيث:

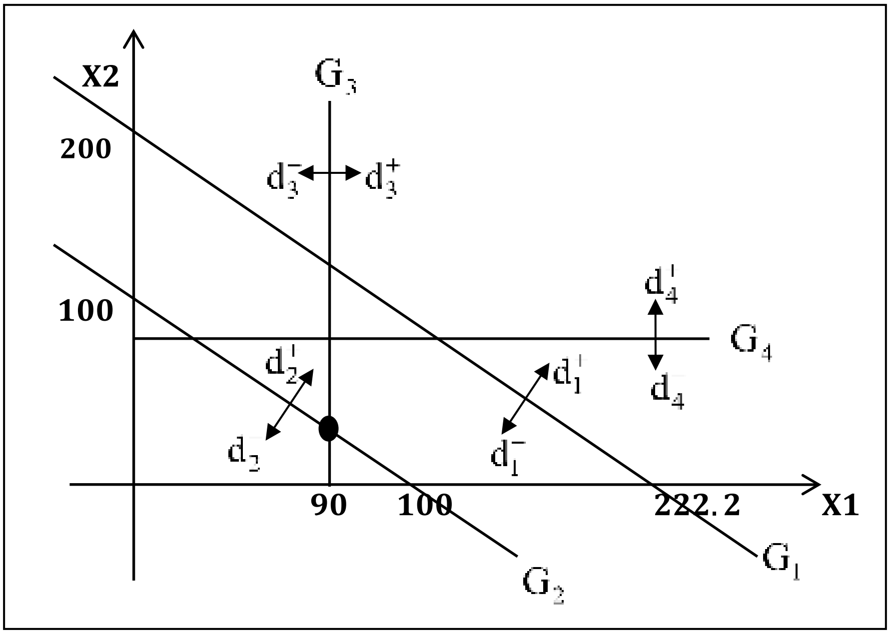
$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+), (d_1^-)\} \quad (6)$$
$$\text{S.T.} \quad G_1: 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000 \quad (7)$$
$$G_2: X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \quad (8)$$
$$G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90 \quad (9)$$
$$G_4: X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80 \quad (10)$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0, i = 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

٤- و الشكل التالى يوضح النموذج (11)-(6).

و من الرسم يتضح أن أفضل حل توافقي هو:

$$a^* = \{0, 50, 500\}$$
$$X_1^* = 90 \quad , \quad X_2^* = 10 \quad , \quad Z^* = 49,500$$

٥- من (2) ، (4) يتضح أن الحل الأمثل بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية هو نفس الحل بأستخدام أسلوب برمجة الهدف $(X_1^* = 90 \;,\; X_2^* = 10)$ و هذا يوضح كفاءة أسلوب برمجة الهدف.



شكل (٩-٦): يوضح أفضل حل توافقى

(٩-٦) طريقة الحل المتتالى
Sequential (Iterative) Solution Method

فى سنة ١٩٧٧ قدم كل من **Dauer and Krueger** الأسلوب التكرارى **Iterative Approach** لحل مشاكل برمجة الهدف الخطية و غير الخطية أيضاً. و فى هذا الباب سوف نتناول هذا الأسلوب بالنسبة لمشاكل برمجة الهدف الخطية فقط.

فإذا أعتبرنا نموذج برمجة الهدف المكون من **k** من الأولويات على النحو التالى (أنظر الفصل (٩-٤)):

أوجد **X** بحيث تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } \mathbf{a} = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), \ldots, g_k(d^-, d^+)\} \qquad (9\text{-}9)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (9\text{-}10)$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (9\text{-}11)$$

حيث: $d^- = (d_1^-, \ldots, d_n^-)^T$, $d^+ = (d_1^+, \ldots, d_m^+)^T$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$

و يمكن تلخيص طريقة الحل المتتالى فى حالة أعتبار المشكلة (9-11)- (9-9) مكونة من **k** من المشاكل الجزئية وحيدة الهدف المتداخله، بمعنى إذا اعتبرنا الهدف العام $g_t(d^-, d^+)$ ذو الأولوية **t** فإن النموذج وحيد الهدف الجزئى المرتبط بالأولوية **t** يأخذ فى الاعتبار جميع المشاكل الجزئية السابقة ذات الأولويات الأهم من **t** و عددها $(t-1)$ بحيث $t = 2, \ldots, k$ ، و يكون أفضل حل توافقى للمشكلة (9-11)- (9-9) هو الحل للمشكلة الجزئية ذو الأولوية P_k.
و فيما يلى سوف نوضح الخطوات المتتالية لحل نموذج برمجة الهدف الخطية على النحو التالى:

<u>الخطوة (١)</u>

١- اعتبر المشكلة الجزئية ذو الأولوية الأولى:

$$\text{Min. } a_1 = g_1(d^-, d^+) \qquad (9\text{-}12)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i \in P_1 \qquad (9\text{-}13)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (9\text{-}14)$$

حيث p_t تشير إلى الأولوية **t**.

٢- و بحل النموذج (9-12) -(9-14) باستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل و ليكن a_1^*.

الخطوة (٢)

١- أعتبر النموذج الجزئى الثانى أي الذى يمثل الأولوية الثانية على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) \qquad (9\text{-}15)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1, P_2 \qquad (9\text{-}16)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (9\text{-}17)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (9\text{-}18)$$

٢- و بحل النموذج (9-15) -(9-18) بطريقة السمبلكس نحصل على الحل و ليكن a_2^*.

و يلاحظ أن النموذج الجزئى الثانى أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول G_i ، $i \in p_1$ ، كذلك يضع حل النموذج الجزئى الأول a_1^* كقيد فى النموذج الثانى كما هو واضح فى القيد (9-17).

الخطوة (٣)

١- أعتبر النموذج الجزئى الثالث أى الذى يمثل الأولوية الثالثة على النحو:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) \qquad (9\text{-}19)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1, P_2, P_3 \qquad (9\text{-}20)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (9\text{-}21)$$

$$g_2(d^-, d^+) = a_2^* \qquad (9\text{-}22)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (9\text{-}23)$$

٢- و بحل النموذج (9-19) -(9-23) نحصل على الحل a_3^*.

و يلاحظ أن النموذج الجزئى الثالث أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول و الثانى. كذلك يضع حل النموذجين الأول و الثانى كقيود فى (9-21),(9-22).
بالمثل يتم تكوين النماذج الجزئية المرتبطة بالأولويات $P_4, P_5, \ldots, P_{k-1}$.

الخطوة (k)

١- اعتبر النموذج الذي يمثل الأولوية الأخيرة P_k على النحو:

$$\text{Min. } a_k = g_k(d^-, d^+) \qquad (9\text{-}24)$$
$$\text{S.T.} \quad G_i: f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \ i \in P_1, P_2, \dots, P_k \qquad (9\text{-}25)$$
$$g_j(d^-, d^+) = a_j^* \quad , \ j = 1, 2, \dots, k\text{-}1 \qquad (9\text{-}26)$$
$$X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad (9\text{-}27)$$

٢- و بحل النموذج (9-27)- (9-24) نحصل على الحل a_k^*.

ملاحظات

١- حل النموذج الأخير (9-27)- (9-24) يمثل أفضل حل توافقى للنموذج الأصلى (9-11)- (9-9) و يتضمن جميع الأهداف G_i لنموذج برمجة الهدف الأصلى.

٢- حل النموذج الجزئى t حيث $t = 1, 2, \dots, k$ يتضمن أهداف النماذج الجزئية ذو الأولوية الأهم من t أى يأخذ فى الإعتبار النماذج الجزئية السابقة $(1, 2, \dots, t-1)$

٣- كل نموذج جزئى يتم حله بأستخدام طريقة السمبلكس.

٤- تمكن طريقة الحل المتتالى متخذ القرار من:

أ) إجراء تعديلات فى الأولويات.

ب) إجراء تعديلات فى المستويات المرجوة.

و سوف نوضح هذه الخطوات من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٩-٦)

أعتبر نموذج برمجة الهدف الخطى التالى [١٠،106]:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(2d_1^+ + 3d_2^+), (d_3^-), (d_4^+)\} \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad G_1: X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (2)$$
$$G_2: X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (3)$$
$$G_3: 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (4)$$
$$G_4: X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (5)$$
$$X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad (6)$$

بأستخدام طريقة الحلو ل المتتالية أوجد أفضل حل توافقى.

الحل

الخطوة (١)

١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الأولى المرتبطة بالأولوية الأولى P_1 على النحو التالى:

$$\text{Min. } a = g_1(d^-, d^+) = 2d_1^+ + 3d_2^+ \tag{7}$$

$$\text{S.T.} \quad G_1: X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \tag{8}$$

$$G_2: X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \tag{9}$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \tag{10}$$

٢- وبحل النموذج (10)-(7) بأستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل:

$$a_1^* = 0\,,\ \ X_1^* = 4\,,\ \ X_2^* = 6\,,\ \ {d_1^-}^* = {d_1^+}^* = 0\,,\ \ {d_2^-}^* = {d_2^+}^* = 0 \tag{11}$$

الخطوة (٢)

١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية P_2 على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^- \tag{12}$$

$$\text{S.T.} \quad G_1: X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \tag{13}$$

$$G_2: X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \tag{14}$$

$$G_3: 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \tag{15}$$

$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \tag{16}$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \tag{17}$$

ملحوظة: بما أن $g_1(d^-, d^+) = a_1^* \longleftarrow 2d_1^+ + 3d_2^+ = 0$

٢- و بحل النموذج (17)-(12) بأستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل على النحو التالى:

$$a_2^* = d_3^- = 18 \;,\; X_1^* = 4 \;,\; X_2^* = 6 \;,\; d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$
$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \;,\; d_3^{-*} = 18 \;,\; d_3^{+*} = 0 \qquad (18)$$

<u>الخطوة (٣)</u>

١- سوف نعتبر المشكلة الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة P_3 على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_4^+ \qquad (19)$$
$$\text{S.T.} \quad G_1: X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (20)$$
$$G_2: X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (21)$$
$$G_3: 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (22)$$
$$G_4: X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (23)$$
$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \qquad (24)$$

$$d_3^- = 18 \qquad (25)$$
$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (26)$$

<u>ملحوظة:</u> بما أن $a_2^* = g_2(d^-, d^+) \longrightarrow d_3^- = 18$

٢- و بحل النموذج (26)-(19) بأستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل:

$$a_3^* = d_4^+ = ٠ \;,\; X_1^* = 4 \;,\; X_2^* = 6 \;,\; d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$
$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \;,\; d_3^{-*} = 18 \;,\; d_3^{+*} = 0 \;,\; d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0 \qquad (27)$$

و من (27),(18),(11) نجد أن أفضل حل توافقى لنموذج برمجة الهدف (6)-(1) على النحو التالى:

$$a^* = \{0, 18, 0\} \;,\; X_1^* = 4 \;,\; X_2^* = 6 \;,\; d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$
$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \;,\; d_3^{-*} = 18 \;,\; d_3^{+*} = 0 \;,\; d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0$$

<u>مثال (٩-٧)</u>

اعتبر نموذج برمجة الهدف التالى:

أوجد X بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^+), (d_3^-)\} \quad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \quad (2)$$
$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \quad (3)$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \quad (4)$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \; i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

<u>الحل</u>

<u>الخطوة (١)</u>

١- تكون المشكلة الجزئية المرتبطة بالأولوية الأولى على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_1 = d_1^- \quad (6)$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \quad (7)$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (8)$$

٢- و بحل النموذج (8)-(6) بأستخدام طريقة السمبلكس نجد:

$$X_1^* = 50\,, \;\; X_2^* = 0\,, \;\; a_1^* = 0 \quad (9)$$

<u>الخطوة (٢)</u>

١- تكون المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_2 = d_2^+ \quad (10)$$
$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \quad (11)$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \quad (12)$$
$$d_1^- = 0 \quad (13)$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (14)$$

٢- و بحل النموذج (14)-(10) نجد أن الحل

$$X_1^* = 50\,, \;\; X_2^* = 0\,, \;\; X_3^* = 0\,, \;\; a_2^* = 0 \quad (15)$$

<u>الخطوة (٣)</u>

١- تكون المشكلة الجزئية الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة على النحو التالى:

$$\text{Min. } a_3 = d_3^- \quad (16)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \quad (17)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \quad (18)$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \quad (19)$$

$$d_1^- = 0 \quad ,d_2^+ = 0 \quad (20)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (21)$$

٢- و بحل النموذج (16)-(21) نحصل على الحل على النحو:

$$a^* = \{0,0,0\} \quad , \quad X_1^* = 23.33 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad X_3^* = 26.67$$

$$d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0 \quad , \quad d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad , \quad d_3^{-*} = 0 \quad , \quad d_3^{+*} = 40$$

(٩-٧) تمرينات　　Exercises

(٩-١)

وضح أهم الاختلافات بين مفهوم الهدف العام objective و الهدف goal.

(٩-٢)

ما هي الفروق الأساسية بين المتغيرات الانحرافية $\mathbf{d^-, d^+}$ فى أسلوب برمجة الهدف و المتغيرات المكملة و المصطنعة فى أسلوب البرمجة الخطية.

(٩-٣)

لماذا حاصل ضرب المتغيرات الإنحرافية $\mathbf{d_i^-, d_i^+}$ ، $\mathbf{i = 1, 2, \ldots}$ فى أسلوب برمجة الهدف يساوى صفر أى أن: $\mathbf{(d_i^-) \cdot (d_i^+) = 0}$

(٩-٤)

لماذا يستخدم مفهوم "التصغير وفقاً للأولويات Lexicographically Minimization" فى أسلوب برمجة الهدف بدلاً من استخدام "تعظيم أو تصغير Maximization أو Minimization" فى أسلوب البرمجة الخطية.

(٩-٥)

تقوم أحدى الشركات بإنتاج المنتجين A,B و الجدول التالى يوضح الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة (فى التصنيع و التجميع و الاختبار) ، كذلك الزمن المتاح فى كل مرحلة للإنتاج و تكلفة الساعة الواحدة فى الأسبوع.
و ترغب الشركة فى تحديد عدد الوحدات من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

أ) تصغير الزمن الفائض فى التصنيع أو التجميع أو الاختبار عن المتاح.
ب) تحقيق ربح أسبوعى لا يقل عن $10,000$ جنيه أسبوعياً.
ج) بيع أكبر عدد ممكن من الوحدات المنتجة.

د) تصغير ساعات الزمن الإضافى فى التشغيل (تصنيع، تجميع، اختبار).

جدول (٩-٥)

ثمن بيع الوحدة بالجنية	زمن الإنتاج بالساعة			المنتج
	اختبار	تجميع	تصنيع	
3000	3	5	20	A
2000	1	3	12	B
	20	100	120	تكلفة الساعة الواحدة بالجنية
	50	120	240	عدد الساعات المتاحة أسبوعياً

(٩-٦)

أعتبر نماذج برمجة الهدف التالية من (أ) - (د) أوجد أفضل حل توافقي جبرياً و وضح ذلك بيانياً:

أ.

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (2d_2^+ + d_3^+)\}$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 - 10X_2 + d_1^- - d_1^+ = 70$$
$$3X_1 + 5X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$
$$8X_1 + 6X_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$
$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

ب.

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+), (d_2^-), (3d_1^- + d_3^+)\}$$
$$\text{S.T.} \quad -X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = -30$$
$$5X_1 + 6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 80$$
$$X_2 + d_3^- - d_3^+ = 20$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

ج.

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_4^-), (d_1^- + 1.5d_2^-), (d_3^-)\}$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + d_1^- - d_1^+ = 30$$
$$X_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$$
$$8X_1 + 12X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$$
$$X_1 + 2X_2 + d_4^- - d_4^+ = 40$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0$$

د. $$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_3^-), (d_4^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ &= 400 \\ 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ &= 500 \\ X_1 + d_3^- - d_3^+ &= 300 \\ 0.4X_1 + 0.3X_2 + d_4^- - d_4^+ &= 240 \\ X, d_i^-, d_i^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

(٩-٧)

أعتبر مشاكل البرمجة الخطية التالية من (أ)-(ج):

١- أوجد الحل الأمثل باستخدام البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس.
٢- أوجد نموذج برمجة الهدف الخطى المناظر فى (أ) ثم أوجد أفضل حل توافقى باستخدام طريقة الحل المتتالى.
٣- قارن بين حل المشكلة (أ) في (١)،(٢).

أ. أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\begin{aligned} \text{Min. } Z &= 2X_1 + 5X_2 \\ \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 &\geq 50 \\ 3X_1 + 8X_2 &\leq 240 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 5X_1 + X_2 + 3X_3 \\ \text{S.T.} \quad 5X_1 - X_2 + X_3 &\leq 100 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 84 \\ X_1 + 5X_3 &\leq 45 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 7X_1 + 4X_2 + 12X_3 + X_4 \\ \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\geq 200 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 &\leq 350 \\ X_1 + 8X_4 &\leq 200 \end{aligned}$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

(٩-٨)

ينتج مصنع ثلاث أنواع من المنتجات A , B , C ، ربح الوحدة الواحدة 10 , 15 , 20 جنيه على الترتيب.
فإذا كانت الوحدة الواحدة من A,B,C تتطلب $7, 5, 8$ ساعات عمل على الترتيب، و المتاح من ساعات التشغيل أسبوعياً يساوى 350 ساعة أسبوعياً. كذلك يوجد أمكانية استخدام ساعات عمل إضافية بحيث لا تزيد عن 30 ساعة أسبوعياً، حيث يؤدى استخدام الزمن الإضافى إلى انخفاض ربح الوحدة من كل نوع بجنيه واحد، كذلك لا يقل الطلب الأسبوعى من إنتاج الأنواع الثلاثة عن 500 وحدة أسبوعياً.
و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات الأسبوعية من كل منتج بحيث يحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

أ. تعظيم الربح.
ب. تصغير الزمن الإضافى.
ج. تغطية الطلب فى السوق.

(٩-٩)

تقوم أحدى شركات إنتاج العصائر المحفوظة بإنتاج الأنواع التالية I,II,III بحيث يدخل فى إنتاج كل نوع المواد A,B,C بحيث سعر بيع الوحدة (الوحدة تساوى نصف كيلو جرام) $5, 10, 15$ جنيه على الترتيب.
و الجدول التالى يوضح الكميات المتاحة بالكيلو جرام من A,B,C فى إنتاج الوحدة الواحدة من I,II,III و الكميات المتاحة أيضاً.

جدول (٩-٦)

المواد الداخلة	نسب المواد الداخلة فى الوحدة الواحدة من I,II,III	الكميات المتاحة بالكيلوجرام
A	أقل من 10% للمنتج II، أكثر من 50% لـ I	6000
B	أقل من 60% لـ III، أكثر من 20% لـ I	2000
C	أقل من 50% لـ I، أكثر من 10% لـ II	50

<u>المطلوب</u>

١- غير ممكن اللجوء إلى كميات إضافية من A أو B أو C و استغلال كل الكميات المتاحة.
٢- تعظيم الربح.
٣- أن يكون الإنتاج من I يمثل على الأقل 5000 وحدة.

الباب العاشر

نماذج برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً
Chance-Constrained Goal Programming (CCGP) Models

(١٠-١) مقدمة

Introduction

(١٠-٢) فئة الأهداف الأحتمالية

Probabilistic Goal's Set

(١٠-٣) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{b}_i$

(١٠-٤) المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{a}_{ij}$

(١٠-٥) أمثلة تطبيقية

Applied Examples

(١٠-٦) تمرينات

Exercises

(١٠-١) مقدمة Introduction

فى الباب السابق تناولنا بشئ من التفصيل أسلوب برمجة الهدف الخطية (LGP) فى الحالة اليقينية عندما تكون جميع معلمات النموذج (a_{ij}, b_i) , $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ مقادير ثابتة constants. و لكن فى كثير من المشاكل الفعلية تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية و بالتالى تكون بعض المعلمات عبارة عن متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة أو ممكن تقديرها[٩, 107, 109].

و المشاكل القرارية التى يتم صياغتها فى شكل نماذج برمجة هدف أحتمالية تتضمن نوعين من المخاطرة: النوع الأول يرجع إلى التعارض بين القيود و المتمثل فى المتغيرات الأنحرافية.
و النوع الثانى يرجع إلى العامل العشوائى و المتمثل فى مقياس المأمونية.

و من أهم مزايا أستخدام أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً للحصول على أفضل حل توافقى أنه يمكنا من قياس نوعى المخاطرة المذكورة، كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الفصل التالية.

و هذا الباب مرتبط أرتباط وثيق بالأبواب ٢، ٤، ٦، ٧ لنماذج البرمجة الخطية الأحتمالية عندما تكون المعلمات a_{ij} أو b_i متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة (أو ممكن تقديرها). ففى هذا الباب سوف نتناول نماذج برمجة الهدف الأحتمالية عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة أو ممكن تقديرها.

و كما ذكرنا فى الباب الأول أن أول من قدم أسلوب برمجة الهدف الاحتمالية Contini سنة ١٩٦٨ [57] ثم قدمت العديد من التطبيقات لأسلوب Contini [122-126]، و لكن فى سنة ١٩٨٤ قدمت El-Dash تعريف و تفسير للمتغيرات الأنحرافية الأحتمالية و أسلوب تحويل نماذج برمجة الهدف الأحتمالية إلى يقينية مكافئة [64] عندما تكون المعلمات العشوائية متغيرات موجبة ثم توالت بعد ذلك العديد من التطبيقات لهذا الأسلوب فى قطاعات مختلفة مثل النقل، الزراعة، الصناعة،...إلخ [64, 66, 68, 74, 77].

فى الفصل (١٠-٢) سوف نقدم فئة الأهداف الأحتمالية من خلال تعريف المتغيرات الأنحرافية العشوائية random deviational variables $(\tilde{d}^-, \tilde{d}^+)$، و كيفية تحويل الأهداف الأحتمالية إلى أهداف يقينية مناظرة بأستخدام أسلوب (CCP) و تكوين نموذج برمجة

هدف يقينى بحله يمكن الحصول على أفضل حل توافقى عند مستوى مأمونية معينة.

و فى الفصل (١٠-٣) نقدم العلاقة بين أفضل حل توافقى للنموذج اليقينى المحول و أحتمالات المتغيرات الأنحرافية العشوائية عندما تكون المعلمات $(\tilde{b}_i)$ متغيرات عشوائية.

و فى الفصل (١٠-٤) نعتبر المعلمات $(\tilde{a}_{ij})$ متغيرات عشوائية و كيفية تحويل نموذج برمجة الهدف الأحتمالى إلى نموذج يقينى مناظر عند مستوى مأمونية معين.

و كما ذكرنا فى الباب الأول أن نموذج البرمجة اليقينية هو الحالة الخاصة و أن الحالة العامة هو نموذج البرمجة الأحتمالية، بالمثل فأن نموذج برمجة الهدف اليقينى هو الحالة الخاصة و أن الحالة العامة هو نموذج برمجة الهدف الأحتمالية، كما سوف نوضح ذلك فى الفصول التالية.

و فى الفصل (١٠-٥) نقدم أمثلة تطبيقية لنماذج برمجة الهدف الأحتمالية فى بعض القطاعات المختلفة.

(١٠-٢) فئة الأهداف الأحتمالية

Probabilistic Goal's Set

فى كثير من المشاكل القرارية تكون بعض أو كل القيود متعارضة، و كما ذكرنا فى الباب السابق فإن متخذ القرار فى هذه الحالة (وجود قيود أو أهداف متعارضة) يبحث عن أفضل حل توافقى.

و عندما تكون بعض أو كل القيود أو الأهداف أحتمالية هنا يتم تحويل القيود المتعارضة الأحتمالية إلى أهداف أحتمالية probabilistic goals كما سنوضح ذلك فى هذا الفصل و الفصول التالية. و فى هذا الفصل سوف نقدم فئة الأهداف الأحتمالية فى:

الحالة الأولى

عندما تكون بعض أو كل معلمات الطرف الأيمن للأهداف $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة بتوزيعات أحتمالية معلومة.
و ترتبط هذه الحالة أرتباط وثيق بالبابين الثانى و الثالث.

الحالة الثانية

عندما تكون بعض أو كل المعلمات التى تمثل معاملات المتغيرات القرارية فى الطرف الأيسر من الأهداف $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية مستقلة بتوزيعات أحتمالية معلومة.
و ترتبط هذه الحالة أرتباط وثيق بالأبواب الرابع و السادس و السابع.

الحالة الأولى

إذا فرضنا أن فئة القيود الأحتمالية probabilistic constraints على النحو التالى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i \qquad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (10\text{-}1)$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i \qquad , \quad i = m+1, m+2, \ldots, M \qquad (10\text{-}2)$$

حيث $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية بدالة كثافة أحتمال (أو دالة أحتمال) $f(\tilde{b}_i)$ و دالة توزيع تراكمية $F(b_i)$، $i = 1, 2,....,M$ ، و المعلمات a_{ij} مقادير ثابتة، X_j تشير إلى المتغيرات القرارية، $j = 1, 2, ..., n$. فأن فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة لفئة القيود فى (10-2),(10-1) على النحو التالى:

$$G_i: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = \tilde{b}_i \qquad , \quad i = 1, 2,....,M \quad (10\text{-}3)$$

حيث $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ تشير إلى المتغيرات الأنحرافية العشوائية random deviational variables السالبة و الموجبة على الترتيب بحيث:

$$\begin{matrix} \tilde{d}_i^- = \text{Max.}\{0 \ , \ \tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\} \\ \tilde{d}_i^+ = \text{Max.}\{0 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \tilde{b}_i\} \end{matrix} \ , \quad i = 1, 2,....,M \quad (10\text{-}4)$$

كذلك:

$$P_r\left(\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0\right) = P_r(\varphi) = 0 \ , \quad i = 1, 2,....,M \qquad (10\text{-}5)$$

حيث φ تشير إلى الفئة الحالية

فإذا فرضنا أن مقياس المأمونية للقيد رقم (i) يساوى γ_i ، $i = 1, 2,....,M$ (مقياس المأمونية هو أحتمال تحقق القيد)، فإنه يمكن أعادة صياغة القيود (10-2),(10-1) إلى قيود يقينية على النحو التالى:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \ \rightarrow \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-'}(1 - \gamma_i) \\ , \ i = 1, 2...,m \qquad (10\text{-}6)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \ \rightarrow \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-'}(\gamma_i) \\ , \ i = m + 1,...,M \quad (10\text{-}7)$$

<u>**ملحوظة:**</u> ممكن أن تكون القيود في (10-7),(10-6) متباينات بدلاً من معادلات تأخذ الشكل $(\geq \gamma_i)$ أو $(\leq \gamma_i)$.

و القيدين اليقينين أعلاه ممكن تحويلهما إلى أهداف يقينية على النحو التالى:

$$G_i: \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(1 - \gamma_i) \quad , \quad i = 1, 2,....,m \quad (10\text{-}8)$$

$$G_i: \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(\gamma_i) \ , \ i = m + 1,m + 2,....,M \quad (10\text{-}9)$$

حيث:

$$\mathbf{d_i^-} = \mathbf{Max.}\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & , & \mathbf{F^{-1}(1-\gamma_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j} & , \mathbf{i = 1, 2,..,m} \\ \mathbf{0} & , & \mathbf{F^{-1}(\gamma_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j} & , \mathbf{i = m+1,...,M} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{(10\text{-}10)}$$

$$\mathbf{d_i^+} = \mathbf{Max.}\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & , & \mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - F^{-1}(1-\gamma_i)} & , \mathbf{i = 1, 2,..,m} \\ \mathbf{0} & , & \mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - F^{-1}(\gamma_i)} & , \mathbf{i = m+1,...,M} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{(10\text{-}11)}$$

و الشكلين التاليين يوضحان العلاقتين (10-9),(10-8) على الترتيب.

حيث تتحقق الشروط التالية بالإضافة إلى الشروط فى (10-5):

$$\mathbf{P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0 \cup \tilde{d}_i^+ \geq 0) = P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0) + P_r(\tilde{d}_i^+ \geq 0)}$$
$$\mathbf{= (1-\gamma_i) + \gamma_i = 1 \;,\quad i = 1, 2, \ldots, m} \qquad \mathbf{(10\text{-}12)}$$

$$\mathbf{= P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0) + P_r(\tilde{d}_i^+ \geq 0)}$$
$$\mathbf{= \gamma_i + (1-\gamma_i) = 1 \;,\; i = m+1,...,M} \qquad \mathbf{(10\text{-}13)}$$

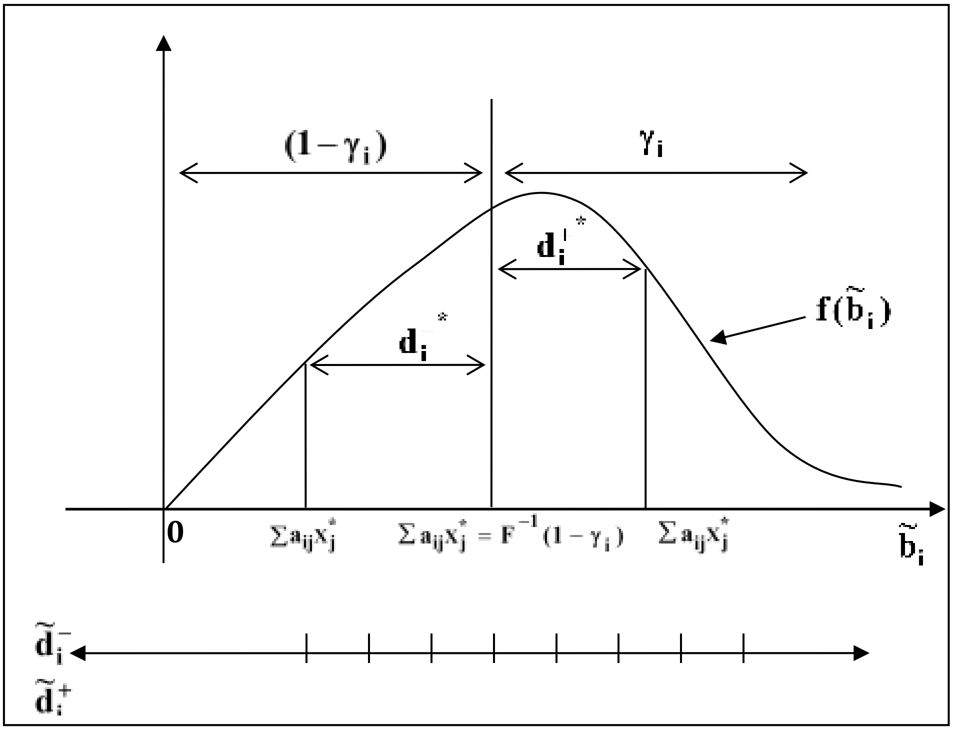
و لتحقيق العلاقات (10-1) أو أقرب ما يمكن منـها فأن ذلك يتطلب:

$$\mathbf{Min.}\,(\textstyle\sum_{i=1}^{m} \mathbf{d_i^+}) \qquad \mathbf{(10\text{-}14)}$$

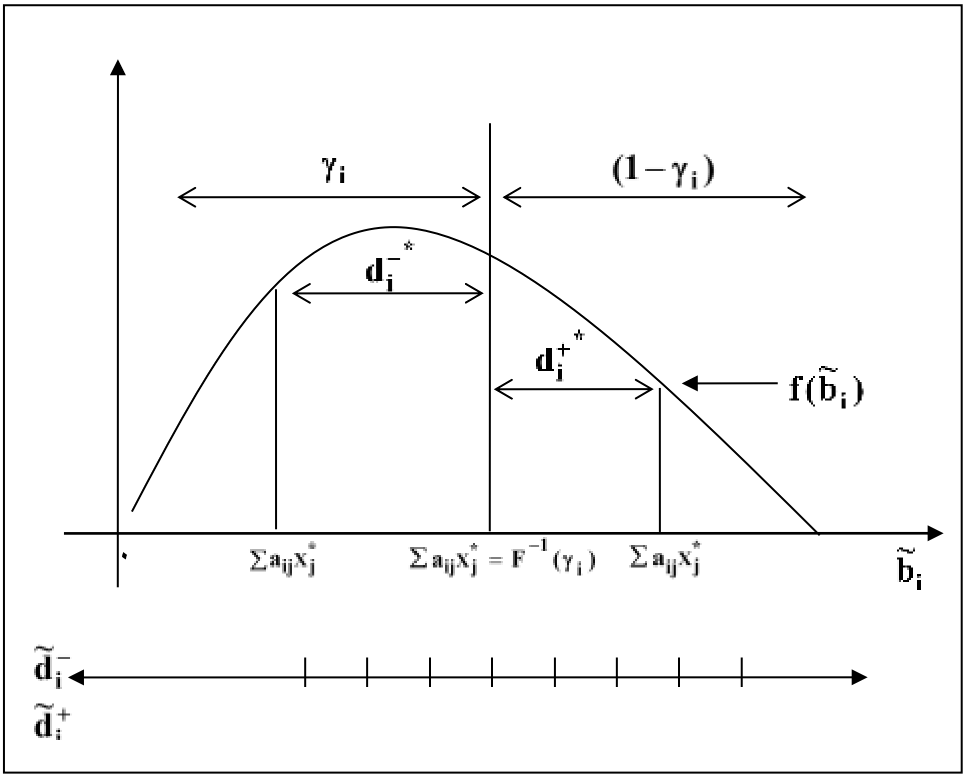
و بالمثل لتحقيق العلاقات (10-2) أو أقرب ما يمكن منـها فأن ذلك يتطلب:

$$\mathbf{Min.}\,(\textstyle\sum_{i=m+1}^{M} \mathbf{d_i^-}) \qquad \mathbf{(10\text{-}15)}$$

و من الأهداف اليقينية فى (10-9),(10-8)و دالتى الأنجاز فى (10-15),(10-14)يمكن تكوين نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر للأهداف الأحتمالية فى (10-3) على النحو التالى:



شكل (١٠-١): الأهداف الأحتمالية $i = 1, 2, \dots, m$



شكل (١٠-٢): الأهداف الأحتمالية $i = m+1, m+2, \dots, M$

$$\text{Lexic. Min. } a = \{\textstyle\sum_{i=1}^{m} d_i^+ + \sum_{i=m+1}^{M} d_i^-\} \qquad (10\text{-}16)$$

S.T.

$$G_i: \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10\text{-}17)$$

$$G_i: \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(\gamma_i) \quad , \quad i = m+1, \dots, M \quad (10\text{-}18)$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10\text{-}19)$$

و النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطى يقينى يمكن حله بأحد الأساليب المقدمة فى الباب السابق. و بحل النموذج أعلاه نحصل على أفضل حل توافقي للنموذج و ليكون $(a^*, X^*, d^{-*}, d^{+*})$.

و الشكلين (١٠-١)،(١٠-٢) يوضحان بيانياً علاقة قيمة المتغيرات الأنحرافية اليقينية $\left(d_i^{-*}, d_i^{+*}\right)$ فى أفضل حل توافقى بالمتغيرات الأنحرافية العشوائية (الأحتمالية) $\tilde{d}^-, \tilde{d}^+$.

و النظرية التالية تعطى العلاقة بين الحل الأمثل $\left(X^*, d^{-*}, d^{+*}\right)$ و المتغيرات الأنحرافية العشوائية $\tilde{d}^-, \tilde{d}^+$ فى الأهداف (10-3)، أو بعبارة أخرى تعطى الأحتمالات الفعلية (مستويات المأمونية الفعلية) لتحقق (أو عدم تحقق) الأهداف.

نظرية (١٠-١)

إذا فرضنا الأهداف الأحتمالية فى (10-3) المناظرة للقيود الأحتمالية (10-2),(10-1) و كان أفضل حل توافقى لنموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر فى (10-19)-(10-16) يساوى $\left(X^*, d^{-*}, d^{+*}\right)$ فأن:

١) إذا كان $d_i^{+*} = 0, d_i^{-*} > 0$ فأن أقل أحتمال يحقق القيد (i) أكبر من γ_i، $i = 1,2,...,m$، بمقدار $P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*})$ بحيث:

$$\mathbf{Min.}\, P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^-\right) = P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}\right)$$

$$= \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)-d_i^{-*}}^{F^{-1}(1-\gamma_i)} f\left(\tilde{b}_i\right) \ d\,\tilde{b}_i > 0 \,, i = 1, 2,...,m \qquad (10\text{-}20)$$

أو:

$$= \int_{F^{-1}(\gamma_i)-d_i^{-*}}^{F^{-1}(\gamma_i)} f(\tilde{b}_i) \ d\,\tilde{b}_i > 0 \ , \ i = m+1,...,M \quad (10\text{-}21)$$

٢) و إذا كان $d_i^{+*} > 0, d_i^{-*} = 0$ فأن أقل أحتمال يحقق القيد (i) أقل من γ_i ، بمقدار $P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*})$ بحيث:

$$\mathbf{Min.}\, P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^+\right) = P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*}\right)$$

$$= \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_i^{+*}} f(\tilde{b}_i) \ d\,\tilde{b}_i > 0 \ , \ i = 1, 2,...,m \quad (10\text{-}22)$$

أو:

$$= \int_{F^{-1}(\gamma_i)}^{F^{-1}(\gamma_i)+d_i^{+*}} f(\tilde{b}_i) \quad d\,\tilde{b}_i > 0 \ , \ i = m+1,\dots,M \quad (10\text{-}23)$$

الإثبات:[أنظر مرجع 64]

بما أن كل دالة من الدالتين $P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ \le d_i^+)$ ، $P_r(0 \le \tilde{d}_i^- \le d_i^-)$ دالة متزايدة بالتواتر monotonic increasing function فى المتغيرات الانحرافية اليقينية d_i^-, d_i^+ على الترتيب، بالتالى فإن:

١) عندما $d_i^{-*} > 0$ فأن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}) = +> 0 \qquad (10\text{-}24)$$

و بما أن

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i + P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}\right)$$
$$= +> \gamma_i \ , \ i = 1, 2,\dots,m \qquad (10\text{-}25)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \ge \tilde{b}_i\right) = \gamma_i - P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}\right)$$
$$= +< \gamma_i, \ i = m+1,..,M \qquad (10\text{-}26)$$

٢) بالمثل عندما $d_i^{+*} > 0$ فأن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*}) = +> 0 \qquad (10\text{-}27)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i - P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^+ \le d_i^{+*}\right)$$
$$= +< \gamma_i \ , \ i = 1, 2,\dots,m \qquad (10\text{-}28)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \ge \tilde{b}_i\right) = \gamma_i + P_r\left(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*}\right)$$
$$= +> \gamma_i \ , i = m+1,..,M \qquad (10\text{-}29)$$

نتيجة (١٠-١)

إذا كان $d_i^{-*} = d_i^{+*} = 0$ فإن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}) = P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*}) = 0$$

و بالتالى فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \quad , \quad i = 1, 2,...,m \qquad (10\text{-}30)$$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \ge \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \quad , \quad i = m+1, m+2,...,M \qquad (10\text{-}31)$$

الحالة الثانية

إذا فرضنا أن فئة القيود الأحتمالية على النحو التالى:

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \, , i = 1, 2, \dots, m \qquad (10\text{-}32)$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \, , i = m+1, m+2, \dots, M \qquad (10\text{-}33)$$

حيث $\tilde{a}_{ij}$ عبارة عن متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة. فأن فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة للقيود أعلاه على النحو:

$$G_i: \ \sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \, , i = 1, 2, \dots, M \qquad (10\text{-}34)$$

حيث $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ تشير إلى المتغيرات الأنحرافية العشوائية السالبة و الموجبة على الترتيب بحيث:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{d}_i^- &= \text{Max.}\left\{0 \ , \ \tilde{b}_i - \left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j\right)\right\} \\ \tilde{d}_i^+ &= \text{Max.}\left\{0 \ , \ \left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j\right) - \tilde{b}_i\right\} \end{aligned}\right\} , i = 1, 2,....,M \qquad (10\text{-}35)$$

حيث تحقق $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ نفس المعادلات فى (10-5).

فإذا فرضنا أن مقياس المأمونية للقيد رقم (i) يساوى (γ_i)، $i = 1, 2, .., m, m+1, .., M$ فأنه يمكن أعادة صياغة القيود (10-30),(10-29) على النحو التالى:

$$p_r\left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j \le \tilde{b}_i - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$b_i - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j = F^{-1}(\gamma_i)\ ,\ j = 1,2,\dots,n\backslash \qquad (10\text{-}36)$$

بالمثل

$$b_i - \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j = F^{-1}(1-\gamma_i)\ ,\ j = n\backslash+1, n\backslash+2,\dots,n \quad (10\text{-}37)$$

حيث F, F^{-1} تشير إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائى $\left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j\right)$ و الدالة العكسية لها على الترتيب. و فى معظم الحالات تكون كل من الدالة F, F^{-1} دالة غير خطية فى المتغيرات القرارية X_j، $j = 1,2,\dots,n\backslash$.

و يمكن تحويل القيود فى (10-37),(10-36) إلى أهداف يقينية على النحو التالى:

$$G_i: F^{-1}(\gamma_i) + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i\ , i = 1,2,\dots,m \quad (10\text{-}38)$$

و يكون المطلوب

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=1}^{m} d_i^+\right) \qquad (10\text{-}39)$$

بالمثل

$$G_i: F^{-1}(1-\gamma_i) + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i\ , i = m+1,\dots,M \quad (10\text{-}40)$$

و يكون المطلوب

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=m+1}^{M} d_i^-\right) \qquad (10\text{-}41)$$

و يكون النموذج اليقينى المناظر على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \left\{\sum_{i=1}^{m} d_i^+ + \sum_{i=m+1}^{M} d_i^-\right\}$$

S.T.

$$G_i: F^{-1}(\gamma_i) + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i\ , i = 1,2,\dots,m$$

$$G_i: F^{-1}(1-\gamma_i) + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i\ , i = m+1,\dots,M$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ ,\ (d_i^-)(d_i^+) = 0\ ,\ i = 1,2,\dots,M\ ,\ j = 1,2,\dots,n$$

ملحوظة

يتم حساب F أو F^{-1} بأستخدام نفس الطرق المقدمة فى الأبواب ٧،٦،٤ بالنسبة للتوزيعات الأحتمالية الأحادية أو الثنائية أو المتعددة.

(١٠-٣) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية
Random Parameters $\tilde{b}_i$

فى الباب الثانى و الثالث تم تقديم عدة تحويلات أحصائية لبعض القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{b}_i$ تمثل متغيرات عشوائية متقطعة أو متصلة.

و فى هذا الفصل سوف نستخدم نفس التحويلات الإحصائية المقدمة فى الباب الثانى و لكن بهدف أشتقاق نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر لفئة الأهداف الأحتمالية فى (10-3) ثم حساب أحتمالات حدوث المتغيرات الأنحرافية العشوائية و ذلك من خلال تقديم عدة أمثلة.

<u>مثال (١٠-١)</u>

أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالى التالى

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 5X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \le 8 \qquad (2)$$
$$5X_1 + 4X_2 \ge 40 \qquad (3)$$
$$P_r(2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1) \ge 0.90 \qquad (4)$$
$$P_r(X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.80 \qquad (5)$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (6)$$

بحيث: $\tilde{b}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 5), \tilde{b}_2 \sim Exp(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 8)$

<u>المطلوب</u>

(١) تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى بأستخدام أسلوب (CCP) عندما $\gamma_1 \ge 0.90$, $\gamma_2 \ge 0.80$.

(٢) تحويل النموذج فى (١) إلى نموذج برمجة هدف يقينى مع الأخذ فى الأعتبار أن الأولوية الأولى لتحقيق الهدف objective فى الدالة (1)، و الأولوية الثانية لتحقيق القيدين

(3),(2)، و الأولوية الثالثة لتحقيق القيدين (5),(4) بقدر الأمكان.

<u>ملحوظة:</u> النموذج (6)-(1) نموذج برمجة أحتمالية ذو قيود متعارضة.

(٣) حل نموذج برمجة الهدف اليقينى فى (٢) بأستخدام طريقة الحلول المتتالية مع توضيح الحل بيانياً.
(٤) حدد الأهداف G_i التى لم يتم تحقيقها مع تحديد المتغيرات الأنحرافية المناظرة لها.
(٥) بأستخدام نظرية (١٠-١) أوجد أقل أحتمال لعدم تحقق الأهداف ثم أوجد قيمة مقياس صلاحية الحل.

الحل

بما أن $\tilde{b}_i$ يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين (λ_i, α_i). بالرجوع إلى الفصل (٢-٢) نجد أن$f(\tilde{b}_i)$ دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{b}_i$ ، $F(\tilde{b}_i)$ هى الدالة التراكمية على النحو التالى:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \, \mathrm{Exp}[-\lambda_i(\tilde{b}_i - \alpha_i)] \quad , \lambda_i > 0 \ , \tilde{b}_i \geq \alpha_i \geq 0$$

$$F\left(b_i^{\backslash}\right) = 1 - \mathrm{Exp}\left[-\lambda_i\left(b_i^{\backslash} - \alpha_i\right)\right] \longrightarrow$$

$$F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right) = 1 - \mathrm{Exp}\left[-\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - \alpha_i\right)\right] \qquad (7)$$

و بتحويل القيدين (5),(4) إلى قيود يقينية بأستخدام الدالة التراكمية في (7) نجد أن:

$$P_r(2X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1) \geq 0.90 \longrightarrow 1 - F(2X_1 + X_2) \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$F(2X_1 + X_2) \leq 0.10 \longrightarrow 2X_1 + X_2 \leq F^{-1}(0.1) \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5.053 \qquad (8)$$

بالمثل

$$P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2) \geq 0.80 \longrightarrow F(X_1 + X_2) \geq 0.80 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \geq 9.609 \qquad (9)$$

(١) و يصبح النموذج اليقينى المكافئ للنموذج الأحتمالى (6)-(1)على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ \text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ 5X_1 + 4X_2 &\geq 40 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 5.053 \\ X_1 + X_2 &\geq 9.609 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

و نلاحظ أن قيود النموذج اليقينى أعلاه قيود متعارضة و لكن يمكن تحويله إلى نموذج برمجة هدف يقينى على النحو التالى.

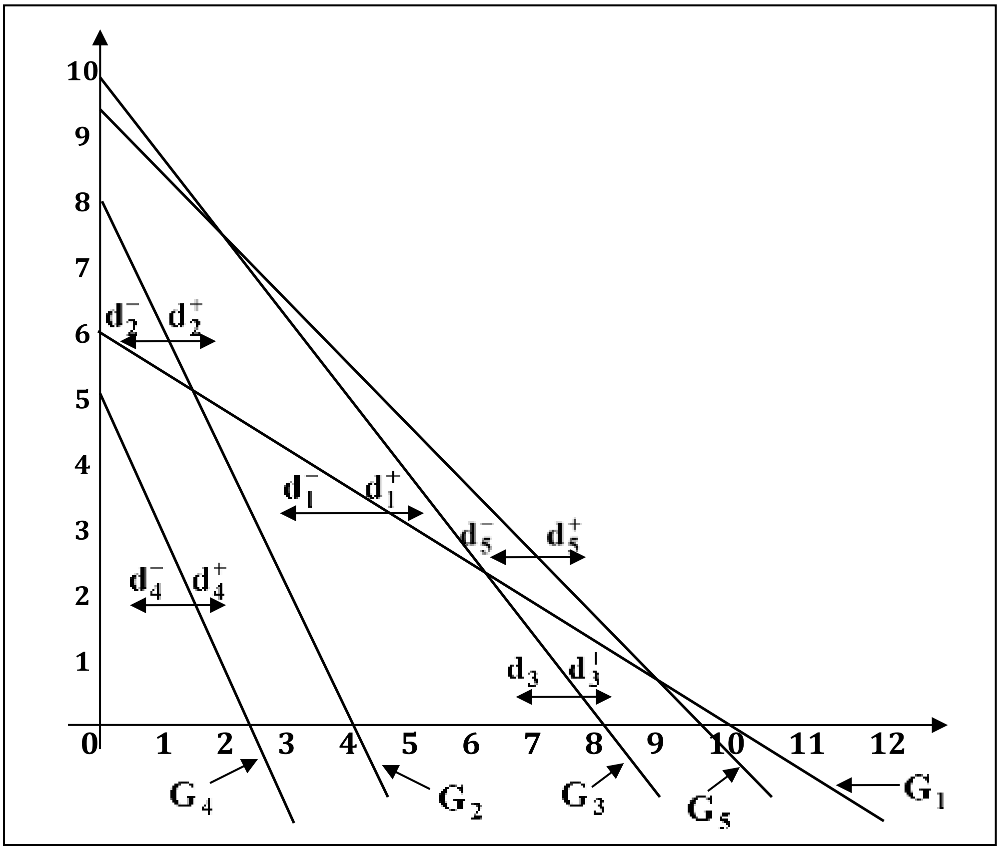
$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), g_3(d^-, d^+)\}$$
$$= \{(d_1^-), (d_2^+ + d_3^-), (d_4^+ + d_5^-)\}$$

S.T.

$$\begin{aligned}
G_1&: \quad 3\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 30 \qquad (10)\\
G_2&: \quad 2\,X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 8\\
G_3&: \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 40\\
G_4&: \quad 2\,X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 5.053\\
G_5&: \quad X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 9.609
\end{aligned}$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1, 2, 3, 4, 5$$

ملحوظة: الطرف الأيمن للهدف G_1 المساوى لـ (30) يتم أفتراضه عن طريق متخذ القرار (و توجد بعض الأساليب التى يمكن بأستخدامها تحديد أفضل قيمة [١٠, 88, 99])، حيث يتم أفتراض قيمة كبيرة ممكنة نظراً لأن العملية فى (1) عملية تعظيم (Max.).

(٣) و بحل النموذج أعلاه بأستخدام طريقة الحلول المتتالية (أنظر الفصل (٩-٦)) نجد أن أفضل حل توافقى على النحو التالى:



شكل (٣-١٠): يوضح الأهداف والمتغيرات الأنحرافية المناظرة لها

$$g_1(d^-, d^+) = 0 \quad , \quad g_2(d^-, d^+) = 2 \quad , \quad g_3(d^-, d^+) = 4.45$$
$$X_1^* = 0 \ , \ X_2^* = 10 \ , d_1^{-*} = 0 \ , d_1^{+*} = 20 \ , d_2^{-*} = 0 \ , d_2^{+*} = 2$$
$$d_3^{-*} = d_3^{+*} = 0 \, , \ d_4^{-*} = 0 \, , \ d_4^{+*} = 4.45 \, , \ d_5^{-*} = 0 \ , \ d_5^{+*} = 0.39 \quad (11)$$

(٤) بما أن $0 \neq 2 = {}^{*}d_2^{+}$, $g_2(d^{-*}, d^{+*}) = 2 \neq 0$ بالتالى فأن الهدف G_2 لم يتحقق و بما أن الهدف G_2 هدف يقينى فإن أقل مخاطرة ترجع لتعارض الأهداف بالنسبة للهدف G_2 تساوى 2 وحدة، بمعنى أن أفضل حل توافقى يتطلب زيادة الطرف الأيمن لـ G_2 بمقدار وحدتين، أما بالنسبة للهدف G_4 فأن $d_4^{+*} = 4.45$, $g_3(d^{-*}, d^{+*}) = 4.45 \neq 0$ بالتالى فإن الهدف G_4 لم يتحقق و الهدف G_4 هدف يقينى مناظر الهدف الأحتمالى، و بالتالى يمكن تحديد الأحتمال $P_r(0 \leq \tilde{d}_4^+ < d_4^{+*})$

ثم تحديد أحتمال تحقق القيد.

(٥) و بتطبيق نظرية (١٠-١) فأن أقل أحتمال لعدم تحقق القيود G_4 يمكن حسابة على النحو التالى:

$$P_r\left(0 \le \tilde{d}_4^+ < d_4^{+*}\right) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_4^{+*}} f\left(\tilde{b}_1\right)\ d\,\tilde{b}_1$$

$$= \int_{5.053}^{9.503} f\left(\tilde{b}_1\right)\ d\,\tilde{b}_1 = 0.8993$$

و بالتالى فأن أحتمال تحقق القيد رقم (4) فى الحل سوف نشير له بالرمز γ_1^* يكون على النحو التالى:

$$\gamma_1^* = P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \le \tilde{b}_1\right) = \gamma_1 - 0.8993 = 0.9000 - 0.8993$$

$$= 0.0007$$

بالمثل:

$$\gamma_2^* = P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \ge \tilde{b}_2\right) = \gamma_2 + \int_{F^{-1}(\gamma_2)}^{F^{-1}(\gamma_2)+d_5^{+*}} f\left(\tilde{b}_2\right)\ d\,\tilde{b}_2$$

$$= 0.8 + 0.0646 = 0.8646$$

و من الفصل (٨-٦) أيضاً نجد أن مقياس صلاحية الحل:

$$R = (\gamma_1^*)(\gamma_2^*) = (0.0007)(0.8646) = 0.00061 \qquad (12)$$

مثال (١٠-٢)

أعتبر المثال السابق و لكن تغير الأولويات بحيث تكون الأولوية الأولى لتحقيق القيدين (5),(4) و الأولوية الثانية لتحقيق القيدين (3),(2) و الأولوية الثالثة لتحقيق الهدف العام objective فى (1). ثم قارن بين أحتمال صلاحية الحل فى المثال السابق و أحتمال صلاحية

الحل فى هذا المثال.

الحل

فى هذه الحالة يصبح متجه الإنجاز على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_4^+ + d_5^-), (d_2^+ + d_3^-), (d_1^-)\} \qquad (13)$$

و بحل نموذج برمجة الهدف فى هذه الحالة نجد أن أفضل حل توافقى فى هذه الحالة على النحو التالى:

$$a^* = \{4.56\ ,\ 3.17\ ,\ 5\} \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 9.61 \quad ,$$
$$d_1^{-*} = 0\ ,\ d_1^{+*} = 18.05\ ,\ d_2^{-*} = 0\ ,\ d_2^{+*} = 1.61\ ,\ d_3^{-*} = 1.56\ ,$$
$$d_3^{+*} = d_4^{-*} = 0 \quad , \quad d_4^{+*} = 4.56 \quad , \quad d_5^{-*} = d_5^{+*} = 0 \qquad (14)$$

و من الحل يتضح أن الهدف G_4 لم يتحقق حيث:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_4^+ < d_4^{+*}) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_4^{+*}} f(\tilde{b}_1)\ \ d\,\tilde{b}_1 \approx 0.8993$$

و بالتالى فأن أحتمال تحقق القيد رقم (4) فى الحل فى هذه الحالة على النحو:

$$\gamma_1^{**} = P_r(\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \le \tilde{b}_1) = \gamma_1 - 0.8993 = 0.0007$$

و صلاحية الحل فى هذه الحالة تصبح على النحو التالى:

$$R = (\gamma_1^{**})(\gamma_2) = (0.0007)(0.80) = 0.000056$$

و مما سبق يتضح أنه للحصول على مقياس صلاحية ملائم لأبد من حدوث تغير بالنسبة للهدف G_4.

مثال (١٠-٣)

أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالى التالى

$$\text{Max.}\, Z = 10\, X_1 + 15\, X_2 + 12\, X_3 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 4\, X_1 + 3\, X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1 \qquad (2)$$
$$-5\, X_1 + 2\, X_2 + 2\, X_3 \ge \tilde{b}_2 \qquad (3)$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث: $\gamma_1 \ge 0.9, \gamma_2 \ge 0.9, \tilde{b}_1 \sim N(\mu = 50, \sigma = 2), \tilde{b}_2 \sim \chi^2_{(10)}$

المطلوب

١- حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مناظر.
٢- حول النموذج اليقينى إلى نموذج برمجة هدف - ثم أوجد أفضل حل توافقى مع الأخذ فى الأعتبار أن الأولوية الأولى لتحقيق القيدين (3),(2).
٣- أوجد أحتمال عدم تحقق القيود.

الحل

بما أن $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد، من الفصل (٢-٥) نجد أن:

$$P_r(4\,X_1 + 3\,X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1) \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r(Z \ge 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 - 25) \ge 0.9 \longrightarrow$$

من جدول توزيع الدالة التراكمية للتوزيع المعتاد القياسى بملحق (٢) نجد أن:

$$2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 - 25 \le -1.28 \rightarrow 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 \le 23.72 \quad (5)$$

بالنسبة للقيد (3) بما أن $\tilde{b}_2$ متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(10)}$ ، من الفصل (٢-٦-٤) و بأستخدام جدول توزيع الدالة التراكمية لتوزيع $\chi^2_{(10)}$ بملحق (٣) نجد أن:

$$P_r(-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$F(-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge F^{-1}(0.9) \longrightarrow -5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge 4.87 \quad (6)$$

و من النموذج (4)-(1)، و القيدين (6),(5) يكون النموذج اليقينى المكافئ على النحو التالى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 10\,X_1 + 15\,X_2 + 12\,X_3 \\ \text{S.T.} \quad & 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 \le 23.72 \\ & -5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge 4.87 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

٢- نموذج برمجة الهدف المناظر على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+)\} = \{(d_1^-), (d_2^+ + d_3^-)\}$$

S.T.

$$G_1: \quad 10\,X_1 + 15\,X_2 + 12\,X_3 + d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$G_2: \quad 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 23.72$$
$$G_3: \quad -5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 + d_3^- - d_3^+ = 4.87$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1, 2, 3$$

و بحل النموذج اليقينى أعلاه نجد أن أفضل حل توافقى على النحو التالى:

$$X_1^* = 3.44 \quad , \quad X_2^* = 11.04 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad g_1(d^{-*}, d^{+*}) = 0$$
$$g_2(d^{-*}, d^{+*}) = 0 \quad , \quad d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0 \quad , \quad d_2^{-*} = 0.28 \quad , \quad d_2^{+*} = 0$$
$$d_3^{-*} = 0 \quad , \quad d_3^{+*} = 0.01$$

و بما أن:

$$P_r\left(0 \leq \tilde{d}_2^- < d_2^{-*}\right) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_2)-d_2^{-*}}^{F^{-1}(1-\gamma_2)} f\left(\tilde{b}_2\right) \ d\,\tilde{b}_2$$
$$= \int_{23.44}^{23.72} f(\tilde{b}_1) \ d\,\tilde{b}_1 \approx 0 \longrightarrow$$
$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \int_{23.44}^{23.72} f(\tilde{b}_1) \ d\,\tilde{b}_1 = 0.90$$

بالمثل:

$$\gamma_2^* = \gamma_2 + \int_{F^{-1}(\gamma_2)}^{F^{-1}(\gamma_2)+d_2^{+*}} f(\tilde{b}_2) \ d\,\tilde{b}_2 = 0.90 + 0 = 0.90$$

و بالتالى صلاحية الحل R حيث:

$$R = (\gamma_1^*)(\gamma_2^*) = (0.90)(0.90) = 0.81$$

(١٠-٤) المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{a}_{ij}$

فى الأبوب ٧،٦،٤ تناولنا بالتفصيل تحويل نموذج البرمجة الأحتمالية إلى نموذج برمجة يقينية مكافئ عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية أحادية أو ثنائية او متعددة معلومة.

و يعتبر هذا الفصل أمتداد لهذه الأبوب فهو يتناول نفس النماذج برمجة الهدف الأحتمالية عندما تكون $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة، و لكن بهدف الحصول على نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر.

فإذا فرضنا أن القيود الأحتمالية على النحو التالى:

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\ , i = 1, 2, \dots , m \qquad (10\text{-}42)$$

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i\ , i = m+1, m+2, \dots , M \qquad (10\text{-}43)$$

فإذا أشرنا إلى الدالة التراكمية و الدالة العكسية للمتغير العشوائى $\left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j\right)$ بالرمز F, F^{-1} على الترتيب. و يمكن تحويل القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية بأستخدام (CCP) عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالى:

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + F^{-1}(\gamma_i) = b_i\ , i = 1, 2, \dots , m \qquad (10\text{-}44)$$

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + F^{-1}(1-\gamma_i) = b_i\ , i = m+1, m+2, \dots , M \qquad (10\text{-}45)$$

فإذا عرفنا فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة للقيود (10-43),(10-42) على النحو:

$$\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i\ , i = 1, 2, \dots , M \qquad (10\text{-}46)$$

$$\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \ge 0 \qquad (10\text{-}47)$$

$$\tilde{d}_i^- = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j\right)\ , i = 1, 2, \dots , M \qquad (10\text{-}48)$$

$$\tilde{d}_i^+ = \left(\sum_{j=1}^{n\backslash} \tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j\right) - b_i\ , i = 1, 2, \dots , M \qquad (10\text{-}49)$$

$$P_r(\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0) = P_r(\varphi) = 0 \qquad (10\text{-}50)$$

$$P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0 \cup \tilde{d}_i^+ \geq 0) = 1 \qquad (10\text{-}51)$$

كذلك يمكن الحصول على الأهداف اليقينية المناظرة من تحويل القيود اليقينية (10-45),(10-44) على النحو التالى:

$$\sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + F^{-1}(\gamma_i) + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ , i = 1, 2, \dots, m \qquad (10\text{-}52)$$

و لتحديد أفضل حل توافقى للأهداف أعلاه فإن ذلك يتطلب:

$$\text{Min.} \sum_{i=1}^{m} d_i^+ \qquad (10\text{-}53)$$

بالمثل:

$$\sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + F^{-1}(1-\gamma_i) + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ , i = m+1, \dots, M \qquad (10\text{-}54)$$

كذلك لتحديد أفضل حل توافقى للأهداف أعلاه فإن ذلك يتطلب:

$$\text{Min.} \sum_{i=1}^{m} d_i^- \qquad (10\text{-}55)$$

و يصبح نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر للأهداف (10-46) الأحتمالية على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), \dots\dots, g_k(d^-, d^+)\}$$

S.T.

$$G_i: \quad \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + F^{-1}(\gamma_i) + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ , i = 1, 2, \dots, m$$

$$G_i: \quad \sum_{j=n\backslash+1}^{n} a_{ij}x_j + F^{-1}(1-\gamma_i) + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ , i = m+1, \dots, M$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1, 2, \dots, M \ , \ j = 1, 2, \dots, n$$

و فيما يلى سوف نقدم بعض الأمثلة توضح تحويل نموذج البرمجة الأحتمالية إلى نموذج برمجة يقينية ثم الحصول على أفضل حل توافقى.

<u>مثال (١٠-٤)</u>

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\text{Max. } \tilde{H} = 14\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad \tilde{a}_{11}\,X_1 + 5\,X_2 \geq 40$$

$$\tilde{a}_{21}\,X_1 + 4\,X_2 \le 12$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

حيث: $\tilde{C}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 2), \tilde{a}_{11} \sim N(\mu = 4, \sigma = 2), \tilde{a}_{21} \sim N(\mu = 3, \sigma = 1)$

المطلوب

(١) حول دالة الهدف الأحتمالية إلى قيد أحتمالي بمستوى مأمونية $\gamma = 0.9$ ثم تحويله إلى هدف أحتمالى.

(٢) حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية بمستويات مأمونية $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.9$ ثم تحويلهم إلى أهداف يقينية.

(٣) كون نموذج برمجة هدف يقينى مناظر للنموذج الأحتمالى ثم أوجد أفضل حل توافقى للنموذج ووضح ذلك بيانياً.

(٤) فسر النتائج فى (٣) ثم أوجد صلاحية الحل.

الحل

(١) بما أن:

$$\tilde{H} = 14\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2$$

فإنه يمكن تحويل الدالة إلى قيد أحتمالى بأفتراض حد أدنى لدالة الهدف و ليكن L و عادةً يفترض أن متخذ القرار يحدد هذا الحل، و فى هذا المثال نفترض أن $L = 100$ ، و بالتالى يمكن تحويل الدالة $\tilde{H}$ إلى قيد أحتمالى على النحو التالى:

$$P_r(14\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \ge 100) = 0.9 \to P_r\left(Z \ge \frac{100 - 14X_1 - 10X_2}{2X_2}\right) = 0.9 \to$$

$$\frac{100 - 14X_1 - 10X_2}{2X_2} = F^{-1}(0.10) \longrightarrow 14X_1 + 7.44X_2 = 100 \longrightarrow$$

$$G_1: \quad 14\,X_1 + 7.44X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100 \qquad (1)$$

(٢) يتم تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية على النحو التالى:

$$\tilde{a}_{11}\,X_1 + 5\,X_2 \ge 40 \longrightarrow P_r\left(Z \ge \frac{40 - 5X_2 - 4X_1}{2X_1}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

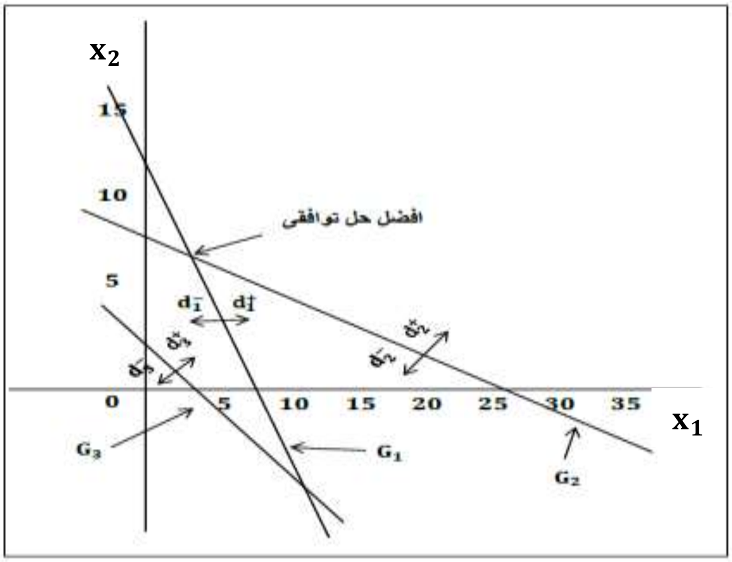
$$1.44\,X_1 + 5\,X_2 = 40 \longrightarrow G_2: \quad 1.44\,X_1 + 5\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \qquad (2)$$

بالمثل:

$$\tilde{a}_{21}\,X_1 + 4\,X_2 \le 12 \longrightarrow P_r\left(Z \ge \frac{12 - 4X_2 - 3X_1}{X_1}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

$$1.72\,X_1 + 4\,X_2 = 12 \longrightarrow G_3: \quad 1.72\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 \qquad (3)$$

(٣) نموذج برمجة الهدف المناظر على النحو:



شكل (١٠-٥)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^- + d_3^+)\}$$

S.T.

$$G_1: \quad 14\,X_1 + 7.44\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100$$
$$G_2: \quad 1.44\,X_1 + 5\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$
$$G_3: \quad 4.38\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 12$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\; , \;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;\; , \;\; i = 1, 2, 3$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن أفضل حل توافقى على النحو التالى:

$$X_1^* = 3.42 \quad , \quad X_2^* = 7.02 \quad , \quad d_1^- = 0 \quad , \quad {d_1^+}^* = 0$$
$${d_2^-}^* = {d_2^+}^* = 0 \quad , \quad {d_3^-}^* = 0 \quad , \quad {d_3^+}^* = 31.06$$
$$g_1(d^{-*}, d^{+*}) = 0 \quad , \quad g_2(d^{-*}, d^{+*}) = 31.06$$

مثال (١٠-٥)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالى التالى:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Max.\,z = 5x_1 + 2x_2} \\ \mathbf{S.T.}\quad &\mathbf{5x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \le 25} \\ &\mathbf{\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \ge 10} \\ &\mathbf{x_1, x_2 \ge 0} \end{aligned}$$

مع أعتبار أن $\gamma_1 \ge 0.95$ ، $\gamma_2 \le 0.90$.

المطلوب

بأستخدام أسلوب (CCP) حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج برمجة هدف يقينى مناسب بحيث تكون الأولوية الأولى لتحقيق القيدين (3),(2) بقدر الإمكان.

الحل

يمكن تحويل دالة الهدف Z إلى هدف على النحو التالى:

$$\mathbf{5\,X_1 + 2\,X_2 \ge L \longrightarrow G_1:\quad 5\,X_1 + 2\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 50} \qquad \mathbf{(1)}$$

و يتم تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية ثم إلى أهداف يقينية على النحو التالى:

$$\mathbf{P_r(5\,X_1 + \tilde{a}_{12}\,X_2 \le 25) \ge 0.95 \longrightarrow 5X_1 + 6.28\,X_2 \le 25 \longrightarrow}$$

$$\mathbf{G_2:\quad 5\,X_1 + 6.28\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 25} \qquad \mathbf{(2)}$$

بالمثل:

$$\mathbf{P_r(\tilde{a}_{21}\,X_1 + \tilde{a}_{22}\,X_2 \ge 10) \le 0.90 \longrightarrow \frac{10 - 4X_1 - 2\,X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \ge -1.28 \longrightarrow}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G_3:}\quad &\mathbf{-\,14.36\,X_1^2 - 2.36\,X_2^2 - 16\,X_1\,X_2} \\ &\mathbf{+80\,X_1 + 40\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 100} \end{aligned} \qquad \mathbf{(3)}$$

و يصبح نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر على النحو التالى:

$$\mathbf{Lexic.\,Min.\,a = \{(d_2^+ + d_3^-), (d_1^-)\}}$$

S.T.

$$\mathbf{G_1:\quad 5\,X_1 + 2\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 50}$$

$$G_2: \quad 5\,X_1 + 6.28\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 25$$
$$G_3: \quad -14.36\,X_1^2 - 2.36\,X_2^2 - 16\,X_1\,X_2$$
$$+80X_1 + 40\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 100$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\;,\;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;\;,\;\; i = 1,2,3$$

و يلاحظ أن النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف غير خطى يمكن حله بأحد طرق حل نموذج برمجة الهدف غير الخطى بأسلوب الحل المتتالى [١٠،86].

مثال (١٠-٦)

أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالى:

$$\text{Min. } \tilde{C} = 3\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \longrightarrow \gamma \geq 0.90$$

$$8\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.75$$
$$X_1 + \tilde{a}_3\,X_2 \geq 8 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.90$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث: $\tilde{C}_2 \sim \text{Exp}(\lambda = 1, \alpha = 5),\ \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(30)},\ \tilde{a}_3 \sim N(\mu = 8, \sigma = 1)$

المطلوب

١- حول دالة الهدف $\tilde{C}$ إلى دالة يقينية، كذلك حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية المناظرة.

٢- كون نموذج برمجة هدف يقينى مناظر بأفتراض أن الأولوية الأولى لتحقيق القيود ما أمكن.

الحل

إذا فرضنا أن $L = 25$ بالتالى فأن:

$$P_r(\tilde{C} \leq L) = P_r(3\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \leq 25) \geq 0.90 \longrightarrow$$
$$3\,X_1 + 7.303\,X_2 \leq 25 \qquad (1)$$

$$P_r(8\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b}_1) \geq 0.75 \longrightarrow 1 - F(8\,X_1 + 5\,X_2) \geq 0.75 \longrightarrow$$

و بأستخدام ملحق (٣) نجد أن $F^{-1}(0.25) = 24.5$

$$8\,X_1 + 5\,X_2 \le 24.5 \qquad (2)$$

$$P_r(\,X_1 + \tilde{a}_3\,X_2 \ge 8) \ge 0.90 \longrightarrow P_r\left(\tilde{a}_3 \ge \frac{8 - X_1}{X_2}\right) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{8 -\ X_1 - 8\,X_2}{X_2}\right) \ge 0.90 \longrightarrow \frac{8 -\ X_1 - 8\,X_2}{X_2} \le F^{-1}(0.1)$$

من ملحق (٢) نجد أن $F^{-1}(0.1) = -1.28$

$$X_1 + 9.28\,X_2 \ge 8 \qquad (3)$$

و بتحويل القيود (3)-(1) إلى أهداف، يصبح نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^-), (d_1^+)\}$$

S.T.

$$G_1: \quad 3\,X_1 + 7.303\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 25$$
$$G_2: \quad 8\,X_1 + 5\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 24.5$$
$$G_3: \quad X_1 + 9.28\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 8$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \;\;,\;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;\;,\;\; i=1,2,3$$

و بحل النموذج أعلاه نجد أن أفضل حل توافقى على النحو التالى:

$$X_1^* = 1.24 \quad , \quad X_2^* = 2.91 \quad , \quad g_1(d^{-*}, d^{+*}) = d_2^{+*} = d_3^{-*} = 0$$
$$g_2(d^{-*}, d^{+*}) = d_1^{-*} = 0 \quad , \quad d_1^{+*} = 20.29$$

(١٠-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١٠-١)

تقوم أحدى الشركات لإنتاج الأثاث الخشبى من ضمن إنتاجها الترابيزات و الكراسى من نفس نوع الخشب و على نفس خط الإنتاج. و الجدول التالى يوضح متطلبات الإنتاج و الكميات المتاحة من الخشب و ساعات العمل و مساحة التخزين المتاحة لتخزين المنتجات.

جدول (١٠-١)

الكميات المتاحة	متطلبات الوحدة الواحدة من كل منتج		المتطلبات
	كرسي	ترابيزة	
2000	5	10	ألواح الخشب (بالمتر المربع)
1500	4	5	ساعات التشغيل العادية
1000	0.5	2.0	مساحة التخزين (بالمتر المربع)

فإذا كان ربح كل من الترابيزة و الكرسى $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ على الترتيب يمثل متغير معتاد بحيث:

$$\tilde{C}_1 \sim N(\mu_1 = 500, \sigma_1 = 5), \tilde{C}_2 \sim N(\mu_2 = 200, \sigma_2 = 2)$$

كذلك الطلب على كل من الترابيزات و الكراسى $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ بحيث:

$$\tilde{S}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 50), \tilde{S}_2 \sim Exp(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 200)$$

فإذا كان غير مسموح لزيادة الخشب أو مساحة التخزين و لكن ممكن زيادة ساعات التشغيل بساعات إضافية. و يرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يمكن إنتاجها من الترابيزات و الكراسى بحيث يكون ربحه أكبر ما يمكن و ذلك بمستوى مأمونية $\gamma \geq 0.90$.

المطلوب

١- حدد القيود الأحتمالية و القيود اليقينية للإنتاج.
٢- كون نموذج برمجة هدف أحتمالى مناسب، ثم حول الأهداف الأحتمالية إلى أهداف يقينية مناظرة بأستخدام أسلوب (CCP).
٣- حول الأهداف اليقينية غير الخطية إلى أهداف خطية ثم حل النموذج الخطى.

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 عدد الترابيزات و الكراسى التي يجب إنتاجها على الترتيب.

١- القيود اليقينية على النحو التالى:

الخشب $\longleftarrow 10\,X_1 + 5\,X_2 \le 2000$

ساعات التشغيل $\longleftarrow 5\,X_1 + 4\,X_2 \le 1500$

مساحة التخزين $\longleftarrow 2\,X_1 + 0.5\,X_2 \le 1000$

القيود الأحتمالية:

الربح $\longleftarrow \tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \ge C$

حيث C الحد الأدنى للربح الذي يفترضه متخذ القرار و ليكن $(50,000)$.

قيود الطلب $\longleftarrow X_1 \ge \tilde{S}_1\ ,\quad X_2 \ge \tilde{S}_2$

٢- نموذج برمجة الهدف الأحتمالى:

أوجد X_1, X_2 بحيث

$$\text{Lexic. Min. } \tilde{a} = \{(d_1^+ + d_3^+), (d_4^-), (\tilde{d}_5^- + \tilde{d}_6^- \qquad (1)$$

S.T

$$G_1:\quad 10\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000 \qquad (2)$$

$$G_2:\quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1500 \qquad (3)$$

$$G_3:\quad 2\,X_1 + 0.5\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \qquad (4)$$

$$G_4:\quad \tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 50,000 \qquad (5)$$

$$G_5:\quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = \tilde{S}_1 \qquad (6)$$

$$G_6:\quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = \tilde{S}_2 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ ,\ (d_i^-)(d_i^+) = 0\ ,\ i = 1,2,3,4,5,6 \qquad (8)$$

$$\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \ge 0\ ,\ (\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0) = \varphi\ ,\ i = \text{٥,٦,٧} \qquad (9)$$

٣- بالنسبة للهدف G_4 يتم تحويله إلى هدف يقينى على النحو التالى (راجع الفصل (٩-٢)، (٩-٣)):

$$\mathbf{P_r(\tilde{C}_1\, X_1 + \tilde{C}_2\, X_2 \geq 50,000) \geq 0.9 \longrightarrow}$$

$$\mathbf{F(Z \leq \frac{50000 - (500X_1 + 200X_2)}{\sqrt{25X_1^2 + 4X_2^2}}) \leq 0.1 \longrightarrow}$$

$$\mathbf{500\, X_1 + 200\, X_2 - 1.28\sqrt{25\, X_1^2 + 4\, X_2^2} \geq 50,000} \qquad \mathbf{(10)}$$

حيث Z متغير معتاد قياسى.
و القيد اليقينى فى (10) يتم تحويله إلى هدف يقينى مناظر على النحو التالى:

$$\mathbf{500\, X_1 + 200\, X_2 - 1.28\sqrt{25\, X_1^2 + 4\, X_2^2} + d_4^- - d_4^+ = 50,000} \quad \mathbf{(11)}$$

و نلاحظ أن الهدف أعلاه غير خطى يمكن تحويله إلى هدف خطى بتقريب الدالة $\left(\sqrt{25\, X_1^2 + 4\, X_2^2}\right)$ إلى دالة خطية حول نقطة ممكنة $X°$. حيث أن التقريب الخطي للدالة $f(X)$ (دالة قابلة للتفاضل) على النحو التالى [143, 64]:

$$\mathbf{f(X) \approx f(X°) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\bigg|_{x = x°} \left(X_j - X_j^{\circ}\right)} \qquad \mathbf{(12)}$$

و بالتالى فإذا فرضنا أن النقطة $X° = (X_1^{\circ} = 5, X_2^{\circ} = 10)$

$$\mathbf{500\, X_1 + 200\, X_2 - 1.28\sqrt{25\, X_1^2 + 4\, X_2^2}}$$
$$\mathbf{\approx 4459.02 + 340(X_1 - 5) + 148.8(X_2 - 10)}$$
$$\mathbf{= 1271.02 + 340\, X_1 + 148.8\, X_2} \qquad \mathbf{(13)}$$

و بالتعويض بـ (13) فى الطرف الأيمن للهدف (11) نجد أن الهدف غير الخطى يصبح هدف خطى بعد التقريب على النحو التالى:

$$G_4^{/}: \quad 340\,X_1 + 148.8\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 48,729 \qquad (14)$$

كذلك يمكن تحويل قيود الطلب الأحتمالية إلى قيود يقينية على النحو التالى:

$$P_r(\tilde{S}_1 \le X_1) \ge 0.90 \longrightarrow F_1(X_1) = 1 - \text{Exp}\{-\lambda_1(X_1 - \alpha_1)\} \ge 0.90 \longrightarrow$$
$$X_1 \ge 51 \qquad (15)$$

بالمثل:

$$P_r(\tilde{S}_2 \le X_2) \ge 0.90 \longrightarrow F_2(X_2) = 1 - \text{Exp}\{-\lambda_2(X_2 - \alpha_2)\} \ge 0.90 \longrightarrow$$
$$X_2 \ge 198 \qquad (16)$$

وبتحويل القيدين (16),(15) إلى أهداف تصبح على النحو التالى:

$$G_5^{/}: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 51 \qquad (17)$$
$$G_6^{/}: \quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = 198 \qquad (18)$$

و يصبح نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر للنموذج الأحتمالى على النحو التالى:

$$\text{Lexic.Min.}\, a = \{(d_1^+ + d_3^+), (d- \quad), (d_5^- + d_6^-)\}$$

S.T

$$G_1: \quad 10\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000$$
$$G_2: \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1500$$
$$G_3: \quad 2\,X_1 + 0.5\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$$
$$G_4^{/}: \quad 340\,X_1 + 148.8\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 48,729$$
$$G_5^{/}: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 51$$
$$G_6^{/}: \quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = 198$$
$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3,4,5,6$$

و بحل النموذج أعلاه بأستخدام طريقة الحلول المتتالية نجد أن أفضل حل توافقى على النحو:

$$a^* = \{0, 0\;,\; 18\} \quad , \quad X_1^* = 56.67 \quad , \quad X_2^* = 198 \quad , \quad d_1^{-*} = 443.34 \quad , \quad d_1^{+*} = 0 \quad ,$$
$$d_2^{-*} = 424.25 \quad , \quad d_2^{+*} = 0 \quad , \quad d_3^{-*} = 787.67 \quad , \quad d_3^{+*} = 0 \quad , \quad d_5^{-*} = 0 \quad ,$$
$$d_5^{+*} = 5.67 \;,\; d_6^{-*} = 18 \;,\; d_6^{+*} = 0 \;,\; d_7^{-*} = 0 \;,\; d_7^{+*} = 135$$

تطبيق (١٠-٢)

تقوم أحدى الشركات العقارية بتسويق منتجاتها عن طريق وسائل الأعلان بالداخل و الخارج: التليفزيون، الجرائد. و وجدت إدارة التسويق أن زيادة عدد الأعلانات يؤدي إلى زيادة

المبيعات و بالتالى زيادة العائد. فإذا كان تكلفة الأعلان الواحد بالتليفزيون يمثل متغير عشوائى يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 50 آلف و أنحراف معيارى 5 آلاف، كذلك تكلفة الأعلان فى الجرائد يمثل متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمات $\lambda = 1$ ، $\alpha = 30$. فإذا كان المخصص فى الفترة القادمة للأعلانات 6000 آلف جنيه.

المطلوب

١- كون نموذج برمجة أحتمالية مناسب يمثل المشكلة.

٢- أوجد نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر. بحيث لا يزيد المخصص للأعلانات عن

6000 آلف جنيه و لا يقل عدد الأعلانات عن 14 آلف، و ذلك بمستويات مأمونية $\gamma_1 = 0.90 , \gamma_2 = 0.90$.

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الأعلانات فى التليفزيون و فى الجرائد على الترتيب، كذلك

$$\tilde{C}_1 \sim N(50, 5),\ \tilde{C}_2 \sim Exp(\lambda = 1, \alpha = 30)$$

$$\text{Lexic. Min. } \tilde{a} = \{(d_1^-), (d_2^+ + d_3^+)\} \qquad (1)$$

S.T

$$G_1: \quad X_1\, X_2 + d_1^- - d_1^+ = 14 \text{ آلف أعلان} \qquad (2)$$

$$G_2: \quad \tilde{C}_1\, X_1 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 400 \text{ آلف جنيه} \qquad (3)$$

$$G_3: \quad \tilde{C}_2\, X_2 + \tilde{d}_3^- - \tilde{d}_3^+ = 200 \text{ آلف جنيه} \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

٢- من الأهداف G_2, G_3 نجد أنه يمكن تحويلها إلى قيود تحت أفتراض أن الحد الأعلى للتكلفة فى التليفزيون 400 آلف، و الجرائد 200 آلف (قيم أفتراضية يحددها متخذ القرار):

$$P_r(\tilde{C}_1\, X_1 \le 400) = P_r(Z \le \frac{400 - 50X_1}{5X_1}) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$56.4\, X_1 + d_2^- - d_2^+ = 400 \qquad (5)$$

$$P_r(\tilde{C}_2\, X_2 \le 200) = P_r(\tilde{C}_2 \le \frac{200}{X_2}) \ge 0.90 \longrightarrow$$
$$32.303\, X_2 + d_3^- - d_3^+ = 200 \qquad (6)$$

و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^+ + d_3^+)\}$$

S.T

G_1: $X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 14$ آلف أعلان

G_2: $56.4\, X_1 + d_2^- - d_2^+ = 400$ آلف جنيه

G_3: $32.303\, X_2 + d_3^- - d_3^+ = 200$ آلف جنيه

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1, 2, 3$$

و بحل النموذج نجد أن:

$$a^* = \{0 \;,\; 40370\} \quad , \quad X_1^* = 7810 \quad , \quad X_2^* = 6190 \quad , \quad d_1^{-*} = 0 \quad ,$$
$$d_1^{+*} = 0 \quad , \quad d_2^{-*} = 0 \quad , \quad d_2^{+*} = 40370 \quad , \quad d_3^{-*} = d_3^{+*} = 0$$

تطبيق (١٠-٣)

فى أحد البنوك التجارية، ترغب إدارة البنك فى أفضل موازنة تخطيطية [١٠] أو بعبارة أخرى تحديد حجم المبالغ المخصصة فى كل بند من البنود التى يخصصها البنك، حيث تعتبر الموازنة التخطيطية خلال فترة معينة أفضل موازنة من وجهه نظر متخذ القرار عندما تحقق التوازن بين العائد و المخاطر balancing return and risk. علماً بأن المتاح للبنك على النحو التالى [167]:

- 50 مليون جنيه رأس المال capital.
- 500 مليون جنيه حسابات جارية checking accounts.
- 200 مليون جنيه حسابات أدخارية saving accounts.

و يرغب البنك فى تحديد المبالغ التى يجب تخصيصها فى كل بند من البنود التالية:

١- المبالغ النقدية cash، و سوف نرمز لها بالرمز X_1،
٢- المبالغ المخصصة للأستثمارات قصيرة الأجل، و سوف نرمز لها بالرمز X_2،
٣- المبالغ المخصصة للأستثمارات خلال الفترة (1-5) سنوات، و سوف نرمز لها بالرمز X_3،

٤- المبالغ المخصصة للأستثمارات خلال الفترة (5-10) سنوات، و سوف نرمز لها بالرمز X_4،
٥- المبالغ المخصصة للأستثمارات طويلة الأجل (أكبر من 10 سنوات)، و سوف نرمز لها بالرمز X_5،

٦- المبالغ المخصصة للقروض فى شكل أقساط، و سوف نرمز لها بالرمز X_6،
٧- المبالغ المخصصة للقروض التجارية، و سوف نرمز لها بالرمز X_7،

و الجدول التالى يوضح النسب المالية لكل مخصص، كذلك وجود أو عدم وجود مخاطرة.

جدول (١٠-٢)

البند j	نوع المخصص ورمزه	معدل العائد%	نسبة السيولة%	نسبة المشاركة فى رأس المال%	وجود أو عدم وجود مخاطرة
1	المبالغ النقدية X_1	0.0	100.0	0.0	لا يوجد
2	أستثمار قصير الأجل X_2	4.0	99.5	0.5	لا يوجد
3	أستثمار (1-5) X_3	4.5	96.0	4.0	لا يوجد
4	أستثمار (5-10) X_4	5.5	90.0	5.0	لا يوجد
5	أستثمار (10 +) X_5	7.0	85.0	7.0	لا يوجد
6	قروض أقساط X_6	10.5	0.0	10.0	يوجد
7	قروض تجارية X_7	9.2	0.0	10.0	يوجد

و تخضع سياسة البنك للقيود التالية:

القيد الأول: أن يكون مجموع المخصصات مساوى للمبالغ المتاحة للبنك من رأس المال و الحسابات الجارية و الحسابات الادخارية.

القيد الثانى: يجب أن تزيد المبالغ النقدية عن نسبة 15% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 5% من الحسابات الجارية.

القيد الثالث: إجمالى نسبة السيولة من المخصصات يجب أن تزيد عن نسبة 40% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 30% من الحسابات الادخارية.

القيد الرابع: يجب أن يزيد المبلغ لكل مخصص عن نسبة 3% من إجمالى المبالغ المتاحة.

القيد الخامس: يجب أن تزيد القروض التجارية عن 45% من أجمالى المبالغ المتاحة.

القيد السادس: الطلبات على الأستثمارات (ما عدا قصيرة الأجل) و لتكن $\tilde{S}_3, \tilde{S}_4, \tilde{S}_5$ على الترتيب تمثل متغيرات عشوائية بحيث

$$\tilde{S}_3 \sim N(\mu_3 = 25, \sigma_3 = 2),$$
$$\tilde{S}_4 \sim N(\mu_4 = 30, \sigma_4 = 2),$$
$$\tilde{S}_5 \sim N(\mu_5 = 40, \sigma_5 = 1)$$

و ترغب إدارة البنك فى تحديد المبلغ المخصص لكل بند بحيث تحقق الأهداف التالية:

الهدف الأول: تعظيم العائد من المخصصات.

الهدف الثانى: تصغير مجموع نسب المشاركة فى رأس المال للمخصصات إلى رأس مال البنك.

الهدف الثالث: تصغير نسبة المخصصات للبنود التى يوجد بها مخاطرة إلى رأس مال البنك.

المطلوب

أ. تحديد القيود الأحتمالية ثم تحويلها إلى قيود يقينية بأستخدام أسلوب (CCP).

ب. كون نموذج برمجة هدف يقينية بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

١- تحقيق القيود كأولوية مطلقة.
٢- تعظيم العائد من المخصصات.
٣- تصغير مجموع نسب المشاركة فى رأس المال للمخصصات إلى رأس المال.
٤- تصغير نسبة المخصصات للبنود التى يوجد بها مخاطرة إلى رأس مال البنك.
٥- تصغير المخاطرة الراجعة لعدم تحقيق الأستثمارات (ما عدا قصيرة الأجل) التى ترجع للعامل العشوائى.

الحل

إذا فرضنا أن المتغيرات القرارية هى X_1-X_7 كما هى معرفة بالجدول السابق.

القيود الأحتمالية: $X_3 \geq \tilde{S}_3$, $X_4 \geq \tilde{S}_4$, $X_5 \geq \tilde{S}_5$

و يمكن تحويل هذه القيود إلى قيود يقينية عند مستوى مأمونية $\gamma \geq 0.90$ لتصبح على النحو التالى:

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_3 - 25}{2}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_3 \geq 27.56 \tag{1}$$

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_4 - 30}{2}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_4 \geq 32.56 \tag{2}$$

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_5 - 40}{1}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_5 \geq 41.28 \tag{3}$$

و بتحويل القيود (3)-(1) إلى أهداف تصبح على النحو التالى:

$$G_1: \quad X_3 + d_1^- - d_1^+ = 27.56 \tag{4}$$
$$G_2: \quad X_4 + d_2^- - d_2^+ = 32.56 \tag{5}$$
$$G_3: \quad X_5 + d_3^- - d_3^+ = 41.28 \tag{6}$$

و يكون المطلوب:

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i^-\right) \tag{7}$$

القيود التى تخضع لسياسة البنك و تحويلها إلى أهداف على النحو التالى:

<u>القيد الأول</u>

$$\sum_{j=1}^{7} X_j = (50 + 500 + 200) = 750 \longrightarrow$$

و بتحويله إلى هدف يصبح على النحو:

$$G_4: \quad \sum_{j=1}^{7} X_j + d_4^- - d_4^+ = 750 \tag{8}$$

و يكون المطلوب:

$$\text{Min.}\left(d_4^- + d_4^+\right) \tag{9}$$

<u>القيد الثانى</u>

$$X_1 \geq 0.15(500) + 0.05(200) \longrightarrow X_1 \geq 85.00 \longrightarrow$$

$$G_5: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 85.00 \qquad (10)$$

$$\text{Min.}\,(d_5^-) \qquad (11)$$

القيد الثالث

$$1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.9X_4 + 0.85X_5 \geq 0.40(500)$$
$$+0.3(200) \longrightarrow 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4$$
$$+0.85X_5 \geq 80.00 \longrightarrow$$

$$G_6: \quad 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4$$
$$+0.85X_5 + d_6^- - d_6^+ = 80 \qquad (12)$$

$$\text{Min.}\,(d_6^-) \qquad (13)$$

القيد الرابع

$$G_7 - G_{13}: \quad X_j + d_{j+6}^- - d_{j+6}^+ = 22.5 \quad , \ j=1,2,\ldots,7 \qquad (14)$$

$$\text{Min.}\,(\textstyle\sum_{j=1}^{7} d_{j+6}^-) \qquad (15)$$

القيد الخامس

$$X_7 \geq 0.45(50 + 500 + 200) \longrightarrow X_7 \geq 337.5 \longrightarrow$$
$$G_{14}: \quad X_7 + d_{14}^- - d_{14}^+ = 337.5 \qquad (16)$$

$$\text{Min.}\,(d_{14}^-) \qquad (17)$$

تحويل الأهداف المطلقة إلى أهداف نسبية

إذا فرضنا أن C_1, t_1, t_2 هى قيمة أعلى عائد يحدده متخذ القرار، و كل من t_1, t_2 هى قيمة أقل مجموع نسب المشاركة فى رأس المال للمخصصات إلى رأس مال البنك، و أقل قيمة لنسبة المخصصات للبنود التى يوجد بها مخاطرة إلى رأس المال على الترتيب.

بالتالى فإن:

$$G_{15}: \quad 0.04X_2 + 0.045X_3 + 0.055X_4 + 0.07X_5 + 0.105X_6 + 0.092X_7 + d_{15}^- - d_{15}^+ = C_1 \tag{18}$$

$$\text{Min.}\,(d_{15}^-) \tag{19}$$

$$G_{16}: \quad \frac{1}{50}\{0.005X_2 + 0.004X_3 + 0.0X_4 + 0.075X_5 + 0.10X_6 + 0.10X_7 + d_{16}^- - d_{16}^+ = t_1 \tag{20}$$

$$\text{Min.}\,(d_{16}^+) \tag{21}$$

$$G_{17}: \quad \frac{1}{50}\{X_6 + X_7\} + d_{17}^- - d_{17}^+ = t_2 \tag{22}$$

$$\text{Min.}\,(d_{17}^+) \tag{23}$$

من (23)-(4) فإن نموذج برمجة الهدف اليقينى المناظر وفقاً للأولويات على النحو التالى:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_6^- + \textstyle\sum_{j=1}^{7} d_{j+6}^- + d_{14}^-)\ ,\ (d_{15}^-)\ ,\ (d_{16}^+)\ ,\ (d_{17}^+)\ ,\ (\textstyle\sum_{i=1}^{3} d_i^-)\}$$

S.T

$$G_1 - G_{17}$$

$$X_j,, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0\ ,\ i = 1, 2, \dots, 17$$

تطبيق (١٠-٤)

تقوم أحدى أعادة دوران المخلفات الصلبة (مثل الورق، القمامة، قش الأرز، ... الخ) بإعادة تدوير الورق السابق أستخدامه، حيث عملية أعادة تدوير الورق تؤول إلى إنتاج نوعين من الورق A (أقل جودة)، و النوع B (أعلى جودة). والجدول التالى يوضح متطلبات الطن الواحد من A,B من الورق من المواد المعالجة I,II بالكيلوجرام و من مخلفات الورق بالطن كذلك سعر بيع الطن الواحد من A,B، و تكلفة الوحدة الواحدة من كل مادة من المواد المعالجة.
فإذا كان تجميع و فرز مخلفات الورق يمثل متغير يتبع التوزيع المعتاد، و سوف نرمز له بالرمز $\tilde{C}$ حيث $\tilde{C} \sim N(\mu = 100, \sigma = 5)$.

جدول (١٠-٣)

ربح الوحدة بالجنيه	مخلفات الورق	متطلبات الطن الواحد من المنتجات من المواد المعالجة، و مخلفات الورق، و ساعات التشغيل			أنواع المنتجات
		ساعات التشغيل	المادة المعالجة الثانية (بالكيلوجرام)	المادة المعالجة الأولى (بالكيلوجرام)	
1200	2	20	0	20	A
5000	3	30	20	50	B
	$\tilde{C}$	1000	1200	2000	المتاح
			80	50	التكلفة بالجنيه

فإذا كان متخذ القرار يرغب فى تحديد الكميات التى يتم إنتاجها من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

١- **تعظيم الربح من عملية أعادة دوران المخلفات.**
٢- **أن تكون المخلفات المتبقية بدون أجراء عملية أعادة الدوران أقل ما يمكن.**
٣- **عدم زيادة المواد المعالجة عن الكميات المتاحة، كذلك عدم زيادة عدد ساعات التشغيل المتاحة.**
٤- **كون نموذج برمجة هدف يقينى مناسب.**

الحل

إذا فرضنا أن X_1, X_2 هما الكميات (بالطن) التى يجب إنتاجها من A,B على الترتيب.

القيود

المادة المعالجة الأولى $\longleftarrow 20\,X_1 + 50\,X_2 \le 2000$

$$G_1: \quad 20\,X_1 + 50\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000 \qquad (1)$$

بالمثل:

(2) **المادة المعالجة الثانية** $\longleftarrow$ $G_2: \quad 20\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1200$

(3) **ساعات التشغيل** $\longleftarrow$ $G_3: \quad 20\,X_1 + 30\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$

(4) **المخلفات** $\longleftarrow$ $G_4: \quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + \tilde{d}_4^- - \tilde{d}_4^+ = \tilde{C}$

<u>الأهداف</u>

١- بالنسبة للربح

$$\mathbf{200\,X_1 + 950\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = R}$$

<u>ملحوظة:</u> R هى قيمة الربح الذى يرغب متخذ القرار فى تحقيقه و ليكن $400,000$ جنيه، بالتالى فإن:

$$\mathbf{G_5:\quad 200\,X_1 + 900\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = 400,000} \qquad (5)$$

و بتحويل الهدف الأحتمالى فى (4) إلى هدف يقينى عند مستوى مأمونية $\gamma \geq 0.9$

$$\mathbf{G_4:\quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 93.6} \qquad (4)$$

و يصبح النموذج اليقينى على النحو التالى:

$$\mathbf{Lexic.Min.\,a = \{(d_5^-), (d_4^-), (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+)\}}$$

S.T

$$\mathbf{G_1:\quad 20\,X_1 + 50\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000}$$
$$\mathbf{G_2:\quad 20\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1200}$$
$$\mathbf{G_3:\quad 20\,X_1 + 30\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000}$$
$$\mathbf{G_4:\quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 93.6}$$
$$\mathbf{G_5:\quad 200\,X_1 + 900\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = 400,000}$$
$$\mathbf{X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3,4,5}$$

و النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف يقينى يمكن حله بيانياً أو بطريقة الحلول المتتالية.

(١٠-٦) تمرينات Exercises

(١٠-١)

حدد أى العبارات التالية صحيحة (√) و أى العبارات خاطئة (×) مع ذكر السبب.

١- المتغيرات الأنحرافية العشوائية دائماً متغيرات عشوائية سواء كانت المعلمات العشوائية موجبة أو سالبة.
٢- دائماً التوزيع الأحتمالى للمتغيرات الأنحرافية العشوائية يكون معلومة التوزيع الأحتمالى لها.
٣- عدم وجود علاقة بين المتغيرات الانحرافية العشوائية و المتغيرات الأنحرافية اليقينية المناظرة لها.
٤- أسلوب (CCGP) يتطلب معلومية التوزيع الأحتمالى للمعلمات العشوائية.
٥- بالنسبة للمشاكل الأحتمالية التى تصاغ فى نماذج برمجة هدف أحتمالية يكون متجه الأنجاز متجه أحتمالى.
٦- بالنسبة للمشاكل الأحتمالية لبرمجة الهدف، وجود قيم موجبة للمتغيرات الأنحرافية المناظرة للمتغيرات الأنحرافية العشوائية يرجع إلى العامل العشوائى.

(١٠-٢)

أعتبر نماذج برمجة الهدف الأحتمالية فى كل حالة من الحالات التالية، حول النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقينى مناظر عند مستوى المأمونية المناظر.

(1) $\mathbf{Lexic.Min.}\ \tilde{a} = \{(\tilde{d}_1^+), (\tilde{d}_2^-)\}$

S.T.

$$2X_1 + 5X_2 - X_3 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = \tilde{C}_1 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.80$$
$$5X_1 + 2X_3 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = \tilde{C}_2 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.90$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \;,\; (\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+) = \varphi \;,\; i = ١,٢$$
$$\tilde{C}_1 \sim N(\mu_1 = 20, \sigma_1 = 2), \tilde{C}_2 \sim N(\mu_2 = 50, \sigma_2 = 5)$$

(2) $\mathbf{Lexic.Min.}\ \tilde{a} = \{(d_3^-), (\tilde{d}_1^-), (\tilde{d}_2^+)\}$

S.T.

$$\tilde{a}_{11}X_1 + \tilde{a}_{12}X_2 - 3X_3 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = 120 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.90$$

$$\tilde{a}_{21}\, X_1 + 7\, X_2 + 5\, X_3 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 80 \longrightarrow \gamma_2 \ge 0.80$$
$$X_1 - 2\, X_2 + 9\, X_3 + d_3^- - d_3^+ = 50$$
$$X_1\,,\ X_2\,, X_3, \tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \ge 0 \quad , \quad \left(\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+\right) = \varphi \quad , \quad i = 1, 2, 3$$
$$\tilde{a}_{11} \sim N(20, 2), \tilde{a}_{12} \sim N(5, 1), \tilde{a}_{21} \sim N(10, 2), Cov(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}) = -2$$

(3) $\text{Lexic. Min. } \tilde{a} = \left\{\left(\tilde{d}_4^+ + \tilde{d}_3^+\right), \left(\tilde{d}_2^- + \tilde{d}_2^+\right), \left(\tilde{d}_1^-\right)\right\}$

S.T.

$$\tilde{a}_1\, X_1 + 5\, X_2 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = 100 \longrightarrow \gamma_1 \ge 0.50$$
$$8X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 120 \longrightarrow \gamma_2 \ge 0.90$$
$$2X_1 + \tilde{d}_3^- - \tilde{d}_3^+ = \tilde{b}_1 \longrightarrow \gamma_3 \ge 0.90$$
$$5X_2 + \tilde{d}_4^- - \tilde{d}_4^+ = \tilde{b}_2 \longrightarrow \gamma_4 \ge 0.80$$
$$X_1\,,\ X_2\,, \tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \ge 0 \quad , \quad \left(\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+\right) = \varphi \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$
$$\tilde{a}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 15), \tilde{a}_2 \sim N(50, 2), \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(80)}, \tilde{b}_2 \sim \chi^2_{(100)}$$

(4) $\text{Lexic. Min. } \tilde{a} = \{(\tilde{d}_1^-), (\tilde{d}_2^-)\}$

S.T.

$$\tilde{a}_1\, X_1 + 3\, X_2 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = \tilde{b}_1$$
$$X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ =$$
$$X_1\,,\ X_2\,, \tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \ge 0 \quad , \quad \left(\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+\right) = \varphi \quad , \quad i = 1, 2$$
$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(5)}, \tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(20)}, \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(10)}$$

<u>ملحوظة:</u> المتغير $F_{(5,10)}$ حيث $F_{(5,10)} = \dfrac{\tilde{a}_1/5}{\tilde{a}_2/10}$ يتبع توزيع F بدرجات حرية $(5, 10)$

الملاحق

ملحق (١): الأحتمالات التراكمية للمتغير الآسى

ملحق (٢): الأحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسى (Z)

ملحق (٣): الأحتمالات التراكمية لمتغير كا٢ (χ_n^2)

ملحق (٤): جزء من جداول توزيع كا٢ $\left(\chi_{(n,\lambda)}^2\right)$ غير المركزى

ملحق (٥): الأحتمالات التراكمية لمتغير ذات الحدين بمعلمتين

ملحق (٦): الأحتمالات التراكمية لمتغير بواسون

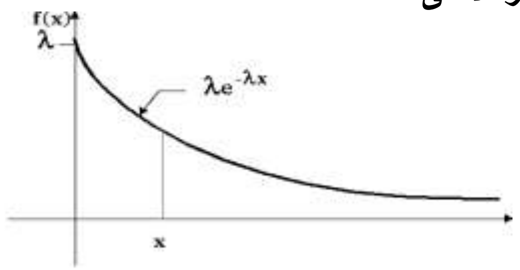
ملحق (٧): الحل التفصيلى لتطبيق (٢-١)

ملحق (٨): الحل التفصيلى لتطبيق (٣-٣)

ملحق (٩): دالة بازل المعدلة

ملحق (١٠): رسم الدوال الثنائية

ملحق (١): الأحتمالات التراكمية للمتغير الآسى

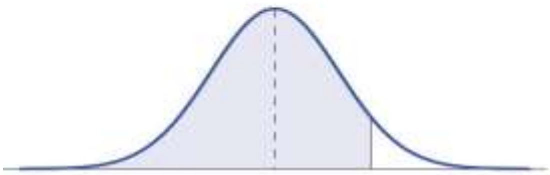


الإحتمالات داخل الجدول تساوى المساحة من 0 إلى X ، العمود الأول $(X\lambda)$ و الصف الأول يعطى الرقم العشرى الثانى فمثلا عند $\lambda = 4.2$ ، $X = 0.9$ فإن $\lambda X = 3.78$ و بالتالى فالمساحة من 0 إلى X أسفل المنحنى تساوى 0.9772.

λx	.00	.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0582	0.0676	0.0769	0.0861
0.1	0.0952	0.1042	0.1131	0.1219	0.1306	0.1393	0.1479	0.1563	0.1647	0.1730
0.2	0.1813	0.1894	0.1975	0.2055	0.2134	0.2212	0.2289	0.3266	0.2442	0.2517
0.3	0.2592	0.2666	0.2739	0.2811	0.2882	0.2953	0.3023	0.3093	0.3161	0.3229
0.4	0.3297	0.3363	0.3430	0.3495	0.3560	0.3624	0.3687	0.3750	0.3812	0.3874
0.5	0.3935	0.3995	0.4055	0.4114	0.4173	0.4231	0.4288	0.4345	0.4401	0.4457
0.6	0.4512	0.4566	0.4621	0.4674	0.4727	0.4780	0.4831	0.4883	0.4934	0.4984
0.7	0.5034	0.5084	0.5132	0.5181	0.5229	0.5276	0.5323	0.5370	0.5416	0.5462
0.8	0.5507	0.5551	0.5596	0.5640	0.5683	0.5726	0.5768	0.5810	0.5852	0.5893
0.9	0.5934	0.5975	0.6015	0.6054	0.6094	0.6133	0.6171	0.6209	0.6247	0.6284
1.0	0.6321	0.6358	0.6394	0.6430	0.6465	0.6501	0.6535	0.6570	0.6604	0.6638
1.1	0.6671	0.6704	0.6737	0.6770	0.6802	0.6834	0.6865	0.6896	0.6927	0.6958
1.2	0.6988	0.7018	0.7048	0.7077	0.7106	0.7135	0.7163	0.7192	0.7220	0.7247
1.3	0.7275	0.7302	0.7329	0.7355	0.7382	0.7408	0.7433	0.7459	0.7484	0.7509
1.4	0.7534	0.7559	0.7583	0.7607	0.7631	0.7654	0.7678	0.7701	0.7724	0.7746
1.5	0.7769	0.7791	0.7813	0.7835	0.7856	0.7878	0.7899	0.7920	0.7940	0.7961
1.6	0.7981	0.8001	0.8021	0.8041	0.8060	0.8080	0.8099	0.8118	0.8136	0.8155
1.7	0.8173	0.8191	0.8209	0.8227	0.8245	0.8262	0.8280	0.8297	0.8314	0.8336
1.8	0.8347	0.8363	0.8380	0.8396	0.8412	0.8428	0.8443	0.8459	0.8474	0.8489
1.9	0.8504	0.8519	0.8534	0.8549	0.8563	0.8577	0.8591	0.8605	0.8619	0.8633
2.0	08647	0.8660	0.8673	0.8687	0.8700	0.8713	0.8725	0.8738	0.8751	0.8763
2.1	0.8775	0.8788	0.8800	0.8812	0.8823	0.8835	0.8847	0.8858	0.8870	0.8881

λx	.00	.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.2	0.8892	0.8903	0.8914	0.8925	0.8935	0.8946	0.8956	0.8967	0.8977	0.8987
2.3	0.8997	0.9007	0.9017	0.9027	0.9037	0.9046	0.9056	0.9065	0.9074	0.9084
2.4	0.9093	0.9102	0.9111	0.9120	0.9128	0.9137	0.9146	0.9154	0.9163	0.9171
2.5	0.9179	0.9187	0.9195	0.9203	0.9211	0.9219	0.9227	0.9235	0.9242	0.9250
2.6	0.9257	0.9265	0.9272	0.9279	0.9286	0.9293	0.9301	0.9307	0.9314	0.9321
2.7	0.9328	0.9335	0.9341	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9380	0.9386
2.8	0.9392	0.9398	0.9404	0.9410	0.9416	0.9422	0.9427	0.9433	0.9439	0.9444
2.9	0.9450	09455	0.9461	0.9466	0.9471	0.9477	0.9482	0.9487	0.9492	0.9497
3.0	0.9802	0.9507	0.9512	0.9517	0.9522	0.9526	0.9531	0.9536	0.9540	0.9545
3.1	0.9550	0.9554	0.9558	0.9563	0.9567	0.9571	0.9576	0.9580	0.9584	0.9588
3.2	0.9592	0.9596	0.9600	0.9604	0.9608	0.9612	0.9616	0.9620	0.9624	0.9627
3.3	0.9631	0.9635	0.9638	0.9642	0.9646	0.9649	0.9653	0.9656	0.9660	0.9663
3.4	0.9666	0.9670	0.9673	0.9676	0.9679	0.9683	0.9686	0.9689	0.9692	0.9695
3.5	0.9698	0.9701	0.9704	0.9707	0.9710	0.9731	0.9716	0.9718	0.9721	0.9724
3.6	0.9727	0.9729	0.9732	0.9735	0.9737	0.9740	0.9743	0.9745	0.9748	0.9750
3.7	0.9753	0.9755	0.9758	0.9760	0.9762	0.9762	0.9765	0.9769	0.9772	0.9774
3.8	0.9776	0.9779	0.9781	0.9783	0.9785	0.9787	0.9789	0.9791	0.9793	0.9796
3.9	0.9798	0.9800	0.9802	0.9804	0.9806	0.9807	0.9809	0.9811	0.9813	0.9815
4.0	0.9817	0.9834	0.9850	0.9864	0.9877	0.9889	0.9899	0.9909	0.9918	0.9926
5.0	0.9933	0.9939	0.9945	0.9950	0.9955	0.9959	0.9963	0.9967	0.9970	0.9973
6.0	0.9975	0.9978	0.9980	0.9982	0.9983	0.9985	0.9986	0.9988	0.9989	0.9990
7.0	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996
8.0	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999
9.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

ملحق (٢): الأحتمالات التراكميةللمتغير المعتاد القياسى (Z)



$$F(Z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$$

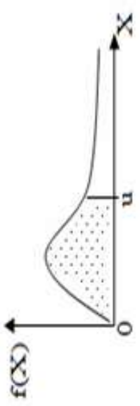
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7701	.7734	7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8284	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9498	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9888	.9842	.9846	.9856	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.989	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

ملخص لبعض القيم الحرجة لـ(Z) والقيم المناظرة لها لـ F(Z)

Z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
F(Z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	.99995	.999995

ملحق (٣): الأحتمالات التراكمية لمتغير كا٢ (χ_n^2)



$$F(u) = \int_0^u \frac{X^{(n-2)/2}\ e^{-X/2}}{2^{n/2}\ \Gamma(n/2)}\ dX$$

n \ F	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	$.0^{4}393$	$.0^{3}157$	$.0^{3}982$	$.0^{2}393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	625	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.67	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	17.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.4	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.4	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8

F / n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
16	5.14	8.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	124	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	46.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	97.0	50.9	53.7

ملحق (٤): جزء من جداول توزيع كا٢ $\left(\chi^2_{(n,\lambda)}\right)$ غير المركزى

$$\int_{min.}^{c} f(\chi^2)\ d\chi^2 = 0.05$$

جدول (١): n عدد درجات الحرية، λ المعلمة غير المركزية. و القيم داخل الجدول عبارة عن $\chi^2 = C$ عند $F(C) = 0.05$.

$\sqrt{\lambda}$ / n	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
1	0.0627	0.06397	0.06703	0.07507	0.0863	0.1033	0.1286	0.1662	0.2226
2	0.3203	0.3335	0.3333	0.3504	0.3756	0.4104	0.4567	0.5169	0.5935
3	0.5932	0.5071	0.6092	0.6297	0.6297	0.6991	0.7501	0.8135	0.8906
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.294	3.297	3.307	3.324	3.347	3.376	3.413	3.455	3.505
$\sqrt{\lambda}$ / n	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6
1	0.4252	0.5809	0.7627	0.9570	1.156	1.355	1.555	1.755	1.955
2	0.8035	0.9367	1.085	1.246	1.415	1.590	1.769	1.952	2.138
3	1.088	1.208	1.341	1.485	1.637	1.767	1.963	2.133	2.307
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.623	3.691	3.766	3.846	3.933	4.025	4.123	4.226	4.335
$\sqrt{\lambda}$ / n	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6
1	2.355	2.555	2.755	2.955	3.155	3.355	3.555	3.755	3.955
2	2.514	2.705	2.896	3.089	3.282	3.470	3.670	3.865	4.060
3	2.665	2.847	3.031	3.217	3.404	3.592	3.782	3.972	4.163
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	4.566	4.688	4.814	4.944	5.078	5.216	5.356	5.500	5.647

$$\int_{min.}^{C} f(\chi'^2)\; d\chi'^2 = 0.01$$

جدول (٢): يعطى قيم C عند $F(C) = 0.01$

n \ $\sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
1	0.0125	0.0127	0.0136	0.0150	0.0173	0.0207	0.0258	0.0334	0.0451
2	0.1418	0.1432	0.1476	0.1551	0.1664	0.1820	0.2030	0.2309	0.2676
3	0.3389	0.3411	0.3480	0.3598	0.3769	0.4000	0.4300	0.4681	0.5155
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	2.874	2.877	2.886	2.900	2.920	2.946	2.978	3.016	3.059
n \ $\sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6
1	0.0922	0.1392	0.2153	0.3325	0.4919	0.6780	0.8745	1.074	1.274
2	0.3779	0.4579	0.5581	0.6792	0.8192	0.9740	1.139	1.312	1.491
3	0.6448	0.7297	0.8294	0.9438	1.072	1.212	1.362	1.520	1.684
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.164	3.225	3.292	3.365	3.444	3.528	3.618	3.714	3.814
n \ $\sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6
1	1.674	1.874	2.074	2.474	2.474	2.674	2.874	3.074	3.274
2	1.857	2.044	2.233	2.423	2.615	2.807	3.000	3.194	3.388
3	2.027	2.204	2.383	2.565	2.749	2.935	3.122	3.310	3.500
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	4.030	4.145	4.264	4.388	4.515	4.647	4.782	4.920	5.062

جدول (٣): يعطى قيم C عندما: $\int_{C}^{\infty} f(\chi'^2) = 0.05$

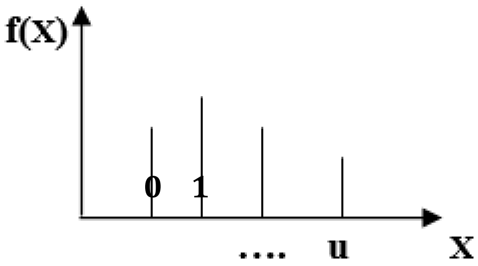
n \ $\sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
1	1.960	1.999	2.107	2.265	2.450	2.646	2.845	3.045
2	2.448	2.472	2.542	2.650	2.785	2.940	3.106	3.280
3	2.795	2.814	2.868	2.953	3.064	3.194	3.339	3.493
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	5.604	5.610	5.627	5.655	5.693	5.742	5.800	5.868
n \ $\sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
1	3.645	3.845	4.045	4.245	4.445	4.645	4.845	5.045
2	3.826	4.014	4.203	4.393	4.585	4.777	4.970	5.164
3	3.998	4.174	4.354	4.536	4.720	5.093	5.281	5.470
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.121	6.221	6.327	6.439	6.556	6.679	6.807	6.939
n \ $\sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4
1	5.645	5.845	6.045	6.245	6.445	6.645	6.845	7.045
2	5.749	5.945	6.141	6.338	6.534	6.731	6.928	7.126
3	5.852	6.043	6.236	6.429	6.622	6.816	7.011	7.205
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	7.358	7.507	7.654	7.806	7.960	8.117	8.277	8.438

جدول (٤): يعطى قيم C حيث $\int_{C}^{\infty} f(\chi'^2) = 0.01$

n \ $\sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
1	2.576	2.626	2.757	2.934	3.128	3.327	3.526	3.726
2	3.035	3.065	3.148	3.272	3.421	3.584	3.757	3.936
3	3.368	3.390	3.454	3.552	3.675	3.816	3.969	4.131
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.129	6.135	6.154	6.184	6.225	6.278	6.341	6.414
n \ $\sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
1	4.326	4.526	4.726	4.926	5.126	5.326	5.526	5.726
2	4.492	4.681	4.871	5.063	5.256	5.449	5.643	5.838
3	4.649	4.829	5.011	5.196	5.382	5.589	5.768	5.947
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.683	6.788	6.899	7.016	7.139	7.266	7.399	7.535
n \ $\sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4
1	6.326	6.526	6.726	6.926	7.126	7.326	7.526	7.726
2	6.426	6.621	6.817	7.014	7.211	7.408	7.803	7.803
3	6.521	6.714	6.907	7.101	7.295	7.489	7.684	7.879
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	7.965	8.115	8.268	8.423	8.581	8.740	8.902	9.066

ملحق (٥): الأحتمالات التراكمية لمتغير ذات الحدين بمعلمتين (n,p)

$$F(u) = P_r(X \leq u) = \sum_{x=0}^{u} C_x^n \, (p)^x (1-p)^{n-x}$$



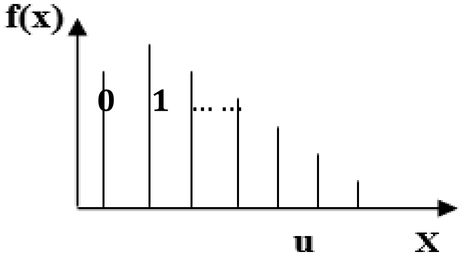
n \ u		0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.9025	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9600	0.9100	0.8400	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250
	1	0.9927	0.9720	0.8960	0.7840	0.6480	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9920	0.9730	0.9360	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8192	0.6517	0.4752	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9728	0.9163	0.8208	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9984	0.9919	0.9744	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.7373	0.5282	0.3270	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.944	0.8369	0.6826	0.5000
	3	1.000	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.6554	0.4202	0.2333	0.1094
	2	0.9978	0.9841	0.9011	0.7443	0.5443	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9830	0.9295	0.8208	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9891	0.9590	0.8906
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9959	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.6983	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078

n \ u		0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
	1	0.9556	0.8503	0.5767	0.3294	0.1586	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.8520	0.6471	0.4199	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9667	0.8740	0.7102	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9953	0.9712	0.9037	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9996	0.9962	0.9812	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	0.6634	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.5033	0.2553	0.1064	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.7969	0.5518	0.3154	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9437	0.8059	0.5941	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9896	0.9420	0.8263	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9988	0.9887	0.9502	0.8555
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9915	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.1342	0.0404	0.0101	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.4362	0.1960	0.0705	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.7382	0.4628	0.2318	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9144	0.7297	0.4826	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9804	0.9012	0.7334	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9969	0.9747	0.9006	0.7461
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9957	0.9750	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9962	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.3758	0.1493	0.0464	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.6778	0.3828	0.1673	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.8791	0.6496	0.3823	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9672	0.8497	0.6331	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9936	0.9526	0.8338	0.6230
	6	1.0000	1.0000	0.9991	0.9894	0.9452	0.8281
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9877	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9983	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	0	0.0769	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

n \ u	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
1	0.2794	0.0338	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.5405	0.1117	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.7604	0.2503	0.0057	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.8964	0.4312	0.0185	0.0002	0.0000	0.0000
5	0.9622	0.6161	0.0480	0.0007	0.0000	0.0000
6	0.9882	0.7702	0.1034	0.0025	0.0000	0.0000
7	0.9968	0.8779	0.1904	0.0073	0.0001	0.0000
8	0.9992	0.9421	0.3073	0.0183	0.0002	0.0000
9	0.9998	0.9755	0.4437	0.0402	0.0008	0.0000
10	1.0000	0.9906	0.5836	0.0789	0.0022	0.0000
11		0.9968	0.7107	0.1390	0.0057	0.0000
12		0.9990	0.8139	0.2229	0.0133	0.0002
13		0.9997	0.8894	0.3279	0.0280	0.0005
14		0.9999	0.9393	0.4468	0.0540	0.0013
15		1.0000	0.9692	0.5692	0.0955	0.0033
16			0.9856	0.6839	0.1561	0.0077
17			0.9937	0.7822	0.2369	0.0164
18			0.9975	0.8594	0.3356	0.0325
19			0.9991	0.9152	0.4465	0.0595
20			0.9997	0.9522	0.5610	0.1013
21			0.9999	0.9749	0.6701	0.1611
22			1.0000	0.9877	0.7660	0.2399
23				0.9944	0.8438	0.3359
24				0.9976	0.9022	0.4439
25				0.9991	0.9427	0.5561
26				0.9997	0.9686	0.6641
27				0.9999	0.9840	0.7601
28				1.0000	0.9924	0.8389
29					0.9966	0.8987
30					0.9986	0.9405
31					0.9995	0.9675
32					0.9998	0.9836
33					0.9999	0.9923
34					1.0000	0.9967
35						0.9987
36						0.9995
37						0.9998
38						1.0000

ملحق (٦): الأحتمالات التراكمية لمتغير بواسون

$$F(u) = \sum_{x=0}^{u} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x\,!}$$



λ / U	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4493	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
λ / U	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9468	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

U \ λ	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9958	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

U \ λ	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8940	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.4815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ويستمر هذا الجدول إلى أن نصل إلى $\lambda = 20$ مثلا

λ / U	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.02424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1847	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2670	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4656	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3714	0.2866	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3750	0.2926	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6549	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9176	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9711	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7355	0.6437
22	0.9989	0.9969	0.9924	0.9833	0.9672	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9593	0.9317	0.8933	0.8432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9747	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9940	0.9881	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973

λ / U	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
39	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

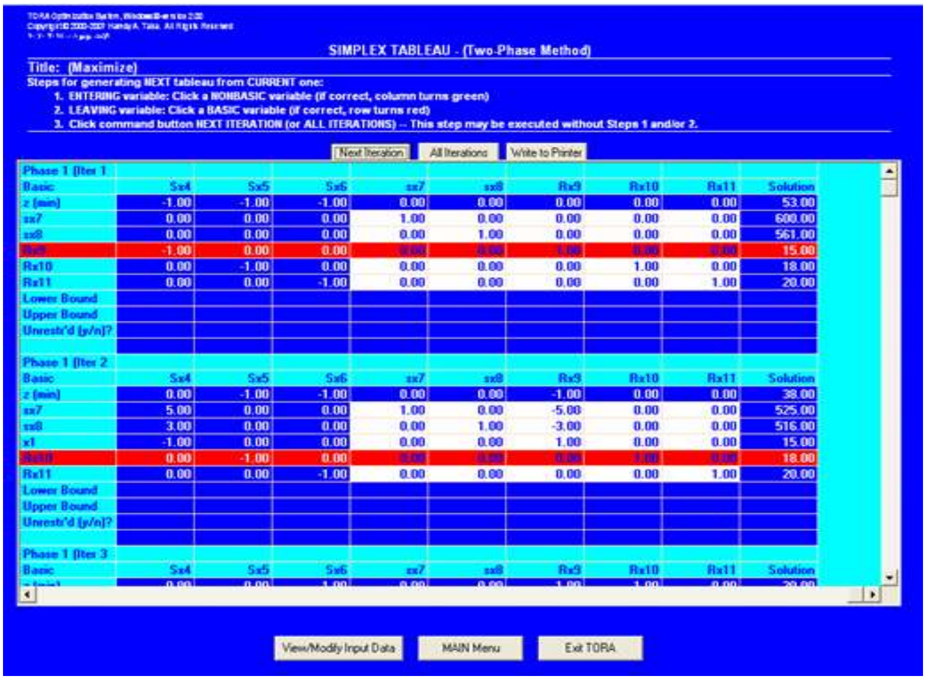
ملحق (٧): الحل التفصيلى لتطبيق (٢-١)

(١) عندما يكون النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\text{Max. } Z &= 2000\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 \\
\text{S.T.} \quad & 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600 \\
& 3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561 \\
& X_1 \ge 15 \;, X_2 \ge 18 \;, X_3 \ge 20 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

و بأستخدام أسلوب المرحلتين two-phase technique [١١]، فإن الخطوات التفصيلية للحل كما هو موضح فى الجداول المتابعة التالية فى شكل (1)-(3) ويكون الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = 77{,}000 \quad , \quad X_1^* = 15 \quad , \quad X_2^* = 18 \quad , \quad X_3^* = 20$$



Phase 1 (Iter 1									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	53.00
sx7	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	600.00
sx8	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	561.00
Rx9	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 2									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	38.00
sx7	5.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	525.00
sx8	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	0.00	0.00	516.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution

شكل (١)

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	20.00
sx7	5.00	3.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	0.00	471.00
sx8	3.00	4.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	0.00	444.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 4									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 5

شكل (٢)

Unrestr'd (y/n)?

Phase 1 (Iter 4									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 5									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	-2000.00	-1500.00	-1000.00	0.00	0.00	blocked	blocked	blocked	77000.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

شكل (٣)

(٢) عندما يكون النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = 2000\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3$$

$$\text{S.T.} \quad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600$$
$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561$$
$$X_1 \ge 19\ ,\ X_2 \ge 24\ ,\ X_3 \ge 29$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

عندما تكون مستويات المأمونية $\gamma_1 \ge 0.8752\ ,\ \gamma_2 \ge 0.90\ ,\ \gamma_3 \ge 0.98$.
و بأستخدام أسلوب المرحلتين أيضاً فإن الخطوات التفصيلية للحل كما هو موضح فى الجداول المتتالية التالية فى شكل (٤)-(٦) على النحو التالى:

$$Z^* = 167,425\quad ,\quad X_1^* = 19\quad ,\quad X_2^* = 89.75\quad ,\quad X_3^* = 29$$

Phase 1 (Iter 1									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	72.00
sx7	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	600.00
sx8	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	561.00
Rx9	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 2									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	53.00
sx7	5.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	505.00
sx8	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	0.00	0.00	504.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution

شكل (٤)

Phase 1 (Iter 3

Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	29.00
sx7	5.00	3.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	0.00	433.00
sx8	3.00	4.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	0.00	408.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 4

Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	375.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	263.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 5

شكل (٥)

Unrestr'd (y/n)?

Phase 2 (Iter 5

Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	-200.00	-1500.00	-1000.00	0.00	0.00	blocked	blocked	blocked	68800.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	375.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	263.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 6

Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	925.00	0.00	875.00	0.00	375.00	blocked	blocked	blocked	167425.00
sx7	2.75	0.00	-1.75	1.00	-0.75	-2.75	0.00	1.75	177.75
Sx5	0.75	1.00	1.25	0.00	0.25	-0.75	-1.00	-1.25	65.75
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.75	0.00	1.25	0.00	0.25	-0.75	0.00	-1.25	89.75
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

شكل (٦)

ملحق (٨): الحل التفصيلى لتطبيق (٣-٣)

أولاً: إذا أعتبرنا النموذج اليقينى:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 50\,X_1 + 70\,X_2 + 80\,X_3 \\ \text{S.T.} \quad & 20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \le 1500 \\ & 30\,X_1 + 40\,X_2 + 50\,X_3 \le 1080 \\ & 50\,X_1 + 60\,X_2 + 80\,X_3 \le 1200 \\ & X_1 + X_2 < 20 \quad , X_3 \ge 6 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

فإن الحل الأمثل:

$$Z^* = 1320 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 12 \quad , \quad X_3^* = 6$$

و فيما يلى الخطوات التفصيلية للحل بأستخدام أسلوب M كما هو موضح فى شكل (١)،(٢).

شكل (١)

Write to Printer

Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							
Iteration 3										
Basic	x1	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solutio
z (max)	0.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	100.00	1200.
sx5	1.25	2.50	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.38	0.00	0.00	1050.
sx6	-1.25	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.63	0.00	0.00	330.
[illegible]	0.63	0.75	0.00	1.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.
sx8	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	20.
x3	0.63	0.75	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	15.
Lower Bound	0.00	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							
Iteration 4										
Basic	x1	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solutio
z (max)	8.33	0.00	0.00	13.33	0.00	0.00	1.17	0.00	86.67	1320.
sx5	-0.83	0.00	0.00	-3.33	1.00	0.00	-0.42	0.00	3.33	1020.
sx6	-3.33	0.00	0.00	-3.33	0.00	1.00	-0.67	0.00	3.33	300.
x2	0.83	1.00	0.00	1.33	0.00	0.00	0.02	0.00	-1.33	12.
sx8	0.17	0.00	0.00	-1.33	0.00	0.00	-0.02	1.00	1.33	8.
x3	0.00	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	6.
Lower Bound	0.00	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							

View/Modify Input Data · MAIN Menu · Exit TORA

شكل (٢)

ثانياً: إذا أعتبرنا النموذج اليقينى:

$$\text{Max. } Z = 50\,X_1 + 70\,X_2 + 80\,X_3$$
$$\text{S.T.} \quad 20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \le 1500$$
$$30\,X_1 + 40\,X_2 + 50\,X_3 \le 1080$$
$$50\,X_1 + 60\,X_2 + 80\,X_3 \le 1200$$
$$X_1 + X_2 < 15 \quad , X_3 \ge 9$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

فإن الحل الأمثل:

$$Z^* = 1280 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 8 \quad , \quad X_3^* = 9$$

و فيما يلى الخطوات التفصيلية للحل بأستخدام أسلوب M كما هو موضح فى شكل (٣)،(٤).

SIMPLEX TABLEAU - (M-Method)

Title: (Maximize)

Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:

1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Iteration 1									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	-70.00	[illegible]	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-900.00
sx5	25.00	[illegible]	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1500.00
sx6	40.00	[illegible]	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1000.00
sx7	60.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1200.00
sx8	1.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
Rx9	0.00	1.00	-1.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd [y/n]?	n	n							

Iteration 2									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	-70.00	0.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	720.00
sx5	25.00	0.00	[illegible]	1.00	0.00	0.00	0.00	-30.00	1230.00
sx6	40.00	0.00	[illegible]	0.00	1.00	0.00	0.00	-50.00	630.00
sx7	60.00	0.00	80.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	400.00
sx8	1.00	0.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
x3	0.00	1.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd [y/n]?	n	n							

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٣)

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Unrestr'd [y/n]?	n	n							
Iteration 3									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	100.00	1200.00
sx5	2.50	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.38	0.00	0.00	1050.00
sx6	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.63	0.00	0.00	330.00
Sx4	0.75	0.00	1.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.00
sx8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
x3	0.75	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	15.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd [y/n]?	n	n							
Iteration 4									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	0.00	0.00	13.33	0.00	0.00	1.17	0.00	86.67	1280.00
sx5	0.00	0.00	-3.33	1.00	0.00	-0.42	0.00	3.33	1030.00
sx6	0.00	0.00	-3.33	0.00	1.00	-0.67	0.00	3.33	310.00
x2	1.00	0.00	1.33	0.00	0.00	0.02	0.00	-1.33	8.00
sx8	0.00	0.00	-1.33	0.00	0.00	-0.02	1.00	1.33	7.00
x3	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd [y/n]?	n	n							

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤)

ملحق (٩): دالة بازل المعدلة

Modified Bessel Functions

يعتبر عالم الرياضيات برنولى Bernoulli أول من عرف المعادلة التفاضلية differention equation التى يمثل حلها دالة بازل.

و لكن يعتبر بازل هو من قام بتعميم هذه المعادلة و الحصول على حلول للمعادلات التفاضلية التى قدمها من ترتيبات مختلفة [207, 187].

و دالة بازل المعدلة من النوع الأول من الترتيب α فى شكلها العام تعرف على النحو التالى:

$$I_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(z/2\right)^{2j-\alpha}}{j!} \quad , \quad z > 0 \qquad (1)$$

و من الترتيب صفر

$$I_\circ(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(z/2\right)^{2j}}{j!} \quad , \quad z > 0 \qquad (2)$$

و هذه هى الدالة المستخدمة فى الباب السادس لنموذج التوزيع الأسى فى نموذج (٥).

ملحق (١٠): رسم الدوال الثنائية

Graphical Representation of Bivariate Functions

إذا فرضنا أن الدالة Z دالة في المتغيران X,Y أو بعبارة أخرى:

$$\mathbf{Z = f(X, Y)} \quad (1)$$

و لرسم الدالة Z يتطلب وجود ثلاثة محاور dimensions (محور يمثل المتغير X، و محور يمثل المتغير Y، و محور يمثل المتغير Z).

و عادةً الرسم فى ثلاثة محاور أو أكثر (فى حالة وجود دوال فى أكثر من متغيران) و رسم الدالة الثنائية فى ثلاثة محاور يكون فيه صعوبة لغير المتخصصين [187] حيث تمثل الدالة الثنائية بسطح Surface، و لكن يمكن أستخدام محورين فقط لرسم الدالة الثنائية بإتباع الخطوات التالية:

١- تحديد الفترة التى يقع فيها كل من المتغيرين X,Y و بالتالى Z.

٢- بأفتراض قيمة معينة لأحد المتغيرات و ليكن $\mathbf{Y = 0}$ فتصبح:

$$\mathbf{Z = f(X|Y = 0)} \quad (2)$$

و بالتالى أفتراض قيم معينة لـ X يتم حساب القيم المناظرة لها لـ Z عند $\mathbf{Y = 0}$، ورسم المنحنى $\mathbf{f(X|Y = 0)}$.

٣- بأفتراض قيمة معينة للمتغير الآخر $\mathbf{X = 0}$ فتصبح الدالة:

$$\mathbf{Z = f(Y|X = 0)} \quad (3)$$

و بالتالى أفتراض قيم معينة لـ Y يتم حساب القيم المناظرة لها لـ Z عندما $\mathbf{X = 0}$ ، ورسم المنحنى $\mathbf{f(Y|X = 0)}$.

٤- تكرار الخطوة (٢) عند قيم مختلفة لـ Y ورسم الدالة Z فى هذه الحالات فنحصل على منحنيات متوازية لـ $\mathbf{f(X|Y)}$.

٥- تكرار الخطوة (٣) عند قيم مختلفة لـ X ورسم الدالة Z فى هذه الحالات فنحصل على منحنيات متوازية لـ $\mathbf{f(Y|X)}$.

و سوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال التالى.

مثال (١):

أعتبر الدالة الثنائية التالية:

$$\mathbf{Z = f(X, Y) = 16 - X^2 - Y^2 \quad , \quad 0 \le X \le 5 \quad , \quad 0 \le Y \le 5}$$

١- إذا فرضنا أن $Y = 0$ فأن:

$$Z = f(X|Y = 0) = 16 - X^2$$

٢- و بأفتراض قيم معينـة لـ X و حساب القيم Z المنـاظرة لها كما هو فى الجدول التالى.

جدول (١)

X	0	1	2	3	4
Z	16	15	12	7	0

و بتحديد قيم Z المنـاظرة لقيم X كما هو موضح فى الشكل التالى:

٣- كذلك بأفتراض أن $X = 0$ فتكون:

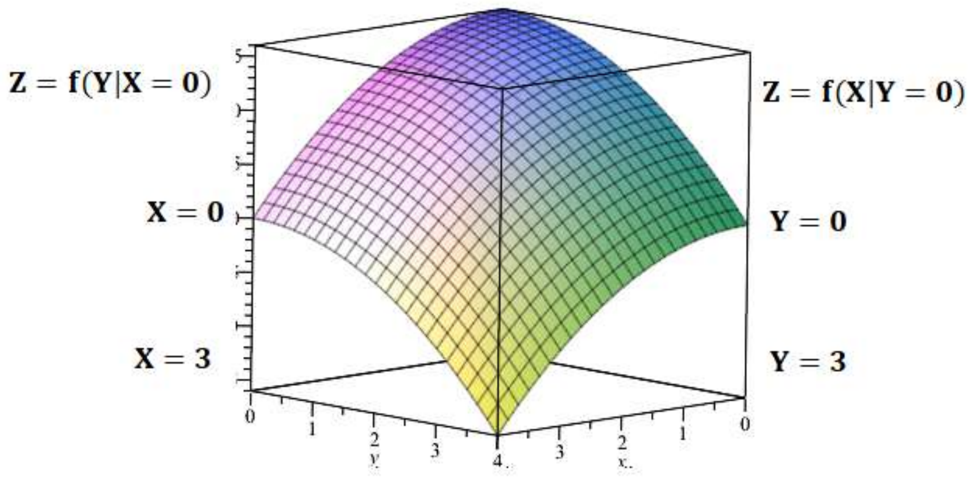
$$Z = f(Y|X = 0) = 16 - Y^2 \qquad (4)$$

و بأفتراض قيم معينـة لـ Y و حساب قيم Z المنـاظرة لها فى (4) كما هو فى الجدول التالى.

جدول (٢)

Y	0	1	2	3	4
Z	16	15	12	7	0

و بتحديد قيم Z المنـاظرة لقيم Y – على المحورين Y,Z كما هو موضح بشكل (١).



شكل (١): الشكل الجزئي لمنحنى الدالة $Z = f(X, Y) = 16 - X^2 - Y^2$

٤- و بأفتراض قيم مختلفة لـ **Y** ورسم $Z = f(X|Y)$ تكون جميع هذه المنحنيات موازية لـ $Z = f(X|Y = 0)$ بالمثل بالنسبة للقيم المختلفة لـ **X** و رسم $Z = f(Y|X)$ تكون جميعها موازية لـ $Z = f(Y|X = 0)$ ، والشكل التالى يوضح المنحنيات المتوازية.

ملحوظة: حيث يمكن أستخدام حزمة البرامج الجاهزة **Maple** فى رسم الدوال من الدرجات أعلى من الدرجة الأولى.

المصطلحات

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
	A	
absolute priority	٣٠٣	الأولوية المطلقة
acceptable level of achievement of an objective	٣٠١	المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام
achievement function	٣٠٤	دالة الانجاز
negative and positive approaches	١٧	الأسلوب الإيجابى و الأسلوب السلبي
adaptive programming approach	٢٦	أسلوب البرمجة التوائمية
approximate techniques	٣٧	أساليب التقريب
aspiration level	٢٩٥,٢٩٨,٣٠١	المستوى المرجو تحقيقه
	B	
balancing return and risk	٣٧٠	التوازن بين العائد والمخاطر
basic concepts	٢٩٤,٣٠١	مفاهيم اساسية
best alternative	١٩	أفضل بديل
best compromise solution	٢٩٥,٣٠٤	أفضل حل توافقى
Bivariate exponential distribution	١٧٣,١٧٤,١٨٢,١٨٩	التوزيع الأسى الثنائى
Binomial distribution	١٠٢	توزيع ذات الحدين
Bivariate normal distribution	١٧٣,١٧٤,١٧٥,١٧٨	التوزيع المعتاد الثنائى
Box's theorem	٢٤١	نظرية بوكس
	C	
capital	٣٧٠	رأس المال
certain limit	٢٦٨	حد معين
certainty decision problems	٢٣	المشاكل القرارية المعينة
chance- constrained programming (ccp) technique	٢٨	أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً
chance-constraint	٢٨,٣٣,٣٥,٣٦,٣٩	القيد الإحتمالى
checking accounts	٣٧٠	حسابات جارية
chi-square distribution	٣٣,٤٣,٨٥	توزيع مربع كا

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
قيود تتصف بالمرونة (القيود المرنة)	٢٩٦,٣٠٣	elastic constraints
الفئة الخالية	١٥٨	empty set
بيئة صناعة القرار	١٩	environment decision making
قيد يقينى مكافئ	٢٩,٤٢	equivalent deterministic constraint
نموذج برمجة يقينى مكافئ	٤٤,٤٧	equivalent deterministic programming model
القيمة المتوقعة (التوقع)	٢٥٨	expectation
معيار القيمة المتوقعة	٢٥٦,٢٥٨	expected value criterion
التوزيع الأسى	٣٦,٤٣,٥٦	Exponential distribution
	F	
إدارة المخاطر المالية	٣٥	financial risk management
الترتيب الأول فى معامل الأرتباط	١٧٧	first order approximation
المشتقات الجزئية الأولى	١٦٠	first partial derivatives
الأولوية الأولى	٣٠٣	first priority
صياغة المشكلة	٢٩٤,٣٠٥	formulation problem
الدوال والدوال العكسية	٣٧	functions and inverse functions
	G	
توزيع جاما	٣٦,٧٤,٨٦	Gamma distribution
توزيع جاوس	٣٥	Gaussian distribution
النموذج العام	٢٩٤,٣١١	general model
التوزيع الهندسى	٩٦	Geometric distribution
البرمجة الهندسية	٣٨	Geometric programming
صياغة الهدف	٣٠٢	goal formulation
برمجة الهدف	٣٨	goal programming (GP)
أسلوب برمجة الهدف	٢٩٥	goal programming technique
طريقة الحل البيانى	٢٩٤,٣١٣	graphical solution method
	I	
قيود منفصلة	٢١٠	individual constraints

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
programming		
multi-objectives	٢٩٥,٢٩٨	أكثر من هدف
multi-stage programming approach	٢٦	أسلوب البرمجة متعددة المراحل
multi-variate Gauss distribution	٢٣١	توزيع جاوس المتعدد
	N	
Non-linear programming (Non-LP)	٤٦	البرمجة غير الخطية
Non-singular matrix	٢٣١	مصفوفة غير شاذة
Normal distribution	٣٤,٤٣,٦٢	التوزيع المعتاد (الطبيعى)
	O	
objective	٢٩٥,٣٠١	الهدف العام
one-to-one	١٥٣,١٥٩	واحد – لواحد
optimal decision's rules	٣٣	القواعد القرارية المثلى
optimum limits criterion	٢٥٥,٢٧٠	معيار الحدود المثلى
optimum limits objective function criterion	٢٥٧	معيار الحدود المثلى لدالة الهدف
ordered	١٨٥	الترتيب
over-achievement	٣٠٢	المقدار الأكبر عن إنجاز الهدف
overtime	٣٠٨	زمن التشغيل الإضافى
	P	
parameter	٩,١٦,١٧	معلمة
penalty functions	٣٥	دوال المخاطرة
Poisson distribution	١٠٧	توزيع بواسون
positive relation	١٩٠	علاقة موجبة (طردية)
preemptive priorities	٣٠٣	الأولويات المرتبة
priori probability distributions of the parameters	١٧	التوزيعات الأحتمالية القبلية للمعلمات
probabilistic constraints	٤٢,٣٣٧	القيود الأحتمالية
probabilistic decision problems	٢٣	مشاكل قرارية إحتمالية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
probabilistic deviational variables	٣٤	المتغيرات الأنحرافية الأحتمالية
probabilistic goals	٣٣٧	الأهداف الأحتمالية
probabilistic goal's set	٣٣٤,٣٣٧	فئة الأهداف الأحتمالية
probabilistic model	١٠,٢٦	النموذج الإحتمالى
probabilistic non-linear programming model	٤٦	نموذج البرمجة الأحتمالية غير الخطى
probabilistic problems	٢٤	المشاكل الأحتمالية
probabilistic programming (PP) techniques	٢٥	أساليب البرمجة الأحتمالية
probabilistic sensitivity analysis	٢٦,٢٧	تحليل الحساسية الأحتمالى
probabilistic systems	٢٧٨	الأنظمة الأحتمالية
probability distributions	١٠,١٧,٢٣	التوزيعات الأحتمالية
problems under uncertainty	٢٤	مشاكل فى ظروف عدم التأكد
production systems	٢٧٨	أنظمة الإنتاج
	Q	
quadratic function	٢٦٤	دالة تربيعية
queue systems	٢٧٨	أنظمة الصفوف
	R	
random deviational variables	٣٣٦,٣٣٨	المتغيرات الأنحرافية العشوائية
random samples	٣٧	العينات العشوائية
random variables	١٠,١٦,١٧,٢٠	متغيرات عشوائية
relatively general statement	٣٠١	عبارة عامة نسبياً
reliability analysis	٣٣	تحليل الصلاحية
reliability measures	٩٥,٢٥٧	مقاييس (مؤشرات) الصلاحية
reliability programming	١٧,٢٥٥,٢٥٧	برمجة الصلاحية
reliability theory	٢٧٨	نظرية الصلاحية
rigid constraints	٣٠٣,٣٠٦	القيود الصارمة
risk	١٠,١٦,٢٣	المخاطرة
risk programming approaches	٢٥	أساليب برمجة المخاطرة
	S	

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
sample	٣٧	العينة
saving accounts	٣٧٠	حسابات أدخار
scale parameter	٧٤,١٤١	معلمة التدرج
sensitivity analysis	٢٠,٢٧	تحليل الحساسية
sequential (iterative) solution method	٢٩٤,٣١٢	طريقة الحل المتتالى
set of decision's rules	٢٧	فئة القواعد القرارية
simulation techniques	٢٣	أساليب المحاكاة
shape parameter	٧٤	معلمة الشكل
some optimality properties	٢٧	بعض خصائص الأمثلية
space	٢٢	فراغ
special case	٢٢	حالة خاصة
statistical estimation	٣٧	التقدير الإحصائى
statistical transformations	٢٧	التحويلات الأحصائية
stochastic LP model		نموذج برمجة خطية عشوائية
stochastic model	١٦,٢٠	نموذج عشوائى
stochastic problems	١٦,٢٠	المشاكل العشوائية
stochastic process	٣٧	العملية العشوائية
stochastic programming	١٠,١٦,٢٠	البرمجة العشوائية
stochastic variations	٢٥	الأختلافات العشوائية
strictly concave	١٢٣	شديدة التقعر
social application	١٨٢	التطبيقات الأجتماعية
subjective risk	١٧	المخاطرة الذاتية
subjective uncertainty	١٧	عدم التأكد الذاتى
symetric matrix	٢٣١	مصفوفة متماثلة
	T	
testing of hypothesis	٣٨	أختبارات الفروض
the age distribution	٢٧٨	التوزيع العمرى
tolerance measure	٢٩,٣٤,٤٥	مستوى المأمونية
transformations	٢٧	التحويلات
transformation technique	١٩٨	أسلوب التحويلات
transition probability programming approach	٢٦	أسلوب البرمجة الأحتمالية الانتقالية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
transition programming approach	٢٦	أسلوب البرمجة الأنتقالية
	U	
uncertainty decision problems	٢٣	المشاكل القرارية غير المعينة
under-achievement	٣٠٢	المقدار الأقل من إنجاز الهدف
unknown decisions variables	٢٧٩	متغيرات قرارية غير معلومة
unknown probability distributions	٢٣	توزيعات إحتمالية غير معلومة
unsolvable linear prog. Problems	٢٩٥	مشاكل برمجة خطية غير قابلة للحل
	V	
variable	١٠,١٦,١٩	المتغير
variance	٢٥٥,٢٥٦	تباين
violation measure	٢٩	مقياس عدم تحقق القيد (أو الهدف)

المراجع العربية

[١] سيد احمد (١٩٩١): "برمجة الهدف الاحتمالية فى صيانة وأصلاح أنظمة الطيران" رسالة ماجستير، قسم بحوث العمليات و علوم الحاسب، معهد الدراسات الإحصائية، جامعة القاهرة.

[٢] سيد رمضان (٢٠٠١): "برمجة تعدد الأهداف الأحتمالية لتطوير بعض أنظمة الصفوف لبواسون و تطبيقاتها فى قطاع التعليم" رسالة دكتوراه، قسم الإحصاء، كلية التجارة، جامعة بنها.

[٣] عبدالفتاح قنديل (٢٠١٣): "أساليب و فنون التنبؤ بين النظرية و التطبيق" الجزئين الأول و الثانى، مكتبة عبدالله الديب، القاهرة.

[٤] عبدالله الهلباوي (٢٠٠٢): "مقدمة فى نظرية الإحصاء - الجزء الأول" جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.

[٥] عفاف الدش (١٩٩٩): "نماذج الأنحدار" مكتبة عين شمس، شارع القصر العينى، القاهرة.

[٦] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الإحصاء التطبيقى - الجزء الأول: الإحصاء الوصفى" الطبعة السابعة، جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.

[٧] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية و الاجتماعية " المكتبة الأكاديمية بالدقي، القاهرة.

[٨] عفاف الدش (٢٠١٢): "بحوث العمليات و أتخاذ القرارات - الجزء الأول: البرمجة وحيدة الهدف" المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[٩] عفاف الدش (٢٠١٣): "الإحصاء التطبيقي - الجزء الثانى: الإستدلال الإحصائى" الطبعة الخامسة، جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.

[١٠] عفاف الدش (٢٠١٣): "بحوث العمليات و أتخاذ القرارات - الجزء الثانى: البرمجة متعددة الأهداف" المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[١١] عفاف الدش و آخرون (٢٠٠٨): "أستخدام الحزم الجاهزة-SPSS-Maple Tora" جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.

[١٢] عفاف الدش (٢٠١٥): "بحوث العمليات و أتخاذ القرارات - الجزء الثالث: البرمجة الأحتمالية" المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[١٣] على الحفناوي (١٩٩١): "طرق التجزئ لبرمجة الهدف اليقينية و الأحتمالية" رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الاقتصاد و العلوم السياسية، جامعة القاهرة.

[١٤] فاطمة الزهراء (٢٠٠٤): "نموذج أحتمالي متعدد الأهداف لحل مشكلة النقل" رسالة ماجستير، قسم بحوث العمليات و علوم الحاسب، معهد الدراسات الإحصائية، جامعة القاهرة.

[١٥] نجوى البحيري (٢٠٠٣): "البرمجة الاحتمالية لتقدير خط الفقر و مؤشراته" رسالة ماجستير ، قسم الإحصاء، كلية الاقتصاد و العلوم السياسية، جامعة القاهرة.

المراجع الأجنبية

[16] Abdel Aty, S. (1954): "Approximate Formula for the Percentage Points and Probability Integral of the non-central χ^2 Distribution", Biometrika, vol.41, pp.538-540.

[17] Achcar, J.; Moala, M.; Tarumoto, M. and Coladello, L. (2015): "A Bivariate Generalized Exponential Distribution Derived from Copula Functions in The Presence of Censored Data and Covariates", Brazilian operations research society, vol.35(1), pp.165-186.

[18] Ackooij, W.Vam; Henrion, R.; Moller, A. and Zorgati, R. (2011): "On Joint Probabilistic Constraints with Gaussian Coefficient Matrix", Operations research letters, vol.39, pp.99-102.

[19] Ahmed, S. and Shapiro, A. (2008): "Solving Chance-Constrained Stochastic Programs Via Sampling and Integer Programming", H. Milton Stewart School of Industrial & Systems Engineering.

[20] Ahmet, U. and Other (2007): "Multi-objective Optimization with Cross Entropy Method: Stochastic Learning with Clustered Pareto Fronts", IEEE, pp.3065.

[21] Albert, W. and Ingram, O. (1966): "A Multivariate Exponential Distribution", Mathematical Note no.450, Mathematics research laboratory, Stanford university, California.

[22] Alvin, C. Rencher (2000): "Linear Models in Statistics", John Wiley & Sons, Inc., New York.

[23] Alvin C. Rencher (2003): "Methods of Multivariate Analysis" 2nd Edition. Wiley-Interscience, New York.

[24] Amari, S.V and Misra, R.B (1997): "Closed-Forms Expressions for Distribution of Sum of Independent Exponential Random Variables", IEEE Transactions on Reliability, 46, 519-522.

[25] An, H. and Eheart, JW. (2007): "A Screening Technique for Joint Chance-Constrained Programming for Air-Quality Management", Operation research journal, vol.55, no.4.

[26] Armand, P. and Maliver, C. (1991): "Determination of the Efficient Set in Multi-objective Linear Programming", Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 70, no. 3.

[27] Arthanari, T. and Dodge, Y. (1993): "Mathematical Programming Statistics", John & Sons, Inc., New York.

[28] Atalay, D. and Apaydin, A. (2011): "Gamma Distribution in Chance-Constrained Stochastic Programming Model", Journal of inequalities and applications, vol.108.

[29] Avriel, A. and Williams, A. (1970): "Complementary Geometric Programming", SIAM J. Appl. Math., vol. 19, no. 1.

[30] Avriel, M.; Dembo, R. and Passy. U. (1975): "Solution of Generalized Geometric Programs", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9.

[31] Bagai, I. and Rao, P. (1995): "Kernal Type Density Estimates for Positive Valued Random Variables", The

Indian Journal of Statistics, Series A, vol.57, pp.56-67.

[32] Balakrishnan, N. and Lai, C. (2009): "Continuous Bivariate Distributions", Springer Science + Business Media, LLC.

[33] Bangwon Ko and Qihe Tang (2007): "Sums of Dependent Nonnegative Random Variables with Subexponential Tails". Journal of Applied Probability, Vol. 45, No. 1.

[34] Bawa, V. S. (1973):"A Chance-Constrained Programming Problems with Joint Constraints", Management Science, vol. 19, no. 11, pp.1326-1331.

[35] Beightler, C. and Phillip, D. (1976): "Applied Geometric Programming", John Wiley & Sons, Inc., New York.

[36] Belaid, Abdelaziz and Davide (2012): "The Stochastic Goal Programming Model: Theory and Applications", Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol.19, pp.185-200.

[37] Bhaskar, K. and Mc Name, P. (1983):"Multiple Objectives in Accounting and Finance", Journal of Business Finance and Accounting, pp.595-621.

[38] Bhattacharya (2009):"A Chance-Constrained Goal Programming Model for the Advertising Planning Problem", European journal of operational research, vol. 192, pp.382-395.

[39] Biswal, M.; Biswal, N. and Li, D. (1998): "Probabilistic Linear Programming Problems with Exponential Random

Variables: A Technical Note", European journal of operational research, vol.111, pp.589-597.

[40] Blau, G. and Wilde, J. (1969): "Generalized Polynomial Programming", The Canadian Journal of Chemical Engineering, vol, 47, no. 3.

[41] Box, B. (1954): "Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the one-way Classification", Annals of Mathematical Statistics, vol. 25, no. 2.

[42] Bradley, G. and Smith, K. (1999): "Calculus", 2nd Edition, Prentice Hall, New York.

[43] Branda, M. (2011): "Stochastic Programming Problems with Generalized Integrated Chance- Constraints", Journal of Optimization. April 21.

[44] Camp, M. and Garatti (2013): "Chance Constrained Optimization Via Randomization: Feasibility and Optimality", the MIUR project, Milano, Italy.

[45] Chang and Wang (1996): "Solid Waste Management System Analysis Multi-Objective Mixed Integer Programming", Management Science, vol. 48, pp.17-43.

[46] Chang and Wang (1997): "A Goal Programming Approach for Multi-objective Optimal Planning of an Integrated Solid Waste Management System", Waste Management Research, vol. 15, pp.1-14.

[47] Charnes, A. and Cooper, W. (1959): "Chance-

Constrained Programming", Management Science, vol. 6, no. 1.

[48] Charnes, A. and Cooper, W. (1961): "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming", vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[49] Charnes, A. and Cooper, W. (1963): "Deterministic Equivalent for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints", Operations research, vol. 11, no. 1.

[50] Charnes, A. and Cooper, W. (1967): "Some Special P-Models in Chance-Constrained Programming", Management Science, vol. 14, no. 3.

[51] Charnes, A. and Cooper, W. (1969): "Deterministic Equivalent for Optimizing and Satisticing under Chance-Constraints in Economic Models, Estimation and Risk Programming", Essay in Honor of G. Tintner, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York.

[52] Charnes, A. and Kirby, M. (1966): "Optimal Decision Rules for E-Model of Chance-Constrained Programming", Cahier du centre d'études de recherche Operationnelle, vol. 8, no. 1.

[53] Charnes, A., Cooper, W. and Ferguson (1955): "Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming", Management Science, vol. 1, no. 2.

[54] Charnes, A., Cooper, W. and Symonds, G. (1958): "Cost Horizons and Certainty Equivalent: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil", Management Science, vol. 4, no. 3.

[55] Charnes; Cooper; Karwan and Wallace (1979): "A Chance-Constrained Goal Programming Model to Evaluate Response Resources for Marine Pollution Disasters", Journal of Environmental Economics and Management, vol.6, pp.244-274, 5a.

[56] Charnes; Cooper; Kirby and Raike (1972): "Selected Recent Developments in Chance–Constrained Programming", The 41st National Meeting of ORSA in New Orleans.

[57] Contini, G. (1968): "Stochastic Approach to Goal Programming", Operations Research, pp.576-586.

[58] Dantzing, G. (1955): "Linear Programming under Uncertainty", Management Science, vol. 1, no. 3 & 4.

[59] Dantzing, G. (1966): "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, Princeton.

[60] David, F. and Kendall, M. (1949): "Tables of Symmetric Functions – Part I", Biometrika, vol. 36.

[61] De, P.K.; Acharya, D. and Sahu, K.C. (1982): "A Chance-Constrained Goal Programming Model for Capital budgeting" The Journal of the Operational Research Society, vol.33, no.7 pp.635-638.

[62] Downton, F. (1970): "Bivariate Exponential Distributions in Reliability Theory", Journal of the royal statistics society, series B, vol.32(3), pp.408-417.

[63] Duffin, R., Peterson, E. and Zener (1967): "Geometric Programming Theory and Application"", John Wiley &

Sons, Inc., New York.

[64] El-Dash, A. (1984): “Chance-Constrained and Nonlinear Goal Programming”, Ph.D. Thesis, Applied Mathematics department, North Wales university, UK.

[65] El-Dash, A. (1988): “Geometric Programming and Cyclic Aircraft Maintenance Flying System”, The Egyptian computer Journal, ISSR, Cairo University, vol. 16, pp.42-59.

[66] El-Dash, A. (1989): “Stochastic Goal Programming (SGP) and Agricultural Sector of Under Developed Countries”, Proceeding of ORMA Conference, vol. 1, pp.340-363.

[67] El-Dash, A. (1989): “The Reliability Measures of Probabilistic Multi-objective Programming”, Proceeding of Operation Research Conference North Wales University, Bangor, UK.

[68] El-Dash, A. (1989): “Two Probabilistic Models for Solving an Inventory Oxygen Problem”, Journal of the Operational Research Society, vol. 40, no. 11, pp.961-969, UK.

[69] El-Dash, A. and Abo Hadid, S. (2013): “Simulation Study for Nonparametric (M/G_k/k):(FCFS/∞/∞) Queueing Models”, The Egyptian Statistical Journal, ISSR, Cairo university.

[70] El-Dash, A. and Abo Hadid, S. (2013): “Nonparametric (M/G/1) :(FCFS/∞/∞) Queueing System”, The Egyptian Journal, ISSR, Cairo university.

[71] El-Dash, A. and Bayomi, M. (1992): “Sequential Duality

Method for Solving Polynomial Goal Programming

[72] Problems", The Egyptian Computer Science Journal, ISSR, Cairo university, vol. 20, no. 1, pp.12-38.

[73] El-Dash, A. and El-Shair, S. (1994): "Probabilistic Goal Programming Models with Different Parameters

Exponentially Distributed Coefficients", The Annual International Conference of Statistics, Computer Sciences and Operations Research, Part (V), pp.36-53.

[74] El-Dash, A. and El-Shair, S. (1995): "Probabilistic Multi-objective Prog. Problems with Mixed Exponentially Distributed Coefficients", The 20th International Conference for Statistics, Computer Science and Scientific Applications, Cairo university, pp.315-332.

[75] El-Dash, A. and Hughes, J. (1984): "Optimizing the Distribution of Foreign Trade Between Parts and Trading Centers", International Seminar, Journal of The Mathematics of Multi-objective Optimization CISM, Undine, Italy, pp.1-10.

[76] El-Dash, A. and Others (1993): "Lagrangian Analysis for Multi-objective Decision-Making Problems", The 18th International Conference for Statistics, Computer Science and Social Applications, Tanta university, pp.297-310.

[77] El-Dash, A.; Bakry, I. and El-Araby, S. (1988): "The Optimum Distribution of Rockets", The 11th Annual International Operations Research Conference, Faculty of Engineering, Zagazig university, vol. 11, pp.73-80.

[78] El-Dash, A.; Farag, I. and El-Sherif, A. (1991): "Stochastic Goal Programming for Repair & Maintenance of Flying System", Proceeding of the 16th International Conference for Statistics, Computer Science, Social & Demographic Science, Ain Shams university, vol. 1, pp.345-366.

[79] El-Dash, A.; Kandil, A. and Grigis, F. (1996): "The Probability Distribution of a Recalling Level of the Dependent & Independent Events", The Annual International Conference of Statistics, Computer Science and Operation Research, ISSR, Cairo university, pp.28-47.

[80] El-Dash, A. (2018): "Chance Constrained Programming with Generalized Exponential Distributed Random Parameters", IJRRAS, vol.37, no.1.

[81] El-Dash, A. and Hafez, N. (2019): "Joint Chance-Constrained Programming with Generalized Exponential Random Parameters", IJRRAS, Vol.38, No.1

[82] El-Dash, A. (2019): "Probabilistic Linear Problems with Bivariate Exponential Distributed Random Parameters", IJRRAS, Vol.41, No.1

[83] El-Dash, A. (2019): "Chance-constrained Programming with Dependent Exponential distributed Random Parameters", To be published.

[84] Engau, A. and Wiecek, M. (2005): "Exact Generation of Epsilon Efficient Solution in Multiple-Objective Programming", MSC. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Clemson University, South Carolina, USA.

[85] Fernandez, Mai and Scherer (2011): "The mean of Marshall–Olkin dependent exponential random variables".

Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 81, No.1.

[86] Fortson, J. and Dince, R. (1977): "An Application of Goal Programming to Management of a Country Bank", Journal of Bank Research, pp.311-319.

[87] Geletu, A. (2012): "Chance-Constrained Optimization Applications, Properties and Numerical Issues", IIMenau university of Technology, Department of Simulation and Optimal Processes (SOP).

[88] Geletu, A. and Others (2012): "Advances and Application of Chance-Constrained Approaches to Systems Optimization under Uncertainly", International Journal of Systems Science.

[89] Geletu, A. (2012): "Chance Constrained Optimization – Applications, Properties and Numerical Issues (SOP)", Ilmenau university of technology, department of simulation and optimal process.

[90] Georg, S.; Lorenzo, F. and Manfred, M. (2017): "Randomized Solutions to Convex Programs with Multiple Chance Constraints", SIAM journal.

[91] Girgis, N., El-Dash, A. and Hamid, R. (1986): "Two-Stages Goal Programming Approach"., The 21st Annual International Conference in Statistics, Computer Science Information and Operation Research, vol.4, ISSR, Cairo university, pp.1-16.

[92] Girgis, N.; El-Dash, A. and Hamid, R. (1987): "A Sequential Penalty Algorithm for Solving Nonlinear Goal

Programs", The 21st International Conference for Statistics, Computer Science, Social and Demographic Research, Ain Shams university, pp.289-297.

[93] Girgis, N.; El-Dash, A. and Mahmoud, Z. (1993): "A Parametric Analysis for Probabilistic Lexicographic Linear Goal Programming Problems", Scientific Journal of Commercial Sciences, Faculty of Commerce, Banha university, vol.13, no.1, pp.1-25.

[94] Goodman, N. (2013): "The Principles and Practice of Probability Programming", January 23-25, ACM 978-4503, Rome, Italy.

[95] Gomez, E.; Gomez-Villegas, M. and Marin, J. (1998): "A Multivariate Generalization of The Power Exponential Family Distributions", Communication in statistics theory and methods, January.

[96] Gupta, P. and Hira, D. (2007): "Operation Research" S. Chand & Company LTD, New Delhi – 110055.

[97] Gupta, R. and Kundu, D. (1999): "Generalized Exponential Distributions" Austral & New Zealand journal statistics, vol.41(2), pp.173-188.

[98] Gutjahr, W. and Others (2013): "Stochastic Multi-objective Optimization: A Survey on Non-Scalarizing Methods", Annals of operation research journal, Special Volume.

[99] Hafez, N. (2018): "A Joint Chance Constrained Programming Approach and Its Applications", Ph.D. thesis, Math and statistics department, Helwan university,

Egypt.

[100] Hafez, N.; El-Dash, A. and Al-Behery (2018): "Chance Constrained Programming with Independent or Dependent Exponential Input Coefficient", IJRRAS, 34 (2)

[101] Hafez, N.; El-Dash, A. and Al-Behery (2018): "Joint Chance Constrained Programming with Dependent Parameters", Advances and Application in statistics journal, vol.53, no.1.

[102] Hansotia, B. (1980): "Stochastic Linear Programs with Simple Recourse: The Equivalent Deterministic Convex Program for the Normal, Exponential and Erlang Cases", Noval Research Logistics Quarterly, vol.27.

[103] Heinrich (1982): "Factorization of the characteristic function of a sum of dependent random variables". Lithuanian Mathematical Journal.

[104] Henrion, R. and Strugarek, C. (2008): "Convexity of Chance Constraints with Independent Random Variables", Computational Optimization and Applications, vol.41, pp.263-276.

[105] Heras and Aguado (1999a): "Stochastic Goal Programming with Recourse", Revista de la ١aeal Academia, de Ciencia Exactas, Fisicasy Natural es (España) 92 (4): 409-414.

[106] Heras and Aguado (1999b): "Stochastic Goal Programming", European journal of operation research, vol.7(3), pp.139-158.

[107] Ignizio, J. (1976): “Goal Programming and Extensions”, Lexington Books, London.

[108] Ignizio, J. (1978): “Goal Programming: A Tool for Multi-objective Analysis”, Journal of operational research society, vol. 29(2), pp.1109.

[109] Ignizio, J. (1982): “Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems”, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J.07632.

[110] Ijiri, Y. (1965): “Management Goals and Accounting for Control”, Chicago: Rand-McNally.

[111] Ismail, M.; El-Hefnawy, A. and Saad, A. (2018): “New Deterministic Solution to a Chance-Constrained Linear Programming Model with Weibull Random Coefficients”, Future business journal, vol.4, no.1, pp.109-120.

[112] Jagannathan, R. (1974): “Chance-Constrained Programming with Joint Constraints”, Journal of operation research, 22(2), pp.358-372.

[113] Johnson, N. and Kotz, S. (1970): “Continuous Univariate Distributions”,vol.1 2nd edition, Houghton Mifflin Company, Boston.

[114] Johnson, N. T. and Person, E. S. (1969): “Tables of Percentage Points of non-central χ^2 “, Biometrika, vol.56, no.2, pp.255.

[115] Joiner, C. and Drake, A. (1983): “Government Planning and Budgeting with Multi-Objective Models”, Omega, vol.11, pp.57-66.

[116] Kall, P. and Wallace, S.(2003): "Stochastic Programming", 2^{nd} Edition, John Wiley & Sons.

[117] Kelley, I. (1960): "The Cutting Plane Method for Solving Con-vex Programs", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol.8, no.4.

[118] Kendall, M. and Stuart, A. (1977): "The Advanced Theory of Statistics", vol.1, Charles Griffin & Company Limited, London.

[119] Kornlbuth, J. (1973): "A Survey of Goal Programming", Omega, vol.1, No.3.

[120] Kendall, M. and Stuart, A. (1979): "The Advanced Theory of Statistics", vol.2, Charles Griffin & Company Limited, London.

[121] Kendall, M. and Stuart, A. (1983): "The Advanced Theory of Statistics", vol.3, Charles Griffin & Company Limited, London.

[122] Keown, A. (1978): "A Chance–Constrained Goal Programming Model For Bank Liquidity Management", Decision Sciences, January, pp.93-106.

[123] Keown, A. and Martin, J. (1977): "A Chance–Constrained Goal Programming Model for Working Capital Management", The Engineering Economist, vol. 22, no.3.

[124] Keown, A. and Taylor, I. (1980): "Chance–Constrained Integer Goal Programming Model for Capital Budgeting in the Production Area", Journal of the Operational Research Society, vol.31, pp.579.

[125] Keown, A.J. (1978): “A Chance–Constrained Goal Programming Model for Bank Liquidity”, Management Science, Dec, vol.9, pp.93-106.

[126] Keown; Bernard and Taylor (1980): “A Chance-Constrained Integer Goal Programming Model for Capital budgeting in the Production Area”, The Journal of the Operational Research Society, vol.31.

[127] Kibzun, A. and Kan, Y. (1996):“Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions”, John Wiley.

[128] Kohler, H. (1994): “Statistic for Business and Economics”, 3rd edition, Harper Collins, College Publisher, New York.

[128] Kotz and Adams (1964): “Distribution of Sum of Identically Distributed Exponentially Correlated Gamma-Variables”. The Annals of Mathematical Statistics. Vol. 35, Number 1.

[129] Kotz, S.; Balakrishnan, N. and Johnson, N. (2000): “Continuous Multivariate Distributions – Volume 1: Models and Applications”, John Wiley & Sons Inc., New York.

[130] Kumru, I. and Aysen (2011): “Gamma Distribution Approach in Chance-Constrained Stochastic Programming Model”, Journal of inequalities and applications.

[131] Kundu, D. and Gupta, R. (2009): “Bivariate Generalized Exponential Distribution”, Journal of multi-variate analysis, vol.100, no.4, pp.581-593.

[132] Lancaster (1969): “The Chi-Squared Distribution”, John Wiley Inc., London.

[133] Lapin, L. (1993): “Statistics for Modern Business Decisions”, The Dryden Press, London.

[134] Lapin, L. (1994): "Quantitative Methods for Business Decisions: with Cases”, The Dryden Press, London.

[135] Lee, M.S. and Alson, D.L. (1985): “A Gradient Algorithm for Chance-Constrained Nonlinear Goal Programming”, European Journal of Operational Research, vol.22, pp.359-369.

[136] Li, S.X. (1995): “An Insurance and Investment Portfolio Model Using Chance-Constrained Programming”, vol.23(5), pp.577-586.

[137] Lin, W. (1980): “A Survey of Goal Programming Applications”, Omega, vol.8, no.1.

[138] Linderoth, J.(2003):“Chance-Constrained Programming”, IE 495-Lecture 22, April 21.

[139] Lukas, A. and Martin, B. (2018): “Nonlinear Chance-Constrained Problems Optimality Conditions, Regularization and Solvers”, Springer.

[140] Marler R. and Arora, J. (2004): “Survey of Multi-Objective Optimization Method for Engineering”, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol.26, pp.369-395.

[141] Marti, K. (2005): “Stochastic Optimization Methods”,

Springer, New York.

[142] Martinez, A. and Aguodo, A. (1998): “Stochastic Goal Programming with Recourse”, Rev. R. Acad. Cien. Exact. Fis. Nat. (ESP), Vol. 92, No. 4, PP 409.

[143] Mathew Wiley Tanner (2009): “New Solutions Methods for Joint Chance-Constrained Stochastic Programs with Random Left-Hand Side”, Ph.D. thesis Industrial Engineering, Texas university, USA.

[144] Mc Gahle, G. and Witt, R. (1980): “Insurance Pricing and Regulation Under Uncertainty”, Journal of risk and insurance, vol.47, pp.607-635.

[145] Medhi, J. (1984): "Stochastic Processes" Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[146] Milan, Z. (1982): “Multiple Criteria Decision Making”, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

[147] Miller, L. and Wagner, M. (1965): “Chance-Constrained Programming with Joint Constraints”, Operation Research journal, vol.13, pp.930-945.

[148] Ming-Lung Hung and Other (2006): “A Novel Multi-Objective Programming Approach Dealing With Qualitative and Quantitative Objectives for Environmental Management”, Ecological Economics vol.56, pp.584-593.

[149] Minkang, Z.; Daniel, B.; Taylor; Subhash, C. and Randall, A. (1994): “Chance Constrained Programming Models For Risk-Based Economic And Policy Analysis Of

Soil Conservation", Agricultural and Resource Economics Review, Northeastern Agricultural and Resource Economics Association, vol. 23(1), pages 1-8, April.

[150] Mital, K. (1977): "Optimization Methods In Operations Research and System Analysis", Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[151] Mood, A., Grayhill, F. and Boes, D. (1974): "Introduction to the Theory of Statistics", 3rd edition, International Student Edition.

[152] Nadarajah, S and Kotz, S (2005): "On the Linear Combination of Exponential and Gamma Random Variables". Entropy, 7 , 161-171.

[153] Naslund, B. (1967): "Decision Under Risk: Economic Applications of Chance-Constrained Programming", The Economic Research Institute, Stockholm School of Economics.

[154] Nita, H., Ravi, M. and Hardik, S. (2007): "Operations Research", Prentice-Hall of India, New Delhi-110001.

[155] Nunamaker, T. and Truitt (1987): "Rationing Discretionary Economic Resources: A Multi-Objective Approach", Decision Sciences Journal, pp.524-534.

[156] Oguntunde, Odetunmibi and Adejumo (2014): "On The Sum of Exponentially Distributed Random Variables: A Convolution Approach". European Journal of Statistics and Probability. Vol.2, No.1, pp.1-8.

[157] Olson, D. and Swenseth, S. (1987): "A Linear

Approximation for Chance-Constrained Programming", Journal of the Operational Research Society,pp.261-267.

[158] Patnaik. P. (1949): "The Non-Central χ^2Distribution and their Applications", Biometrika, vol.36, pp.202-231.

[159] Pearson, E. (1959): "Note on an Approximation to the Distribution of Non-Central χ^2", Biometrika, vol.46, pp.364.

[160] Prekopa, A. (1993): "Programming Under Probabilistic Constraint and Maximizing a Probability Under Constraints", Center for operations research, Rutgers university, New Brunswick.

[161] Press, S. (1966): "Linear Combinations of non-central Chi-Square Variates", The Annals of Mathematical Statistics , vol.37, no.2, pp.480-487.

[162] Rakes, T.R. and Reeves, G.P. (1985): "Selecting Tolerances in Chance-Constrained Programming Approach", Journal of operation research society vol.22, pp.359-369.

[163] Ramadan, H. (1987): "A Sequential Approach for Solving Probabilistic Goal Programming Problems", Ph.D. thesis, Statistics Department, Faculty of Economic & Political Science, Cairo university.

[164] Rangoaga, M. (2009): "A Decision Support System for Multi-objective Programming Problems", MSc. Thesis, university of South Africa.

[165] Rao, S. (1978): "Optim ization: Theory and

Applications", 2nd edition, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[166] Ravindran, A.; Phillips, D. and Soiberg, J. (2006): "Operations Research: Principles and Practice", 2nd edition, Wiley, India.

[167] Richard, B. (1982): "Operations Research", Schaum's Outline, Series-Theory and Problems, Mc Graw-Hill, Book Company, New York.

[168] Rometo, C. (1991): "Handbook of Issues in Goal Programming", Pergamon Press, Oxford.

[169] Ronald, L. (1998): "Optimization in Operations Research" Prentice Hall, New York.

[170] Rupesh; Prem; Pradeep (2008): "A Goal Programming Model for Paper Recycling System", Omega, vol.36, pp.405-417.

[171] Sankaran, M. (1959): "On the Non-Central Chi-Squared Distribution", Biometrika, vol.46, pp.235-237.

[172] Sankaran, M. (1963): "Approximations the non-Central Chi-Squared Distribution", Biometrika, vol.50, pp.199-204.

[173] Scniederjons, S. (1995):"Goal Programming Methodology and Applications", Kluwer Publishers, Boston.

[174] Sengupta, J., Tintner, G. and Millhan, C. (1963): "An Some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications", Management Science, vol.10, no.1.

[175] Sengupta, J. (1969): "Distribution Problems in Stochastic and Chance-Constrained Programming in Economic Models Estimation", in Honor of Tintner, Springer, Verlag, New York.

[176] Sengupta, J. and Fox, K. (1969): "Optimization Techniques in Quantitative Economic Models", North-Holland Publishing Company, London.

[177] Sengupta, J. and Gruver, G. (1969): "A Linear Reliability Analysis in Programming with Chance-Constraints", The Swedish Journal of Economics.

[178] Sengupta, J. (1970): "A Generalization of Some Distribution Aspects of Chance-Constrained Linear Programming", International Economic Review, vol.11, no.2.

[179] Sengupta, J. (1970): ",On the Active Approach of Stochastic Linear Programming", Metrika, vol.15, pp.59-70.

[180] Sengupta, J. (1971): "A System Reliability Approach to Linear Programming", Unternehmensforschung, vol.15, pp.112-129.

[181] Sengupta, J. (1972): "Chance-Constrained Linear Programming with Chi-Square Type Deviates", Management Science, vol.14, no.3.

[182] Sengupta, J. (1972): "Stochastic Programming Methods and Applications", North Holland Publishing Company, Amsterdam.

[183] Sengupta, J. and Tintner, G. (1971): "A Review of Stochastic Linear Programming", Review of the International Statistical Institute, vol.39.

[184] Sheskin, D. (2000): "Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures", 2nd Edition, Chapman & Hall, New York.

[185] Shiina, T. (1999): "Numerical Solution Technique for Joint Chance-Constrained Programming Problem. An Application to Electric Power Capacity Expansion", Journal of the operations research society of Japan, vol.42, no.2, pp.128-140.

[186] Sibuya, M (1960): "Bivariate extreme statistics, I". Annals of the Institute of Statistical Mathematics. Vol. 11, pp. 195-210.

[187] Smith, M. (2007): "Calculus", 3rd edition, Mc Graw-Hill Higher Education, New York.

[188] Spahr, R. and Hebert, I. (1987): "A Non-Linear Goal Programming Approach to Risk Analysis in Capital Budgeting", Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 1, pp.45-57.

[189] Stadler, W. (1988): "Fundamentals of Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences", pp.1-25, New York, Plenum Press.

[190] Stewer, R. (1986): "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications", John Wiley & Sons, New York.

[191] Singull, M. (2017): "History of Multivariate Normal Distribution - from Biviariate to High Dimentional Analysis" Conference of the Southern Africa Mathematical Sciences Association SAMSA 2017 - Arusha.

[192] Sungur (1960): "Dependence Information in Parameterized Copulas". Communications in Statistics – Simulation and Computation. Vol. 19, pp. 1339-1360.

[193] Taha, H. (1997): "Operation Research: An Introduction", Prentice Hall, International, Inc.

[194] Tchobanglous, G. and Kreith, F. (2002): "Handbook of Solid Waste Management", 2nd edition, Mc Graw Hill, New York, USA.

[195] Tintner, G. and Sengupta, J. (1972): "Stochastic Economics: Stochastic Processes, Control and Programming", Academic Press, New York.

[196] Vajda, S. (1972): "Probabilistic Programming", Academic Press, New York.

[197] Vira, C. and Yacov, Y. (1983): "Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology", Series Volume 8.

[198] Vlasta, K. (1999): "Stochastic Programming Approach to Multi-objective Optimization Problems with Random Element", Academy of Sciences of the Czech Republic.

[199] Wagner, H. (1975): "Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions", 2nd edition, Prentice Hall International Edition, London.

[200] Walkup, D. and Wets, J. (1970): “Stochastic Programs with Recourse: Special Forms”, Proceedings of Princeton Symposium on Mathematical Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[201] Wei, S.; Guo, H.Huang; Ying, L. and Gongchen, L. (2013): “Inexact Joint Probabilistic Chance -Constrained Programming with Left-Hand Side Randomness. An Application to Solid Waste Management”, Operations research journal, vol.228, pp.217-225.

[202] Welland (1991): “A comparison of bivariate normal algorithms”. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 39(1-2).

[203] Wets, J. (1966): “Programming Under Uncertainty: The Equivalent Convex Program”, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol.14, no.1.

[204] Wets, J. (1972): “Characterization Theorems for Stochastic Programs”, Mathematical Programming Journal, no.2, pp.166-175.

[205] Wikipedia, The Free Encyclopedia (2014): “Non-Central Chi-Squared Distribution”.

[206] Wikipedia, The Free Encyclopedia (2019): “Sum of normally distributed random variables”

[207] Wikipedia (2018): “Bessel Function”

[208] Yadavalli, V. and Other (2007): “Reliability Stochastic Optimization for an N-Stage Series System with M-Chance Constraints”, South African Journal of Science 103,

November/December.

[209] Yu, P. (1974b): "Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions on Decision Problems with Multi-objectives" Journal of Optimization Theory and Applications, vol.14, pp.319-377.