الرياضيات

وصناعة القرارات

الطبعة الأولى

الدكتورة

عفاف الدش

الأستاذ بقسم الرياضيات - جامعة حلوان

القاهرة

١٩٩٤

الـــرياضيــــــات
وصناعة القرارات

الدكتورة

عفاف الدش

الاستاذ بقسم الرياضيات - جامعة حلوان

الطبعه الاولى

ربيع ثانى سنة ١٤١٥هـ

سبتمبر سنة ١٩٩٤م

الرياضيات
وصناعة القرارات

دكتورة عفاف الدش
استاذ بقسم الرياضيات - جامعة حلوان

الطبعة الاولى ربيع ثانى سنة ١٤١٥هـ - سبتمبر سنة ١٩٩٤م

الناشر
مكتبة عين شمس
شارع القصر العينى - القاهرة
جمهورية مصر العربية

رقم الايداع : (٩٤/٨٦٨٢)
الترقيم الدولى I.S.B.N 977-204-218-5

بسم الله الرحمن الرحيم

" وقل رب زدنى علماً "

صدق الله العظيم

*** اهـداء ***

الى من وقف بجوارى وكان دافعا

الى ما أقوم به من عمل ......

الى الاستاذ / محمد الدش

٧

محتويات الكتاب

مقدمة

لقد أصبحت علوم الرياضيات ضرورة لاغنى عنها فى جميع فروع المعرفة : الاقتصادية ، السياسية ، المحاسبية ، الطبية ، الموسيقية ، ... الخ .

حيث أنها تمد المتخصصين فى شتى المجالات بالطرق (الادوات) التى تمكنهم من اخضاع جميع الظواهر محل الدراسة للقياس الكمى . كذلك تقدم الاساليب الكمية التى تمكن متخذى القرارات من رسم السياسات الصحيحة للانظمة القائمة أو المستحدثة وأساليب تقييم هذه السياسات وتقديم الحلول المثلى للمشاكل .

وقد ساعد على استخدام وتطبيق وتطوير الاساليب الرياضية فى جميع فروع المعرفة بصفة عامة والمجالات الاقتصادية ، والادارية والمحاسبية والاجتماعية بصفة خاصة التطور العظيم فى هذا القرن فى علوم الحاسبات ونظم المعلومات واستخداماتها .

وصناعة القرارات المثلى ومتابعة تنفيذها وتقييم نتائجها على مستوى الفرد (فكل فرد متخذ قرار فى نطاق امكانياته واحتياجاته المادية ، والادبية ، المعنوية ، ...) أو المنشات أو الدولة فى اى مجال من مجالات الحياة يتطلب الالمام بالاساليب والطرق الرياضية وكيفية استخدامها وتطويعها وتطويرها وفقا للمجال المستخدمة فيه .

ويهدف هذا الكتاب الى كيفية استخدام الاساليب والطرق الرياضية فى المجالات الاقتصاد ، الادارة ، المحاسبة ، الاجتماعية وكيفية صناعة القرارات المثلى بالنسبة للمشاكل القرارية وذلك من خلال :

- تقديم بعض الاساليب الرياضية التى تمثل ضرورة لاغنى عنها لكل دارس فى المرحلة الجامعية على اختلاف تخصصاتهم – وذلك باسلوب علمى يتسم بالبساطه وسهوله التناول .
- تقديم كيفية تطبيق الاساليب الرياضية المقدمة فى المجالات السابق ذكرها وكيفية بناء الصياغة الرياضية للمشاكل الفعلية وكيفية صناعة القرار الامثل بأستخدام هذه الاساليب وذلك من خلال العديد من الامثلة التطبيقية المتنوعة على كل اسلوب من الاساليب المقدمة .

وأرجو الله أن يحقق هذا الكتاب الهدف المرجو منه وهو ولى التوفيق ..

المؤلفة

أ.د. عفاف الدش

الباب الاول

الفئات SETS

(١-١) تعريف الفئة Sets defined

الفئة هى مجموعة من الاشياء Objects ، التى تشترك فى خاصة ما Common property تؤدى الى أنتساب هذه الاشياء الى نفس الفئة . وتسمى الاشياء التى تتكون منها الفئة عناصر Elements أو أعضاء Members .

مثال (١-١)
فئة أيام الاسبوع هى : السبت ، الأحد ، الأثنين الثلاثاء ، الاربعاء ، الخميس ، الجمعة . فنجد أن هذه الفئة مكونه من 7 عناصر كل يوم يمثل عنصر .

مثال (١-٢)
فئه الجامعات بمحافظة القاهرة هى : القاهرة ، عين شمس ، حلوان ، الأزهر ، الامريكية. فنجد أن الجامعات الخامسة تشترك فى صفة وقوعها فى محافظة القاهرة: فكل جامعة تمثل عنصر من عناصر هذه الفئة وبالتالى تتكون هذه الفئة من خمسة عناصر .

مثال (١-٣)
اذا كانت A هى فئة الاعداد الصحيحة الزوجية الموجبة التى قيمتها أقل من ١٢. فأننا نجد أن عناصر هذه الفئة هى 2,4,6,8,10 أى مكونه من 5 عناصر .

طرق كتابه الفئة
عادة توجد طريقتين لكتابة الفئه هما :

(١) طريقه السرد (القائمة) Enumeration method
(٢) طريقة الخاصة الواصفة Descriptive property method

وكتابه الفئة بأستخدام الطريقه الاولى يتم عن طريق سرد (أو كتابه) عناصر الفئه ووضعها داخل قوسين على النحو { }.

ففى المثال السابق (١-٣)، يمكن كتابه عناصر الفئه A بطريقة السرد (أو القائمة) كما يلى :

$$A=\{2,4,6,8,10\} \qquad (1.1)$$

واذا كان P هى الخاصية أو مجموعة الخواص المشتركة لعناصر الفئة B مثلا ، فأنه يمكن كتابه الفئه بأستخدام الخاصية الواصفة على النحو :

B={x|P له الخواص x} (1.2)

وتقرأ "الفئة B تتكون من جميع العناصر x التى لها الخواص P" أو "الفئه B تساوى العناصر x بشرط أن كل عنصر له الخواص P".

مثال (١-٤)

اذا كانت الفئة A هى :

$$A=\{x|x^2=4\} \qquad (1.3)$$

وبما أن الاعداد التى تحقق المعادلة $x^2=4$ هى $x=2$, أو $x=-2$ وبالتالى فأن عناصر الفئة A هى 2- , 2+ أى أن :

$$A=\{-2 , +2\} \qquad (1.4)$$

مثال (١-٥)

أكتب الفئة C التالية بطريقة السرد :

$$C=\{x|x^2-5x+4 =0\} \qquad (1.5)$$

بما أن

$$\begin{aligned} &x^2-5x+4=0 \rightarrow \\ &(x-4)(x-1)=0 \rightarrow \\ &x=4 , x=1 \end{aligned} \qquad (1.6)$$

وبالتالى فأن قيم x التى تحقق الشرط (1.6) هى 4,1 فأن 4,1 تمثل عناصر الفئة C وبالتالى :

$C = \{4,1\}$

ملحوظة

١- ترتيب العناصر داخل الفئة غير مؤثر بمعنى:

$$C=\{4,1\}= \{1,4\} \tag{1.7}$$

٢- تكرار نفس العنصر داخل الفئة غير مؤثر أيضا بمعنى ، اذا كانت الفئة A بحيث :

$$A=\{3,5,7,5,9,5,1,4,7\} \tag{1.8}$$

فإن عدد عناصر الفئة A ست عناصر فقط أى أن:

$$A=\{3,5,7,9,1,4\} \tag{1.9}$$

اذا كان العنصر x ينتمى الى Belong to الى الفئة B فأننا نرمز لذلك بالرمز

$$x \varepsilon B \tag{1.10}$$

واذا كان العنصر x لاينتمى الى الفئة B فنرمز لذلك بالرمز $x \notin B$ فاذا كانت الفئة H هى :

$$H=\{1,-1,5,7,20\} \tag{1.11}$$

فأن:

$1 \in H,$

$5 \in H,$

أنواع خاصة من الفئات **Special sets**

يوجد فئات معينة ذات أهمية خاصة فى دراسة الفئات ، سوف نقدم فيما يلى بعضها .

١- الفئة الشاملة **Universal set**

هى الفئة التى تشتمل على جميع العناصر الممكنه فى الدراسة محل الاعتبار. وبالتالى فأن الفئه الشاملة تختلف وفقا لنوعية الدراسة وعادة يرمز للفئة الشاملة بالرمز u .

مثال (١-٦)
اذا أجرى التليفزيون بحث عن آراء المقيمين فى مدينة القاهرة عن البرامج الترفيهية التى يقدمها التليفزيون . فأن الفئة الشاملة فى هذه الحالة تمثل جميع الافراد المقيمين فى مدينة القاهرة من مشاهدى البرامج الترفيهيه .

٢- المكمل **Complement**

المكمل للفئه A هو الفئة التى تحتوى على جميع عناصر الفئة الشاملة ماعدا عناصر الفئة A. ويرمز للفئة المكملة للفئة A بالرمز A' .

مثال (١-٧)
اذا كانت الفئه الشاملة U ، والفئة A هما :

$$U=\{1,3,5,7,9,11,13\}$$
$$A=\{1,7,13\}$$

فإن مكمل الفئة A هو A' حيث

$$A'=\{3,5,9,11\}$$

٣- الفئة الخالية **Null (Empty) set**

هى فئة لاتحتوئ على أئ عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو { } .

مثال (١-٨)
اذا كانت A هى فئة العمال المهرة فى أحد المصانع الذين يقل عمر كل منهم عن سنة واحدة ، فأن A تمثل فئة خالية أى : $A = \phi$ حيث لايوجد أى عامل ماهر عمره أقل من عام

٤- الفئة الجزئية

الفئة A تعتبر فئة جزئية من الفئة B اذا واذا فقط كل عنصر فى الفئة A عنصرا أيضا فى الفئة B. ويرمز لها بالرمز $A \subset B$ وتقرأ "الفئة A فئة جزئية من الفئة B .

مثال (١-٩)

اذا كان لدينا الفئات A,B,C,D بحيث :

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \tag{1.12}$$
$$B=\{1,3,5,7,8\} \tag{1.13}$$
$$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \tag{1.14}$$
$$D=\{4|d-3=4\} \tag{1.15}$$

من (1.14),(1.12) نجد أن :

$$A\subset C \tag{1.16}$$

ومن (1.13),(1.12) نجد أن :

$$B\subset A \tag{1.17}$$

ومن (1.15),(1.13) نجد أن

$$D\subset B \tag{1.18}$$

وبالتالى من (1.18) ,(1.17) ,(1.16) فإن

$$D\subset B\subset A\subset C \tag{1.19}$$

أشكال ڤن **Venn Diagrams**

يمكن تمثيل العلاقات بين الفئات بيانا ، حيث يعبر عادة عن الفئة بدائرة ، والفئة الشامله بمستطيل ، وسوف نوضح ذلك من خلال الامثلة التالية :

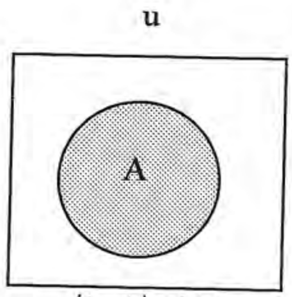
مثال (١-١٠)

وضح بيانيا مايلى:

(i) $A\subset U$
(ii) $A\subset B\subset U$
(iii) $A'\subset U$

اذا كانت A فئة جزئية من الفئة الشاملة U فالشكل (١-١) يوضح ذلك .

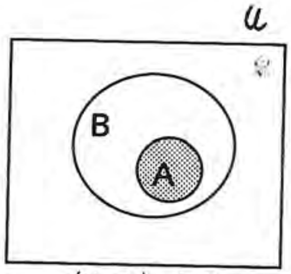
(i)



شكل (١-١)

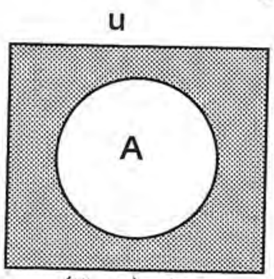
(ii) كذلك اذا كان : $A \subset B \subset U$

فشكل (١-٢) يوضح هذه العلاقة :



شكل (١-٢)

(iii) كذلك شكل (١-٣) يوضح العلاقة : $A' \subset U$



شكل (١-٣)

(١-٢) عمليات على الفئات Set's operations

(١) تساوى الفئات Set equality

تعتبر الفئتين B,A فئتين متساويتين اذا واذا فقط كل عنصر فى الفئه A عنصر فى الفئه B. وكل عنصر فى الفئه B عنصر فى A وتكتب

$$A=B \tag{1.20}$$

مثال (١-١١)

حدد أى الفئات التاليه تعتبر فئات متساوية

$$A=\{1,5\} \tag{1.21}$$
$$B=\{x|(x-1)(x-4)(x-6)=0\} \tag{1.22}$$
$$C=\{1,4,6\} \tag{1.23}$$
$$B=\{x|x^2-6x+5=0\} \tag{1.24}$$

من (1.22) نجد أن :

$$B=\{1,4,6\} \tag{1.25}$$

كذلك من (1.24) نجد أن :

$$D=\{x|(x-5)(x-1)=0\}$$
$$=\{5,1\} \tag{1.26}$$

من (1.26),(1.21) نجد أن :

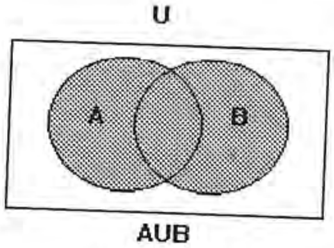
$$A=D \tag{1.27}$$

(٢) أتحاد الفئات Union of sets

أتحاد الفئه A والفئه B ويرمز له بالرمز

$$A\cup B \tag{1.28}$$

هو فئه تحتوى على جميع عناصر الفئه A والفئه B والشكل التالى يوضح $A\cup B$



شكل (١-٤)

مثال (١-١٢)

اذا كان لدينا الفئات التالية

$$A=\{1,2,3,4,5,10,15\} \tag{1.29}$$

$$B=\{1,3,5,7,9,20\} \tag{1.30}$$

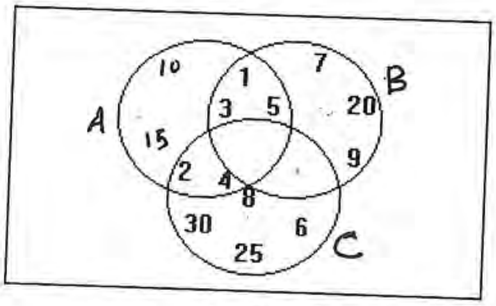
$$C=\{2,4,6,8,25,30\} \tag{1.31}$$

فإن

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\} \cup \{1,3,5,7,9\}$
$=\{1,2,3,4,5,7,9,10,15,20\}$

b) $A\cup C=\{1,2,3,4,5,10,15\} \cup \{2,4,6,8,25,30\}$
$=\{1,2,3,4,5,6,8,10,15,25,30\}$

c) $B\cup C=\{1,3,5,7,9,20\} \cup \{2,4,6,8,25,30\}$
$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,20,25,30\}$



شكل (١-٥)

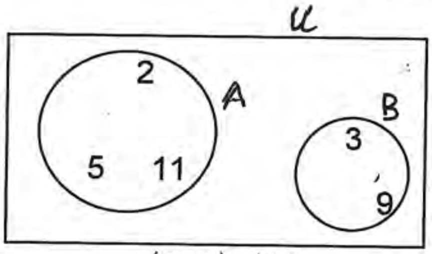
مثال (١-١٣)
اذا كان

$$A=\{2,5,11\} \quad , \quad B=\{3,9\}$$

فإن

$$A\cup B=\{2,5,11\} \cup \{3,9\}$$
$$=\{2,3,5,9,11\}$$

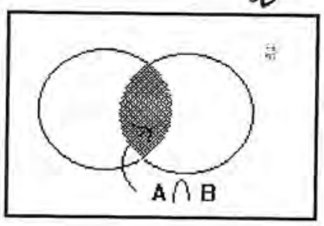
كما هو موضح بالشكل التالى



شكل (١-٦)

(٣) تقاطع الفئات **Intersection sets**

تقاطع الفئتين A,B ويرمز له بالرمز $A\cap B$
هو فئة تشتمل على العناصر الموجودة فى الفئـة A والموجد فـى الفئـة B فـى نفس الوقت . والشكل التالى يوضح فئة التقاطع



شكل (١-٧)

مثال (١-١٤)
فى المثال السابق

a) $A \cap B=\{1,2,3,4,5,10,15\} \cap \{1,3,5,7,9,20\}$
$=\{1,3,5\}$

b) $A \cap C=\{1,2,3,4,5,10,15\} \cap \{2,4,6,8,25,30\}$
$=\{2.4\}$

c) $B \cap C=\{1,3,5,7,9,20\} \cap \{2,4,6,8,25,30\}$
$=\{\ \}=\phi$

d) $A \cap A'=\{1,2,3,4,5,10,15\} \cap \{6,7,8,9,20,25,30\}$
$=\phi$

e) $B \cap U=\{1,2,5,7,9,20\}\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15,20,25,30\}$
$=\{1,3,5,7,9,20\}$

(٤) فئة الفرق **Difference set**

الفرق بين الفئه A ، والفئة B هو عبارى عن الفئة التى تشتمل على العناصر التى تنتمى الى الفئى A ولا تنتمى الى B ويرمز لفئة الفرق بالرمز (A-B) وتقرأ "الفئة A ناقص الفئى B" حيث أن

$$A-B=\{x|x\varepsilon A,\ x\notin B\} \tag{1.29}$$

كذلك

$$B-A=\{x|x\varepsilon B,\ x\notin A\} \tag{1.30}$$

مثال (١-١٥)
اذا كان لدينا الفئات التالية

$A=\{2,5,9,12,15,20\}$
$B=\{-2,5,6,15,18\}$
$C==\{3,4,5,10,9,15,12,13\}$

أوجد الفئات التالية

(i) (A-B), (B-A)
(ii) (A-C), (C-A)
(iii) (B-C), (C-B)

(iv) (A-B)-C, C-(A-B)

الحل

(i) (A-B)={2,9,12,20}
(B-A)={-2,6,18}

(ii) (A-C)={2,20}
(C-A)={3,4,10,13}

(iii) (B-C)={-2,6,18}
(C-B)={3,4,10,9,12,13}

(iv) (A-B)-C={2,9,12,20}-{3,4,5,10,9,15,12,13}
={2,20}

C-(A-B)={3,4,5,10,9,15,12,13}-{2,9,12,20}
={3,4,5,10,15,13}

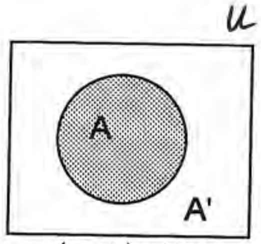
(١-٣) خصائص الفئات Set's properties

فيما يلى سوف نقدم بعض خصائص الفئات المتعلقة بالعمليات التى سبق ذكرها فى الفصل السابق .

١- اذا كانت A فئة ، A' مكمل الفئه A فأن تقاطع الفئتين A',A يكون فئه خالية أى أن :

$$A \cap A' = \phi \tag{1.33}$$

أنظر شكل (١-٩)

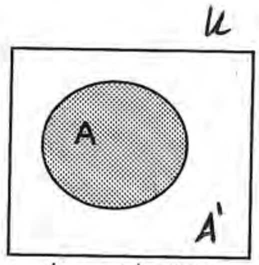


شكل (١-٩)

٢- اذا كانت A فئة فأن تقاطع هذه الفئة مع نفسها هو نفس الفئة أى أن

$$A \cap A = A \tag{1.34}$$

أنظر شكل (١-١٠)

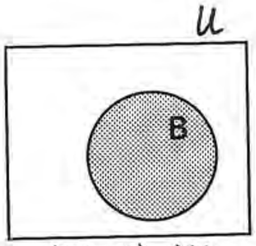


شكل (١-١٠)

٣- تقاطع الفئة الشاملة U، مع أن فئة B هو نفس الفئة B ، أى أن:

$$U \cap B = B \tag{1.35}$$

أنظر شكل (١-١١)



شكل (١-١١)

٤- اذا كانت الفئتين B,A بحيث :

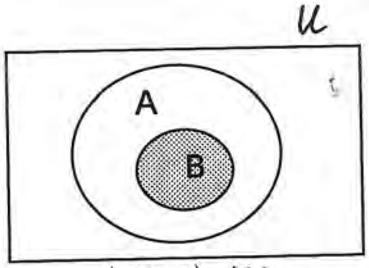
$$A \subset B$$

فأن

$$A \cup B = B \qquad (1.36)$$

$$A \cap B = A \qquad (1.37)$$

أنظر شكل (١-١٢)



شكل (١-١٢)

مثال (١-١٦)

حدد أى الفئات التاليه تمثل فئات متساوية

$A=\{3,-4\}$, $B=\{x|(x-3)(x+4)=0\}$

$C=\{x|x^3-6x^2+5x=0\}$

$D=\{0,1,5\}$

بما أن

$B=\{x|(x-3)(x+4)=0\} \rightarrow$

$B=\{3,-4\}$

وبالتالى فأن

$A=B$

كذلك

$C=\{x|x^3-6x^2+5x=0\}\rightarrow$
$C=\{x|x(x-1)(x-5)=0\}\rightarrow$
$C=\{0,1,5\}$

وبالتالى فأن

$D=C$

مثال (١-١٧)
اذا كان

$A=\{-1,-3,-5,-7,-9\}$
$B=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}$
$C=\{-2,-4,-6,-8\}$

أوجد الفئات التالية :

(i) $(A\cup B), (B\cup C), (A\cup C)$
(ii) $(A\cap B), (B\cap C), (A\cap C)$

الحل

(i) $(A\cup B)=\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}$
$=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}$
$=B$

$(B\cup C)=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}\cup\{-2,-4,-6,-8\}$
$=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}$
$=B$

حيث

(ii) $(A\cap B)=\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7\}$
$=\{-1,-3,-5,-7,-9\}$
$=A$

$(B\cap C)=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}\cup\{-2,-4,-6,-8\}$
$=\{-2,-4,-6,-8\}$
$=C$

حيث

$C\subset B$
$(A\cap C)=\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-2,-4,-6,-8\}$
$=\{\ \}=\phi$

مثال (١-١٨)

فى المثال السابق اذا كانت

$U=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10,-11,-12\}$

أوجد

(i) $(A\cap A'), (A'\cap B'), (B'\cup C)$
(ii) $(A\cap C'), (A\cup B)', (C\cap A)'$

الحل

(i) $(A\cap A')=\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-2,-4,-6,-8,-10,-11,-12\}$
$=\phi$
$(A'\cap B')=\{-2,-4,-6,-8,-10,-11,-12\}\cap\{-10,-11,-12\}$
$=\{-10,-11,-12\}$
$=B$
$(B'\cup C)=\{-10,-11,-12\}\cup\{-2,-4,-6,-8\}$
$=\{-2,-4,-6,-8,-10,-11,-12\}$

(ii) $(A\cap C')=\{-1,-3,-5,-7,-9\}\cap\{-1,-3,-5,-7,-9,-10,-11,-12\}$
$=\{-1,-3,-5,-7,-9\}$
$=A$
$(A\cup B)'=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,19\}'$
$=\{-10,-11,-12\}$
$=A'\cap B'$
$(C\cap A)'=\{\}'=U=\{-1,-2,\ldots,-12\}$

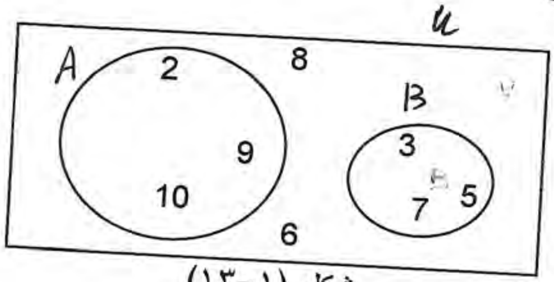
٥- اذا لم يكن هناك أى عنصر مشترك بين الفئتين B,A ، بمعنى أن $A \cap B = \phi$

فاننا نقول أن B,A فئتين منفصلتين Disjoint sets

فمثلا اذا كان U الفئة الشاملة بحيث

$U=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$A=\{3,5,7\}$
$B=\{2,9,10\}$

كما فى الشكل التالى



شكل (١-١٣)

بما أن لايوجد عناصر مشتركة بين الفئتين B,A فأن $A \cap B=\phi$

وبالتالى فأن A,B فئتين منفصلتين

٦- اذا كان 'A مكمل الفئة A، فأن $A \cup A'=U$
حيث U هى الفئة الشاملة .

(١-٤) فئة الاعداد الحقيقية **Real numbers set**

فئة الاعداد الحقيقية هى الفئة التى تشتمل علـى جميـع الاعـداد الحقيقيـة Real numbers فمثلا يمكن تمثيل هذه الفئة بالمحور x كما فى شكل (١-١٤)، فكل نقطة على المحور x تمثل عنصر فى فئة الاعداد الحقيقية .

$-\infty$ -.2 -.1 0 +.1 +1 $+\infty$

شكل (١-١٤)

$R = r$

وعادة يرمز لهذه الفئة بالرمز R بحيث

R={r| عدد حقيقى r } (1.38)

وبالتالى فأن فئة الاعداد الحقيقة تشتمل على عدد لانهائى من الاعداد القيقيـة السـالبة والموبة الصحيحة والكسرية كذلك تحتوى على نقطة الاصل (صفر).

فئة الاعداد الصحيحة **Integer numbers set**

هى الفئة التى تشتمل على جميع الاعداد الصحيحة الموجبة ...,1,2,3 وكذلك السالبة ...,-1,-2,-3 والصفر .

ويرمز عادة لفئة الاعداد الصحيحة بالرمز I حيث

$$I=\{\ldots, -3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\} \quad (1.39)$$

وتعتبر فئة الاعداد الصحيحة فئة جزئية من فئة الاعداد الحقيقية أى أن

$$I \subset R \quad (1.40)$$

فئة الاعداد الطبيعية **Natural numbers set**

هى فئة تشتمل على الاعداد الحقيقية الصحيحة الموجبه فقط. وعادة يرمز لها بالرمز N حيث

$$N=\{1,2,3,4,...\} \tag{1.41}$$

وبالتالى فأن

$$N\subset I \tag{1.42}$$

ملحوظة

أ) تمثل الفئة الخالية ϕ، فئة جزئية من أئ فئة. ففى المثال السابق نجد أن $\phi\subset D$, $\phi\subset A,...$

ب) مما سبق يتضح أن تقاطع الفئة A ومكملها A' يمثل فئة خالية ، أى أن $A\cap A'=\phi$

ج) كذلك اتحاد الفئة A ومكملها A' يمثل الفئة الشاملة U أى أن: $A\cup A'=U$

فإن

(١-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

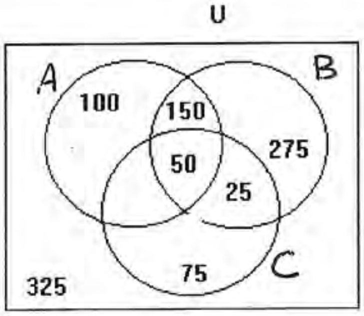
تطبيق (١): تقوم أحد الشركات بإنتاج ثلاثة أنواع من المنظفات الصناعية I,II,III. فاذا قامت ادارة المبيعات بدراسة الطلب فى السوق وتفضيل العميل لأى نوع من الأنواع التى تقوم الشركة بأنتاجها ، فأخذت عينة مكونة من 1000 عميل وسأل كل منهم عن تفضيله لأى نوع من الأنواع الثلاثة ، فكانت النتائج على النحو التالى:

300 يفضلون النوع الأول I
500 يفضلون النوع الثانى II
150 يفضلون النوع الثالث III
200 يفضلون النوع الاول I والثانى II معا .
50 يفضلون النوعالاول I والثالث III معا .
75 يفضلون النوع الثانى II والثالث III معا .
50 يفضلون الثلاثة أنواع I,II,III معا .

أ) مثل نتائج الدراسة بيانيا من خلال شكل فان .
ب) ماهو عدد العملاء الذين يفضلون النوع (I) فقط .
ج) ماهو عدد العملاء الذين يفضلون النوع (II) فقط .
د) ماهو عدد العملاء الذين يفضلون النوع III فقط .
هـ) ماهو عدد العملاء الذين لايفضلون الأنواع الثلاثة III,II,I .

الحل

أ) اذا فرضنا أن A تمثل فئة العملاء الذين يفضلون النوع B,I تمثل فئة العمـلاء الذين يفضلون النوع C,II تمثل فئة العملاء الذين يفضلون النـوع III ، كذلك تمثل عينة العملاء الفئة الشاملة U والشكل التالى يوضح نتائج الدراسة للطلب فى السوق.



شكل (١-١٤)

ب) اذا كان A تمثل فئة العملاء الذين يفضلون النوع I فانه يتضح من الرسم أن الفئه التى تمثل العملاء الذين يفضلون النوع I فقط هى الفئة

$$(A-B)-C \tag{1.43}$$

وعدد العملاء الذين ينتمون الى هذه الفئة 100 كما يتضح من الشكل (١-١٤).

ج) بالمثل الفئة التى تمثل العملاء الذين يفضلون النوع II فقط هى :

$$(B-A)-C \tag{1.44}$$

وعددهم 275 عميل .

د) بالمثل الفئة التى تمثل العملاء الذين يفضلو النوع III فقط هى :

$$(C-A)-B \tag{1.45}$$

وعددهم 75 عميل كما هو موضح بالشكل .

هـ) فئة العملاء الذين لايفضلون الأنواع الثلاثة هى الفئة

$$(A\cup B\cup C)' = [(U-A)-B]-C \tag{1.46}$$

وعددهم 325 عميل كما هو موضح بالشكل .

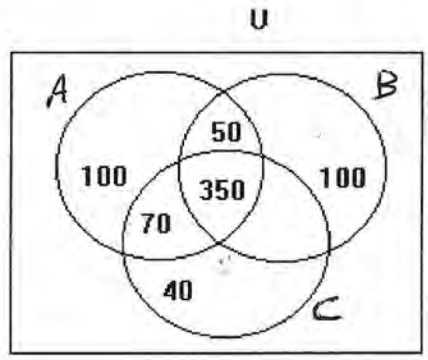
تطبيق (٢): فى أحدى المؤسسات تم الاعلان عن وجود ثلاثة وظائف خالية. فتقدم لهذه الوظائف عدد 1000 فرد ، وبفحص طلبات التقدم وجد أن 570 فرد تقدموا للوظيفة الاولى ، 550 للثانية 510 للثالثة. كذلك وجد أن 400 من المتقدمين تقدموا للوظيفة الاولى والثانية معا ، كذلك 400 تقدموا للثانية والثالثة معا ، 420 فرد تقدموا للوظيفة الاولى والثالثة معا. بالاضافة الى تقدم 350 فرد للوظائف الثلاثة فى نفس الوقت .

المطلوب

١- أرسم شكل فان الذى يمثل فئات المتقدمين للوظائف الثلاثة .
٢- كم عدد المتقدمين لشغل الوظيفة الاولى فقط .
٣- كم عدد المتقدمين لشغل الوظيفة الثانية فقط
٤- كم عدد المتقدمين لشغل الوظيفة الثالثة فقط .

الحل

١- اذا فرضنا أن الفئة الشامله U تمثل فئة جميع المتقدمين وعددهم A,1000 فئة المتقدمين للوظيفة الاولى ، B المتقدمين للوظيفة الثانيه .



شكل (١-١٥)

الفئة C فئة المتقدمين للوظيفة الثالثة ، وشكل (١-١٥) يوضح عدد المتقدمين لكل وظيفة .

٢- الفئة التى تمثل عدد المتقدمين للوظيفة الاولى فقط هى :
$$(A-B)-C \qquad (1.47)$$
وعدد الافراد فى هذه الفئة 100 متقدم .

٣- الفئة التى تمثل المتقدمين للوظيفة الثانية فقط هى :
$$(B-A)-C \qquad (1.48)$$
وعدد الأفراد فىهذه الفئة 100 متقدم .

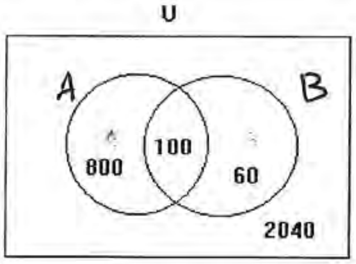
٤- الفئة التى تمثل المتقدمين للوظيفة الثالثة فقط هى :
$$(C-A)-B \qquad (1.49)$$
وعدد الافراد فى هذه الفئة 40 متقدم .

تطبيق (٣): فى أحد مراكز الأبحاث الطبية - اجرى بحث لاختبار تأثير الجرعات الأضافية من فيتامين C لمنع الاصابة بالميكروبات أو الجراثيم المسببه للبرد أو الانفلونزا. فاذا أجريت الدراسة على 3000 فرد وتم أعطاءهم الجرعات الأضافية من فيتامين C لمدة عام . وبمتابعتهم تبين أنه أثناء هذا العام أصيب 900 منهم بالبرد، 160 آخرون بالإنفلونزا ، 100 بالبرد والإنفلونزا معا .

١- بأستخدام شكل فان لخص نتائج البحث .
٢- كم عدد الأشخاص المصابون بالبرد أو بالإنفلونزا .
٣- كم عدد الأشخاص ال١ين لم يصابوا بالبرد أو بالإنفلونزا .
٤- ماهو استنتاجك من خلال نتائج البحث عن تأثير الكميات الأضافية من فيتامين C بالنسبة للإصابة بالبرد أو الإنفلونزا .

الحل

١- اذا فرضنا أن الفئة الشاملة U هى عينة البحث 3000 شخص ، A هى فئة الاشخاص تحت البحث وأصيبوا بالبرد ، B هى فئة الأشخاص المصابين بالإنفلونزا فأنه يمكن تلخيص نتائج الدراسة فى شكل فان التالى .



شكل (١-١٦)

٢- فئة الاشخاص الذين أصيبوا بالبرد أو الإنفلونزا هى الفئة:

$$(A \cup B) \quad (1.50)$$

وعدد الأفراد الذين ينتمون لهذه الفئة 960 شخص ، ونسبتهم

$$\frac{960}{3000} x100 = 32\% \quad (1.51)$$

٣- فئة الإشخاص الذين لم يصابوا بالبرد أو بالإنفلونزا هى الفئة:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = (U-A)-B \quad (1.52)$$

وعدد الافراد الذين ينتمون لهذه الفئة 2040 شخص ونسبتهم

$$\frac{2040}{3000} x100 = 68\% \quad (1.53)$$

٤- من (1,51) ,(1.53) من الصعوبه وضع أى استنتاج عن تأثير الجرعات الأضافية من فيتامين C على منع الاصابة بالبردوالإنفلونزا لان ذلك يتطلب :

أ) أخذ فئة مقارنة أخرى مماثله من الأشخاص بنفس العدد 3000 شخص لعمل مقارنه بين الفئة التى تناولت الجرعات الأضافية والفئة الأخرى التى لم تتناول فى نفس الفترة الزمنية .

ب) أخذ التاريخ الصحى لفترة البحث (السنه) فى الأعتبار لتحديد العلاقة النسبية لتأثير الجرعات الأضافية لفيتامين C .

تطبيق (٤): تقوم ثلاثه شركات I,II,III بتوظيف الأموال فى المشروعات الأنتاجية بمدينه القاهرة . فإذا أخذت عينه مكونه من 5000 مودع من المقيمين بمدينه القاهرة فوجد :

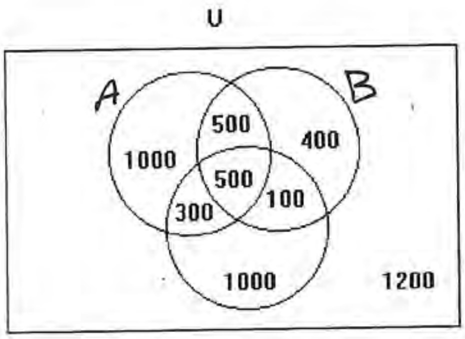
2300 مودع فى الشركه I ،
1500 مودع فى الشركة II ،
1900 مودع فى الشركة III ،
1000 مودع فى II, I معا ،
800 مودع فى III,I معا ،
600 مودع فى III,II معا ،
500 مودع فى III,II,I معا.

بأستخدام شكل فان لتحديد :

أ) نسبة المودعين فى الشركه I فقط .
ب) نسبة المودعين فى الشركقت الثلاثه معا .
ج) نسبه المودعين فى شركات أخرى غير C, B, A .

الحل

اذا فرضنا أن الفئات C,B,A تمثل عدد العلاء المودعين فى الشركة III,II,I على الترتيب كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (١-١٧)

أ) نجد أن الفئه التى تمثل المودعين فى الشركه I فقط هى :

$(A-B-C)$

ب) وبالتالى فأن نسبه المودعين فى الشركه I فقط هى :

$$\frac{1000}{5000} x100 = 20\%$$

ب) فئه المودعين فى الشركات الثلاثه معا هى :

$(A \cap B \cap C)$

ونسبتهم

$$\frac{500}{5000} x100 = 10\%$$

ج) فئه المودعين فى شركات أخرى غير I,II,III هى :

$(A \cup B \cup C)' = U-(A \cup B \cup C)$

ونسبتهم

$$\frac{1200}{5000} x100 = 24\%$$

Exercises

(١-٦) تمرينات

(١) بأستخدام طريقة الخاصة الواصفة ، عبر عن الفئةت التالية :

1- A={-10,+10,-9,+9,-8,+8,-7,+7,-6,+6}
2- V={1,4,9,16,25,36,49}
3- Q={8,27,64,125}
4- B={0,3,6,9,12,15,18,21,24,27}

(٢) عبر عن الفئةت التالية بطريقة السرد (القائمة)

1- $A\{a|2<a<11,\ a\varepsilon I\}$
2- $B=\{b|b\varepsilon R,\ b^2-3=0\}$
3- $C=\{x|x^2-6x+5=0\}$
4- $I=\{t||t-1|>-5,\ t\varepsilon I\}$
5- $D=\{x|x(x-5)(x-1)(x+4)=0,\ x\varepsilon N\}$

(٣) اذا كانت U تمثل فئة الأعداد الصحيحة الموجبة ، 'B تمثل فئة الأعداد الزوجية الموجبه ، عرف الفئة B .

(٤) أرسم شكل فان للفئات التالية :

U={2,4,8,10,12,14,16,18}
A={4,8,16}
B={2,4,6,8,16}

(٥) أكتب الفئات التالية بأستخدام الطريقة الخاصة الواصفة :

a) A={-9,16,-25,35,-49,46,-81,100}
b) A={10,100,1000,10000,100000}
c) A={8,27,64,125}

(٦) اذا كان :

$U=\{x|x\varepsilon I,\ -6<x<+11\}$

$A=\{a|a\varepsilon N, a<7\}$
$B=\{b|b\varepsilon I, -4<b<+6\}$

أوجد

a) A' , B'
b) $U-A$, $U-B$, $(U-A)-B$

(٧) أى الفئات التالية تعتبر فئات متساوية :

1- $A(\{x|x^3+6x^2+9x=0\}$
$B=\{x|x^2+3x=0\}$
$C=\{-3, 0\}$

(٨) اذا كان

$D=-3,0,3$
$U=\{x|x\varepsilon I, 0<x<20\}$
$A=\{5,10,15\}$
$B=\{2,4,6,8,10\}$
$C=\{1,5,9,15,17\}$

أوجد الفئات التالية

a) $A\cup B$
b) $A\cup B\cup C$
c) $A'\cap B'$
d) $A'\cup C'$
e) $A-B$
f) $A\cap B\cap C$
g) $A'\cup B$
h) $A'\cap B$
i) $(A\cap B\cap C)'$
j) $U-A-B-C$

(٩) اذا كان B,A فئتين جزئيتان من الفئة الشاملة U ، أثبت أن

1- $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$
2- $(A\cup B)'=A'\cap B'$
3- $(A\cup B)=B\cup(A\cap B')$
4- $A\cap(A\cap B)=A\cap B$
5- $\cap(A\cap B)$

(١٠) أرسم شكل فان الذى يمثل العلاقات التالية

1- $A \subset B \subset U$

2- $B \subset U,\ A \cap B = \phi$

3- $C \subset B,\ B \subset A$

(١١) أثبت أن :

1- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(١٢) اذا كان

$A \cap B = \phi$

فإن

$A \cup B' = B'$

حيث أن B', A فئتين جزئيتين من الفئة الشاملة U.

(١٣)يقوم أحد مراكز علاج السرطان بعمل دراسة عن تأثير العوامل التالية بالنسبه للاصابه الشخص بالسرطان .

- التدخين ،
- أدمان الكحوليات ،
- عمر الشخص 40 عام فأكثر ،

فأخذت عينة مكونة من 5000 مصاب وبتصنيف البيانات وجد أن :

2000	مصاب و مدخن ،
1550	مصاب ومدمن كحليات ،
1530	مصاب - عمر كل منهم 40 فأكثر،
1350	مصاب ومدخن ومدمن كحليات .
1150	مصاب ومدخن وعمره 40 فأكثر.
1080	مصاب ومدمن كحليا ت وعمره 40 فأكثر .
100	مصاب ومدخن ومدمن كحليات وعمره 40 فأكثر .

١- أرسم شكل فان لتمثيل البيانات السابقة .
٢- ماهو عدد المصابين ومدخنين فقط .
٣- ماهو عدد المصابين ومدمنين كحوليات فقط .
٤- ماهو عدد المصابين وعمرهم 40 فأكثر فقط .
٥- ماهو عدد المصابين بالسرطان وليس لهم الخصائص الثلاثة السابقة (التدخين - أدمان الكحليات - العمر 40 فأكثر).

(١٤) تقوم الهيئة العامة للاذاعة والتليفزيون بعمل بحث لدراسة متابعة الجمهور للنشرة الاخبارية اليومية من خلال الراديو أو التليفزيون . فأخذت عينة من الجمهور حجمها 500 مواطن ويسأل كل منهم وجد أن :

350 مواطن يتتبعون الأخبار من خلال التليفزيون .
125 من خلال الراديو ، 100 يتتبعون الاخبار من خلال مشاهدة التليفزيون والاستماع للراديو معا .

١- كون شكل فان لعرض نتائج الدراسة
٢- كم عدد الواطنين مشاهدى الأخبار بالتليفزيون فقط .
٣- كم عدد المواطنين مستعمى الأخبار بالراديو فق ط.
٤- كم عدد المواطنين غير المتتبعين للأخبار عن طريق التليفزيون أو الراديو .

(١٥) فى أحد المؤسسات الاجتماعية إجريت دراسة على 1000 طفل لمعرفة إستعداد الطفل لوراثة السلوك غير السوى من الام أو من الاب ، فوجد أن
300 طفل لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الاب
210 طفل لوراثة السلوك غير السوى من الام
160 طفل لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الام والاب معا .
١- ماهى نسبة الاطفال الذين لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الاب فقط .

٢- ماهى نسبة الاطفال الذين لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الام فقط .

٣- ماهة نسبة الاطفال الذين لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الاثنين .

٤- ماهى نسبة الاطفال الذين ليس لديهم الاستعداد لوراثة السلوك غير السوى من الام أو الاب .

(١٦) تقوم احدى قنوات التليفزيون بدراسة تأثير البرامج :

- الاخبارية .
- الرياضية .
- الاعلامية .

على المشاهدين ، فأخذت عينة من المشاهدين حجمها 5000 مشاهد ، ويسأل كل فرد منهم عن متابعته للبرامج السابقة وجد أن :

3000 يتابعون البرامج الرياضية .
2000 يتابعون البرامج الاعلانية .
2500 يتابعون البرامج الاخبارية .
1750 يتابعون البرامج الاخبارية والرياضية .
1000 يتابعون البرامج الاخبارية والاعلانية .
1250 يتابعون الرياضية والاعلانية .
500 يتابعون البرامج الثلاثة معا .

١- ماهى نسبة المشاهدين للبرامج الاخبارية فقط .

٢- ماهى نسبة المشاهدين للبرامج الاعلانية فقط .

٣- ماهى نسبة المشاهدين للبرامج الرياضيه فقط .

٤- ماهى نسبة المشاهدين لبرامج يـر البرامج الثلاثة (الاخبارية - الرياضية - الاعلانية) .

الباب الثانى

الدوال الرياضية

Mathematical Functions

(٢-١) الدالة والمتغير Function and Variable

(أولا) الدالة

اذا كان لدينا فئتين B, A بحيث يعتمد تحديد عناصر الفئه B على عناصر الفئة A. أى أنه يوجد علاقة Relationship بين عناصر الفئة A وعناصر الفئة B وتأخذ هذه العلاقة صياغة رياضية يطلق عليها الدالة Function.

وبالتالى ، فأن الدالة هى قاعدة رياضية Mathematical rule بأستخدامها يتم تحديد لكل عنصر a بحيث $a \varepsilon A$ عنصرا وحيدا مناظرا له b بحيث $b \varepsilon B$. ويرمز الى هذه القاعدة بالرمز f وتكتب على النحو التالى .

$$f : A \rightarrow B \tag{2.1}$$

أو

$$A \xrightarrow{f} B \tag{2.2}$$

وتسمى الفئة A بنطاق الدالة Domain f ، والفئة B بالنطاق المصاحب للدالة Co. domain f أو المدى Range .

اذا كان a عنصر فى فئه النطاق A أى $a \varepsilon A$, b عنصر فى فئة المدى B، أى $a \varepsilon B$، الذى تعينه (تحدده) الدالة f والمناظر للعنصر a ، فاننا نرمز لذلك كبالرمز

$$f(a) = b \tag{2.3}$$

ومما سبق يتضح أن الدالة هى بمثابة جهاز للمدخلات والمخرجات Input/output device. فبأستخدام هذه القاعدة الرياضية (الدالة) يتم تحويل المدخلات (النطاق) الى مخرجات (المدى) كما هو موضح بالشكل التالى .

شكل (٢-١)

مثال (٢-١)
اذا كانت f هى الدالة التى تعيين لكل عدد حقيقى r (بحيث rεR) مربعه . فأن نطاق الدالة فى هذه الحالة ، هو فئة الاعداد الحقيقية R ، كذلك المدى هو فئة الاعداد الحقيقية غير السالبة ، وتكتب على النحو :

$$f(r) = r^2 \quad , \quad r \varepsilon R \tag{2.4}$$

وبالتالى اذا كان

$$\begin{aligned} r &= 1 \rightarrow f(1) = (1)^2 = 1 \\ r &= 5 \rightarrow f(5) = (5)^2 = 25 \\ 5 &= -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{aligned} \tag{2.5}$$

مثال (٢-٢)
اذا كانت الدالة f هى الدالة التى تعيين لكل عدد حقيقى r مكعبه مضاف اليه مربعه . فان نطاق الدالة ومدها هو فئة الاعداد الحقيقية أى أن :

$$f : R \rightarrow R \tag{2.6}$$

أو

$$f(r) = r^3 + r^2 \quad , \quad r \varepsilon R \tag{2.7}$$

وبالتالى فأن

$$r = 1 \rightarrow f(1) = (1)^3 + (1)^2 = 2$$
$$r = 2 \rightarrow f(2) = (2)^2 \ + (2)^2 = 8+4 = 12$$
$$r = -5 \rightarrow f(-5) = (-5)^3 + (-5)^2 = -125 + 25 = -100$$

مثال (٢-٣)
اذا كان X هو عدد الوحدات المنتجة يوميا من منتج معين ، C هى التكلفة الكلية للوحدات المنتجة يوميا . وبالتالى تحديد C يعتمد على X. حيث يمكن كتابة C على النحو

$$C = f(x) \tag{2.8}$$

حيث X هى النطاق ، C هى المدى للدالة f فاذا تم تحديد f(x) بحيث :

$$f(x) = 2x + 10 \tag{2.9}$$

فأنه اذا كان

$X = 100 \rightarrow C = 2(100) + 10 = 210$
$X = 500 \rightarrow C = 2(500) + 10 = 1010$

النطاق والمدى المقيد **Restricted Domain and Range**

اذا كانت X هى فئة النطاق للدالة f بحيث ، عناصر الفئة X محصورة بين القيمتين L, U أى

$$L \leq X \leq U \qquad (2.10)$$

وكانت Y هى فئة المدى للدالة f ، أى أن

$$Y = f(x)$$

فأن عناصر فئة المدى لابد أن تكون محصورة بين القيمتين f(L), f(U) أى أن

$$f(L) \leq Y \leq f(U) \qquad (2.12)$$

وفى هذه الحالة يسمى النطاق X ، والمدى Y ، بالنطاق والمدى المقيدين Restricted domoin and range.

(ثانيا) المتغير

المتغير Variable هو الشئ الذى يمكن أن يأخذ قيما مختلفة فى الظروف المختلفة (زمنية ، مكانية ، سياسية ، اقتصادية ، ..). فمثلا سعر كيلو الدقيق يختلف من سوق الى آخر ، ومن عام الى آخر ، ... كذلك وزن الفرد يمثل متغير وفقا للزمن .

ونظرا لان المتغير يأخذ قيما مختلفة ، فعادة يرمز له برمز x مثلا .

كذلك الشئ الثابت Constant هو مقدار لايتغير بتغير الظروف ، وعادة يرمز له بالرمز C.

واذا كان لدينا متغيران Y , X تربط بينهم العلاقة (الدالة) f بحيث :

$$Y = f(x) \qquad (2.13)$$

فان المتغير X الذى يمثل نطاق الدالة f يسمى بالمتغير المستقل Independent variable، ويسمى مدى الدالة Y, f بالمتغير التابع Dependent variable.

والمتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمه بين قيمتين معينتين يسمى متغير متصل Continuous variable، خلاف ذلك يسمى متغير متقطع Discrete variable.

مثال (٢-٤)

اذا كان N متغير يمثل عدد الاطفال الممكن انحابهم فى الاسرة فأن N ممكن أن تأخذ القيم ...,0,1,2,3,4 ويكتب ...,N=0,1,2,3 ، ولايمكن أن يأخذ القيمة 2.5، أو 2.51، وبالتالى فأن N يمثل متغير متقطع .

مثال (٢-٥)

اذا كان A متغير يمثل عمر الفرد فمن الممكن أن يأخذ المتغير A القيمة 15 سنة أو 15.2 سنة أو 15.21 سنة ، وبالتالى فأن المتغير A يمكن أن يأخذ أى قيمة فى مدى العمر حسب درجة الدقة فى القياس ، وبالتالى فأن A يمثل متغير متصل .

مثال (٢-٦)

اذا كان

$$\text{(i)} \quad D = \{x | x \in I,\ 0 \leq x \leq 10\} \tag{2.14}$$

فأن x يمثل متغير متقطع محصور بين 0, 10 ويأخذ القيم :

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \tag{2.15}$$

أما اذا كان

$$\text{(ii)} \quad A = \{x | x \in R\ ,\ 0 \leq R \leq 10\} \tag{2.16}$$

فأن x يمثل متغير متصل يمكن أن يأخذ أى قيمة بين الصفر والعشرة مثل 2.5أو 9.31 ويكتب على النحو :

$$0 \leq x \leq 10 \tag{2.17}$$

(٢-٢) أنواع الدوال Types of Functions

يمكن تصنيف الدوال وفقا لخصائصها الرياضية Mathematical properties.، وفى هذا الفصل سوف نقدم بعض أنواع الدوال الاكثر استخداما فى المجالات التجارية والاقتصادية والاجتماعية .

١- الدالة الثابتة Constant Function

اذا كان

$$y = f(x) = a_0 \tag{2.18}$$

حيث a_0 مقدار ثابت فأن y أو $f(x)$ تسمى الدالة الثابته ، أى لاتتغير قيمة y مع تغير قيمة x ، أو بعبارة اخرى أن فئة المدى للدالة f تتكون من عنصر واحد فقط هو a_0 .

مثال (٢-٧)

اذا كان

$$y = f(x) = 50 \tag{2.19}$$

فعندما

$x = 1 \rightarrow y = 50$

$x = 2 \rightarrow y = 50$

$x = -5 \rightarrow y = 50$

وبالتالى فأن الدالة $f(x)$ فى (2.19) هى دالة ثابتة ، حيث أن قيمة y لاتتغير بتغير قيمة x.

٢- الدالة الخطية Linear function

اذا كان

$$y = f(x) = a_1 x + a_0 \tag{2.20}$$

حيث a_0 , a_1 مقادير ثابته، $a_1 \neq 0$ ، فأن الدالة $f(x)$ تسمى دالة خطية فى المتغير x.

مثال (٢-٨)

اذا كان

$$y = f(x) = 5x + 2$$

أوجد قيمة y عندما $x = 10, -1$

$$x = 10 \rightarrow y = f(10) = 5(10) + 2 = 52$$
$$x = -1 \rightarrow x = f(-1) = 5(-1) + 2 = -3$$

٣- الدالة التربيعية Quadratic Function

اذا كان

$$y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{2.21}$$

حيث a_0, a_1, a_2 مقادير ثابته ، $a_2 \neq 0$. فان f(x) تسمى دالة تربيعية فـي المتغير x.

مثال (٢-٩)

اذا كان

$$y = f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

وبالتالى عندما

$$x = 1 \rightarrow y = f(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 5 = 6$$
$$x = -1 \rightarrow y = f(-1)=3(-1)^2-2(-1)+5=10$$
$$x = 5 \rightarrow y= f(5) = 3(5)^2-2(5) + 5 = 70$$

٤- الدالة التكعيبية Cubic Function

اذا كان

$$y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{2.22}$$

حيث a_0, a_1, a_2, a_3 مقادير ثابته ، $a_3 \neq 0$ ، فـان f(x) تسـمى دالـة تكعيبيـه فـى المتغير x.

مثال (٢-١٠)
اذا كان

$$y = f(x) = x^3 - x^2 + 2 + 10$$

أوجد قيم y عندما $x = 1,-1,2$

عندما

$$x = 1 \rightarrow y = f(x) = (1)^3 - (1)^2 + 2(1)+10 = 12$$
$$x = 1 \rightarrow y = f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2(-1)+10 = 6$$
$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = (2)^3 - (2)^2 + 2(2)+10 = 18$$

٥- الدالة متعددة الحدود **Polynomial function**

اذا كان

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i} \qquad (2.23)$$

حيث a_{n-i}. مقادير ثابته $i=0,1,2,..,n$.

ملحوظة :
يلاحظ أن الدوال الاربعه الاولى السابقه تعتبر حالات خاصه من الدالة متعددة الحدود فبالتعويض فى (2.23) بـ n=0 نحصل على الدالة الثابته . وبالتعويض بـ n=1 نحصل على الدالة الخطيه ، n=2 نحصل على الدالة التربيعيه وأحيانا تسمى الدالة f(x) فى (2.23) بالدالة من الدرجة n فى المتغير x.

مثال (٢-١١)
اذا كان

$$y = f(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 8 \qquad (2.24)$$

أن الدالة y دالة من الدرجة الخامسة فى المتغير x .
أوجد قيمة y عندما x=1,2,0.8
بالتعويض فى (2.24) نجد أن :

$$x=1 \rightarrow y = f(1)=2(1)^5 -2(1)^3 + 3(1)^2 + 8$$
$$= 2-2+3+8 = 11$$

$$x=2 \rightarrow y = f(2)=2(2)^5 -2(2)^3 + 3(2)^2 + 8$$
$$= 2(32) - 2(8) + 3(4) + 8$$
$$= 64 - 16 + 12 + 8$$
$$= 68$$

$$x = 0.8 \rightarrow y = f(0.8) = 2 (0.8)^5 - 2(0.8)^3 + 3(0.8)_2 + 8$$
$$= 0.655 - 1.024 + 1.92 + 8$$
$$= 9.551$$

٦- الدالة الاسية : **Exponential Function**

اذا كان

$$y = f(x) = (a_0)^{g(x)} \tag{2.25}$$

حيث a_0 مقدار ثابت ، g(x) دالة متعددة الحدود فى x ، فأن الدالة f(x) فى (2.25) تسمى دالة أسيه فى المتغير x.

واذا كان المقدار الثابت a_0 يساوى 2.71828 ، فى هذه الحالة يرمز له بالرمز e فأن الدالة :

$$y = f(x) = (2.71828\ldots)^{g(x)}$$
$$= e^{g(x)} \tag{2.26}$$

وتسمى الدالة $e^{g(x)}$ بالدالة الآسية أيضا . وللدالة الآسية أشكال اخرى متعددة سوف نتناول بعضها فى الفصول التالية :

مثال (٢-١٢)
اذا كان

$$(i)\quad f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$$

$$(ii)\quad f(x)=e^{x^2-1}$$

أوجد قيم y عندما $x = 0,1,2$
عندما

$$(i)\quad x=0\rightarrow y=f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$$

$$x=1\rightarrow y=f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$$

$$x=2\rightarrow t=f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$$

$$(ii)\quad x=0\rightarrow y=f(0)=e^{0-1}=e^{-1}=\frac{1}{2.71828}=0.369$$

$$x=1\rightarrow y=f(1)=e^{1-1}=e^{0}=1$$

$$x=2\rightarrow y=f(2)=e^{4-1}=e^{3}=20.09$$

٧- الدالة النسبية **Rational Function**

اذا كانت

$$y=f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

حيث أن كل من $h(x), g(x)$ دالة متعددة الحدود فى المتغير x. وبالتالى فأن $f(x)$ هى عبارة عن النسبة بين الدالتين $h(x), g(x)$ ، ولذلك سميت بالدالة النسبية .

مثال (٢-١٣)
اذا كانت y دالة فى المتغير x بحيث

$$y = f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 1}{2x + 1} \qquad (2.28)$$

أوجد قيمة y عندما x=0, -1,3
بالتعويض فى (2.28) عندما

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{3(0)^2 + 5(0) - 1}{2(0) + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x = -1 \rightarrow y = f(-1) = \frac{3(-1)^2 + 5(-1) - 1}{2(-1) + 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$x = 3 \rightarrow y = f(3) = \frac{3(3)^2 + 5(3) - 1}{2(3) + 1} = \frac{27 + 15 - 1}{7} = \frac{41}{7}$$

٨- الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

اذا كانت

$$y = f(x) = \log_{10}[h(x)] \qquad (2.29)$$

حيث h(x) دالة متعددة الحدود فى المتغير x ، فأن الدالة f(x) فى (2.29) تسمى بالدالة اللوغاريتمية للاساس (10).

كذلك اذا كان :

$$y = f(x) = \log_e [h(x)] = \ln (h(x)) \qquad (2.30)$$

فأن الدالة f(x) فى (2.30) تسمى بالدالة اللوغاريتمية للاساس (e) .

وتعتبر كل من الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية من الدوال الاكثر أستخداما فى الدراسات التطبيقية التجارية والاقتصادية وباقى الدراسات الانسانية .

مثال (٢-١٤)

اذا كان

(i) $y = f(x) = \log_{10}(2x+1)$

(ii) $y = f(x) = 1n(x^2 - 2)$

أوجد قيمة y عندما x=2,5

عندما

(i) $x = 2 \rightarrow y = f(2) = \log_{10}(2(2)+1) = \log_{10}(5)$
$= 0.699$
$x = 5 \rightarrow y = f(5) = \log_{10}(2(5)+1) = \log_{10}(11)$
$= 1.041$

عندما

(ii) $x = 2 \rightarrow y = f(2)1n(2^2 - 2) = 1n(2)$
$=0.693$
$x = 5 \rightarrow y = f(5)1n(5^2 - 2) = 1n(23)$
$= 3.135$

٩- الدالة التجميعية Combination function

اذا كانت

$$y = f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)+\ldots+f_k(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \qquad (2.31)$$

حيث $f_i(x)$ $i=1,2,..,k$, تمثل دوال من أى نوع من الأنواع السابقة فى المتغير x .

مثال (٢-١٥)
اذا كان

$$f_1(x) = 2x^2 + 1, \quad f_2(x) = e^{5x} + 10, \quad f_3(x) = 1n\ x^2$$

فان

$$y = f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$$
$$(2x^2 + 1) + (e^{5x} + 10) - 1n\ x^2$$

و اذا كان

$$x = 1 \rightarrow y = f(1) = 2(1) + 1) + (e^5 + 10) - 1n(1)$$
$$= 3+[148.41+10] - 0$$
$$= 161.41$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = (2(2) + 1) + (e^{10} + 10) - 1n(2)$$
$$= (5)+(22026.47+10)-(0.69)$$
$$= 22040.78$$

١٠- الدالة المركبة **Composite Function**

اذا كان

$$y=g(u) \quad (2.32)$$
$$u=h(x) \quad (2.33)$$

وبالتالى فأن

$$y=f(x)=g(h(x))$$

وتسمى الدالة f(x) بالدالة المركبة فى المتغير x حيث المتغير x يمثل النطـاق للدالـة h(x) كذلك تمثل الدالة h(x) النطاق للدالة f(x) .

مثال (٢-١٦)
اذا كانت

$$y = f(x) = g(u) = u^2 - 2u + 10 \quad (2.35)$$

حيث

$$u=h(x)=x+1 \qquad (2.36)$$

فأن الدالة f(x) تعتبر دالة مركبة فى x أى أن

$$y=f(x)=g(h(x))=g(x+1) \qquad (2.37)$$

فبالتعويض فى (2.35) بالدالة h(x) فى (2.37) نجد أن

$$\begin{aligned} y = f(x) = g(x+1) &= (x+1)^2 - 2(x+1) + 10 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 10 \\ &= x^2 + 9 \end{aligned}$$

مثال (٢-١٧)

اذا فرضنا أن y هو عدد البائعين فى أحد المحلات الكبرى ، x هو عدد الوحدات المعروضه للبيع من منتج معين ، P هو سعر البيع للوحدة ، حث وجد أن

$$y=g(x)=2x+50 \qquad (2.38)$$

أىْ أن عدد البائعين يعتمد على عدد الوحدات المعروضةللبيع ويتحدد بالعلاقة (2.38).

وبما أن عدد الوحدات المعروضه للبيع يعتمد على سعر البيع الوحدة (P) ، فاذا كان

$$x=h(P) = 150 - 2.5P \qquad (2.39)$$

ومن (2.38) ,(2.39) يتضح أن عدد البائعين فى المحل يعتمد على سعر بيع الوحدة الواحدة بمعنى أن :

$$y=g(x) = g(h(P)) \qquad (2.40)$$

فبالتعويض فى (2.38) بـ (2.39) نجد عدد البائعين دالة فى سعر بيع الوحدة ويمثل بالدالة التالية :

$$\begin{aligned} y=g(h(P)) &= 2[150-2.5p] + 50 \\ &= 300 - 5P + 50 \\ &= 350 - 5P \qquad (2.41) \end{aligned}$$

وبالتالى اذا كانت سعر بيع الوحدة $P=10$ ، فأن عدد البائعين المطلوب هو :

$y=300-5(10 = 350-50 = 300$ بائع

وفى هذه الحالة تكون عدد الوحدات المعروضه للبيع هو

$x=h(10)= 150 - 2.5(10)$

$= 150 - 25 = 125$ وحدة

(٢-٣) الدوال متعددة المتغيرات Multivariate Functions

عادة يعتمد المتغير التابع على أكثر من متغير واحد مستقل Independent variables . وفى هذه الحالة يقال أن المتغير التابع دالة متعددة المتغيرات المستقلة Multivariate function .وفى أغلب التطبيقات الفعلية عادة تكون الدوال - دوال متعددة المتغيرات ، وعلى سبيل المثال تعتمد تكلفة الوحدة المنتجة من سلعة ما على :

١- أسعار المواد الداخلة فى انتاجها ،
٢- حجم المنشأة ،
٣- المستوى التكنولوجى للانتاج .

وعادة اذا كان Z دالة فى المتغيران المستقلين y, x فاننا نرمز لها بالرمز

$$Z = f(x,y) \qquad (2.42)$$

وتسمى Z دالة فى متغيرين Bivariate function .

واذا كان y دالة فى عدد n من المتغيرات المستقله $x_1,x_2,...,x_n$ ، ففى هذه الحالة تسمى دالة متعددة المتغيرات ويرمز لذلك بالرمز

$$y = f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (2.43)$$

مثال (٢-١٨)

أوجد قيمة z عندما

$x=2$, $y=5$

حيث

$$z = f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 10 \qquad (2.44)$$

بالتعويض فى (2.44) بـ x=2, y=5 نجد أن

$$z = f(2,5) = (2)^2 - 2(2)(5) + (5)^2 - 10$$
$$=4-20+25-10$$
$$= -1$$

مثال (٢-١٩)

اذا كان

$$y = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$== x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^3 + x_x^2x_4 + x_4^2 - 10$$

فأنه عندما

$$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 4$$

نجد أن

$$y = f(-2,0,1,4) = (-2)^2 - 2(-2)(0) + (1)^3 + (1)^2(4) + (4)^2 - 10$$
$$=4-0+1+4+16-10$$
$$= 17.$$

مثال (٢-٢٠)

تقوم احدى مؤسسات الكهرباء بحساب الفاتورة الشهريةلاستهلاك الكهرباء بالنسبة لشريحة معينة من العملاء بطريقة تعتمد على عدد الكيلو وات / ساعة المستهلكة خلال الشهر مضاف اليها 2 جنيهات خدمة . حيث أن تكلفة الكيلو وات / ساعة 2.50 جنية. فاذا كان C هى قيمة الفاتورة الشهرية للعميل ، k عدد الكيلو وات المستهلكه خلال الشهر .

أ) أوجد دالة التكلفة الشهرية للعميل .

ب) بأستخدام الدالة فى (أ) أوجد قيمة الفاتورة لعميل استهلك 520 كيلو وات خلال الشهر.

الحل

أ) تتحدد قيمة الفاتورة C من العلاقة

$$C=f(k)=0.50k+2$$

ب)

$$C=f(520)=0.50(520)+2$$
$$=260+2$$
$$= 262$$ جنية

مثال (٢-٢١)

فى المثال السابق ، اذا كانت الدالة المستخدمة (الطريقة المستخدمة) لحساب الفاتورة بالنسبه للعملاء من الشريحة التى تستهلك مابين 200 ,1500 كيلو وات / ساعة شهريا . حدد النطاق والمدى المقيد لهذه الدالة .

الحل

$$C=f(k) = .50k+2 \qquad 200 \leq k \leq 1500$$

وبالتالى فأن فئة النطاق للدالة f(k) هى الفئة

$$K=\{k|k\varepsilon R, \quad 200 \leq k \leq 1500\} \qquad (2.45)$$

كذلك فئة المدى هى

$$C=\{c|c\varepsilon R, \quad 102 \leq c \leq 752\} \qquad (2.46)$$

(٢-٤) التمثيل الهندسى للدوال Graphical Representation of Fanctions

يمكن تمثيل بعض الدوال هندسيا (أو بيانيا) اذا كانت الدالة فى متغير واحد أو متغيرين مستقلين على الأكثر.

ورسم الدالة يتطلب وجود محور لكل متغير مستقل بالاضافة لمحور يمثل مدى الدالة (المتغير التابع).

وبالتالى فأن الدالة فى متغير واحد يتطلب رسمها بأستخدام محورين ، والدالة فى متغيريين يتطلب رسمها ثلاثه محاور.

وفى هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا على التمثيل الهندسى للدالة فى متغير واحد ، وذلك سوف يتضح من خلال بعض الامثلة التالية .

مثال (٢-٢٢)

اذا كان

$$y=f(x)=3x-2 \tag{2.47}$$

فأنه يمكن تمثيل الدالة y هندسيا على النحو التالى :

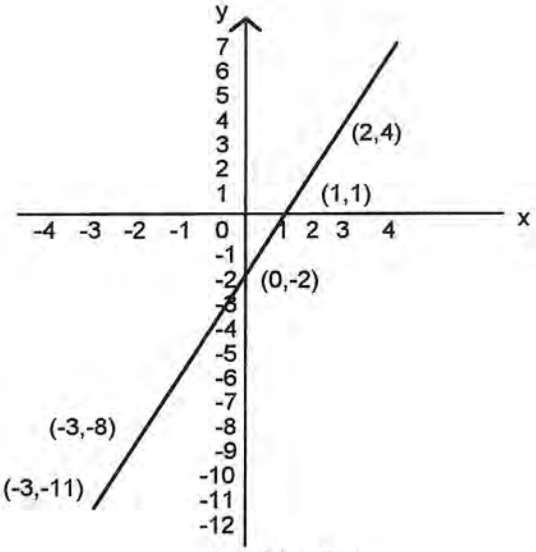
١- يخصص المحور الافقى عادة للمتغير المستقل x والمحور الرأسى للمتغير التابع y.

٢- نختار عدد من القيم للمتغير x ونحسب القيم المناظرة لها للمتغير y بأستخدام العلاقة (2.47)، أى نحدد عدد من النقط (x,y) التى تحقق العلاقة (2.47) كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-١)

x	-3	-2	0	1	2	3
y	-11	-8	-2	1	4	7

٣- يرسم المحوران y,x ثم نحدد على المحورين النقط (x,y) الموضحة بالجدول كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢-١)

ونظرا لان الدالة y=3x-2 تمثل علاقة خطية ، فنجد أنها تمثل بيانيا بخط مستقيم كما هو موضح بالشكل السابق .

مثال (٢-٢٣)

مثل الدالة التالية هندسيا :

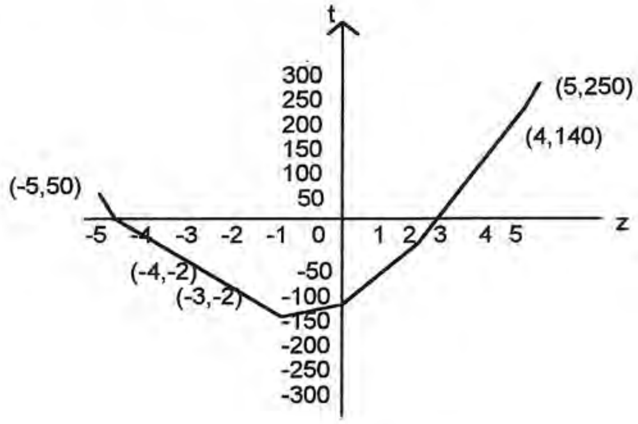
$$t = f(z) = 10z^2 + 20z - 100 \qquad (2.48)$$

حيث z هو المتغير المستقل ، t هو المتغير التابع بنفس الخطوات فى المثال السابق يمكن رسم الدالة t . لذلك نفترض قيم للمتغير المستقل z ونحسب من العلاقة (2.48) القيم المناظرة لها للمتغير t ، كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-٢)

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
t	50	-20	-70	-100	-110	-100	-70	-20	50	140	250

ويتحدد النقط الموضحة بالجدول على المحورية z ، t نحصل على الشكل التالى :



شكل (٢-٢)

مثال (٢-٢٤)

أرسم الدالة التالية

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 \le x < 10 \\ 3x-5 & x \ge 10 \end{cases} \qquad (2.49)$$

من العلاقة (2.49) يتضح أن نطاق الدالة y معرف فى فئتين هما

$$x_1 = \{x | 0 \le x < 10\}$$

$$x_2 = \{x | x \ge 10\}$$

وبالتالى المدى معرف أيضا فى فئتين هما :

$$y_1 = \{y | y = 2x+1, \quad 0 < x < 10\} \qquad (2.50)$$

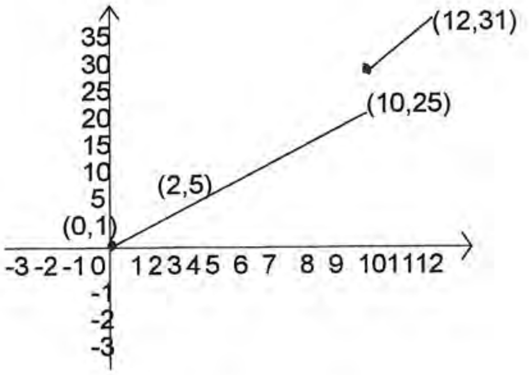
$$y_2 = \{yy = 3x-5 \;, \quad x \ge 10\} \qquad (2.51)$$

ولرسم الدالة y تختار قيم للمتغير x ونحدد قيم y المناظرة لها بالتعويضا فى العلاقة (2.49) كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-٣)

x	0	1	2	10	11	12
y	1	3	5	25	28	31

والشكل التالى يوضح الدالة (2.49).



شكل (٢-٣)

مثال (٢-٢٥)

وضح بيانيا الدالة z حيث

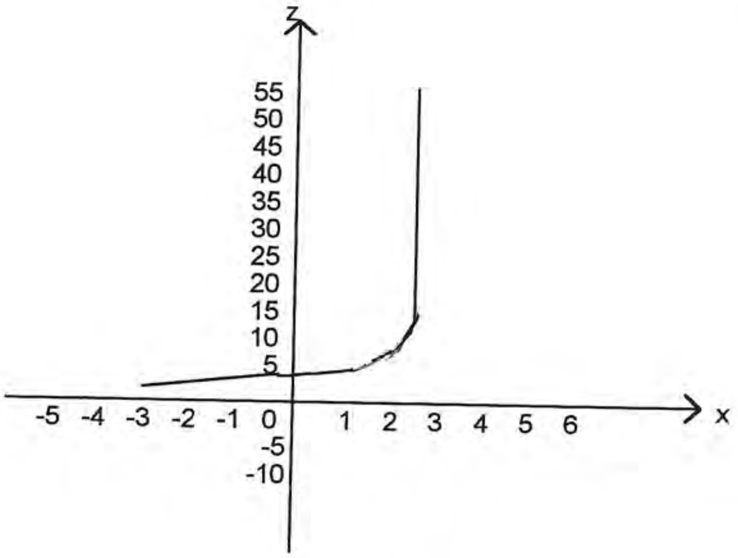
$$z=f(x) = e^{x} \qquad (2.52)$$

لرسم الدالة z ، نفترض قيم للمتغير x ونحسب قيم z المناظرة لها ، كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-٤)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
z	.05	.14	.37	1	2.2	7.39	20.09	54.6

والشكل التالى يوضح الدالة z.



شكل (٢-٤)

= 250+235+100+70
= 650 جنية

(٢-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١):

تقوم احدى الشركات بحساب التكلفة الكلية للوحدات المنتجة من منتج معين بأستخدام الدالة

$C=f(x)=(x-3)^2+10$, $0 \le x \le 10$

حيث C هى التكاليف الكلية بالالف جنية ، x عدد الوحدات المنتجة بالالف وحدة .

أ) أرسم دالة التكلفه الكلية C .

ب) من الرسم حدد عدد الوحدات المنتجة التى تجعل التكاليف أقل مايمكن .

ج) حدد المدى المقيد للدالة C .

د) أحسب التكلفه اذا كان عدد الوحدات المنتجة 20 ألف وحدة .

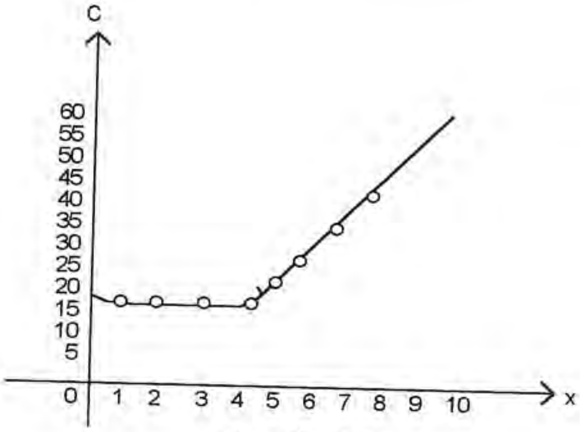
الحل

أ) نفترض قيم للمتغير x داخل المدى $0 \le x \le 1000$ ، ونحسب قيم C المناظرة لها كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٢-٥)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	19	14	11	10	11	14	19	26	35	46	59

وبتحدد قيم (x,C) بأستخدام المحور الافقى x والرأسى C كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢-٥)

ب) من الرسم يتضح أن التكلفة تكون أقل مايمكن عندما $x=3$ ، وفى هذه الحالة نجد أن $C=10$.

ج) بما أن $0 \le x \le 10$ فبالتعويض فى الدالة C عندما $x=0$ ← $C=10$ كذلك عندما $x=10$ ← $C=59$ وبالتالى فان $10 \le C \le 59$.

د) عندما $x=20$ فأننا يمكن تحديد قيمة C المناظرة لها وذلك بالتعويضا فى الدالة C على النحو التالى :

$$C = f(20) = (20-3)^2+10$$
$$=(17)^2+10$$
$$=299000$$ جنية

تطبيق (٢):

تقوم أحدى شركات التأمين بتصنيف عملائها الى ثلاثة فئات I, II, III وفقا للدخل الشهرى للعميل . فاذا كانت عمولة المندوب عن قيامه بعمل بوليصه لعميل ينتمى الى الفئة I هى 50 جنية ، وعمولته عن عمل بوليصه لعميل ينتمى الى الفئة II هى 75 جنية وعن بوليصه لعميل ينتمى الى الفئة III هى 100 جنية ، واذا كان المرتب الشهرى للمندوب هو 70 جنية مضاف اليه عمولاته عن عدد البوليصات التى يقوم بعملها .

والمطلوب

أ) تحديد دالة المرتب الشهرى للمندوب بالشركة .

ب) اذا كان أكبر عدد ممكن من بوليصات التأمين التى يقوم بها المندوب من الأنواع الثلاثة هى 5,3,1 على الترتيب فى الشهر ، ماهو أقصىء مرتب شهرى ممكن أن يصل اليه المندوب .

الحل

أ) اذا فرضنا أن y هو المرتب الشهرى للمندوب بالجنية ، x_1 هو عدد البوليصات التى يقوم بعملها خلال الشهر من النوع I ، x_2 عدد البوليصات التى يقوم بعملها من النوع II ، x_3 عدد البوليصات التى يقوم بعملها من النوع III ، وبالتالى فان y هى دالة فى المتغيرات $x_3,x_2,x_1,$ ، على النحو :

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 50x_1 + 75x_2 + 100x_2 + 70$$

ب) اذا كان $x_1=5, x_2=3, x_3=1$ فأن مرتب المندوب فى هذه الحالة يتم تحديده بالتعويض فى الدالة y على النحو :

$$y=f(5,3,1)=50(5)+75(3)+100(1)+70$$

تطبيق (٣):

تقوم أحدى شركات صناعة أوراق الكتابه بأنتاج ثلاثة أنواع I, II, III وفقا لوزن وحجم الورقة . فاذا فرضنا أن عائد الوحدة الواحدة من النوع I هو 5 جنيهات، ومن النوع II هو 4 جنيهات ، ومن النوع III هو 2 جنيه .

المطلوب

أ) تحديد دالة العائد اليومى للشركة من أنتاج الأنواع الثلاثة .

ب) اذا كان أقصى عدد ممكن انتاجه من الأنواع الثلاثه على الترتيب هو 20,10,5 بالألف وحدى فى اليوم . ماهو أقصى عائد يومى ممكن أن تحققه الشركة من الأنتاج .

الحل

أ) اذا فرضنا أن y هو العائد اليومى للشركة من أنتاج عدد x_1 وحدة من النوع I، وعدد x_2 وحدة من أنتاج النوع II ، وعدد x_3 وحدة من أنتاج النوع III. وبالتالى فأن y دالة فى المتغيرات x_3,x_2,x_1 على النحو التالى :

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

ب) أقصى عائد يومى ممكن أن تحققه الشركه هو

$$y = f(x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 5) = 5(20) + 4(10) + 2(5)$$
$$= 100+40+10$$
$$= 150$$ ألف جنية

تطبيق (٤):

اذا كانت دالة العائد الكلى السنوى لاحدى الشركات الانتاجية هى :

$$R=f(x)=5+100x-x^2 \qquad x \geq 5$$

حيث x تمثل حجم المشروع بالألف جنية .

أ) ارسم دالة العائد R .

ب) من الرسم حدد الحجم الأمثل للمشروع .

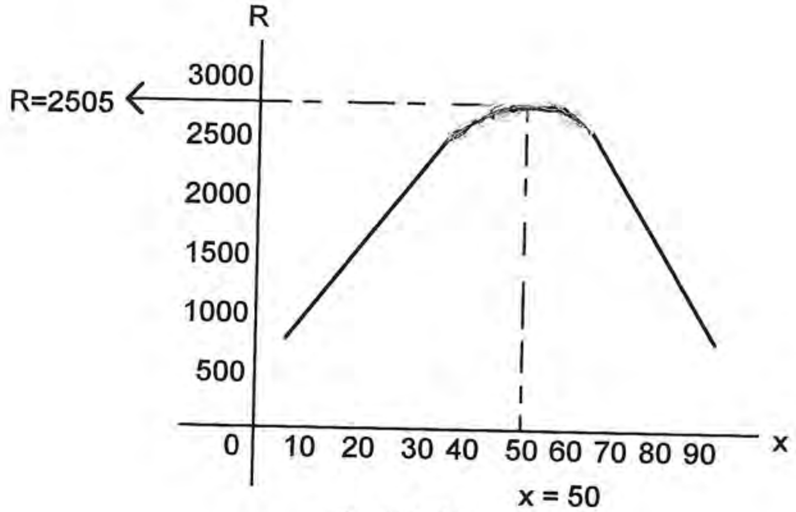
ج) قدر العائد عندما يكون حجم المشروع 40 ,60 ألف جنية .

الحل

أ) لرسم الدالة R نكون الجدول التالى :

جدول (٢-٦)

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R	905	1605	2105	2405	2505	2405	2105	1605	905



شكل (٢-٦)

ب) من الرسم يتضح أن الحجـم الامثـل للمشـروع هـو 50 ألـف جنيـة . حيـث أن العائد يصل الى أقصاه (R=2505) عندما x=50

ج) عندما x=40 فأن

$$R = 5+100(40)-(40)^2$$
$$=5+4000-1600$$
$$= 2405 \quad \text{ألف جنية}$$

كذلك عندما x=60 فأن

$$R = 5+100(60)-(60)^2$$
$$= 5+6000-3600$$
$$= 2405 \quad \text{ألف جنية}$$

(٢-٦) تمرينات — Exercises

١- اذا كان x متغير حقيقى ، حدد كل من النطاق والمدى للدوال التالية :

1. $f(x)=7$
2. $f(x) = 49 - x^2$
3. $f(x) = \sqrt{49} - x^2$
4. $f(x) = (x-3)/(x^3 - 27^{-2})$
5. $f(x) = \sqrt{x/(x-5)}$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,/(x^3 + x^2 - 6x)$

٢- اذا كانت دالة التكلفة الكلية C لانتاج عدد x من منتج معين هى

$C = f(x) = 25x + 50000$

فاذا كان أقصى عدد ممكن أنتاجه هو 20000 وحدة ، حدد النطاق والمدى لدالة التكلفةالكلية .

٣- بالنسبه للدوال التالية :

1. $f(x) = 12$
2. $f(x) = (x-2)^3$
3. $f(x) = 3x^2 - x + 4$
4. $f(x) = \dfrac{7x}{2} - 1$
5. $f(x)= -5x+5$
6. $f(C) = C^4 - 5C^2 + 10$
7. $f(x) = 25 - x^2$

أوجد

a) $f(0)$, b) $f(-3)$, c) $f(k)$

٤- اذا كان x عدد حقيقى ، حدد النطاق للدوال التالية :

1. $f(x) = 10$
2. $f(x) = 39 - x^2$
3. $f(x) = (x-5)/(x^3 - 125)$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4/(x^3 + x^2 - 6x)}$
5. $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$
6. $f(x) = \sqrt{x - 9/(x^3 - 4x)}$

٥- اذا كانت دالة التكلفةالكليةلاحد المنتجات هى :

$C(x)=25x+50000$

حيث x تمثل عدد الوحدات المنتجة ، فاذا كان أقصى عدد ممكن من الوحدات الممكن انتاجها هو x=20000، حدد كل من النطاق والمدى المقيد للدالة C(x).

٦- اذا كانت دالة الطلب Demand function على أحد المنتجات هى :

$q=f(P)=20000-25P$

حيث q هى الكمية المطلوبة ، P سعر بيع الوحدة الواحدة .

- حدد النطاق والمدى لهذه الدالة .
- أوجد الكمية المطلوبة اذا كان سعر بيع الوحدة 100.

٧- اذا كان

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 + 7x_1^2 x_2 - 5x_2 x_3 - 5$$

أوجد

a) f(0,2,-3), f(-2,1,5)

b) f(5,2,x)

٨- اذا كان

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 10$$

حدد كل من $f(-2,4)$, $f(a+b, a-b)$

٩- اذا كان

$$f(a,b,c,d) = 2ab = a^2bd + 2C^2d$$

أوجد

$f(1,2,3,4)$, $f(2,0,1,5)$

١٠- اذا كان $5P+10q-25000=0$

حيث P هى سعر الوحدة الواحدة من أحد المنتجات بالدولار ، q هى الكمية المطلوبة فى السوق :

أ) حدد دالة الطلب $q=f(P)$، ووضح ذلك بيانيا .

ب) حدد دالة السعر $P=h(q)$، ووضح ذلك بيانيا .

١١- اذا كانت العلاقة بين السعر والكمية المعروضة لاحد المنتجات هى :

$-20P+5q+2000=0$

حيث P هو سعر بيع الوحدة فى السوق ، q هو الكمية المعروضة .

أ) حدد دالة العرض $q=f(P)$

ب) حدد الدالة السعرية $P=S(q)$

ج) اذا كان سعر بيع الوحدة 20 وحدة نقدية ، حدد الكمية المعروضةعند هذا السعر .

١٢- أرسم الدوال التالية :

1. $f(x)=3-3$
2. $f(x)=x^2-2x+1$
3. $f(x)=-4x$
5. $f(x)=ex$
6. $f(x)=e^{2x+1}$
7. $f(x)=5$
8. $f(x)=1nx$

9. $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\geq 0 \\ -x+3 & x<0 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 5 & x>4 \end{cases}$

11. f(x)=x4

12. $f(x)=\begin{cases} |x| & -2\leq x\leq 2 \\ x & x<-2 \quad \text{or} \quad >2 \end{cases}$

١٣- اذا كان

$y = f(r)=r^2$, $r = g(S)=S^2-4$,
$S = h(x)=x-3$

حدد كل من

a) g(h(x))
b) f(g(h(x)))

١٤- اذا كان

$y = g(u)=u^3-5u$,
$u = h(x)=x^2-4$

حدد

a) g(h(x))
b) g(h(2))

١٥- اذا كان

$y=g(u)=u-5$, $u=h(x)=x^2-3x+6$

حدد

a) g(h(x))
b) g(h(-2))

١٦- أرسم الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

١٧- تقوم احدى الشركات بحساب التكلفة الكلية للوحدات المنتجة بأستخدام دالة التكلفة (C) التالية :

$$C=f(x)=x^2-20x+10 \quad , \quad 10 \le x \le 1000$$

حيث x هى عدد الوحدات المنتجة بالالف وحدة :

أ) ارسم الدالة C .
ب) من الرسم حدد عدد الوحدات المنتجة التى تجعل التكلفة أقل مايمكن .
ج) حدد المدى المقيد للدالة C .

١٨- يتقاضى أحد مندوبى شركات التأمين عمولة عن كل بوليصة يقوم بعملها . فاذا كانت عمولته عن البوليصة الواحدة 100 جنية ، بالاضافة الى مرتبه الشهرى 75 جنية ، فاذا كان الدخل الشهرى للمندوب هو مجموعة العمولات بالاضافة الى المرتب .

أ) حدد دالة الدخل الشهرى للمندوب .
ب) اذا كان أقصى عدد من البوالص التى يمكن أن يقوم بعملها المندوب خلال شهر هو 20 بوليصه . حدد النطاق والمدى لدالة الدخل للمندوب.
ج) وضح بيانيا أقصى دخل للمندوب .

١٩- يتقاضى أحد البائعين بأحد المحلات الكبرى عمولة عن كل وحدة يقوم ببيعها من المنتجات التى يقوم ببيعها بالاضافى الى أجرة فاذا كانت عمولته عن بيع الوحدة الواحدة من المنتج I هو 1.5 جنية ، ومن المنتج II هو 2 جنية ، 3 جنيهات عن الوحدة من المنتج III. بالاضافة الى اجره الاسبوعى 40 جنية . اذا كان x_1,x_2,x_3 هى عدد الوحدات التى يقوم ببيعها من المنتجات I, II, III على الترتيب .

أ) حدد دالة الاجر الاسبوعى للبائع .

ب) اذا كان أكبر عدد ممكن من الوحدات التى يقوم ببيعها البائع هى 20,35,25 من الانواع I, II, III على الترتيب ، أوجد أكبر أجر متوقع للبائع .

الباب الثالث

المتتابعات (المتواليات) والمتسلسلات

Sequences (Progressions) and Series

(٣-١)	تعريفات	**Definitions**
(٣-٢)	المتواليه العددية	**Arithmetic Sequence**
(٣-٣)	المتواليه الهندسية	**Geometric Sequence**
(٣-٤)	الفائدة (أو الخصم) البسيطة والمركبة	**Simple and Compound Interest (or Discount)**
(٣-٥)	متسلسلة ذات الحدين	**Bionomial Series**
(٣-٦)	المتسلسلة الاسية	**Exponential Series**
(٣-٧)	أمثله تطبيقية	**Applied Examples**
(٣-٨)	تمرينات	**Exercises**

٨٢ - ٢

(٣-١) تعريفات Definations

(١) المتتابعة أو المتواليه Sequence

اذا كان a_r عدد يعتمد على المتغير r حيث r عدد صحيحموجب ، فأن الاعداد

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n \quad (3.1)$$

تسمى بالمتتابعه (أو المتواليه) وعدد حدودها n. حيث يمثل الحد a_r الحد العام فى المتتابعه ، a_1 الحد الاول ، a_n الحد الاخير . ويمكن أن يرمز للمتتابعه على النحو التالى :

$$a_r,\ r=1,2,..,n \quad (3.2)$$

أ) حد
ب) اذا
25
للبا

وبتعريف المتتابعه (أو المتواليه) على النحو السابق يتضح أن المتتابعه هى دالة نطاقها فئه الاعداد الصحيحة الموجبه أو فئة جزئيه منها $\{1,2,\ldots,n\}$ ومداها (أو نطاقها المصاحب) فئه جزئيه من الأعداد الحقيقية . فاذا كانت فئه النطاق فئه محدودة finite فانه فى هذه الحالة يقال أن المتتابعه منتهية Finite sequence ، واذا كانت فئه النطاق غير محدودة سميت المتتابعه غير منتهيه Infinite sequence.

مثال (٣-١)

أوجد حدود المتتابعه التالية :

$$a_r = 1+2r \qquad r=1,2,\ldots,10$$

الحل

بما أن n=10 ، اذن عدد حدود المتتابعه يساوى 10 على النحو التالى

$a_1 = 1+2(1) = 3$
$a_2 = 1+2(2) = 5$
$a_3 = 1+(3) = 7$
$a_4 = +2(4) = 9$
:
$a_{10} = 1+2(10) = 21$

وبالتالى فأن حدود المتتابعه هى

$$3,5,7,9,....,21$$

مثال (٣-٢)
كون المتواليه التالية :

$$a_r = \frac{1}{1+r} \quad , \qquad r=1,2,3,...$$

الحل
بما أن لايوجد حد أعلى للمتغير r فأنه فى هذه الحالة تسمى المتوالية متواليه غير منتهيه Infinite sequence أى تتكون من عدد لانهائى من الحدود ، حيث :

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$
$$a_3 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$a_r = \frac{1}{1+r}$$
$$a_{r+1} = \frac{1}{1+r+1} = \frac{1}{2+r}$$
$$\vdots$$

وتكتب على النحو

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\frac{1}{1+r},\frac{1}{1+(r+1)},\ldots..$$

(٢) المتسلسلة Series
اذا كان لدينا المتتابعه

$$a_1,a_2,a_3,..,a_n \qquad (3.3)$$

فأن مجموع حدود هذه المتتابعة S حيث :

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (3.4)$$

يسمى متسلسله منتهية Finite series أما اذا كان حدود المتتابعة هى

$$a_1, a_2, a_3, ... \qquad (3.5)$$

فأنها متتابعه غير منتهية Infinite sequence،
وبالتالى فأن المتسلسلة

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad (3.6)$$

تسمى بمتسلسله غير منتهية Infinite series

مثال (٣-٣)
١- اذا كانت المتتابعه $5, 7, 9, ..., 23$
وعدد حدودها 10 ، فأن المتسلسله

$$S = 5+7+9+...+23$$
$$= \sum_{r=1}^{10} (5 + 2(r-1))$$

متسلسله منتهيه

٢- اذا كانت المتتابعه $3, 5, 7, 9, ...$
فنجد أن عدد حدود المتابعه عدد لانهائى وبالتالى فهى متتابعه غير منتهيه كذلك المتسلسله S حيث

$$S = 3+3+7+...$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} (1 + 2r)$$

متسلسله غير منتهيه .

(٣-٢) المتواليه العدديه　　Arithmetic Sequence

اذا كان لدينا المتتابعه

a,a+4,a+2d,a+34+...+a+(r-1)d, a+rd,...,a+(n-1)d　　(3.7)

فأننا نجد أن عدد حدودها n بحيث حدها الاول يساوى :

$a_1=a$

وحدها الثانى يساوى

$a_2=a+d$

$\vdots$

وحدها r يساوى

$a_r=a+(r-1)d$

فنجد أن الفرق بين كل حد والحد السابق له يساوى مقدار ثابت d على النحو التالى:

$$\left.\begin{array}{l} a_2-a_1=a+d-a=d \\ a_3-a_2=a+2d-a-d=d \\ \vdots \\ a_r-a_{r-1}=a+(r-1)d-a-(r-2)d=d \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1}=a+(n-1)d-a-(n-2)d=d \end{array}\right\} \quad (3.8)$$

فى هذه الحالة ، عندما يكون الفرق بين كل حدين متتالين مقدار ثابت (بالنسبه لجميع حدود المتتالية) ، فأنه فى هذه الحالة تسمى المتتاليه (3.7) متتاليه عدديه . ويسمى المقدار الثابت d أساس المتواليه ، حيث :

$$a_{r+1}-a_r=d\ , \qquad r=1,2,... \quad (3.9)$$

وحدها العام هو a_r حيث:

$$a_r=a+(r-1)d \quad (3.10)$$

نظرية (٣-١)

اذا كانت

$$a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d \qquad (3.11)$$

متواليه عدديه عدد حدودها n ، ومجموعها S_n فأن :

$$S_n = \frac{n}{2}(a+L)$$
$$= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

حيث L حدها الاخير ، a حدها الاول .

الاثبات

اذا فرضنا أن الحد الاخير فى المتواليه $a+(n-1)d$ يساوى L فأن:

$$a, a+d, a+2d, ..., (a+(n-2)d), L \qquad (3.12)$$

وبالتالى فأن

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+(n-2)d)+L \qquad (3.13)$$

أو

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+...+(L-d)+L \qquad (3.14)$$

كذلك يمكن كتابه المعادلة (3.14) على النحو التالى :

$$S_n=L+(L-d)+(L-2d)+...+(a+2d)+(a+d)+a \qquad (3.15)$$

وبجمع الاطراف المتناظرة فى المعادلتين (3.13), (3.15) نجد أن :

$$2S_n=(a+L)+a+L)+...+(a+L) \qquad (3.16)$$
$$=n(a+L) \qquad (3.17)$$

وبالتالى فأن :

$$S_n = \frac{n}{2}(a+L) \qquad (3.18)$$

وبالتالى فأن مجموع المتواليه العدديه يساوى "مجموع الحد الاول واخلاير مضروب فى عدد الحدود على 2 ".

بما أن

$$L = a+(n-1)d \qquad (3.19)$$

بالتعويض بالطرف الايمن فى المعادلة (3.19) فى الطرف الايمن للمعادلـة (3.18) نجد أن :

$$S_n = \frac{n}{2}(a+a+(n-1)d)$$

$$=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \qquad (3.20)$$

مثال (٣-٤)
اذا كان لدينا المتوالية العدديه التالية

10,15,20,25,30,35,....,55

أ) أوجد عدد حدود المتواليه (n).
ب) أوجد مجموع المتواليه .
ج) أوجد مجموع الحدود من الحد الخامس الى الحد العاشر .

الحل
أ)

$$d=15-10=5$$

$$a_1 = 10$$

$$a_n = L = 55$$

وبما أن

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$=10+(n-1)(5) \rightarrow$$

$$rr=10+5n-5 \rightarrow$$

$$55\text{-}5 = 55 \rightarrow$$
$$50 = 5n$$
$$n = \frac{50}{5} = 10 \text{ حدا}$$

ب) بما أن

$$S_{10} = 10+15+..+55$$
$$= \frac{10}{2}(1-+55)$$
$$= \frac{10(65)}{2} = 5(65)$$
$$= 325$$

ج) بما أن

$$a_5 = a_1 + (5-1)(5)$$
$$= 10+4(5) = 10+20$$
$$= 30$$

وبالتالى فأن الحدود من الحد الخامس الى الحد العاشر هى :

$$30, 35, 40, \ldots, 55$$

وبالتالى فأن مجموع هذه الحدود يساوى

$$S_{5-10} = \frac{6}{2}(30+55) = 3(85)$$
$$= 255$$

مجموع الاعداد الطبيعية

من الباب الاول نجد أن فئه الاعداد الطبيعيه هى :

$$1,2,3,4,....$$

فهى تمثل متواليه عددية غير منتهيه أساسها يساوى واحد وحدها الاول يساوى واحد أيضا . وبالتالى اذا كان لدينا عدد **n** من الاعداد الطبيعية .

$$1,2,3,\ldots,n$$
$$S_n = 1+2,+3+\ldots+n$$
$$= \frac{n}{2}(1+n) \qquad (3.21)$$

(٣-٣) المتوالية الهندسية Geometric sequence

اذا كان لدينا المتوالية :

$$a, a5, ar^2, ..., ar^{n-1},... \qquad (3.22)$$

$a_1 = a$
$a_2 = ar$
$\vdots$
$a_n = ar^{n-1}$

فأننا نلاحظ أن خارج قسمة كل حد من حدود المتواليه على الحد السابق لـه مباشـرة مقدار ثابت يساوى r ، حيث :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{ar}{a} = r$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{ar^2}{ar} = r$$

$\vdots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

فى هذه الحالة تسمى المتوالية (3.22) متوالية هندسية حدها الاول a ، وأساسها r.

مثال (٣-٥)

اذا كان لدينا المتواليه :

$$16, 8, 4, 2,... \qquad (3.23)$$

فأننا نجد أن المتواليه متواليه هندسية حيث :

$a_1 = 16$
$a_2 = 8$
$a_3 = 4$
$\vdots$

وبما أن

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

وبالتالى فأن أساس المتواليه r يساوى $\frac{1}{2}$ وعدد حدودها لانهائى .

نظرية (٣-٢):

اذا كان لدينا المتواليه الهندسية عدد حدودها n .

$$a, ar, ar^2, \dots , ar^{n-1} \qquad (3.24)$$

فأن

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

الاثبات

بما أن

$$S_n = a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1} \qquad (3.25)$$

وبضرب طرفى العلاقة (3.25) فى r نجد أن

$$r\, S_n\text{-}ar + ar^2+ \dots + ar^{n-1} + ar^n \qquad (3.26)$$

بطرح طرفى المعادلة (3.26) من الطرفين المناظرين فى المعادلة

$$r\, S_n - S_n = -a + ar^n \qquad (3.27)$$

$$S_n(r-1)=a(r^n-1)$$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

مثال (٣-٦)

اذا كان لدينا المتواليه :

$$3, 6, 12, 34, \dots , 384$$

أ) أوجد عدد حدود المتواليه .
ب) أوحد مجموعها .

الحل
أ) بما أن

$a_1 = 3$
$a_2 = 6$
$a_3 = 12$
$a_4 = 24$
$\vdots$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{24}{12} = 2$$

وبالتالى فأن المتواليه متواليه هندسية حدها الاول (a) يساوى 3 ، وأساسها (r) يساوى (2) .

وبالتالى فأن الحد رقم n بحيث

$a_n = a_1 r^{n-1}$
$384 = 3(2)^{n-1}$

$$(2)^{n-1} = \frac{384}{3} = 128 = (2)^{8-1}$$

$n-1 = 8-1$
$n=8$

$$S_8 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{3(2^8-1)}{2-1}$$
$$= \frac{3(256-1)}{1}$$
$$= 3(255) = 765$$

المتواليه الهندسية اللانهائية **Infinite Geometric Sequence**

اذا كان عدد حدود المتواليه الهندسية عدد لانهائى بحيث

$a, ar, ar^2, \ldots, a^n, \ldots$

نظرية (٣-٣)

اذا كانت المتوالية الهندسية اللانهائية

$$a, ar, ar^2, \ldots, a^n, \ldots \tag{3.28}$$

بحيث $|r|<1$

فأن مجموع المتوالية يساوى S حيث

$$S = \frac{a}{1-r} \tag{3.29}$$

الاثبات

بما أن

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

أنظر نظرية (٣-٢)

وبالتالى فعندما $n\to\infty$ فأن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$
$$= a \lim_{n\to\infty} \frac{r^n-1}{r-1}$$
$$= a\frac{-1}{r-1} = \frac{a}{1-r}$$

حيث :

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad (3.30)$$

عندما $|r|<1$

وفى هذه الحالة يقال أن المتسلسلة (3.29) تقاربيه Convergent أى لها قيمة محددة رغم أن المتواليه (3.28) متوواليه لانهائية (أى عدد حدودها لانهائى).

مثال (٣-٧)

أوجد مجموع حدود المتواليه التالية :

$$2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots \qquad (3.31)$$

الحل

بما أن

$$r=\frac{1}{2}\rightarrow r<1$$

وبالتالى فأن

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

فى المثال السابق يتضح أن المتوالية (3.31) متواليه لانهائية (أى عدد حدودها لانهائى ورغم ذلك فأنه يوجد لها مجموع يساوى (4).

(٣-٤) الفائدة (أو الخصم) البسيطة والمركبة
Simple and Compound Interest (or Discount)

أولا: الفائدة عند ايداع أحد الافراد مبلغ معين P فى أحدى البنوك أو الشركات الاستثمارية لفترة n من الزمن فأن البنك أو الشركة يقوم بأستخدام هذا المبلغ فى الفترة n ومقابل أستخدام هذا المبلغ يقوم البنك (أو الشركة) بدفع مبلغ I للمودع مقابل استخدام المبلغ P . ويسمى المبلغ P بالقيمة الاصلية Principal value ، ويسمى المبلغ I بالفائدة Interest.

وتعرف الفائدة I بأنها دالة فى القيمة الاصلية P والفترة الزمنية n . وبمكن حساب قيمة الفائدة I بطريقتين ، الطريقة الاولى تعطى مايسمى بالفائدة البسيطة Simple interest والطريقة الثانية تعطى مايسمى بالفائدة المركبة Compound interest.

ثانيا: الخصم وتناظر عملية ايداع الفرد مبلغ معين فى بنك (أو شركة) وحصوله على فائدة نظير استخدام هذا المبلغ لمدة معينة عملية اقتراض Loan الفرد من البنك مبلغ يقوم بتسديده بعد فترة معينة فأنه يجب أن يدفع عن هذا المبلؤ فائدة للبنك تسمى بالخصم Discount نظرا لان قيمة الفائدة المستحقة للبنك يقوم بخصمها من المبلغ الذى يقوم بأفتراضه الشخص عند اقتراضه . ومعدل الفائدة الذى يحدده البنك فى هذه الحالة يسمى بمعدل الخصم ونسب قيمة الخصم أيضا بالطريقة الاولى المشار اليها أعلاه . فالطريقة الاولى تعطى مايسمى بالخصم البسيط Simple discount وعادة يرمز لقيمة الخصم بالرمز D .

الطريقة الاولى :
يمكن حساب كمية الفائدة البسيطة بأستخدام العلاقة

$$I = Pr\,n \qquad \text{كذلك} \qquad (3.31)$$

$$D = Pr\,n$$

حيث r هى المعدل السنوى للفائدة (والمعدل السنوى للفائدة هو مقابل استخدام الجنيـة الواحد لمدة سنة).

مثال (٣-٨)
اذا قام بأيداع مبلغ 550 جنية فى أحدى البنوك بمعدل فائدة 8% سنويا .
أ) أوجد قيمة الفائدة التى يستحقها بعد ٩ شهور من تاريخ الايداع .
ب) أوجد جملة المبلغ المستحق بعد 4 سنوات من تاريخ الايداع .

الحل
أ) بما أن معدل الفائدة r لمدة سنة

$$r = 8\% \to r = \frac{8}{100}$$

$$n = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad P = 550 \to$$

فاذا فرضنا أن I تمثل قيمة الفائدة المستحقة بعد 9 شهوؤ نجد أن :

$$I = \Pr n = 550\left(\frac{8}{100}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= 33 \text{ جنية}$$

ب) اذا فرضنا أن I هى قيمة الفائدة المستحقة بعد 4 سنوات فأن :

$$I = \Pr n = 550\left(\frac{8}{100}\right)(4)$$
$$= 176 \text{ جنية}$$

اذا فرضنا جملة المبلؤ المستحق بعد d سنوات هو A بالتالى

$$A = P + I \qquad (3.33)$$
$$= 550 + 176 = 726 \text{ جنية}$$

مثال (٣-٩)
اذا قام أحد رجال الاعمال بأقتراض مبلغ 20000 جنية من أحد البنوك بمعدل خصم بسيطة مقدارهة 25% لمدة ثمانية شهور .
أ) أوجد قيمة الخصم المدفوعة نظير الاقتراض ثم أوجد المبلؤ الذى يقوم رجل الاعمال بأستلامه من البنك .

الحل
أ) قيمة الخصم المستحق بعد 8 شهور .

$$D = \Pr n = 20000\left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{8}{12}\right)$$
$$= 3333.3 \text{ جنية}$$

المبلغ المسلم من البنك لرجل الاعمال يساوى B حيث :

$$B = P - D$$
$$= 20000-3333.3$$
$$= 16666.7 \text{ جنية}$$

الطريقة الثانية
اذا فرضنا أن القيمة الاصلية للمبلغ P ومعدل الفائدة السنوى r ، فتعتمد هذه الطريقة على اعتبار قيمة الفائدة المستحقة فى نهاية السنه الاولى جزء من القيمة الاصلية للمبلغ فى بداية السنه الثانيه يستحق عليه الفائدة أيضا بنفس معدل الفائدة السنوى r . كذلك قيمة الفائدة المستحقة فى نهاية السنه الثانية جزء من القيمة الاصلية للمبلغ فى بداية السنه الثالثة يستحق عليه الفائدة أيضا . وهكذا حتى نهاية المدة . وتسمى الفائدة فى هذه الحالة بالفائدة المركبة Compound interest (بمعنى أن قيمة الفائدة فى العام السابقة يستحق عليها فائدة فى نهاية العام الحالة وهكذا).

فاذا كانت P هى القيمة الاصلية للمبلغ فى بداية المدة ومعدل الفائدة r فأن جملة المبلغ فى نهاية السنة الاولى تصبح A_1 حيث :

$$A_1=P+I+P+Pr(1)=P(1+r) \qquad (3.34)$$

حيث I_i هى الفائدة المستحقة عن السنة i . وبالتالى تصبح A_1 هى القيمة الاصلية فى بداية السنة الثانية ، وبالتالى فأن جملة المبلغ فى نهاية السنة الثانية سوف تصبح A_2 حيث :

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1+I_1 \\ &= A_1+A_1r(1) \end{aligned} \tag{3.35}$$

وبالتعويض فى (3.35) بـ (3.34) نجد أن :

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1+r)+P(1+r)r(1) \\ &= P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

وأجمالى الفائدة من بعد سنتين تصبح I_2 حيث :

$$'I_2 = P(1+r)^2-P=P[(1+r)^2-1] \tag{3.37}$$

وبالمثل اذا كانت A_3 هى جملة المبلغ فى نهاية السنه الثالثة فأن :

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2+A_2r(1) \\ &= P(1+r)^2+P(1+r)^2(r) \\ &= P(1+r)^3 \end{aligned} \tag{3.38}$$

واجمالى الفائدة بعد 3 سنوات تصبح I_3" حيث :

$$'I_3 = P(1+r)^3-P=P[(1+r)^3-1] \tag{3.39}$$

وبتكرار نفس العملية نجد أن جملة المبلغ فى نهاية السنه n هو A_n حيث :

$$A_n=P(1+r)^n \tag{3.40}$$

وفى هذه الحالة تكون قيمة الفائدة المستحقة فى نهاية الفترى n هى $'I_n$ حيث :

$$\begin{aligned} 'I_n &= A_n-P=P(1+r)^n-P \\ &= P[(1+r)^n-1] \end{aligned} \tag{3.41}$$

ملاحظات

١- من العلاقة (3.38) نجد أن جملة المبلغ فى نهاية كل سنة فى الفترة n هى :
$A_1,A_2,\ldots,A_n$

أو بعبارة أخرى

$$P(1+r), P(1+r)^2,..., P(1+r)^n$$

أى تمثل متسلسلة هندسية أساسها $(1+r)$.

٢- جملة الفائدة فى نهاية الفترة n بمعدل فائدة مركبة r هى $'I_n$ حيث :

$$'I_n = P[(1+r)^n - 1]$$

وبما أن جملة الفائدة البسيطة بنفس المعدل r فى نهاية الفترة n ولتكن $''I_n$ هى :

$$''I_n = Prn \qquad (3.43)$$

وبمقارنة جملة الفائدة المركبة بالفائدة البسيطة نجد أن :

$$'I_n \geq ''I_n \quad , n \geq 1 \qquad (3.44)$$

بمقدار يساوى

$$\begin{aligned} 'I_n - ''I_n &= P[(1+r)^n - 1] - Prn \\ &= P[(1+r)^n - 1 - rn] \end{aligned} \qquad (3.45)$$

وعندما $n=1$ نجد أن

$$'I_n - ''I_n = 0$$

أى أن الفرق بين جملة الفائدة البسيطة والمركبه بعد عام يساوى صفر . وفى حالة اختلاف المعدل السنوى r فأن العلاقة (3.44) قد لاتتحقق .

٣- عندما تكون الفترة المستحق المبلغ فائدة عنها أقل من سنه أى $n<1$ فأن العلاقة بين الفائدة البسيطة والمركبة المستحقة عن المبلغ تأخذ الشكل التالى :

$$'I_n < ''I_n \quad , \quad n < 1 \qquad (3.46)$$

كما سوف يتضح من الامثلة التالية .

٤- توجد جداول تعطى قيمة المقدار $(1+r)^n$ مباشرة عند القيم المختلفة لكل من n,r كما هو موضح بملحق "٥".

مثال (٣-١٠)

أودع أحد العاملين بمبلغ 500 جنية بأحد البنوك الوطنية بمعدل فائدة مركبة 10% لمدة 5 سنوات كذلك أودع مبلغ 500 جنية بأحد الشركات الاستثمارية بمعدل فائدة بسيطة مقداره 10% سنويا أيضا لمدة 5 سنوات أيضا .

١- أوجد اجمالى الفائدة المستحقة للعامل فى نهاية السنه الثانية فى البنك والشركة.

٢- أوجد اجمالى الفائدة المستحقة للعامل فى نهاية الفترة فى البنك والشركة وقارن بينهما .

الحل

١- قيمة الفائدة المستحقة للعامل من البنك فى نهاية السنه الثانية .

$$
\begin{aligned}
{}'I_2 &= P[(1+r)^2-1] \\
&= 500\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2-1\right] = 500\left[(1+.10)^2-1\right] \\
&= 500(1.21-1)=(500)(0.21)=105 \text{ جنية} \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

وقيمة الفائدة المستحقة للعامل من الشركة فى نهاية السنة الثانية

$$
\begin{aligned}
{}''I_2 &= Prn \\
&= 500\left(\frac{10}{100}\right)(2) = 100 \text{ جنية} \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

وبمقارنة (.3) بـ (.3) نجد أن أجمالى الفائدة المركبة بعد سنتين أكبر من أجمالى قيمة الفائدة البسيطة بعد نفس المدة (حيث أن معدل الفائدة السنوية r فى البنك يساوى فى الشركة يساوى 10%).

مثال (٣-١١)

أفترض أحد المواطنين مبلغ 1000 من أحد البنوك لمدة 6 شهور بمعدل فائدة 23%.

أ) أوجد جملة المستحق للبنك فى نهاية المدة اذا أحتسبت الفائدة بمعدل فائدة بسيطة.

ب) أوجد جملة المستحق للبنك اذا احتسبت الفائدة بمعدل فائدة مركبة .

الحل

أ) المدة

$$n = \frac{6}{12} = 0.5$$

الفائدة المستحقة بعد 6 شهور

$$''I_{0.5} = \Pr n = 1000\left(\frac{23}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 160 \text{ جنية}$$

أجمالى المبلغ المستحق :

$$A_{0.5} = P + ''I_{0.5} = 1000 + 160 = 1160 \text{ جنية}$$

ب) اذا احتسبت الفائدة بمعدل فائدة مركبة فأن اجمالى المبلغ بعد ست شهور يساوى $A_{0.5}$ حيث :

$$\begin{aligned} A_{0.5} &= P[(1+r)^n] \\ &= 1000[(1+0.23)^{0.5}] \\ &= 1000[1.109] \\ &= 1109.0 \text{ جنية} \end{aligned}$$

المعدل الفعلى للفائدة
Effective Rate of Interest

مما سبق يتضح أن قيمة الفائدة المحسوبة على المبلغ P بمعدل سنوى r ولمدة n طريقة الفائدة البسيطة تكون أكبر من قيمة الفائدة المحسوبه لنفس المبلغ P بأستخدام طريقة الفائدة المركبة (وذلك عندما $1<n$).

فاذا أودع شخص مبلغ 500 جنية فى احدى البنوك لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة سنوية 12% سنويا. فاستخدام الطريقة الاولى فأن قيمة الفائدة البسيطة .

$$\begin{aligned} I &= \Pr n \\ &= 500\left(\frac{12}{100}\right)(4) = 240 \end{aligned} \tag{3.49}$$

وبأستخدام الطريقة الثانيه فأن قيمة الفائدة المركبة .

$$I=P[(1+r)^n-1]$$
$$=500[(1+0.12)^٤-1]$$
$$=500[(1.12)^4-1]=500[1.574-1]$$
$$= 787 \text{ جنية} \qquad (3.50)$$

من (49 3) ,(3.50) يتضح أن كمية الفائدة المركبة أكبر من كمية الفائدة البسيطة . وهنا نتساءل ماهو معدل الفائدة البسيطة التى تعطى كمية الفائدة 787 جنية . فاذا فرضنا أن 'R هى معدل الفائدة البسيطة التى تعطى كميه الفائدة (787) على المبلغ 500 جنية بعد اربع سنوات فأن :

$$787 = 500(R')(4) \rightarrow$$
$$R'=\frac{787}{2000}=0.3935$$
$$=39.35\% \qquad (3.51)$$

ويسمى المعدل 'R بالمعدل الفعلى اللفائدة . وبالتالى فأن المعدل الفعلى هو المعدل السنوى للفائدة البسيطة الذى يعطى نفس كمية الفائدة التى يتم حسابها بأستخدام طريقة الفائدة المركبة .

القيمة الحالية Present value

من العلاقة (3.40) وجدنا أن قيمة المبلغ المودع فى نهاية الفترة n تصبح A_n حيث:

$$A_n=P(1+r)^n \qquad (3.52)$$

ومن (3.52) نجد أن :

$$P = A_n(1+r)^{-n} \qquad (3.53)$$

وتسمى القيمة P (المبلغ الاصلى) بالقيمة الحالية Present value. أى كمية المبلغ الذى اذا أودع لمدة n سنة بمعدل فائدة مركبة r فأنه فى نهاية الفترة n سوف يصبح A_n . وتوجد جداول تعطى قيمة المقدار $(1+r)^{-n}$ تم حسابها عند القيم المختلفة لكل من n,r (أنظر ملحق "٥") .

مثال (٣-١١)
أوجد المعدل السنوى للفائدة المركبة الذى يضاف المبلغ بعد 6 سنوات . ثم أوجد المعدل الفعلى للفائدة .

الحل
اذا فرضنا أن P هو المبلغ فأن

$$A_6 = 2P = P(1+r)^6 \rightarrow$$
$$2 = (1+r)^6 \rightarrow$$
$$(2)^{\frac{1}{6}} = 1 + r \rightarrow$$
$$r = (2)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.1225 - 1$$

أى أن معدل الفائدة المركبة الذى يضاعف المبلغ بعد 6 سنوات يساوى 12.25% سنويا.

وبالتالى فأن المعدل الفعلى للفائدة 'R حيث :

$$2P = P(R')(6) \rightarrow$$
$$1 = 3R' \rightarrow$$
$$R' = \frac{1}{3} = 33.33\%$$

(٣-٥) متسلسلة ذات الحدين Binomial Series

من نظرية ذات الحدين (أنظر ملحق رقم "٢") نجد أن :

(أولا): عندما تكون n عدد صحيح موجب (أى $n \in N$) فأن مفكوك المقدار $(a+b)^n$ يأخذ الشكل التالى :

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_r^n a^{n-r} b^5 + \ldots + b^n \quad (3.32)$$

أو بعبارة أخرى :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r \quad , \quad n \in N \quad (3.33)$$

ويتضح أن مفكوك المقدار $(a+b)^n$ هو متسلسله منتهيه عدد حدودها $(n+1)$ وحدها العام (A_{r+1}) هو :

$$A_{r+1} = C_r^n a^{n-r} b^r \quad (3.34)$$

(ثانيا): أما اذا كان n عدد حقيقى سالب بمعنى $n \in R$ (أى ممكن أن تكون n كسر أو عدد سالب). فأننا نحصل على متسلسلة لانهائية Infinite sequence .

وفى الحالة الخاصة عندما يكون مفكوك ذات الحدين على النحو $(1+x)^n$ حيث n عدد حقيقى ، $|x|>1$ فأن :

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)^r}{r!} + \ldots \quad (3.35)$$

مثال (٣-٨)

أكتب الدوال التالية فى صورة متسلسلة ذات الحدين

(i) $(1+x)^5$

(ii) $\sqrt[4]{1+x}$, $|x|<1$

(iii) $32/(2+x)^5$, $|x|<1$

الحل

(i) بما أن n=5، وبالتالى فأن عدد حدود المتسلسلة يساوى 6 ، وحيث أن :

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 +\frac{n(n-1)(n-2)}{4!}x^4+x^5$$

$$(1+x)^5 = 1+\frac{5}{1!}x+\frac{5(5-1)}{2!}x^2+\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}x^3 +\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}x^4+x^5$$
$$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

(ii) بما أن

$$\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{4}}$$

وبالتالى فأن n فى هذه الحالة عدد حقيقى كسر ، وبالتالى فأن عدد حـدود المتسلسله فى هذه الحالة يكون عدد لانهائى ، على النحو التالى

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}x+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}x^3+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{192}x^3-\ldots,\ldots$$

(iii) بما أن

$$32/(2+x)^5 = \frac{32}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^5}$$

$$= 32\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-5}$$

وفى هذه الحالة نجد أن أس ذات الحدين $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-5}$ عدد حقيقى سالب (5-) وبالتالى فأن عدد حدود المتسلسله فى هذه الحالة سوف يكون عدد لانهائى على النحو التالى :

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-5} = 1+\frac{(-5)}{1!}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{(-5)(-5-1)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$+\frac{(-5)(-5-1)(-5-2)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\dots$$

$$= 1+\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}x^2-\frac{35}{8}x^3+\dots$$

مثال (٣-٩)

أكتب الحدود الثلاثة الاولى فى متسلسلة ذات الحدين التالية :

$(3+x)^{-4}$, $|x| < 3$

الحل

بما أن

$$(3+x)^{-4} = (3)^{-4}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-4}$$

$$= \frac{1}{81}\left[1+\frac{(-4)}{1!}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{(-4)(-4-1)}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{81}\left[1 - 4\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{4(5)}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{81}\left[1 - 4\left(\frac{x}{3}\right) + 10\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots\right]$$

(٣-٦) المتسلسلة الآسية Exponential series

اذا كان لدينـا المقدار $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ حيث أن $n\to\infty$ كذلك $\left|\frac{x}{n}\right|<1$. فبأستخدام متسلسلة ذات الحدين نجد أن

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{x}{n}\right)^r$$

وعندما n تؤول الى مالانهاية $(n\to\infty)$ فأن نهاية المقدار $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ يمثل دالة فـي المتغير x يرمز له بالرمز $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (فى الباب السابق توجد دراسـة تفصيلية للنهايات) حيث :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!} \qquad (3.36)$$

وتسمى الدالة $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ بالدالة الآسية ويرمز لها بـالرمز e^x حيث e مقدار ثابت يساوى (2.718) تقريبا . أى أن

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots \qquad (3.36)$$

وتعتبر الدالـة الآسـية مـن الـدوال ذات الأهميـة فـى كثـير مـن المشـاكل الاقتصاديـة والادارية وفى الدراسات الاحصائية . نظرا لان كثير من الظواهر المتعلقة بالمشاكل الاقتصادية والاداريةتأخذ شكل الدوال الآسية .

مثال (٣-٩)
أكتب مفكوك الدوال التالية

(i) e^{2x}
(ii) e^{-x^2}
(iii) $e^{(x+1)}$

الحل

بما أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

وبالتالى فأن :

$$e^{2x} = 1 + \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + ...$$
$$= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + ...$$

(ii)
$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + ...$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ..$$

(iii)
$$e^{(x+1)} = 1 + \frac{(x+1)}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + ...$$

ملحوظة

مما سبق يتضح أن كلا من المتسلسلة الاسية ومتسلسلة ذات الحدين بأس كسر أو أس سالب متسلسلات لانهائية .

(٣-٧) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)

فى أحدى المصانع تم شراء ثلاثةماكينات للانتاج بتكلفة 200000 جنية وقدرة قيمة الاستهلاك السنوى للماكينات بمقدار 5% من قيمتهم فى بداية السنه :

أ) ماهى قيمة الماكينات بعد مضى 5 سنوات متتالية من التشغيل .

ب) ماهى قيمة الماكينات بعد مضى 10 سنوات متتالية من التشغيل

الحل

أ) اذا فرضنا أن قيمة الماكينات يساوى a حيث a تمثل تكلفة الشراء ، وبما أن فى نهايه السنه الاولى تصبح قيمة الماكينات تساوى a_1 حيث:

$$\begin{aligned} a_1 &= a(1-.05) \\ &= 200000\ (1-.05) = 200000(.95) \\ &= 190000 \text{ جنية} \end{aligned}$$

كذلك قيمة الماكينات فى نهايه السنه الثانية a_2 حيث :

$$\begin{aligned} a_2 &= 190000\ (1-.05) \\ &= 200000\ (1-.05) \\ &= 200000\ (0.95)^2 \\ &= 180500 \text{ جنية} \\ &= a(.95)^2 \end{aligned}$$

وبالمثل فأن قيمة الماكينات فى نهاية السنه الخامسة سوف تصبح a_5 حيث :

$$\begin{aligned} a_5 &= a(0.95)^5 \\ &= 200000\ (0.95)^5 \\ &= 200000\ (0.774) \\ &= 154756.2 \text{ جنية} \end{aligned}$$

ب) كذلك قيمة الماكينات فى نهاية السنه 10 سوف تصبح a_{10} حيث :

$$\begin{aligned} a_{10} &= a(0.95)^{10} \\ &= 200000\ (0.95)^{10} \\ &= 11974.4 \text{ جنية} \end{aligned}$$

تطبيق (٢)

قامت احدى الشركات بشراء ماكينة بمبلغ 3150 جنية وبعد استعمالها لمدة ثمانية سنوات قامت ببيعها بمبلغ 650 جنية أوجد :

أ) المعدل السنوى لاستهلاك الماكينة .

ب) ماهو سعر بيع الماكينة اذا قامت الشركة ببيعها بعد 5 سنوات فقط .

الحل

أ) اذا فرضنا أن r هو المعدل السنوى لاستهلاك الماكينة ، a هو ثمن شراء الماكينة.

كذلك a_i هو ثمن بيع الماكينة بعد استعمالها (i) من السنوات فى هذه الحالة نجد أن :

$a_8 = a(1-r)^8 \rightarrow$

$659 = 3150(1-r)^8 \rightarrow$

$(1-r)^8 = \dfrac{650}{3150} \rightarrow$

$8\ \log(1-r) = \log\ 650 - \log\ 3150$

$= 9.914 - 10$

$1\text{-}r = 0.821 \rightarrow$

$r = 0.179 = 17.9\%$

ب) اذا قامت الشركة ببيع الماكينة بعد 5 سنوات فقط من استعمالها فسوف يكون ثمن البيع يساوى a_5 حيث :

$a5 = a(1\text{-}r)^5$

$= 3150(1\text{-}0.179)^5$

$= 3150\ (.821)^5$

$= 1174.7$ جنية

تطبيق (٣)

أودع أحد الاباء مبلؤ معين لاحد أبناءة يوم ميلادة بمعدل فائدة مركبة ربع سنوى مقدارة 3%.

أ) أوجد القيمة الحالية للمبلغ ، اذا اصبح المبلغ 50000 جنية عندما يصل عمر الابن 20 سنة .

ب) أوجد المعدل الفعلى للفائدة .

الحل

أ) اذا فرضنا أن P هى القيمة الحالية للمبلؤ كذلك بما أن الفائدة كل ربع سنة فأن:

$r = 3\%$

كذلك

$n = 20(4) = 80$ ربع سنة

$A_{80} = 50000$ جنية

أذن

$P = A_n(1+r)^{-n}$

$=50000(1+0.03)^{-80}$

$=50000(0.09398)$

$=4699$ جنية

ب) مقدار الفائدة المركبه يساوى

$A_{80} - P = 50000 - 4699$

$=45301$ جنية

وبالتالى فأن المعدل الفعلى للفائدة 'R حيث :

$45301 = 4699(R')(80) \rightarrow$

$$R' = \frac{45301}{(4699)(80)} = 0.1205$$

$=12.05\%$ ربع سنوى

تطبيق (٤)

أفترض أحد الافراد مبلغ 5000 جنية من أحد البنوك فوجد أنها تستحق كميـة خصـم مقداره 600 عن مدة 3 سنوات .

أ) أوجد معدل الخصم السنوى .

ب) أوجد معدل الخصم الربع سنوى .

الحل

أ) بما أن

$n = 3$ سنوات

فاذا كان معدل الخصم r فأن

$$600=5000(r)(3) \rightarrow$$
$$r = \frac{600}{5000x3} = 0.04$$
$= 4\%$ سنوى

ب) اذا كان معدل الخصم كل ربع سنه فأنه

$n = 3(4) = 12$ ربع سنة

$$\rightarrow$$
$$600 = 5000(5)(12) \rightarrow$$
$$r = \frac{600}{5000(12)} = 0.01$$
$= 1\%$ كل ربع سنة

(٣-٨) تمرينات **Exercises**

١- اذا فرضنا أن المتتابعة

3, 7, 11, 15, 19, ..., 163

أ) أوجد اساس المتتابعة السابقة وكذلك عدد حدودها
ب) أوجد مجموع 10 حدود الاولى منها .
ج) أوجد مجموع 10 حدود الثانية منها .
٦) أكتب الحد العام للمتتابعة .

٢- أوجد مجموع المتتاليه التالية :

$(1.05)^{-1}, (1.05)^{7}, (1.05)^{-3}, \ldots. (1.05)^{-10}$

٣- أثبت أن :

$$A+\left(A-\frac{A}{n}\right)+\left(A-2\frac{A}{n}\right)+\ldots+A-(n-1)\frac{A}{n}=\frac{n+1}{2}A$$

٤- أوجد مجموع المتواليات الهندسية التالية :

a) $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\ldots.$

b) $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$

c) $\frac{1}{1+h},\frac{1}{(1+h)^2},\frac{1}{(1+h)^3},\ldots$

٥- اذا كانت تكاليف مجموع المنشآت بأحد الشركات تساوى C ، بأفتراض أن عمرها التقديرى يساوى n من السنوات . فاذا كانت قيمة معدل الاستهلاك السنوى لهذه المنشآت تساوى حيث :

$$r=\frac{2}{n}$$

وبالتالى فأن القيمة التقديرية لبيع هذه المنشآت بعد t من السنوات هى :

$$C\left(1-\frac{2}{n}\right)^{t}$$

أوجد مايلى :

أ) القيمى التقديرية للبيع بعد سنتين اذا كان C=10000, n=20

ب) القيمة التقديريى بعد 10 سنوات اذا كان C=20000, n=10

٦- أوجد مفكوك كل من الدوال التالية :

1. e^{-5x} , 5. $(5+9x)^{-\frac{2}{3}}$

2. $e^{\sqrt[3]{x^2}}$, 6. $e^{-(\sqrt{x+1})}$

3. $(1+x)^{-2}$, 7. $(3+3x)^{10}$

4. $(9+x)^{-\frac{1}{5}}$, 8. $(3+3x)^{-10}$

٧- أودع شخص مبلغ 3000 جنية فى احدى الشركات الاستثمارية بمعدل فائدة مركبة 15% .

أوجد جملة المبلغ كذلك المعدل الفعلى للفائدة فى الحالات التالية :

١- اذا كان معدل الفائدة سنوى ،

٢- اذا كان معدل الفائدة نصف سنوى ،

٣- اذا كان معدل الفائدة ربع سنوى .

٨- أوجد كمية الخصم المستحقه لاحد البنوك أقرض أحد عملائة مبلغ 10000 بمعدل خصم 6% كل نصف سنة لمدة 4 سنوات .

٩- أوجد القيمة الحالية فى كل حالة من الحالات التالية :
١- ليصل المبلغ المودع الى 1000 جنية بعد 5 شهور بمعدل فائدة مركبة 8% شهريا .
٢- ليصل المبلغ المودع الى 500 جنية فى عام بمعدل فائدة مركبة 15% سنويا .
٣- ليصل المبلغ المودع الى 720 فى عام بمعدل فائدة مركبة 6% يوميا.
٤- ليصل المبلغ المودع الى 850 جنية فى مدة عامين بمعدل فائدة مركبة 5% شهريا.

١٠- ماهو معدل الفائدة المركبه الربع سنوى الذى يعطى معدل الفائدة الفعلى 8%.

١١- ماهو معدل الفائدة السنوى الذى يضاعف المبلغ الاصلى فى فترة 5 سنوات .

الباب الرابع
المصفوفات والمحددات
Matrices and Determinants

(٤-١) تعريفات Definations

فى هذا الفصل سوف نتناول من خلال بعض التعريفات "المصفوفات" وأهم خصائصها التى تمكن الدارسين للعلوم التجارية والاقتصادية والاجتماعية من استخدام المصفوفات من الناحيتين النظرية و التطبيقية .

(أولا) المصفوفة Matrix

المصفوفة هى منظوم مستطيل للعناصر A rectangulare array of elements . وعادة تكون عناصر المصفوفة أعداد حقيقية Real numbers.

مثال (٤-١)

اذا كان A تمثل درجات 4 طلاب فى مادة الرياضيات فى نصف العام ، B تمثل درجاتهم فى آخر العام لنفس المادة . حيث وجد أن الطالب الاول يأخذ 10 درجات فى نصف العام ، 12 درجة آخر العام . والطالب الثانى 7 ,5 ، والطالب الثالث 18, 12 ، والطالب الرابع 3 ,5 على الترتيب .

فأنه يمكن عرض Display درجات الطلاب الاربعة فى منظوم يسهل بأستخدامة معرفه درجتى كل طالب ، كذلك مقارنه درجات الطلاب على النحو التالى :

الامتحان

$$\text{الطلاب} \quad \begin{array}{c} \\ \text{الاول} \\ \text{الثانى} \\ \text{الثالث} \\ \text{الرابع} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 5 \\ 12 & 18 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (4.1)$$

ويسمى المنظوم فى (4.1) مصفوفة matrix .

ونجد أن المصفوفه (4.1) مكونه من 4 صفوف وعمودين ، حيث كل صف يمثل درجات أحد الطلاب وفقا لترتيبهم . كذلك يمثل العمود الاول درجات الطلاب فى نصف العام والعمود الثانى درجات الطلاب فى آخر العام . كذلك بأستخدام المصفوفة يسهل مقارنة درجات كل طالب فى نصف العام بآخر العام كذلك مقارنه درجات الطلاب ببعض .

وعادة يوضع عناصر المصفوفه فى قوسين على الشكل [ ] أو ( ) ، واذا كانت المصفوفة A مكونه من عدد n من الصفوف ، m من الاعمدة فانه يقال أن المصفوفه A من الترتيب nxm . وعادة تكون الصياغه العامة Generalzied form للمصفوفة A على النحو:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix}_{n.m} \qquad (4.2)$$

حيث يوضع عادة فى نهاية الطرف الايمن من القوس عدد الصفوف n وعدد الاعمدة m . ويرمز للعنصر الواقع فى الصف i والعمود j بالرمز.

$$a_{ij} \qquad , \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,m \end{matrix} \qquad (4.3)$$

مثال (٤-٢)

المصفوفة التالية A تمثل درجات 5 طلاب فى مواد : المحاسبة ، الادارة ، الاحصاء.

$$A = \text{الطلاب} \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{محاسبة} & \text{أدارة} & \text{أحصاء} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17 & 18 & 19 \\ 10 & 5 & 11 \\ 19.5 & 12 & 17 \\ 20 & 15 & 19 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{5.3} \end{array} \qquad (4.4)$$

حيث نجد أن درجة الطالب الاول فـى المحاسبة $a_{11}=17$ ودرجته فـى الادارة $a_{12}=18$ ، والاحصاء $a_{13}=19$ ، بالمثل درجة الطالب الثانى فى المحاسبة $a_{21}=10$، والادارة $a_{22}=5$ ، والاحصاء $a_{23}=11$. بالمثال الطلاب الثالث والرابع والخامس .

$a_{31}=19.5$, $a_{32}=21$, $a_{33}=17$
$a_{41}=20$, $a_{42}=15$, $a_{43}=19$
$a_{51}=3$, $a_{52}=6$, $a_{53}=7$

(ثانيا) المتجه العمودى Column Vector

اذا كانت المصفوفة c تتكون من عمود واحد وعدد n من الصفوف بحيث :

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{n1} \end{bmatrix}_{n.1} \tag{4.5}$$

فأنها تسمى متجه عمودى .

مثال (٤-٣)

اذا كان الدخل الشهرى لخمسة عمال هو I حيث :

$$I=\begin{bmatrix} 200 \\ 170 \\ 310 \\ 412 \\ 240 \end{bmatrix}_{5.1}$$

فنجد أن المتجه I يتكون من 5 صفوف ، وعمود واحد .

(ثالثا) المتجه الصفى **Row vector**

اذا كانت المصفوفه R تتكون من صف واحد وعدد m من الاعمدة ، فانها تسمى متجه صفى ، حيث :

$$R = [r_{11} \quad r_{12} \quad \ldots\ldots \quad r_{1m}]_{1.m} \tag{4.6}$$

مثال (٤-٤)

فيما يلى بيانات عن متوسط انتاج العامل اليومى من الوحدات لاحد المنتجات ، لمدة أسبوع :

$$R = [20 \quad 19 \quad 22 \quad 18 \quad 25 \quad 25]_{1.6}$$

فنجد أن P متجه صفى يتكون من 6 أعمدة :

(رابعا) المصفوفة المربعة **Square matrix**

اذا كان A مصفوفة من الترتيب nxm ، أى عدد صفوفها يساوى n وعدد أعمدتها يساوى m بحيث أن عدد الصفوف n يساوى عدد الاعمدة m أى n=m فأنه فى هذه الحالة يقال أن A مصفوفة مربعة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n.n} \tag{4.7}$$

مثال (٤-٥)

اذا كان

(i) $A = [5]_{1.1}$

أى مصفوفة من الترتيب 1x1 ، فأن A تعتبر مصفوفة مربعة .

(ii) $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}_{2.2}$

المصفوفة B مصفوفة مربعة من الترتيب 2x2.

$$\text{(iii)}\quad C = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -7 \\ 2 & 15 & -9 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3.3}$$

كذلك المصفوفة C مصفوفة مربعة من الترتيب 3x3:

فى المصفوفة A فى (4.7) تسمى العناصر $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{44},\ a_{nn}$ بالعناصر القطرية Diagonal elements حيث أنها تقع على القطر الرئيسى للمصفوفة .

مثال (٤-٦)
فى المثال السابق نجد أن :

$$C = \begin{bmatrix} (9) & 3 & -7 \\ 2 & (15) & -9 \\ -1 & 2 & (1) \end{bmatrix}_{3.3}$$

نجد أن العناصر القطرية هى :

$a_{11}=9,\ a_{22}=15,\ a_{33}=1$

(خامسا) مصفوفة الوحدة Identity (Unit) Matrix

مصفوفة الوحدة هى مصفوفة مربعة كل عنصر من عناصرها القطرية يساوى واحد ، وباقى عناصرها كل منهم يساوى صفر.

فاذا كان e_{ij} يرمز للعنصر فى الصف i والعمود j فى مصفوفة الوحدة ، فنجد أن :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if}\quad i = j \\ 0 & \text{if}\quad i \neq j \end{cases} \tag{4.8}$$

مثال (٤-٧)
كل من المصفوفات التالية تمثل مصفوفة الوحدة :

(i) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2.2}$

(ii) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3.3}$

(iii) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4.4}$

(سادسا) مبدول المصفوفة **Transpose of a matrix**

اذا كانت المصفوفة A من الترتيب nxm أى عدد صفوفها n وعدد أعمدتها m وعناصرها هى a_{ij} حيث $j=1,2,..,m$ $i=1,2,..,n,$ فأن المصفوفة `A من الترتيب mxn وعناصرها $\grave{a}_{ij}$ حيث :

$$\grave{a}_{ij} = a_{ji}$$

تسمى مبدول المصفوفة A .

مثال (٤-٨)

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}_{3.2}$$

وبما أن المصفوفة A من الترتيب 3x2 أى مكونـه 3 صفوف وعمودين ، وبالتالى فأن مبدول المصفوفة A هى المصفوفة `A من الترتيب 2x3 ، أى مكونه من صفين وثلاثة أعمدة ، أى أن :

$$A` = \begin{bmatrix} a_{11}^{`} & a_{12}^{`} & a_{13}^{`} \\ a_{21}^{`} & a_{22}^{`} & a_{23}^{`} \end{bmatrix}_{2.3}$$

وبأستخدام المصفوفة A وتعريف مبدول المصفوفة A نجد أن :

$$a_{11}^{`} = a_{11} = 3$$
$$a_{12}^{`} = a_{21} = 4$$
$$a_{13}^{`} = a_{31} = 9$$
$$a_{21}^{`} = a_{12} = -2$$
$$a_{22}^{`} = a_{22} = 0$$
$$a_{23}^{`} = a_{32} = -8$$

وبالتالى فأن

$$A` = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -8 \end{bmatrix}_{2.3}$$

مثال (٤-٩)

أوجد مبدول المصفوفة B حيث :

$$B = \begin{bmatrix} 17 & -9 & 0 \\ 20 & -9 & 8 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3.3}$$

بما أن المصفوفة B من الترتيب 3x3 ، فأن مبدول المصفوفة B هوالمصفوفة `B من الترتيب 3x3 أيضا حيث :

$$B` = \begin{bmatrix} b`_{11} & b`_{12} & b`_{13} \\ b`_{21} & b`_{22} & b`_{23} \\ b`_{31} & b`_{32} & b`_{33} \end{bmatrix}_{3.3}$$

حيث

$$b`_{11} = b_{11} = 17$$
$$b`_{12} = b_{21} = 20$$
$$b`_{13} = b_{31} = -1$$
$$b`_{21} = b_{12} = -3$$
$$b`_{22} = b_{22} = -9$$
$$b`_{23} = b_{32} = 5$$
$$b`_{31} = b_{13} = 0$$
$$b`_{32} = b_{23} = 8$$
$$b`_{33} = 6_{33} = 0$$

وبالتالى فأن :

$$B` = \begin{bmatrix} 17 & 20 & -1 \\ -3 & -9 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

(٤-٢) عمليات على المصفوفات Matrix Operations

فـى هـذا الفصـل سـوف نتنـاول بالدراسـة بعـض العمليـات الرياضيـة الاساسية المتعلقة بالمصفوفات Mathematical operations مثل الجمـع Addition والطرح Subtraction والضـرب Multiplication والتـى تتضـح منهـا الخصـائص الاساسية للمصفوفات .

(أولا) عمليات الجمع أو الطرح Operation of matrix addition (or subtraction)

اذا كان B, A مصفوفتان من نفس الترتيب nxm ، فانه يمكن جمع (أو طرح) B الى A (أو من A). فاذا كانت C هى مصفوفة حاصل الجمع (أو الطـرح) ، فـان ترتيب C هو نفـس ترتيـب المصفوفـات B, A أى مـن الـترتيب nxm أيضـا . فـاذا كانت عناصر المصفوفة C هى C_{ij}. فان :

$$C = A \pm B \qquad ,$$

$$C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \end{matrix} \qquad (4.9)$$

حيث a_{ij}, b_{ij} هم عناصر المصفوفة B, A على الترتيب .

مثال (٤-١٠)

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

فأن

$$\text{i)} \quad C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+5 & 5+(-3) \\ 3+0 & -2+(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)}\quad H = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & & 5 & -3 \\ & & - & & \\ 3 & -2 & & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -15 & 5-(-3) \\ 3-0 & -2-(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)}\quad T = B - A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5-1 & -3-5 \\ 0-3 & -1-(-2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٤-١١)

اذا كانت المصفوفة C تمثل متوسط الاستهلاك الشهرى بالجنية للفرد فى محافظات: الشرقية ، السويس ، قنا فى الفترة 1983-1980.

$$C = \begin{array}{c} \text{السنوات} \\ 1980 \\ 1981 \\ 1982 \\ 1983 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{الشرقية} & \text{السويس} & \text{قنا} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 150 & 120 & 98 \\ 155 & 190 & 100 \\ 280 & 200 & 120 \\ 250 & 220 & 125 \end{bmatrix} \end{array}$$

فاذا كانت المصفوفة E تمثل متوسط الدخل الشهرى للفرد فى نفس الفترة لنفس المحافظات حيث :

$$E = \begin{bmatrix} 175 & 120 & 100 \\ 160 & 200 & 110 \\ 280 & 210 & 125 \\ 250 & 220 & 125 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة I التى تمثل عناصرها متوسط ادخار الفرد فى كل محافظة فى نفس الفترة .

الحل

بما أن

$$I = E - C \rightarrow$$

$$I = \begin{bmatrix} 175 & 120 & 100 \\ 160 & 200 & 110 \\ 280 & 210 & 125 \\ 250 & 220 & 125 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 150 & 120 & 98 \\ 155 & 190 & 100 \\ 280 & 200 & 120 \\ 250 & 220 & 125 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (175-150) & (120-120) & (100-98) \\ (160-155) & (200-190) & (110-100) \\ (280-280) & (210-200) & (125-120) \\ (250-250) & (220-220) & (125-125) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ثانيا) عملية الضرب **Operation of matrix multiplication**

(١) ضرب المصفوفة فى عدد حقيقى **Scalar multiplication**

اذا كان a_{ij} هى عناصر المصفوفة A حيث :

K عدد حقيقى فان KA تمثل مصفوفة من الترتيب nxm أيضا حيث :

$$C_{ij} = ka_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m \end{matrix} \qquad (4.10)$$

مثال (٤-١٤)

اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد :

i) $B = 5A$

ii) $C = -10\ A$

الحل

i) $$B = 5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 & 45 & 10 \\ 5 & -40 & 5 \end{bmatrix}$$

ii) $$C = 10A = -10\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -30 & -90 & -20 \\ -10 & 80 & -10 \end{bmatrix}$$

(٢) الضرب المركزى **The inner product**

اذا كان A متجه صفى عـدد أعمدتـه n ,B متجـه عمـودى عـدد صفوفـه n ، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

فأن حاصل الضرب AB يسمى بالضرب المركزى حيث :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1} \end{aligned} \qquad (4.13)$$

مثال (٤-١٣)

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{1.3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3.1}$$

فأن :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=(1x9)+(5x2)\_(7x1)$$
$$=9+10+7$$
$$=26$$

(٣) ضرب المصفوفات

اذا A مصفوفة من الترتيب B, n_1xm_1 مصفوفة من الترتيب n_2xm_2. فان الشرط الضرورى والكافى لامكانية الحصول على مصفوفة حاصل الضرب C=AB هو أن تكون عدد أعمدة المصفوفة $A(m_1)$ تساوى عدد صفوف المصفوفة $B(n_2)$ أى $m_1=n_2$ وتكون مصفوفة حاصل الضرب AB من الترتيب n_1xm_2 ، اى عدد صفوفها هو نفس عدد صفوف المصفوفة A وعدد أعمدتها هو عدد أعمدة المصفوفة B.

$$\boxed{A_{n_1xm_1} \quad B_{n_2xm_2} = C_{n_1xm_2}}$$

شكل (٤-١)

ويتم الحصول على عناصر مصفوفه حاصل الضرب C على النحو التالى :
اذا كان

$$A_{n.m}B_{m.r} = C_{n.r}$$

حيث C_{ij} هى عناصر المصفوفة C بحيث $i=1,2,..,n$, $j=1,2,..,r$ فان C_{ij} تنتج من الضرب المركزى للصف i فى المصفوفة A والعمود j فى المصفوفة B.

الصف $i\overset{A}{[\rightarrow]}\ \ \overset{B}{[\downarrow]} = \left[\overset{C}{(C_{ij})}\right]$

العمود

j

شكل (٤-٢)

وسوف يتضح ذلك من خلال الامثلة التالية :

مثال (٤-١٤)

اذا كان

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}_{2.2},B=\begin{bmatrix}1&2\\5&1\end{bmatrix}_{2.2}$$

أوجد المصفوفات التالية

i) $C = AB$

ii) $K = BA$

الحل

بما أن

i) $C = A_{2.2}\ \ B_{2.2}$

فأن مصفوفه حاصل الضرب C من الترتيب 2x2.

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}=\overset{\rightarrow}{\begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}}\ \begin{bmatrix}1&2\\5&1\end{bmatrix}\downarrow$$

حيث يتم حساب عناصر المصفوفة C على النحو التالى :

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$=3x1+2x5=3+10=13$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=3x2+2x1=6+2=8$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$=4x1+1x5=4+5=9$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=4x2+1x1=8+1=9$$

وبالتالى فأن :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

بالمثل :

ii) $K = B_{2.2} \quad A_{2.2}$

وبالتالى فأن مصفوفة حاصل الضرب K من الترتيب 2x2:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث :

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$=1x3+2x4=3+8=11$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$1x2+2x1=2+2=4$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$=5x3+1x4=15+4=19$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$=5x4+1x1=20+1=21$$

وبالتالى فأن :

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 19 & 21 \end{bmatrix}$$

ملحوظة

من (14.15) ,(4.14) يتضح أن مصفوفات حاصل الضرب

$AB \neq BA$

وبالتالى فأن ضرب المصفوفات يختلف عن ضرب الاعداد حيث أن حاصل ضرب الاعداد 3x2. وهو نفس حاصل الضرب 2x3 ، أى أن

$2x3 = 3x2 = 6$

وبالتالى فانه بالنسبه لضرب المصفوفات لابد من أخذ ترتيب المصفوفات فى الاعتبار .

مثال (٤-١٥)

اذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2&0&7\\-1&4&1\\5&2&1\end{bmatrix}_{3.3},B=\begin{bmatrix}8&0&7\\-3&5&3\\-2&1&6\end{bmatrix}_{3.3}$$

فأن :

$$C=AB\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\vec{0}&7\\-1&4&1\\5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&0&7\\-3&5&3\\-2&1&6\end{bmatrix}\downarrow$$

حيث

$$C_{11}=\begin{bmatrix}2&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\-3\\-2\end{bmatrix}$$

=(2x8)+(0x-3)-(7x-2)
= 16+0-14=2

$$C_{12}=\begin{bmatrix}2&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\1\end{bmatrix}$$

=(2x0)+(0x5)+(7x1)
= 0+0+7=7

$$C_{13}=\begin{bmatrix}2&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\3\\6\end{bmatrix}$$

=(2x7)+(0x3)+(7x6)
=14+0+42=56

$$C_{21}=\begin{bmatrix}-1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\-3\\-2\end{bmatrix}$$

=(-1x8)+(4x-3)+(1x-2)
= -8-12-2= -22

$$C_{22}=\begin{bmatrix}-1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\1\end{bmatrix}$$

=(-1x0)+(4x5)+(1x1)
=0+10+1-21

$$C_{23}=\begin{bmatrix}-1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\3\\6\end{bmatrix}$$

=(-1x4)+(9x3)+(1x6)
=-4+12+6=14

$$C_{31} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
=(5x8)+(2x-3)+(1x-2)
=40-6-2= 32

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
=(5x0)+(2x5)+(1x1)
=0+10+1=11

$$C_{33} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$
=(5x7)+(2x3)+(1x6)
=35+6+6= 47

وبالتالى فأن :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 56 \\ -22 & 21 & 14 \\ 32 & 11 & 47 \end{bmatrix}$$

مثال (٤-١٦)
اذا كان :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن :

i) $BI = B$
ii) $IB = B$

ثم علق على الناتج فى (i) ,(ii).

الحل

i)

$$BI = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

ii)

$$BI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.17)$$

من (4.16) ,(4.17) يتضح أن حاصل ضرب مصفوفة الوحدة فى أى مصفوفة A هو نفس المصفوفة A أى :

$$AI = IA = A$$

(٤-٣) محدد المصفوفة المربعة The determinant of a square matrix

لكل مصفوفة مربعة A عناصرها a_{ij} حيث $i=1,2,..,n,\ j=1,2,..,n,$ توجد قيمة عددية مناظرة لهذه المصفوفة تسمى محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز |A| حيث:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.18)$$

من الترتيب nxn أى من نفس ترتيب المصفوفة A ، وبالتالى يمكن تعريف* المحدد بأنه دالة نطاقها هو فئة عناصر المصفوفة A ومدها (نطاقها المصاحب) هو فئة الاعداد الحقيقية .

ومفهوم المحدد وحساب قيمته بالنسبة لدراسة المصفوفات واستخدامها فى الدراسات التطبيقية على جانب كبير من الأهمية كما سوف يتضح فى الباب التالى :

فاذا كانت المصفوفة A بحيث :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

فان محدد المصفوفة A هو |A| حيث :

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

وفيما يلى سوف نقدم طرق حساب قيمة المحدد من أى ترتيب .

* أ.د. عبدالله الهلباوى (١٩٨٧): الرياضة البحته للتجاريين – مكتبة عين شمس ، القاهرة.

(أولا) محدد المصفوفة المربعة من الترتيب (١×١)
اذا كان A مصفوفة مربعة من الترتيب (١×١) ، أى تتكون من عنصر واحد فقط بحيث :

$$A = [a_{11}]$$

فأن محدد المصفوفة A هو :

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

أى قيمة المحدد هو نفس قيمة العنصر a_{11}.

مثال (٤-١٧)
أوجد قيمة محدد المصفوفة التالية :

$$B=[-13]$$

محدد المصفوفة B هو

$$|B| = |-13| = -13$$

(ثانيا) محدد المصفوفة المربعة من الترتيب (2x2)
اذا كانت المصفوفة A من الترتيب (2x2) بحيث :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فأن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{2} \end{bmatrix} = a_{11} \quad a_{22} \quad - \quad a_{21} \quad a_{12}$$

مثال (٤-١٨)
أوجد محدد المصفوفة التالية :

$$K = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

محدد المصفوفة K هو :

$$K=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=2x3-3x5$$
$$=6-15=-9$$

(ثالثا) محدد المصفوفة من الترتيب (3x3)

اذا كان A مصفوفة من الترتيب (3x3) .

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فأن محدد المصفوفة A

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يمكن ايجاد قيمته بطريقتين هما :

١- طريقة الاعمدة الملتصقة .

٢- طريقة المرافقات .

طريقة الاعمدة الملتصقة

ويتم حساب قيمة المحدد من الترتيب 3x3 بأستخدام الاعمدة الملتصقة على النحو التالى :

(١) كتابة عناصر العمود الاول والثانى يمين المحدد A على النحو :

$$\begin{array}{ccccc} & & & S_1 & S_2 \quad S_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & P_1 & P_2 \quad P_3 \end{array}$$

(٢) ايجاد حاصل ضرب عناصر كل قطر من الاقطار P_1,P_2,P_3,S_1,S_2,S_3 على النحو :

$$P_1 = a_{11} \times a_{22} \times a_{33}$$

$$P_2 = a_{12} \times a_{23} \times a_{31}$$

$$P_3 = a_{13} \times a_{21} \times a_{23}$$

$$S_1 = a_{31} \times a_{22} \times a_{13}$$

$$S_2 = a_{32} \times a_{23} \times a_{11}$$

$$S_3 = a_{33} \times a_{21} \times a_{12}$$

(٣) قيمة المحدد A هو عبارة عن هو الفرق بين الاقطار P والاقطارى S على النحو

$$|A| = P_1 + P_2 + P_3 - S_1 - S_2 - S_3$$

مثال (٤-١٩)

أوجد قيمة محدد المصفوفة A حيث

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

١- كتابة عناصر العمود الاول والثانى يمين المحدد A على النحو :

$$\begin{array}{ccccc} & & & S_1 & S_2 \quad S_3 \\ \left|\begin{matrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| & & & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \\ & & & P_1 & P_2 \quad P_3 \end{array}$$

٢- نحسب الاقطار P_1,P_2,P_3, S_1,S_2,S_3 على النحو

$P_1= 3(4)(1)= 12$
$P_2= -1(1)(1)= -1$
$P_3= 5(2)(0)= 0$
$S_1= 1(4)(5)= 20$
$S_2= 0(1)(3)= 0$
$S_3= 1(2)(-1)= -2$

٣- قيمة المحدد A هى :

$$
\begin{aligned}
|A| &= P_1+P_2+P_3-S_1-S_2-S_3 \\
&=12+(-1)+0-20-0-0-(-2) \\
&=12-1-20+2 \\
&=-7
\end{aligned}
$$

طريقة المرافقات **The method of cofactors**

وطريقة المرافقات طريقة عامة بأستخدامها يمكن أيجاد قيمة المحدد من أى ترتيب ، أو بعبارة أخرى يمكن بأستخدامها ايجاد قيمة المحدد من الترتيب n حيث $n=2,3,4,5,6,...$.

وتعتمد هذه الطريقة على أنه يوجد لكل مصفوفة مربعة A من الترتيب n توجد مصفوفة مربعه من نفس ترتيب المصفوفة A تسمى مصفوفة المرافقات A matrix of cofactors ، وعادة يرمز لها بالرمز C، ولعناصرها بالرمز C_{ij} ويسمى كل عنصر C_{ij} بالمرافق . فلكل عنصر a_{ij} فى المصفوفة A يوجد عنصر مناظر له فى مصفوفة المرافقات C_{ij} . ويتم تحديد المرافقات C_{ij} على النحو التالى :

١- بالنسبة للعنصر a_{ij} فى المصفوفة A ، اذا تم حذف الصف i ، والعمود j من المصفوفة A فأننا نحصل على مصفوفة جزئية Submatrix من المصفوفة A من الترتيب (n-1).

٢- نوجد محدد المصفوفة الجزئية ويسمى المحيدد Minor ونحسب قيمتة .

٣- توجد المرافق C_{ij} وهو عبارة عن قيمة المحيدد مضروف فى $(-1)^{i+j}$ أى أن:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} x \ (\text{المحيدد المناظر للعنصر } a_{ij}) \qquad (4.19)$$

ويتم حساب قيمة محدد المصفوفة A بأستخدام طريقة المرافقات عن طريق اختيار عناصر أى صف (أو عمود) فى المصفوفة A وضرب كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) فى المرافقات المناظرة لها .

فاذا تم ايجاد قيمة المحدد بأستخدام عناصر الصف i فأن :

$$|A| = a_{i1} \ C_{i1} + a_{i2} \ C_{i2} + \dots + a_{in} \ C_{in}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ C_{ij} \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (4.20)$$

واذا تم ايجاد قيمة المحدد بأستخدام عناصر العمود j ، فأن :

$$|A| = a_{1j} \ C_{1j} + a_{2j} \ C_{2j} + \dots + a_{nj} \ C_{nj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ C_{ij} \qquad j=1,2,..,n \qquad (4.21)$$

لاى قيمة من قيم j حيث

مثال (٤-٢٠)
اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

١- أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة A.
٢- أوجد قيمة المحدد |A| بأستخدام طريقة المرافقات .

الحل

١- اذا كانت مصفوفة المرافقات C بحيث :

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

فأنه يمكن حساب عناصر المصفوفة C بأستخدام العلاقة (4.19) على النحو التالى :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}|-1|=(-1)^2(-1)=-1$$
$$C_{12}=(-1)^{1+2}|7|=(-1)(7)=-7$$
$$C_{21}=(-1)^{2+1}|2|=(-1)^3(2)=-2$$
$$C_{22}=(-1)^{2+2}|5|=(1)(5)=5$$

وبالتالى فأن مصفوفة المرافقات هى :

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

٢- ويمكن ايجاد قيمة المحدد |A| بأستخدام عناصر الصف الاول وبتطبيق العلاقة (4.20)على النحو :

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=5(-1)+2(-7)$$
$$=-5-14$$
$$=-19$$

مثال (٤-٢١)

أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة B ثم قيمة محددها بأستخدام عناصر العمود الاول .

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل

اذا كانت مصفوفة المرافقات C بحيث :

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

فأستخدام العلاقة (4.21) نجد أن :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-7$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=(-1)(35)=-35$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(1)(11)=11$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=(-1)(-6)=6$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=(1)(11)=11$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)(4)=4$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=(1)(3)=3$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 0\end{vmatrix}=(-1)(-15)=15$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}=(1)(-2)=-2$$

وبأستخدام عناصر العمود الاول للمحدد B والعلاقة (4.21) فأن :

$$|B|=2(-7)+5(6)+1(3)$$
$$=-14+30+3=19$$

ملحوظة

فى حالة اذا كان المطلوب ايجاد قيمة المحدد فقط فانه يكتفى بحساب المرافقات المناظرة لعناصر الصف أو العمود الذى يتم بأستخدامه أيجاد (أو فك) قيمة المحدد وسوف يتضح ذلك فى المثال التالى :

مثال (٤-٢٢)

أوجد قيمة محدد المصفوفة التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 7\\ 0 & -1 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

نفترض أننا سوف نقوم بأيجاد قيمة المحدد بأستخدام عناصر الصف الاول . فأننا نجد أن المرافقات المناظرة لعناصر الصف الاول هى $C_{11},C_{12},C_{13},C_{14}$ ، ويتم حسابها على النحو التالى :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 2 & 7\\ -1 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=(1)(5)=5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(22) = -21$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-19) = -19$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(13) = -13$$

ومن العلاقة (4.20) نجد أن :

$$\begin{aligned}|A| &= 2(5)+5(-21)+0(-19)+1(-13)\\ &=10-105+0-13\\ &= -108\end{aligned}$$

(٤-٤) خصائص المحددات The Properties of Determinats

فيما يلى سوف نقدم باختصار أهم خصائص المحددات التى تؤدى الى توفير الوقت والجهد فى ايجاد قيمة المحدد .

(١) اذا كان جميع عناصر أى صف (أو عمود) كل منها يساوى صفر ، فأن قيمة المحدد تساوى صفر .

فاذا كان المحدد |A| بحيث :

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 20 \\ 40 & -15 & 3 \end{vmatrix}$$

فأن عناصر الصف الاول كل منها يساوى صفر وبالتالى فأن :

$$|A| = 0 \qquad (4.22)$$

(٢) اذا كان |A| وتم ابدال صفين (أو عمودين) وأصبح بعد التبديل |B| فأن:

$$|B| = -|A| \qquad (4.23)$$

فاذا كان :

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \qquad (4.24)$$

واذا تم ابدال الصف الاول بالصف الثانى بحيث :

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad (4.25)$$

من (4.25) ,(4.24) نجد أن :

$$|B| = -|A|$$

(٣) اذا كان |A| بحيث يوجد عامل مشترك K بين عناصر أى صف (أو عمود). فاذا تم قسمة عناصر هذا الصف (أو العمود) على العامل K بحيث نحصل

على المحدد |B| فأن قيمة المحدد |A| هى عبارة عن قيمة المحدد |B| مضروبة فى K ، أى أن :

$$|A|=K|B|$$

فاذا كان :

$$|A|=\begin{vmatrix}20 & 25\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5 \tag{4.26}$$

كذلك نجد أنه يوجد عامل مشترك (5) بين عناصر الصف الاول أى K=5 فأن:

$$|A|=5\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix} \tag{4.27}$$

فأن

$$|B|=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1$$

من (4.26), (4.27) نجد أن :

$$|A| = K|B| = 5(1) = 5 \tag{4.28}$$

(٤) اذا تم ضرب عناصر أى صف (أو عمود) فى مقدار ثابت ثم تم اضافة الصف الناتج أو العمود الناتج الى عناصر أى صف آخر (أو عمود آخر).

فان قيمة المحدد لاتتغير كما سوف يتضح ذلك من المثال التالى .
اذا كان :

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 5 & 9\\ 1 & 4 & 20\\ 3 & 12 & 5\end{vmatrix}$$

فأن قيمة المحدد بطريقة المرافقات يتم حسابها على النحو :

$$|A|=1\begin{vmatrix}4 & 40\\ 12 & 5\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & 20\\ 3 & 5\end{vmatrix}+9\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 12\end{vmatrix}$$

$$=1(20-240)-5(5-60)+9(12-12)$$
$$=-220+275+0$$
$$=55 \qquad (4.29)$$

أما بأستخدام الخاصية رقم (٤)، فاننا نجد أنه يمكن ضرب عناصر العمود الاول فى (-4) وأضافتها الى عناصر العمود الثانى فنجد أن :

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 20 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad (4.30)$$

فنجد أن المحدد فى (4.30) يحتوى على عمود فيه عنصرين كل منهما يساوى صفر وبالتالى فان بفك هذا المحدد بأستخدام عناصر العمود الثانى نجد :

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 20 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(1)\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$
$$=(-1)(5-60)$$
$$=55 \qquad (4.31)$$

واضح من (4.31), (4.30) ان استخدام الخاصية (٤) أدى الى اختصار الحسابات وبالتالى تقليل الوقت اللازم لايجاد قيمة المحدد .

(٥) اذا تساوت عناصر أى صف (أو عمود) مع العناصر المناظر لها بصف آخر (أو عمود) فأن قيمة المحدد تساوى صفر . ويمكن أثبات ذلك بسهوله عن طريق الخاصية رقم (٤). كما سوف يتضح فى المثال التالى :

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 55 & 26 & 101 \\ 3 & 9 & -28 \end{vmatrix} \qquad (4.32)$$

فان عناصر الصف الاول تتساوى مع العناصر المناظرة لها للصف الثالث وبالتالى فأن :

$$|A| = 0 \tag{4.33}$$

ملحوظة

تمثل الخواص السابقه أهمية فى ايجاد قيمة المحدد وبصفة خاصة المحددات ذات الحجم الكبير ، فتؤدى هذه الخواص الى توفير الوقت والجهد .

(٤-٥) معكوس (مقلوب) المصفوفة   The Inverse of a Matrix

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الترتيب nxn بحيث أن قيمة محددها لايساوى صفر أى أن $|A|\neq 0$ ، فانه يوجد مصفوفة B من نفس ترتيب A أى من الترتيب nxn بحيث :

$$AB = I \tag{4.34}$$
$$BA = I \tag{4.35}$$

حيث I هى مصفوفة الوحدة من الترتيب nxn أيضا ، وتسمى المصفوفة B معكوس (أو مقلوب) المصفوفة A وعادة يرمز لها بالرمز A^{-1} وبالتالى فأن :

$$A\,A^{-1}=I$$
$$A^{-1}\,A=I$$

ويتم ايجاد عناصر المصفوفة A^{-1} من العلاقة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ C` \tag{4.36}$$

حيث `C هى مبدولة مصفوفة المرافقات ، وسوف نوضح من خلال الامثلة التالية الخطوات التى يجب اتباعها لايجاد مقلوب المصفوفة .

مثال

أوجد معكوس المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

لايجاد معكوس المصفوفة نتبع الخطوات التالية :

١- نوجد قيمة محدد المصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

اذا كانت قيمة المحدد تختلف عن الصفر نستكمل الخطوات التالية :

٢- نوجد مصفوفة المرافقات C (أنظر الفصل السابق)

$$C=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد مبدولة مصفوفة المرافقات `C حيث :

$$C`=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

٤- من العلاقة (4.36) نجد أن

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ C`=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

٥- وللتأكد من صحة الحسابات لعناصر المصفوفـة A^{-1} نوجد AA^{-1} فـاذا كـانت مصفوفة حاصل الضرب هى I فأن ذلك يؤكد أن حساب عناصر A^{-1} سليم .

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -.1 \\ -.2 & -.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

كذلك

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix} -3 & -.1 \\ -.2 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أيضا .

خصائص معكوس المصفوفة

١) اذا كان A^{-1} هى معكـوس المصفوفـة A ، فـأن معكـوس المصفوفـة A^{-1} هـو المصفوفة A ، أو بعبارة اخرى .

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{4.37}$$

٢) الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمصفوفة المربعة معكوس ، هو أن يختلف قيمة محددها عن الصفر ، أو بعبارة أخرى .

$$|A| \neq 0$$

وفي حالة اذا كان قيمة محدد المصفوفة A يساوي صفر ، فانه يقال في هذه الحالة أن المصفوفة A مصفوفة شاذة A singular matrix وفي حالة $|A|\neq 0$ فأنه يقال أن المصفوفة A غير شاذة Non-singular .

(٤-٦) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)
تقوم ثلاثة شركات لانتاج المنسوجات القطنيـة بـالتصدير للخـارج ، فـاذا كـان المصفوفة P تعطى نسبة الانتاج السليم والمعيب لكل شركة .

$$\begin{array}{cc} & \text{الشركات} \\ & \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} .95 & .99 & .97 \\ .05 & .01 & .03 \end{bmatrix}_{2.3} \end{array} \begin{array}{l} \text{السليم} \\ \text{المعيب} \end{array}$$

فاذا قامت الشركات الثلاثة فى أحد السنوات الماضيـة بتصديـر الكميـات الموضحـة بالمتجه T حيث :

$$T = \begin{bmatrix} 60\ 000 \\ 30\ 000 \\ 90\ 000 \end{bmatrix}_{3.1}$$

فان عدد الوحدات السليمة والمعيبة المصدرة من الشركات الثلاثة هى PT حيث :

$$PT = \begin{bmatrix} .95 & .99 & .97 \\ .05 & .01 & .03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60\ 000 \\ 30\ 000 \\ 90\ 000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 174000 \\ 60000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{سليم} \\ \text{معيبه} \end{array}$$

تطبيق (٢)

تقوم احدى شركات النقل بتقدير التكاليف المتوقعه لصيانة المركبات التابعة لها فى العام المقبل . فاذا كانت الشركة تمتلك 3 أنواع من المركبات ، والمصفوفة B تعطى عدد المركبات والخطوط التى تعمل عليها .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{أتوبيسات كبيرة} & \text{أتوبيسات متوسطة} & \text{لوريات} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 20 & 100 & 20 \\ 30 & 120 & 15 \\ 50 & 130 & 20 \\ 10 & 90 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{الشرق} \\ \leftarrow \text{الغرب} \\ \leftarrow \text{الشمال} \\ \leftarrow \text{الجنوب} \end{array}$$

فاذا كان متوسط عدد قطع الغيار السنوى المطلوب لكل وحدة من المركبات وفقا لانواعها الثلاثة كما هو موضح بالمصفوفة R .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{اتوبيسات كبيرة} & \text{اتوبيسات متوسطة} & \text{لوريات} \end{array} \\ R = & \begin{bmatrix} 1.2 & 1.6 & 2.5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{طقم كهرباء} \\ \text{تيل فرامل} \\ \text{كويتش} \end{array}$$

كذلك كانت التكلفة المتوسطة لكل قطعة غيار كما هىموضحة بالمتجه C بالجنية .

$$C = \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

فأنه يمكن تحديد التكلفة المتوسطة لقطع الغيار للمركبات التى تعمل على خطوط الشرق ، الغرب ، الشمال ، الجنوب .

كما هو موضح بالمتجه T حيث :

$$T = BRC$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 100 & 20 \\ 30 & 102 & 15 \\ 50 & 130 & 20 \\ 10 & 90 & 10 \end{bmatrix}_{4.3} x \begin{bmatrix} 1.2 & 1.6 & 2.5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3.3} x \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}_{3.1}$$

$$= \begin{bmatrix} 304 & 312 & 450 \\ 336 & 348 & 510 \\ 400 & 420 & 615 \\ 232 & 236 & 345 \end{bmatrix}_{4.3} x \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}_{3.1}$$

$$= \begin{bmatrix} 84568 \\ 116280 \\ 139900 \\ 79060 \end{bmatrix}_{4.1}$$

تطبيق (٣)

فى دراسة للهجرة من الريف والحضر الى المناطق الجديدة أو خارج الدولة وجد أن النسبة المتوقعة للهجرة من الريف والحضر الى المناطق الجديدة أو الخارج كما هو موضح بالمصفوفة M حيث :

$$\begin{array}{cc} & \text{الى المناطق الجديدة} \quad \text{الى خارج الدولة} \\ M = & \begin{bmatrix} .001 & .02 \\ .002 & .01 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{من الريف} \\ \text{من الحضر} \end{array}$$

فاذا كان عدد السكان المتوقع بالمليون بعد 5 سنوات بـالمليون فـى الريـف والحضـر كما هو موضح بالمتجه P.

$$P = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix}$$

والمطلوب

أوجد العدد المتوقع من المهاجرين الى المناطق الجديد ، وخارج الدولة .

الحل

١- العدد المتوقع للمهاجرين م الريف والحضر P`M حيث :

$$P`M = \begin{bmatrix} 40 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .001 & .02 \\ .002 & .01 \end{bmatrix}$$

$$= [.06 \quad .90]$$ بالمليون نسمه

$$= [60000 \quad 900000]$$

أى أن عـدد المهـاجرين مـن الريـف والحضـر الـى المنــاطق الجديـدة هـو 60000 شخص، الى خارج الدولة 900000 شخص .

(٤-٧) تمرينات Exercises

(١) حدد ترتيب كل مصفوفة من المصفوفات التالية :

1. $\begin{bmatrix} 16 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 2 & -7 & 11 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 & 20 & 10 \\ 2 & 11 & 9 & 1 & -12 \\ 0 & -71 & 1 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(٢) أوجد المصفوفة المبدولة لكل مصفوفة من المصفوفات فى (١).

(٣) اذا كانت $A_{2.4}$ مصفوفة تتكون من العناصر :

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & , \quad \text{if} \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

أ) أوجد المصفوفة A كذلك `A.

ب) أوجد المصفوفة (`AA).

(٤) أوجد مايلى

1. $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $^{-5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}^{t}$

8. $^{K}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & 2a \end{bmatrix} - 2K\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{t}$

11. $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(٥) أوجد قيمة المحدد لكل مصفوفة من المصفوفات التالية :

1. A=[-2], A=[K]

2. $H = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

3. $B=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$, $K=\begin{bmatrix}-1&0&5\\3&-2&-1\\1&0&7\end{bmatrix}$

4. $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3&1&4\\0&3&0\\1&2&-2\end{bmatrix}$

(٦) بأستخدام طريقة المرافقات أوجد قيمة كل من المحددات التالية :

1. $A=\begin{bmatrix}0&-4&2&2\\0&7&1&-2\\3&1&3&4\\0&-2&6&1\end{bmatrix}$

2. $B=\begin{bmatrix}3&3&4&1&4\\0&0&3&0&0\\3&1&2&0&3\\1&-3&6&0&2\\-1&4&0&0&1\end{bmatrix}$

(٧) اذا كان

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$

أثبت أن

i) $AB\neq BA\neq A`B\neq AB`\neq A`B`\neq B`A`$

ii) $|AB|=|BA|=|A`B|=|AB`|=|A`B`|=|A`B`|=4$

(٨) بأستخدام خصائص المحددات وبدون فك ، أثبت أن*:

* Frank Ayres "Matrics" schaums outline; McGraw-Hill Book Company 1962.

1. $$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & a & (b+c) \\ 1 & b & (c+a) \\ 1 & c & (a+b) \end{vmatrix} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} (na_1+b_1) & (na_2+b_2) & (na_3+b_3) \\ (nb_1+c_1) & (nb_2+c_2) & (nb_3+c_3) \\ (nc_1+a_1) & (nc_2+a_2) & (nc_3+a_3) \end{vmatrix} =$$

$$(n+1)(n^2 = n+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(٩) حدد أى المصفوفات التالية لها معكوس (مقلوب) وأيها شاذة :

1. $$\begin{bmatrix} & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 & 8 \\ 30 & 6 \end{bmatrix}$$

(١٠) بأستخدام طريقة المرافقات أوجد معكوس المصفوفات التالية :

1. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & -12 & -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6 & 7 & -7 \\ 12 & -11 & 12 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(١١) فى كلية التجارة وادارة الاعمال بجامعة حلوان وجد أن نسبة النجاح والرسوب فى أحد السنوات فى البكالوريوس كما هو موضح بالمصفوفه التالية وفقا للشعب .

الشعبة

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{التجارة الخارجية} & \text{الادارة} & \text{محاسبة} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .76 & .82 & .80 \\ .24 & .18 & .20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{نجاح} \\ \text{رسوب} \end{array}$$

فاذا كان عدد الطلاب فى كل شعبة من الشعب الثلاثة كما هو موضح بالمتجه V.

$$V = \begin{bmatrix} 1200 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix}$$

والمطلوب

١- عدد الطلاب الناجحين والراسبين فى هذه السنه من الشعب الثلاثة .
٢- العدد المتوقع للطلاب الناجحين فى كل شعبة .

(١٢) فى أحدى الانتخابات فى 5 محافظات ، كانت نسبة الاصوات المتوقعه فى كل محافظة من المستقلين ، الديمقراطيين ، الجمهوريين على النحو المبين فى المصفوف P.

المحافظات

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} .40 & .35 & .50 & .36 & .55 \\ .40 & .40 & .30 & .32 & .40 \\ .20 & .25 & .20 & .32 & .05 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الجمهوريين} \\ \text{الديمقراطيين} \\ \text{المستقلين} \end{array}$$

فاذا كان عدد المواطنين الذين لهم حق الانتخاب فى المحافظات الخمسة كما هو موضح بالمتجه V.

$$V = \begin{bmatrix} 90\ 000 \\ 60\ 000 \\ 100\ 000 \\ 45\ 000 \\ 55\ 000 \end{bmatrix}$$

أوجد العدد المتوقع من الاصوات لكل من الجمهوريين ، الديمقراطين المستقلين فى المحافظات الخمسة .

الباب الخامس

نظام المعادلات الخطية وطرق الحل

System of Linear Equations and Solution's Methods

(٥-١) نظام المعادلات الخطية System of Linear Equations

اذا كان لدينا عدد n من المجاهيل $x_1,x_2,..,x_n$ تربط بينهم علاقة (أنظر الفصل (٢-٢)) فى الصورة :

$$a_1x_1 + a_2x_2+......+a_nx_n = b \qquad (5.1)$$

حيث $a_1,a_2,..,a_n, b$ مقادير ثابته Constants فأنه يقال أن العلاقة (5.1) معادلة خطية فى n من المجاهيل ، حيث أس كل مجهول x_j ,$j=1,2,..,n$ يساوى واحد صحيح .

فمثلا

$$3x_1 + 2x_2 = 20 \qquad (5.2)$$

تعتبر معادلة خطية فى مجهولين x_1, x_2.

كذلك

$$8x_1 - 2x_2 + 13x_3 = 63$$

تعتبر معادلة خطية فى ثلاثة مجاهيل x_1, x_2, x_3 .

فاذا كان لدينا عدد n من المجاهيل ، وعدد m من المعادلات الخطية على النحو :

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\} \qquad (5.3)$$

فنجد أن كل معادلة فى مجموعة المعادلات (5.3) تمثل علاقات فى نفس المجاهيل $x_1,x_2,x_3,...,x_n$، وعادة تسمى مجموعة المعادلات (5.3) بنظام المعادلات الخطية (mxn) حيث b_i, a_{ij}, $j=1,2,..,n$, $i=1,2,..,m$ مقادير ثابته . ويمكن كتابة مجموعة المعادلات (5.3) فى الصياغة التالية :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i=1,2,...,m \qquad (5.4)$$

وتسمى a_{ij} بمعاملات المجاهيل x_j ، حيث $j=1,2,...,n$ فى m من المعادلات

كذلك يمكن التعبير عن نظام المعادلات الخطية (5.3) أو (5.4) فى صورة مصفوفات على النحو :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

فاذا رمزنا لمصفوفة المعاملات a_{ij} بالرمز A ولمتجه المجاهيل بالرمز x ، والمقادير الثابته فى الطرف الايمن b_i بالرمز b فأن مجموعة المعادلات الخطية فى (5.3) يمكن كتابتها على صورة مصفوفات على النحو :

$$AX = b \qquad (5.6)$$

ونلاحظ أن الصياغات (5.6) ,(5.5) ,(5.4) ,(5.3) لنظام المعادلات (mxn) متكافئه.

خصائص المعادلات الخطية

(١) يقال أن مجموعة المعادلات الخطية (mxn) غير مستقلة Dependent اذا كان بعض المعادلات يمكن أشتقاقها من الاخرى . ويقال أنها مستقلة Idependent اذا لم تكن أى معادلة من المعادلات مشتقة من معادلة أخرى .

وتكون المعادلات غير مستقلة اذا كان قيمة محدد مصفوفة المعاملات A يساوى صفر ، أى بعبارة أخرى عندما

$$|A| = 0$$

وذلك فى حالة تساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل ، أى عندما $n=m$.

مثال (٥-١)
حدد أى الانظمة التالية معادلتها مستقلة أو غير مستقلة .

$$\text{i)}\quad \left.\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 10 \\ 10x_1 + 70x_2 &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

$$\text{ii)}\quad \left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

الحل
بالنسبة للنظام (5.7) نجـد أن المعادلـة الثانيـة مشـتقة مـن المعادلـة الاولـى حيـث أن المعادلة الثانية بعد قسمة طرفيها على المقدار الثابت 10 تعطى نفس المعادلة الاولـى ونجد أن قيمة محدد مصفوفة المعاملات تساوى صفر حيث :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 10 & 70 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.9)$$

كذلك النظام (5.8) تعتبر معادلته ، معادلات مستقلة حيث لايمكن اشتقاق أى معادلـة من الاخرى ونجد أن قيمة محدد مصفوفة المعاملات يختلف عن الصفر حيث :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \qquad (5.10)$$

(٢) يقال أن مجموعة المعادلات الخطية متسقة Consistent اذ كان يوجـد حـل أو اكثر لها أو بعبارة أخرى فئة الحلول S لمجموعة المعادلات فئة غير خاليـة ، أو بعبارة أخرى .

$S \neq \phi (5.11)$

(أنظر الفصل (١-١))

واذا لم يكن هناك أى حل لمجموعة المعادلات الخطية فانها تسمى مجموعة معادلات غير متسقة Inconsistent ، أو بعبارة أخرى :

$S = \phi (5.12)$

حيث أن المقصود بحل مجموعة المعادلات (5.3) هو ايجاد قيم للمجاهيل x_j التى تحقق المعادلات . أو بعبارة أخرى بالتعويض فى المعادلات (5.3) بتلك القيم للمجاهيل فى الطرف الايسر يكون الناتج مساوى للطرف الايمن . وفى الفصول التالية سوف نقدم ثلاثة طرق لحل المعادلات الخطية أو بعبارة أخرى الطرق التى يمكن بأستخدامها ايجاد قيم المجاهيل .

(٣) يقال أن مجموعة المعادلات

$$AX = b \qquad (5.13)$$

معادلات متجانسة Homogeneous ، اذا كان جميع عناصر المتجه b أصفار ، أى اذا كان b متجه صفرى .

أى أن :

$$AX = 0$$

حيث 0 تمثل متجه جميع عناصره أصفار .

واذا لم يكن جميع عناصر المتجه b أصفار فانه يقال أن مجموعة المعادلات (5.13) غير متجانسة Nonhomogeneous.

مثال (٥-٢)

حدد أى الانظمة التالية متجانسة أو غير متجانسة

i)
$$3x_1+2x_2 = 0$$
$$5x_1-x_2 = 0$$

ii) $7x_1+3x_2-x_3 = 10$
$2x_1+4x_3 = 12$
$x_1-x_2+2x_3 = 0$

الحل

بالنسبة للنظام (i)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمثل المعادلات معادلات متجانسة حيث أن المتجه b جميع عناصره أصفار .

أما بالنسبة للنظام (ii)

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمثل المعادلات معادلات غير متجانسة حيث أن المتجه b متجه غير صفرى .

ملحوظة

مما سبق يتضح أنه اذا كانت مجموعة المعادلات متجانسة ، حيث :

$$AX = 0$$

فانها تكون بالضرورة متسقة وذلك لانــه يوجد علـى الاقل حل واحد يحقق جميـع المعادلات وهو :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \qquad (5.14)$$

وفى الفصول التالية سوف نقدم طرق حل المعادلات الخطية تحت أفتراض أنها تمثل معادلات مستقله وعدد المجاهيل يساوى عدد المعادلات المستقلة .

ومما هو جدير بالذكر أن الطرق الثلاثة لحل المعادلات التى سوف نقدمها الفصول التالية يوجد حاليا لها برامج حاسب Computer programs باستخدام هذه البرامج يمكن حل أى نظام من المعادلات المستقله ، لانه اذا زاد حجم نظام المعادلات عن 5x5 فأن عملية حل المعادلات تكون مطوله وأكثر تعقيدا ، لذا نلجأ الى استخدام الحاسب فى حلها .

(٥-٢) طريقة التعويض Substituting Method

تعتمد هذه الطريقة على تخفيض حجم نظام المعادلات على مراحل متتالية الى أن يصل الى معادلة واحدة فى مجهول واحد وبالتالى يسهل الحصول على قيمته ، ويتم هذا التخفيض عن طريق التعويض المتتالى كما سوف يتضح أسفل ، وبعد الحصول على قيمة هذا المجهول وبأستخدام التعويض المتتالى يمكن أيجاد قيمة باقى المجاهيل .

ومن هنا سميت هذه الطريقة بطريقة التعويض واتباع هذه الطريقة يتطلب اتباع الخطوات التالية :

١- تحويل نظام المعادلات الخطية nxn الى نظام مكافئ (n-1)x(n-1) وذلك عن طريق التعويض .
٢- تحويل النظام (n-1)x(n-1) الى النظام مكافئ (n-2)x(n-2) وذلك عن طريق التعويض أيضا . وتستمر هذه العملية من التخفيض الى أن تصل الى النظام 2x2.
٣- تحويل النظام 2x2 الى نظام مكافئ 1x1 ، وبالتالى نحصل على معادلة واحدة فى مجهول واحد بحلها يمكن ايجاد قيمة هذا المجهول .
٤- بالتعويض بالقيمة التى حصلنا عليها فى (٣) فى النظام 2x2 نحصل على قيمة المجهول الثانى فى النظام 2x2 . وبالمثل بالتعويض فى النظام 3x3 بالقيمتين السابقتين نحصل على المجهول الثالث... وهكذا ، بالتعويض المتتالى للانظمة السابقة يمكن الحصول على جميع قيم المجاهيل كما سوف يتضح ذلك من الامثلة التالية

مثال (٥-٣)
أوجد قيمة x_1, x_2 التى تحقق المعادلات التالية :

$$x_1+3x_2 = 16 \qquad (5.15)$$
$$9x_1 - x_2 = 4 \qquad (5.16)$$

١- نظام المعادلات (5.16) و (5.15) من الترتيب (2x2) ، من المعادلة (5.15) بتحويل القيمة $3x_2$ من الطرف الايسر الى الطرف الايمن نحصل على المجهول x_1 بدلالة x_2 .

$$x_1 = 16-3x_2 \tag{5.17}$$

بالتعويض بقيمة x_1 بدلالة x_2 من المعادلة (5.17) فى المعادلة (5.16) نحصل على معادلة فى مجهول واحد هو x_2 فقط على النحو التالى :

$$9(16-3x_2)-x_2 = 4 \rightarrow$$
$$144 - 27x_2 - x_2 = 4 \rightarrow$$
$$-28x_2 = -140 \tag{5.18}$$

٢- نلاحظ أن المعادلة (5.18) معادلة فى مجهول واحد هو x_2 أى تم تخفيض النظام 2x2 الى 1x1 حيث نحصل على قيمة x_2 بقسمة طرفى المعادلة على (-28) على النحو :

$$x_2 = \frac{-140}{-28} = 5 \tag{5.19}$$

٣- بالتعويض فى المعادلة (5.17) بقيمة x_2 نحصل على قيمة x_1 على النحو:

$$x_1 = 16-3(5) = 16 = 15 = 1 \tag{5.20}$$

وبالتالى فأن x_1, x_2 التى تحقق نظام المعادلات (5.16) ,(5.15) هى :

$x_1 = 1$, $x_2 = 5$

مثال (٥-٤)

حل نظام المعادلات الخطية التالية :

$$3x_1 + 2x_2 = 31 \tag{5.21}$$
$$5x_1 + 2x_2 = 41 \tag{5.22}$$

١- النظام (5.22) ,(5.21) من الترتيب 2x2 ، وبنفس الطريقة فى المثال السابق، بتحويل $2x_2$ فى المعادلة (5.21) من الطرف الايسر الى الطرف الايمن نجد أن :

$$3x_1 = 31 = 2x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(31 - 2x_2) \qquad (5.23)$$

وبالتعويض بقيمة x_1 من المعادلة (5.23) فى المعادلة (5.22) نجد أن :

$$5\left(\frac{31}{3}\right) - \frac{2}{3}x_2) + 2x_2 = 41 \rightarrow$$

$$\frac{155}{3} - \frac{10}{3}x_2 + 2x_2 = 41 \rightarrow$$

$$-\frac{10}{3}x_2 + 2x_2 = 41 - \frac{155}{3} \rightarrow$$

$$\left(\frac{-10x6}{3}\right)x_2 = \frac{123 - 155}{3}$$

$$-4x_2 = -32 \qquad (5.24)$$

٢- نلاحظ أن المعادلة (5.24) معادلة فى مجهول واحد x_2 نحصل على قيمته بقسمة طرفى المعادلة على (4-) فنجد أن :

$$x_2 = \frac{-32}{-4} = 8$$

٣- بالتعويض بقيمة x_2 فى المعادلة (5.23) نجد أن :

$$x_1 = \frac{1}{3}(31 - 2(8)) \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(31-16) = \frac{1}{3}(15 \rightarrow$$
$$x_1 = 5$$

وبالتالى فأن x_1, x_2 التى تحقق نظام المعادلات (5.21) ,(5.22) هى :

$$x_1 = 5 , \quad x_2 = 8$$

مثال (٥-٥)

بأستخدام طريقة التعويض حل نظام المعادلات التالية :

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 19 \qquad (5.25)$$
$$5x_1 + 4x_3 = 43 \qquad (5.26)$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \qquad (5.27)$$

١- من المعادلة (5.25) نجد أن :

$$x_1 = \frac{1}{2}(19 + x_2 - 3x_3) \qquad (5.28)$$

٢- المعادلة (5.28) تعبر عن قيمة x_1 بدلالة x_2, x_3 . وبالتالى بالتعويض فى المعادلتين (5.27) ,(5.26) على التوالى بقيمة x_1 بدلالة x_2, x_3 نجد أن :

$$5\left[\frac{1}{2}(19 + x_2 - 3x_3)\right] + 4x_3 = 43 \rightarrow$$

$$5x_2 - 7x_3 = -9 \qquad (5.29)$$

كذلك

$$3\left[\frac{1}{2}(19 + x_2 - 3x_3)\right] + 2x_2 - x_3 = 21$$
$$7x_2 - 11x_3 = -15 \qquad (5.30)$$

من (5.29) ,(5.30) نجد أنه أمكن تخفيض نظام المعادلات 3x3 فى (5.25)-(5.27) الى نظام المعادلات 2x2 فى (5.29) ,(5.30) فى المجهولين x_2, x_3 حيث :

$$5x_2 - 7x_3 = -9 \tag{5.31}$$

$$7x_2 - 11x_3 = -15 \tag{5.32}$$

٣- نعبر عن x_2 فى المعادلة (5.31) على النحو :

$$5x_2 = -9 + 7x_3$$

$$x_2 = \frac{1}{5}(-9 + 7x_3) \tag{5.33}$$

وبالتعويض بقيمة x_2 فى (5.33) فى المعادلة (5.32) نجد أن :

$$7\left[\frac{1}{5}(-9 + 7x_3)\right] - 11x_3 = 15$$

$$-6x_3 = -12$$

$$x_3 = \frac{-12}{-6} = 2$$

٤- بالتعويض بقيمة $x_3=2$ فى المعادلة (5.33) فنحصل على قيمة على النحو :

$$x_2 = \frac{1}{5}(-9 + 7(2))$$

$$= \frac{1}{5}(-9 + 14) = \frac{1}{5}(+5) = 1 \tag{5.34}$$

٥- بالتعويض بقيمة $x_2=1, x_3=2$ فى المعادلة (5.28) نحصل على قيمة x_1 على النحو :

$$x_1 = \frac{1}{2}(19 + (1) - 3(2))$$
$$= \frac{1}{2}(19 + 1 - 6) = \frac{1}{2}(14) = 7$$

وبالتالى فأن قيم المجاهيل x_1, x_2, x_3 التـى تحقـق نظـام المعـادلات (5.27)-(5.25) هى :

$x_1 = 7, \quad x_2 = 1 \ , \ x_3 = 2$

(٥-٣) طريقة المحددات Determinant's Method

وتسمى هذه الطريقة أيضا بطريقة كرامير Cramer's method وهى تعتمد على حل نظام المعادلات nxn من المعادلات المستقلة بأستخدام المحددات (أنظر فصل (٤-٣)).

فاذا كان لدينا عدد n من المجاهيل $x_1, x_2,..,x_n$ وعدد n من المعادلات المستقلة على النحو :

$$\left.\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & .... & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & .... & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & .... & + & a_{nn}x_n & = b_m \end{array}\right\}$$

أو فى صورة مصفوفات على النحو :

$$AX = b \qquad (5.35)$$

حيث A مصفوفة مربعة من الترتيب nxn، x متجه عمودى من الترتيب b, nx1 متجه من الترتيب nx1.

فان الخطوات التى يجب اتباعها لايجاد قيم المجاهيل x بأستخدام طريقة المحددات (كرامير) هى :

١- ايجاد قيمة محدد مصفوفة معاملات x فى المعادلات أى ايجاد قيمة $|A|$ ، فاذا كان $|A|=0$ فان المعادلات تكون غير مستقلة وبالتالى فأن عدد المعادلات لايساوى عدد المجاهيل ولايمكن حلها بأستخدام الطرق المقدمة . أما اذا كان $|A|\neq 0$ فان المعادلات تكون مستقله ونستكمل باقى الخطوات ، وعادة نرمز للمحدد $|A|$ بالرمز Δ.

٢- تكون المحدد Δ_1 وهو عبارة عن المحدد $|A|$ مع استبدال عناصر العمود الاول فى المحدد $|A|$ بعناصر العمود b على النحو :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.36)$$

ثم نحسب قيمة Δ_1

٣- بنفس الطريقة نكون Δ_2 حيث يتم تكوينه باستبدال عناصر العمود الثانى فى المحدد Δ بعناصر الطرف الايمن b على النحو :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_n & b_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.37)$$

ثم نحسب قيمة Δ_2 .

٤- بالمثل نكون $\Delta_3, \Delta_4, .., \Delta_n$ ، ثم نوجد قيمة كل منهم .

٥- ويتم حساب قيم المجاهيل $x_1, .., x_n$ من العلاقة.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

أو بعبارة أخرى

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad j=1,2,..,n \qquad (5.38)$$

مثال (٤-٦)
أعتبر المثال (٥-٣) حيث

$x_1 + 3x_2 = 16$
$9x_1 - x_2 = 4$

فان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وبالتالى فان

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (1x-1) \ -(9x3) \\ = -1-27 = -28 \neq 0 \end{matrix} \tag{5.39}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (1x-1) \ -(9x3) \\ = -1-27 = -28 \neq 0 \end{matrix} \tag{5.40}$$

كذلك

$$\Delta_2 \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (1x4) \ -(9x16) \\ = 4-144 = -140 \end{matrix} \tag{5.41}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-28}{-28} = 1$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-140}{-28} = 5$$

ونلاحظ أن $x_1=1,\ x_2=5$ هى نفس القيم التى حصلنا عليها بأستخدام طريقة التعويض .

مثال (٥-٧)
أعتبر المثال (٥-٥) حيث :

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 19$
$5x_1 + 4x_3 = 43$

$$3x_1+2x_2-x_3 = 21$$

فان :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}19\\ 43\\ 21\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

٢- نحسب كل من $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ على النحو :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}19 & -1 & 3\\ 43 & 0 & 4\\ 21 & 2 & -1\end{vmatrix}=-21$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 13 & 3\\ 5 & 43 & 4\\ 3 & 21 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 19\\ 5 & 0 & 43\\ 3 & 2 & 21\end{vmatrix}=-6$$

٣- وبالتالى فان :

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-21}{-3}=7$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$$

ونلاحظ أن $x_1=7, x_2-1, x=2$ هى نفس قيم المجاهيل التى حصلنا عليها بطريقة التعويض .

(٥-٤) طريقة معكوس المصفوفة The Inverse Matrix Method

وتعتمد هذه الطريقة على ايجاد معكوس (مقلوب) مصفوفة المعاملات للمجاهيل x واستخدام خصائص معكوس المصفوفة لايجاد قيم المجاهيل على النحو الموضح فيما يلي :

اذا كان لدينا نظام المعادلات nxn على النحو :

$$AX = b \qquad (5.42)$$

فبضرب طرفى المعادلة (5.42) فى المصفوفة A^{-1} أى فى معكوس المصفوفة A نجد أن :

$$(A^{-1} A)\, x = A^{-1} b \qquad (5.43)$$

وبما أن

$$(A^{-1} A) = I \qquad (5.44)$$

حيث I هى مصفوفة الوحدة .

فبالتعويض فى (5.43) بـ (5.44) نجد أن :

$$IX = A^{-1} b$$

$$X = A^{-1} b \qquad (5.45)$$

والمعادلة (4.45) تنص على أن قيم المجاهيل x تساوى حاصل ضرب معكوس مصفوفة المعاملات A فى متجه القيم فى الطرف الايمن .

وسوف نوضح من خلال الامثلة التالية كيفية تطبيق العلاقة (5.45).

ملحوظة

فى حالة اذا كانت المصفوفة A مصفوفة شاذة (أى أن $|A|=0$) فانه لايمكن استخدام هذه الطريقة .

مثال (٥-٨)
أعتبر مثال (٥-٦) حيث :

$x_1 + 3x_2 = 16$
$9x_1 - x_2 = 4$

١- توضح نظام المعادلات فى صورة مصفوفات على النحو :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

٢- نوجد محدد المصفوفة A على النحو :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$$

وبالتالى فأن المصفوفة A (أنظر فصل "٤-٥") مصفوفة غير شاذةونستكمل الخطوات التالية .

٣- نوجد معكوس المصفوفة A ، أى نوجد A^{-1} حيث :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{9}{28} & \frac{1}{28} \end{bmatrix}$$

٤- من العلاقة (5.45) نجد أن :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{9}{28} & \frac{-1}{28} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{28}{28} \\ \frac{140}{28} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

أى أن

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5$$

ونلاحظ أن $x_1=1,\ x_2=5$ هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بأستخدام طريقة المحددات أو التعويض .

مثال (٥-٩)

أعتبر مثال (٥-٧) حيث

$$2x_1-x_2+3x_3 = 19$$
$$5x_1+4x_3 = 43$$
$$3x_1+2x_2-x_3 = 21$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \\ 21 \end{bmatrix}$$

١- نوجد محدد المصفوفة A حيث :

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

وبما أن $|A|\neq 0$ فان المصفوفة A غير شاذة وبالتالى يكون لها معكوس (أنظر الفصل (٤-٥)).

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{-17}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3}\\ \frac{-10}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-5}{3}\end{bmatrix}$$

٢- من العلاقة نجد أن :

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{-17}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3}\\ \frac{-10}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}19\\ 43\\ 21\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{21}{3} \\ \frac{3}{3} \\ \frac{6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أى أن

$x_1=7,\ x_2=1,\ x_3=2$

ونلاحظ أن قيم x_1, x_2, x_3 التى حصلنا عليها بأستخدام طريقة معكوس المصفوفة هى نفس القيم التى حصلنا عليها بأستخدام طريقتى التعويض والمحددات .

(٥-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)

تقوم احدى شركات انتاج الورق بانتاج نوعية من الورق A, B. فاذا كانت المواد الاولية الضرورية لانتاج كل من النوعين A, B والمتاحة لدى الشركة هى 6500 وحدة ، كذلك ساعات العمل الكليه المتاحة للشركة هى 4000 ساعة اسبوعيا .

فاذا كانت المصفوفة S تعطى المتطلبات لانتاج الوحدة الواحدة من المنتج B, A على النحو :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ S = & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{المواد الاولية} \\ \leftarrow \text{ساعات العمل} \end{array} \end{array}$$

حدد عدد الوحدات التى يجب انتاجها .

الحل

١- اذا فرضنا أن عدد الوحدات التى يجب انتاجها من النوع A هى x_1 عدد الوحدات التى يجب انتاجها من النوع B هى x_2 حيث أن المتجه x على النحو:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وبالتالى فانه يمكن تحديد x_1, x_2 من المعادلات

$$SX = \begin{bmatrix} 6500 \\ 3250 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{المواد الاولية} \\ \leftarrow \text{ساعات العمل} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6500 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$2x_1+3x_2 = 6500$$
$$x_1+2x_2 = 3250$$

٣- وباستخدام طريقة المحددات (كرامير) نجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 2(2)-(1x3) \\ = \ 4 \ - \ 3 = 1 \end{matrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6500 & 3 \\ 4000 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 13000-12000 \\ = \quad 1000 \end{matrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6500 \\ 1 & 4000 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 8000-6500 \\ = \quad 1500 \end{matrix}$$

وبالتالى فان :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ وحدة}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1500}{1} = 1500 \text{ وحدة}$$

وبالتالى يجب انتاج عدد 1000 وحدة من النوع A ، 1500 وحدة من النوع B حتى يمكن استخدام جميع وحدات المواد الاولية وساعات العمل المتاحة .

تطبيق (٢)

المصفوفة التالية تعطى نسبة المهاجرين من الريف الى الحضر ومن الحضر الى الريف .

$$\begin{array}{cccc} & \text{الى الحضر} \quad \text{الى الريف} & & \\ S = & \begin{bmatrix} 0.15 & 0.02 \\ .05 & .02 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \text{من الحضر} \\ \text{من الريف} \end{matrix} \end{array}$$

فاذا كان مجموع المهاجرين من الريف والحضر معا هو 5000 نسمة .

اذا فرضنا أن x_1 هى عدد الافراد المهاجرين من الحضر ، x_2 عدد الافراد المهاجرين من الريف ، والمطلوب ، ايجاد كل من x_2, x_1 التى تحدث توازن Equilibrium لعدد السكان المهاجرين فى أى سنة من سنوات تعداد السكان .

الحل

يحدث التوازن لهجرة السكان فى أى سنة اذا كان :

$$SX = X$$

أى أن

$$\begin{bmatrix} .15 & .02 \\ .05 & .02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (5.46)$$

$$\begin{aligned} .15x_1+0.2x_2 &= x_1 \\ .05x_1+0.04x_2 &= x_2 \end{aligned} \qquad (5.47)$$

$$x_1+x_2 = 800 \qquad (5.48)$$

بضرب المعادلة (5.46) فى (2) ثم الطرح من المعادلة (5.47) نجد أن :

$$2.2x_1=x_2 \qquad (5.49)$$

بالتعويض بـ x_2 فى (5.48) بدلالة x_1 من المعادلة (5.49) نجد أن :

$$xx_1+2.2xx_1 = 5000$$

$$3.2xx_1 = 5000$$

$$x_1 = \frac{8000}{3.2} = 2500 \text{ نسمة}$$

وبالتالى بالتعويض فى (5.49) نجد أن :

$x_2 = 2.2(2500) = 5500$ نسمة

تطبيق (٣)
اذا كان لدينا قطاعين انتاجيين I, II بحيث تساهم ايرادات كل قطاع فى نشاط نفس القطاع وفى القطاع الاخر بالاضافة الى مساهمة كل قطاع فى الاستثمارات الخدمية.

والمصفوفة التاليه A تعطى نسبة مساهمة ايرادات كل قطاع فى نفس القطاع أو القطاع الاخر والمتجه e يعطى قيمة الايرادات التىتساهم بها كل قطاع فى الاستثمارات الخدمية .

المخرجات

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \\ A = & \begin{bmatrix} .2 & .5 \\ .3 & .6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}$$

المدخلات

$$e = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

المطلوب
١- أوجد الايرادات التى يجب أن يحققها كل قطاع .
٢- حدد اسهام كل قطاع فى الاخر .

الحل
تسمى المصفوفة A بمصفوفة المدخلات **Input** والمخرجات **Output** وتسمى معاملات المصفوفة A أحيانا بالمعاملات الفنية . وعادة يطلق على تحديد الايرادات التى يجب تحقيقها فى كل قطاع باستخدام المصفوفة بتحليل المدخلات - المخرجات

Input-output analysis أو بتحليل ليونتيف Leontief نسبة الى العالم ليونتيف مقدم هذا التحليل .

حيث يمثل العنصر a_{ij} فى المصفوفة A نسبة مساهمة الجنية الواحد فى القطاع (i) لتحقيق جنيه واحد فى ايراد القطاع (j).

فعلى سبيل المثال :

$a_{12} = 0.5$

تعنى أن 0.5 من الجنيه من ايرادات القطاع الاول تساهم فى تحقيق جنيه فى القطاع الثانى أو بعبارة اخرى 50 جنيه من القطاع الاول تساهم فى تحقيق افراد 100 جنيه فى القطاع الثانى .

بالمثل العنصر

$a_{22} = 0.6$

تعنى أن 60 جنيه من ايرادات القطاع الثانى يمكن أن تساهم فى تحقيق ايراد 100 فى نفس القطاع .

١- فاذا فرضنا أن x_1 تمثل ايرادات القطاع الاول ، x_2 تمثل ايرادات القطاع الثانى ، فأستخدام المصفوفة A نجد أن

$$\begin{aligned} x_1 &= .2x_1 + .5x_2 + 300 \\ x_2 &= .3x_1 + .6x_2 + 200 \end{aligned} \tag{5.50}$$

ويمكن اعادة كتابة مجموعة المعادلات (5.50) على النحو التالى :

$$\begin{aligned} 0.8x_1 &= 0.5x_2 = 300 \\ -0.3x_1 &+ .0.4x_2 = 200 \end{aligned} \tag{5.51}$$

ويمكن حل مجموعة المعادلات (5.51) بأى طريقة من الطرق المقدمة سابقا فنجد أن:

$x_1 = 1294.13$ جنية

$x_2 = 1470.60$ جنية (5.52)

٢- وبالتالى فأن ايرادات القطاع الاول التى سوف تستخدم فى نفس القطاع .
$=0.2(x_1) = 0.2(1294.13) = 258.83$ جنية (5.53)

والتى سوف توجه للقطاع الثانى
$=0.5(x_2) = 0.5\,(1470.6) = 735.3$ جنية (5.54)

ومما هو جدير بالملاحظة أن مجموع ايرادات القطاع الاول الموجه لنفس القطاع مضاف اليها الايرادات الموجه لكل من القطاع الثانى والقطاع الخدمات فى هذه الحالة يساوى

$258.83 + 735.3 + 300 = 1294.13$

أى يساوى x_1 وهو جملة ايرادات القطاع الاول وبالمثل ، فى القطاع الثانى ، نجد أن ايرادات القطاع الثانى التى سوف تستخدم فى القطاع الاول .
$= 0.3x_1 = 0.3(1294.13) = 388.239$ (5.55)

كذلك ايرادات القطاع الثانى التى توجه لنفس القطاع
$=0.6x_2 = 0.6(1470.6) =$ (5.56)

وبالتالى ايرادات القطاع الثانى الموجه لنفس القطاع والقطاع الاول والخدمات يساوى

$388.239 + 882.36 + 200 = 1470.6$

أى يساوى x_2 وهو جملة ايرادات القطاع الثانى .

حل آخر

من المعادلات (5.50) نجد أن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .2 & .5 \\ .3 & .6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$$x = Ax + e \tag{5.57}$$

$$\rightarrow$$

$x - Ax = e \rightarrow$
$x(I-A) = e \rightarrow$

$$x = (I-A)^{-1} e \tag{5.58}$$

حيث $(I-A)^{-1}$ هى معكوس المصفوفة $(I-A)$ والمعادلة (5.58) تعنى أنه للحصول على قيم المتجه x (أى x_1, x_2 فى هذا المثال) يتطلب منا فقط حساب المصفوفة $(I-A)^{-1}$ والتى يعتمد فقط على مصفوفة المعاملات A ومصفوفة الوحدة I.

١- ففى المثال السابق نجد أن :

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -.5 \\ -0.3 & +0.4 \end{bmatrix}$$

وبأستخدام الطريقة المقدمة فى الفصل (٤-٥) لايجاد معكوس المصفوفة (أنظر ملحق ١ المعادلة B.4) نجد أن :

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.354 & 2.94 \\ 1.76 & 4.71 \end{bmatrix}$$

٢- من المعادلة (5.58) نجد أن :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.354 & 2.94 \\ 1.761 & 4.711 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1294.2 \\ 1470.5 \end{bmatrix}$$

أى أن

$x_2 = 1470.5$, $x_1 = 1294.2$

ملحوظة

وهى نفس النتائج المتوصل اليها بأستخدام الطريقة الاولى للحل ، وترجع الفروق الكسريه البسيطه الى عمليات التقريب فقط .

تطبيق (٤)

اذا كان لدينا ثلاثة قطاعات انتاجية I, II, III بحييث يساهم انتاج كلى قطاع فى نفس القطاع والقطاعات الاخرى . والمصفوفة A تعطى نسبة مساهمة انتاج كل قطاع . والمتجه يعطى الكمية المصدرة من انتاج كل قطاع بالوحدة .

المخرجات

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

المدخلات

$$e = \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

والمطلوب : أوجد الكمية المنتجة فى كل قطاع .

الحل

تسمى المصفوفة A بمصفوفة المدخلات Input والمخرجات Output.. مما سبق نجد أن العنصر العام a_{ij} مصفوفة المدخلات - المخرجات A يمثل مساهمة الوحدة الواحدة من انتاج القطاع (i) لانتاج وحدة واجدة فى انتاج القطاع j .

فعلى سبيل المثال .

$a_{12} = 0.3$

تعنى أن 0.3 من الوحدة من انتاج القطاع (I) تساهم فى انتاج وحدة واحدة من أنتاج القطاع II أو بعبارة أخرى 30 من أنتاج القطاع I تساهم فى انتاج 100 وحدة بالقطاع II.

بالمثل العنصر

$a_{23} = .4$

فهو يعنى أن 40 من القطاع II تساهم فى أنتاج 100 وحدة بالقطاع III، وهكذا.

١- فاذا فرضنا أن x_j تمثل عدد الوحدات المنتجه فى القطاع j حيث j=1,2,3. بمعنى أن x_1 تمثل كمية أنتاج القطاع I ، x_2 تمثل كمية أنتاج القطاع II ، كذلك x_3 تمثل كمية أنتاج القطاع III.

وبأستخدام المصفوفة A نجد أن

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 2000 \\ x_2 &= 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 + 5000 \\ x_3 &= 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 3000 \end{aligned}\right\} \qquad (5.59)$$

ويمكن اعادة كتابة مجموعة المعادلات فى (5.59) على النحو التالى :

$$\left.\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 &= 2000 \\ -.3x_1 + 0.8x_2 - 0.4x_3 &= 5000 \\ 0.4x_1 - 0.3x_2 + 0.8x_3 &= 3000 \end{aligned}\right\} \qquad (5.60)$$

ويمكن حل مجموعة المعادلات (5.60) بأى طريقة من الطرق المقدمة سابقا .

ولكن بالنسبه لتحليل المدخلات والمخرجات فأنه يمكن اختصار الخطوات بأستخدام معكوس المصفوفه على النحو التالى :

أ) من مجموعة المعادلات (4.59) يمكن كتابتها فى الصورى التالية :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 3000 \end{bmatrix} \qquad (5.61)$$

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{e} \qquad (5.62)$$

$$\vec{x} - A\vec{x} = \vec{e} \qquad (5.63)$$

$$\vec{x}(I-A) = \vec{e} \qquad (5.64)$$

$$\vec{x} = (I-A)^{-1}\,\vec{e} \qquad (5.65)$$

ب) والمعادلة (4.65) تعنى أنه يمكن الحصول على قيم x بطرح عناصر مصفوفه المدخلات والمخرجات من مصفوفة الوحدة على النحو التالى :

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.4 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ج) نوجد معكوس (أو مقلوب) المصفوفه (I-A) (أنظر الفصل "٤-٥") فنجد أن:

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}+3.66 & +2.54 & +3.09\\ +0.82 & +3.38 & +3.09\\ +2.89 & +0.54 & +3.87\end{bmatrix}$$

د) بالتعويض فى المعادلة رقم (5.65) نجد أن :

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.66 & 2.54 & 3.09\\ 2.82 & 3.38 & 3.09\\ 2.89 & 2.54 & 3.87\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2000\\ 500\\ 3000\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(7320+12700+9270)\\ (5640+16900+9270)\\ (5780+12700+11610)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}29290\\ 31810\\ 30090\end{bmatrix}$$

هـ) أى أن يجب أن ينتج القطاع الاول عدد x_1 بحيث :

$x_1 = 29290$ وحدة

وأن ينتج القطاع الثانىعدد x_2 بحيث :

$x_2 = 31810$ وحدة

كذلك أن ينتج القطاع الثالث عدد x_3 بحيث :

$x_3 = 30090$ وحدة

(٥-٦) تمرينات

Exercises

(١) أعيد صياغة كل من أنظمة المعادلات التالية فى صورة مصفوفات .

1) $x = 5$
$2x + y = 11$

2) $x-2y = 5$
$2x + 3y = -12$

3) $2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 20$
$x_1 + x_3 = 5$
$5x_2 + x_2 - 11x_3 = 17$

4) $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
$fx_1 + ex_2 + hx_3 = g$
$kx_1 + nx_2 + mx_3 = Q$

(٢) بأستخدام طريقة المحددات (كرامير) أوجد حل مجموعة المعادلات فى التمرين السابق .

(٣) بأستخدام مقلوب المصفوفة أوجد حل المعادلات التالية :

1) $x_1 + x_2 = 5$
$2x_1 + 3x_2 = 12.5$

2) $5x_1 - 7x_2 + x_3 = 28$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 33$
$30x_1 - 2x_3 = 10$

(٤) تقوم شركتان A, B محتكرتين فى احدى الدول بانتاج ثلاثة انواع من المنسوجات القطنية I, II, III وبدراسة السوق أمكن تحديد النسبة التى تغطيها كل شركة من الاحتياجات كما هوموضح بالمصفوفة التالية :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} .2 & .8 \\ .5 & .5 \\ .7 & .3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$ المنتجات

فاذا كانت الكميات المطلوبة المتواقعة من المنتجات الثلاثة كما هو موضحه بالمتجـه V بالالف وحدة .

$$V = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 54 \end{bmatrix}$$

أوجد الكميات التى يجب أن تقوم كل شركة بعرضها فى السوق حتى يحدث تـوازن للعرض والطلب .

الباب السادس

البرمجة الخطية

Linear Programming

(٦-١) البرمجة الرياضية Mathematical Programming (M.P.)

فى أثناء الحرب العالمية الثانية نشأت مجموعة من الأساليب الرياضية الهامة التى أستخدمت فى حل العديد من المشاكل Mathematical techniques التطبيقية فى المجالات الحربيه .

وأدى نجاح هذه الأساليب فى المجال الحربى الى استخدامها فى المجالات المدنية والاقتصادية بعد الحرب . وأطلق على هذه الاساليب الرياضية اسم "بحوث العمليات Operation research".

وتعتبر أساليب بحوث العمليات مجموعة من الأساليب الرياضيه التى تمكن صانع القرار Decision maker من أتخاذ القرارات المثلى Optimum decisions فى ظل الامكانيات المادية وغير المادية (المتاحه) وتقييم الآثار المترتبه على هذه القرارات .

وقد أدى تطور علوم الحاسب ونظم تخزين المعلومات واستخدام الحاسبات الالكترونية على نطاق واسع الى سرعة تطوير وتطويع اساليب بحوث العمليات وتزايد أهميتها .

وتعتبر اساليب البرمجة الرياضية احدى الفروع الهامة فى بحوث العمليات . وتتضمن أساليب البرمجة الرياضية ، الاساليب التالية :

- البرمجة الخطية Linear Programming (LP)
- البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming (Non-LP)
- البرمجة الديناميكية Dynamic Programming (DP)
- برمجة تعدد الاهداف Multi-objective Programming (Mul. OP)
- البرمجة العشوائيه Stochastic programming (SP)

وفـى هـذا البـاب سـوف نتنـاول اسـلوب البرمجـة الخطيـه كـأحد أسـاليب البرمجـة الرياضيـة الهامـه والممكـن أسـتخدامها فـى حـل العديـد مـن المشـاكل الاداريـة ، المحاسبية، الاقتصـادية ، الطبيه ، ... الخ .

(٦-٢) بناء نماذج البرمجة الخطية The structure of LP Models

يلعب أسلوب البرمجه الخطية دورا هاما فى الوصول الى التوزيع الامثل للموارد المتاحه على الانشطة المختلفه وفقا للهدف المطلوب . Optimum allocation

وترجع أهمية هذا الاسلوب الى اهمية المشاكل التى يمكن حلها باستخدامه بصفه عامة ، كذلك لدورة بالنسبه لاساليب البرمجه الرياضية الاخرى مثل البرمجة غير الخطيه ، والبرمجه متعددة الاهداف ، البرمجه العشوائيه ، ... الخ ، بصفه خاصه .

ولكن ليس كل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجه الخطيه ، حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجه الخطية أن تتوافر فيها الشروط التالية :

١- أمكانيه التعبير عن القرارات Decisions المطلوب اتخاذها فى صورة متغيرات تسمى بالمتغيرات القرارية Decision's variables . كذلك أن تكون هذه المتغيرات القرارية متغيرات غير سالبه Non-negative variables أو أمكانيه تحويل هذه المتغيرات الى متغيرات غير سالبه .

٢- أمكانيه التعبير عن الهدف المراد تحقيقه فى صورة دالة خطيه Linear function فى المتغيرات القرارية وتسمى هذه الدالة بدالة الهدف Objective function .

٣- امكانية التعبير عن العلاقات بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحه فى صورة قيود خطيه Linear constraints تأخذ شكل متباينات خطية Linear inequalities أو معادلات خطيه Linear equations أو خليط منهما وتسمى بالقيود الهيكلية Structural constraints.

فاذا توافر فى المشكلة جميع الشروط المذكورة اعلاه فانه يمكن صياغتها فى نموذج برمجه خطيه ، وفيما يلى سوف نوضح كيفية صياغة بعض المشاكل كنماذج خطيه

(٦-٢-١) مشكلة تخطيط الانتاج Production planning problem

تقوم احدى شركات صناعة الورق بأنتاج نوعين مـن المنتجات وترغب فـى تحديد عدد الوحدات (بالطن) التى يجب انتاجها يوميا من كل نوع بحيث تحقق أكبر ربح ممكن ، حيث يتطلب انتاج الوحدة الواحدة من كل نوع المرور على ثلاثة عمليات أنتاجيه I II III . والجدول التالى يعطى الزمن (بالساعات) المطلوب لانتاج الوحدة الواحدة من كل منتج فى العمليات المختلفه ، كذلك ربح الواحدة والزمن الكلى المتاح للعمليات الثلاثة .

جدول (٦-١)

الزمن المتاح للتشغيل (ساعة / يوميا)	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجه فى كل عملية		العملية Operation الأنتاجية
	المنتج الثانى	المنتج الاول	
1000	2	1	I
750	1	3	II
800	4	1	III
	200	300	ربـــح الوحـــدة الواحدة بالجنية

	عملية I	عملية II	عملية III		
المواد الخام →	1	3	1	→ المنتج الاول	المنتج النهائى
→	2	1	4	→ المنتج الثانى	

شكل (٢-١)

ويمكن صياغة المشكلة الســابقه كنمـوذج برمجـه خطيـه تتوافـر فيـه جميـع الشـروط المذكورة اعلاه على النحو التالى :

أولا: المتغيرات القرارية :

نفرض أن x_2, x_1 هما عدد الوحدات التى يجب انتاجها من المنتج الاول والثانى على الترتيب حيث أن

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (6.1)$$

ثانيا: الهدف

ونجد أن هدف متخذ القرار فى هذه المشكلة هو الوصول الى اكبر ربح ممكن Maximum profit وبالتالى يمكن صياغه هذا الهدف على النحو التالى :

$$\text{Maximize } z=300x_1+200x_2 \qquad (6.2)$$

ثالثا: القيود

ونجد أن القيود فى هذه المشكلة هى الامكانيات المتاحه والمتمثله فى عدد ساعات التشغيل اليوميه لكل عمليه

فبالنسبه للعمليه الاولى يجب

$$1x_1 + 2x_2 \leq 1000 \qquad (6.3)$$

وبالنسبه للعملية الثانية يجب

$$3x_1 + 1x_2 \leq 750 \qquad (6.4)$$

وبالنسبه للعمليه الثالثه يجب

$$1x_1 + 4x_2 \leq 800 \qquad (6.5)$$

من (6.1) - (6.5) نجد أن نموذج البرمجه الخطيه للمشكلة السابقه هو :

أوجد قيم x_1, x_2 التى تجعل الدالة z نهاية عظمى .

$$\text{Max. } z = 300x_1 + 200x_2$$

تحت القيود

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$3x_1 + x_2 \leq 750$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 800$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(٦-٢-٢) مشكلة النقل Transportation problem

اذا كان المطلوب تحديد أقل عدد ممكن من الاتوبيسات التى تعمل على أحد الخطوط خلال فترة 24 ساعة . والجدول التالى يوضح العدد المطلوب خلال الفترات المختلفه فى 24 ساعة .

جدول (٢-٢)

الفترة	التوقيت خلال 24 ساعة	عدد الاتوبيسات المطلوبة
1	12.00:4.00	4
2	4.00:8.00	8
3	8.00:12.00	10
4	12.00:4.00	7
5	4.00:8.00	12
6	8.00:12.00	4

بأفتراض أن كل أتوبيس يجب أن يعمل 8 ساعات متصلة فقط .

أولا: المتغيرات القرارية

نفرض أن :

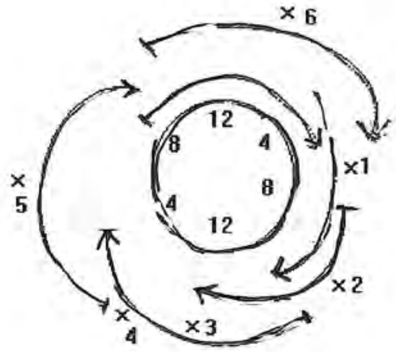
عدد الاتوبيسات التى تعمل من الساعة 12.01 صباحا : x_1
عدد الاتوبيسات التى تعمل أبتداء من الساعة 4.01 صباحا : x_2
عدد الاتوبيسات التى تعمل ابتداء من الساعة 8.01 صباحا : x_3
عدد الاتوبيسات التى تعمل ابتداء من الساعة 12.0 ظهرا : x_4
عدد الاتوبيسات التى تعمل ابتداء من الساعة 4.01 ظهرا : x_5
عدد الاتوبيسات التى تعمل ابتداء من الساعة 8.01 مساءا : x

ويمكن للأختصار أعتبر:

عدد الاتوبيسات التى تعمل فى الفترة j : x_j

حيث $j = 1,2,..,6$

والشكل التالى يوضح ذلك



شكل (٢-٢)

ثالثا: الهدف

بما أن المطلوب تحديد أقل عدد ممكن من الأتوبيسات التى تعمل فى كل فترة ، فأننا نجد أن دالة الهدف تأخذ الشكل التالى :

$$\text{Minimize } z = s_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sum_{j=1}^{6} x_j \qquad (6.6)$$

ثالثا: القيود

بما أن عدد الأتوبيسات التى تعمل فى الفترات المختلفة يجب ألا يقل عن الاعداد المطلوبة بحيث يعمل الاتوبيس الواحد 8 ساعات فقط ، فأن

$$x_1 + x_6 \geq 4 \qquad (6.7)$$
$$x_1 + x_2 \geq 8 \qquad (6.8)$$
$$x_2 + x_3 \geq 10 \qquad (6.9)$$
$$x_3 + x_4 \geq 7 \qquad (6.10)$$
$$x_4 + x_5 \geq 12 \qquad (6.11)$$
$$x_5 + x_6 \geq 4 \qquad (6.12)$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6, \geq 0 \qquad (6.13)$$

من (6.13)-(6.6) يتضح أن نموذج البرمجه الخطية للمشكلة هو :

أوجد $x_1,x_2,\ldots,x_6$ التى تجعل الدالة z نهاية صغرى

$$\text{Minimize } z=\sum_{j=1}^{6} x_j$$

تحت القيود

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & & & +x_6 & \geq 4 \\
x_1 & +x_2 & & & & & \geq 8 \\
 & x_2 & +x_3 & & & & \geq 10 \\
 & & x_3 & +x_4 & & & \geq 7 \\
 & & & x_4 & +x_5 & & \geq 12 \\
 & & & & x_5 & +x_6 & \geq 4
\end{array}$$

$$xj \geq 0, \; j=1,2,..,6$$

(٦-٢-٣) مشكلة توازن خط التجميع Assembly line Balancing problem

تقوم احدى الشركات بأنتاج منتج نهائى ، بحيث تتكون الوحدة الواحدة من هذا المنتج من 3 اجزاء مختلفة وتقوم الشركة من خلال خط تجميع 3 وحدات من الاجزاء المختلفة لتكوين وحدة واحدة من المنتج النهائى ، والجدول التالى يعطى عدد ساعات العمل الاسبوعيه المتاحة لكل قسم يقوم بأنتاج الاجزاء المختلفة ومعدلات الانتاج.

جدول (٦-٣)

القسم	عدد ساعات العمل المتاحة اسبوعيا	معدلات الانتاج للاجزاء المختلفة فى كل قسم فى الساعة		
		الجزء الاول	الجزء الثانى	الجزء الثالث
1	1000	8	5	10
2	800	6	12	4

وتهدف الشركة الى تحديد ساعات العمل التى تخصص لكل قسم لانتاج كل جزء من المكونات بحيث يكون عدد الوحدات للمنتج النهائ أكبر مما يمكن . وبالتالى يكون عدد الوحدات غير المجمعه نتيجه وجود عجز فى جزء أو أكثر أو أقل مايمكن .

أولا: التغيرات القرارية

يمكن أن نفرض أن

عدد ساعات العمل الاسبوعية المخصصه للقسم i لانتاج الجزء j : x_{ij}

بحيث $i=1,2,\ j=1,2,3$

$$x_{ij} \geq 0$$

ثانيا: الهدف

بما أن عدد الوحدات المنتجه من الاجزاء الثلاثه هى :

الجزء الاول	:	$8x_{11} + 6x_{21}$	(6.17)
الجزء الثانى	:	$5x_{12} + 12x_{22}$	
الجزء الثالث	:	$10x_{13} + 4x_{23}$	

وبما أن الوحدة النهائية تتطلب وحدة من كل جزء - فان العدد الكلى للوحدات النهائية سوف يكون أقل عدد من الوحدات المنتجه من أى جزء (فمثلا اذا كان المتاح من الاجزاء الثلاثة 120 ,100 ,180 وحدة ، فأن عدد الوحدات المنتجة من المنتج النهائ سوف تكون 100 وحدة فقط). وبالتالى فأن عدد الوحدات المنتجة النهائية هو :

$$\text{Minimum } \{(\underbrace{8x_{11}+6x_{21}}_{\text{الجزء الاول}}), (\underbrace{5x_{12}+12x_{22}}_{\text{الجزء الثانى}}), (\underbrace{10x_{13}+4x_{23}}_{\text{الجزء الثالث}})\} \qquad (6.15)$$

ثالثا: القيود

بما أن عدد ساعات العمل المتاحه للقسم الاول 1000 ساعة اذن :

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 1000 \qquad (6.16)$$

كذلك القسم الثانى

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 800 \qquad (6.17)$$

ومن (6.17)-(6.13) نجد أن النموذج الرياضى الذى يمثل المشكلة :

$$\text{Maximize } z = \text{Min. } \{(8x_{11}+6x_{21}), (5x_{12}+12x_{22}), (10x_{13}+4x_{23})\} \quad (6.18)$$

S.T.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 1000 \quad (6.19)$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 800 \quad (6.20)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i=1,2,\ \ j=1,2,3 \quad (6.21)$$

ونلاحظ أن النموذج (6.21)-(6.18) نموذج غير خطى حيث أن دالة الهدف (6.18) دالة غير خطية ، ولكن يمكن تحويلها الى دالة خطيه وبالتالى تحويل النموذج الى نموذج برمجه خطيه . ويتم ذلك عى النحو التالى :

نفرض أن y عدد الوحدات من المنتج النهائى وبالتالى فأن :

$$y = \text{min. } \{8x_{11}+6x_{21},\ 5x_{12}+12x_{22},\ 10x_{13}+4x_{23}\} \quad (6.22)$$

أى أن

$$8x_{11}+6x_{21} \geq y \quad (6.23)$$

$$5x_{12}+12x_{22} \geq y \quad (6.24)$$

$$10x_{13}+4x_{23} \geq y \quad (6.25)$$

وبأستخدام (6.25)-(6.23) يمكن تحويل نموذج ابرمجه الرياضيه غير الخطى (.21)-(6.18) الى نموذج برمجه خطيه مكافئ له على النحو التالى :

$$\text{Max. } z = y \quad (6.26)$$

S.T.

$$8x_{11}+6x_{21}-y \geq 0 \quad (6.27)$$

$$5x_{12}+12x_{22}-y \geq 0 \quad (6.28)$$

$$10x_{13}+4x_{23}-y \geq 0 \quad (6.29)$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 1000 \quad (6.30)$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 800 \quad (631)$$

$$y, x_{ij} \geq 0, \qquad i=1,2,\ \ j=1,2,3 \quad (6.32)$$

ويلاحظ أن عملية تحويل النموذج غير الخطى الى نموذج برمجه خطيه أدى الى :

١- تغيير عدد المتغيرات القراريه من 6 الى 7 فى انموذج الخطى .
٢- تغيير عدد القيود من قيدين بالاضافة الى قيود عدم السالبية الى 5 قيود بالاضافة الى قيود عدم السالبيه فى النموذج الخطى .

أى أن تحويل النموذج الاصلى الى نموذج برمجه خطيه ادى الى زيادة حجم النموذج .

(٦-٣) الصياغة العامه لنموذج البرمجه الخطية
General Formulation of LP Model

من الفصل السابق يتضح أن الصياغة العامــة لنمـوذج البرمجـة الخطيـة تـاخذ الشكل التالى :

أوجد قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بحيث :

$$\text{Max. (or Min.) } z=C_1X_1+C_2X_2+..+C_nX_n \tag{6.33}$$

تحت القيود

S.T.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_1 \tag{6.34}$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_2 \tag{6.35}$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_m \tag{6.36}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \tag{6.37}$$

حيث a_{ij}, c_j, b_i مقـادير ثابتـه (تسـمى معلمـات النمـوذج Parameters) لجميـع قيـم $j=1,2,\ldots,n,\ i=1,2,\ldots,m$.

ويمكن كتابه النموذج (6.37)-(6.33) فى صورة مصفوفات على النحو التالى :

أوجد قيم عناصر المتجه x بحيث :

$$\text{Max. (or Min.) } z = CX$$

تحت القيود
S.T.

$$AX \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b \quad (6.39)$$

$$X \ge 0 \quad (6.40)$$

حيث :

X : متجه عمودى (nx1) ويمثل المتغيرات القرارية

b : متجه عمودى (mx1) يحتوى على المقادير الثابته للطلاف الايمن للقيود

C : متجه صفى (1xn) يحتوى على المقادير الثابتـه التـى تمثـل معـاملات x فى دالة الهدف

A : مصفوفة مستطيله عدد صفوفها m وعدد أعمدتهـا n ، وتمثـل معـاملات المتغيرات القراريه فى الطرف الايسر للقيود .

(٦-٤): الطريقة البيانية لحل النموذج الخطى
Graphical Solution Method of LP Model

ويوجد طريقتين لحل نموذج البرمجة الخطية :

١- الطريقة البيانية .

٢- الطريقة الجبرية أو ماتسمى بطريقة السمبلكس Simplex method .

وفى هذا الفصل سوف نكتفى بعرض الطريقة البيانية فقط من خلال بعض الامثلة على النحو الموضح فيما يلى . وتصلح الطريقة البيانية فقط فى حالة وجود متغيرين قراريين فقط .

مثال (٦-١)

أوجد قيم x_1, x_2 التى تصغر الهدف z

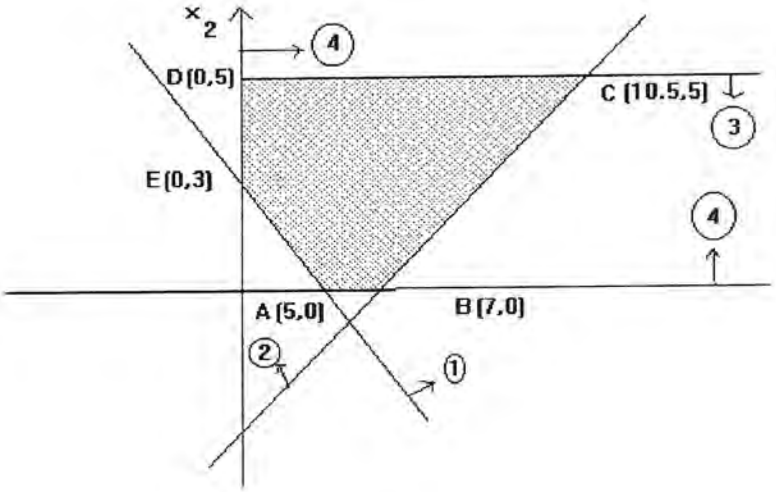
$$\text{Min. } z = 4x_1 + 3x_2$$

تحت القيود

S.T.

$$3x_1+5x_2 \geq 15 \qquad (1)$$
$$10x_1-7x_2 \leq 70 \qquad (2)$$
$$x_2 \leq 5 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (4)$$

وتبنى الطريقة البيانيه لحل نموذج البرمجه الخطيه على تحديد المنطقة التى تحقق جميع القيود (1)-(4) ثم تحديد النقطة التى تجعل دالة الهدف z أقل مايمكن ويتم ذلك على النحو التالى :



شكل (٦-٣)

١- تحدد المنطقة التى تحقق المتباينة (1) ويتم ذلك عن طريق تحويل المتباينة (1) الى معادلة على النحو :

$$3x_1+5x_2 = 15 \qquad (5)$$

ثم نمثل هذه المعادلة بيانيا بخط مستقيم يقسم المستوى الى جزئيين فنجد أن الجزء الذى يمثل النقط التى تقع على يمين هذا الخط وعلى الخط نفسه تحقق المتباينه ، ولنفرض أن S_1 هى الفئه التى تتضمن جميع النقط التى تحقق هذه المتباينة .

٢- بالمثل نحدد أتجاه المتباينات (2) ,(3) ,(4) بنفس الطريقة ولنفرض أن S_4*, S_3, S_2 هى الفئات التى تحقق المتباينات (2) ,(3) ,(4) الترتيب .

* قيود عدم السالبيه للمتغيرات القراريه $x_1,x_2 \geq 0$ تمثل بيانيا بالربع الاول كذلك الفئه S_4 هى فئه جميع النقط غير السالبه الموجودة بالربع الاول .

٣- تحديد المنطقة التى تحقق جميع المتباينات فى نفس الوقت ، أو بعبارة اخرى تحديد فئة تقاطع الفئات التى تمثل المتباينات أى الفئة $(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$ ، وهى المنطقة A, B, C, D, E كما هو موضح بشكل (٦-٣).

وتسمى المنطقة التى تحقق جميع المتباينات بمنطقة الحلول الممكنه Feasible solution's area . وتسمى النقط A, B, C, D, E بالنقط الطرفيه الممكنه Feasible extreme points (أو النقط الركنية الممكنه Feasible corner points) ومن بين جميع النقط الطرفيه الممكنه للمشكلة نقطة واحدة (أو نقط بديله) تأخذ عندها دالة الهدف z قيمتها المثلى (أى نهايتها العظمى فى حالة اذا كان الهدف تعظيم ، أو نهايتها الصغرى اذا كان الهدف تصغر . حسب نوع المشكلة).

وتسمى هذه النقطه بالحل الامثل Optimum solution ويمكن تحديد النهاية الصغرى للدالة z حيث :

$z = 4x_1+3x_2$

بفحص قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقط الطرفيه الممكنه كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٦-٣)

النقط الطرفيه الممكنة	قيمة دالة الهدف عند كل نقطه طرفيه ممكنه	الحل الامثل
A(5,0)	4(5)+3(0)=20	
B(7,0)	4(7)+3(0)=28	
C(10.5,5)	4(10.5)+3(5)=57	
D(0,5)	4(0)+3(5)=15	
E(0,3)	4(0)+3(3)-9 ←	$z=9, x_1=0, x_2=3$

ومن الجدول يتضح أن القيمة المثلى لدالة الهدف 9 عندما $x_1=0, x_2=3$.

مثال (٦-٢)

أوجد قيم x_1, x_2 التى تعظم الهدف z

$$\text{Max. } z = 2x_1 + x_2$$

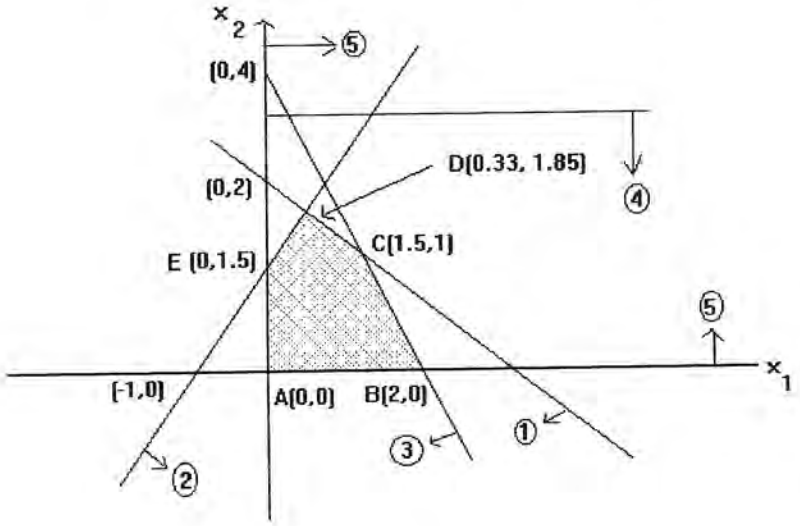
تحت القيود

S.T.

$2x_1+3x_2 \leq 6$	(1)
$3x_1-2x_2 \geq -3$	(2)
$2x_1 \pm x_2 \leq 4$	(3)
$x_2 \leq 3$	(4)
$x_1, x_2 \geq 0$	(5)

الحل

١- نحدد منطقة الحلول الممكنة كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٦-٤)

٢- من الشكل يمكن تحديد النقط الطرفيه الممكنه A, B, C, D, E حيث :

$A=(x_1=0,\ x_2=0),\ \ B=(x_1=2,\ x_2=0),\ \ C=(x_1=1.5,\ x_2=0)$
$D=(x_1=0.23,\ x_2=1.85),\ \ E=(x_1=0,\ x_2=1.5)$

٣- نفحص قيمة دالة الهدف عند كل نقطه من النقط الطرفيه الممكنه كما هو موضح بالجدول التالى :

جدول (٦-٤)

النقط الطرفيه الممكنه	قيمة دالة الهدف عند كل نقطة	الحل الامل
A(0,0) B(2.0) C(1.5,1) D(0.23,1.85) E(0,1.5)	2(0)+1(0)=0 2(2)_1(0)=4 2(1.5)+1(1)=4 2(0.23)+1(1.85)=2.31 2(0)+1(1.5)=1.5	$z=4,\ x_1=2,\ x_2=0$ $z=4, x_1=1.5,\ x_2=0$

ومن الجدول يتضح أن القيمة المثلى لدلـة الهدف 4 عندما $x_1=3,\ x_2=0$ أو عندما $x_1=1.5,\ x_2=1$ (أى يوجد حلول مثلى بديلة للنموذج).

ومن شكل (٦-٤) يتضح أن (4)

$x_2 \leq 3$

قيد غير مؤثر فى منطقة الحلول الممكنه A,B,C,D,E بمعنى أنه اذا تم استبعاد هذا اليد لايؤثر أستبعادة على منطقة الحلول الممكنه وبالتالى غير مؤثر على الحل الامثل ، ويسمى هذا القيد بالقيد الزائد Redundant constraint.

وبالتالى يمكن تعريف القيود الزائدة بأنهـا القيو التـى اذا تـم اسـتبعادها لاتؤثـر علـى منطقة الحلول الممكنة وبالتالى لايؤثر على الحل الامثل .

(٦-٥) أمثلة تطبيقية   Applied Examples

تطبيق (١)

تقوم أحدى الشركات بأنتاج نوعين A, B من المنتجات المصنوعه مـن الألومنيـوم . وترغب فى تحقيق أقصى ربح شهرى ممكن بحيث يتطلب أنتاج كل وحدة من A,B مواد تصنيع الالومنيوم ، الطاقة ، ساعات العمل . والجدول التـالى يوضـح الكميـات الشهرية المتاحة من مواد تصنيع الالومنيوم ، الطاقة ، ساعات العمل – كذلـك ربـح الوحدة الواحدة من المنتجين A,B بالجنية .

جدول (٦-٥)

الكميات الشهرية المتاحة	المنتجات B	المنتجات A	مستلزمات التصنيع
طن 200000	100	120	مواد الالومنيوم
ساعة 1000	2	6	ساعات العمل
كيلو وات 30000	300	500	الطاقة
	30 جنية	30 جنية	الربح

والمطلوب :

١- صياغة المشكلة لنموذج برمجة خطيه .
٢- استخدام الطريقة البيانيه حدد الكميات المثلى التى يجب انتاجها من كل نوع .
٣- حدد أى مكونات التصنيع تعتبر أكثر ندرة وأيها أقل ندرة .

الحل

أولا : المتغيرات القراريه

نفرض أن

عدد الوحدات التى يتم أنتاجها من المنتج A X_1 :

عدد الوحدات التى يتم أنتاجها من المنتج B X_2 :

$x_1, x_2 \geq 0$

ثانيا: دالة الهدف

بما أن الهدف من الانتاج هو تحقيق أقصى ربح ممكن أى يصبح الهدف تعظيم دالــة الربح z .

(1) $\text{Max. } z = 50x_1 + 40x_2$

ثالثا : القيود

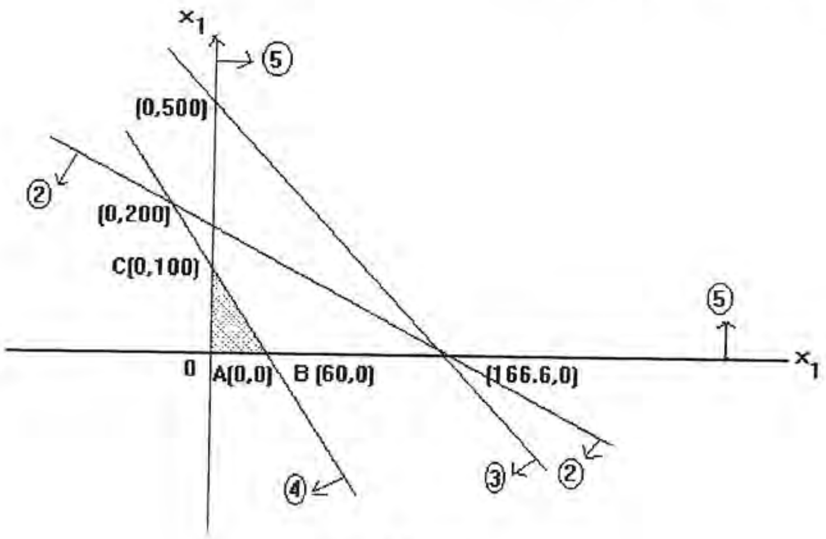
(2) $120x_1+100x_2 \leq 20000$

(3) $6x_1+2x_2 \leq 1000$

(4) $500x_1+300x_2 \leq 30000$

(5) $x_1, x_2 \geq 0$

٢- الشكل التالى يوضح منطقة الحلول الممكنة A, B, C



شكل (٦-٥)

نكون الجدول التالى

جدول (٦-٦)

النقط الطرفيه الممكنة	قيمة دالة الهدف عند النقط الطرفية الممكنة	الحل الامثل
A(0,0)	50(0)+40(0)-0	
B(60,0)	50(60+40(0)=3000	
C(0,100)	50(0)+40(100)=4000	$z = 4000, x_1 =, x_2 = 100$

من الجدول يتضح أن أقصى مكسب ممكن تحقيقه يساوى 4000 اسبوعيا ، وذلك اذا انتج 100 وحدة فقط من النوع B .

٣- من الشكل يتضح أن كل مـن القيدين (2) ,(3) قيود زائدة وغير مؤثرة فـى منطقة الحلول الممكنة وأن القيد المؤثر هو القيـد (4) الـذى يمثل الطاقة ومـن هنا يتضح أن التغيير فى كمية الطاقـة المتاحه بالزيـادة أو النقصـان هـو الـذى يؤثر على الكمية التى يتم انتاجها من كل نـوع وبالتـالى علـى الربـح الممكـن تحقيقة .

تطبيق (٢)

يرغب أحد المستثمرين فى استثمار 500,000 جنية . ونظرا لمخاوفة من المخـاطرة فى ايداع المبلغ فى نوع واحد من الاستثمارات ، فقد فضل استثمار المبلـغ فـى عدة استثمارات مختلفة والموضحه بالجدول التالى

جدول (٦-٧)

وجه الاستثمار	معدل الفائة السنوية
شراء أسهم فى شركة استثمارية A	0.12
شراء أسهم فى شركة استثمارية B	0.15
شراء سندات حكومية	0.10
شراء شهادات استثمارية من النوع I	0.16
شراء شهادات استثمارية من النوع II	0.18

فاذا كان يرغب المستثمر فى :

١- استثمار على الاقل 20% من المبلغ فى شراء سندات حكومية .

٢- مجموع الاستثمارات فى الشركتين A,B لاتزيد عن 30000 جنية .

٣- مجموع الاستثمارات فى الشهادات من النوع II لايزيد عن الاستثمارات فى النوع I .

والمطلوب : صياغة المشكلة السابقة نموذج برمجة خطية .

الحل :

أولا: المتغيرات القرارية :

اذا فرضنا أن

حجم الاستثمار فى الشركة A	x_1 :
حجم الاستثمار فى الشركة B	x_2 :
حجم الاستثمار فى شراء سندات حكومية	x_3 :
حجم الاستثمار فى شراء شهادات من النوع I	x_4 :
حجم الاستثمار فى شراء شهادات من النوع II	x_5 :

حيث :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, \geq 0$$

ثانيا: الهدف

بما أن هدف المستثمر تحقيق أكبر عائد سنوى ممكن بالتالى فأن الهدف هو :

$$\text{Max. } z = 0.12x_1+0.15x_2+0.10x_3+0.16x_4+0.18x_5 \qquad (1)$$

ثالثا: القيود

١- بما أن مجموع الاستثمارات 500,000 بالتالى

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 500{,}000 \qquad (2)$$

٢- بما أنه يجب استثمار 20% عى الاقل فى شراء سندات الحكومه وبالتالى :

$$x \geq 20\% \ (500{,}000) \rightarrow$$

$$x \geq 100{,}000 \qquad (3)$$

٣- وبما أن مجموع الاستثمارات فى الشركتين A,B لاتزيد عن 30,000 جنية ، اذن

$x_1+x_2 \leq 30,000$ (4)

٤- وبما أن مجموع الاستثمارات فى الشهادات من النوع II لايزيد عن الاستثمارات فى النوع I ، بالتالى

$x_4 \geq x_5 \rightarrow$

$x_4-x_5 >. 0$ (5)

ومما سبق نجد أن نموذج البرمجة الخطية للمشكلة السابقة على النحو التالى :

أوجد قيم x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 بحيث :

$$\text{Max. } z = 0.12x_1+0.12x_2+0.10x_3+0.16x_4+0.18x_5$$

تحت القيود

S.T.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 500,000$$
$$x_3 \geq 100,000$$
$$x_1+x_2 < 30,000$$
$$x_4-x_5 \geq 0$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0$$

تطبيق (٣)

تملك أحدى الشركات الملاحيه 3 ناقلات تقوم بنقل 4 أنواع من المنقولات (البضائع). والجدول التالى يوضح الوزن بالطن والحجم بالقدم المكعب والعائد من نقل الطن الواحد من كل نوع فى أحد الخطوط الملاحية .

جدول (٦-٨)

عائد الطن الواحد بالجنية	الحجم بالقدم	الوزن بالطن	نوع المنقولات
1250	70	200	1
900	50	100	2
1000	60	80	3
1200	75	150	4

فاذا كانت الطاقة الاستيعابية للناقلات الثلاثه هى :

- الناقلة الاولى : 100 طن وزن ، 6,000 قدم مكعب حجم .
- النقالة الثانية : 140 طن وزن ، 8,000 قدم مكعب حجم .
- الناقلة الثالثة : 80 طن وزن ، 5,000 قدم مكعب حجم .

والمطلوب: صياغة المشكلة السابقة كنموذج برمجه خطية .

الحل

أولا: المتغيرات القرارية

نفرض أن :

الكميات المنقولة من نوع المنقولات 1 بأستخدام الناقلة 1	:	x_{11}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 1 بأستخدام الناقلة 2	:	x_{12}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 1 بأستخدام الناقلة 3		x_{13}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 2 بأستخدام الناقلة 1	:	x_{21}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 2 بأستخدام الناقلة 2	:	x_{22}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 2 بأستخدام الناقلة 3	:	x_{23}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 3 بأستخدام الناقلة 1	:	x_{31}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 3 بأستخدام الناقلة 2	:	x_{32}
الكميات المنقولة من نوع المنقولات 3 بأستخدام الناقلة 3	:	x_{33}

ويمكن أختصار ذلك بأفتراض أن x_{ij} هى الكمية المنقولة i حيث $i=1,2,3,4$ بأستخدام الناقلة j حيث $j=1,2,3$ ،. حيث $x_{ij} \geq 0$ لجميع قيم j, i .

ثانيا: الهدف

بما أن هدف الشركة تحقق أكبر عائد ممكن اذن يمكن صياغة الهدف على النحو التالى :

$$\text{Max. } z = 1250\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right) + 900\left(\sum_{j=1}^{3} x_{2n}\right) + 1000\left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j}\right) + 1200\left(\sum_{j=1}^{3} x_{4j}\right)$$

ثالثا: القيود

١) القيود المتعلقة بالوزن بالنسبه لكل ناقله

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} \le 100$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_{i2} \le 140$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_{i3} \le 80$$

٢) القيود المتعلقة بالحجم بالنسبة لكل ناقله

$$70x_{11}+50x_{21}+60x_{31}+75x_{41} \le 6000$$
$$70x_{12}+50x_{22}+60x_{32}+75x_{42} \le 8000$$
$$70x_{13}+50x_{23}+60x_{33}+75x_{43} \le 5000$$

وبالتالى يصبح نموذج البرمجه الممثل للمشكلة على النحو التالى :

$$\text{Max. } z = 1250\left(\sum_{j=1}^{3} x_{1j}\right) + 900\left(\sum_{j=1}^{3} x_{2j}\right) + 1000\left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j}\right) + 1200\left(\sum_{j=1}^{3} x_{4j}\right)$$

تحت القيود

S.T.

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} \leq 100,\quad \sum_{i=1}^{4} x_{i2} \leq 140,\quad \sum_{i=1}^{4} x_{i3} \leq 80$$

$$70x_{11}+50x_{21}+60x_{31}+75x_{41} \leq 6000$$
$$70x_{12}+50x_{22}+60x_{32}+75x_{42} \leq 8000$$
$$70x_{13}+50x_{23}+60x_{33}+75x_{43} \leq 5000$$
$$x \geq 0\ ,\ i=1,2,3,4$$
$$j=1,2,3,$$

تطبيق (٤)

تقوم احدى مزارع الدواجن بتسمين الدواجن لتسويقها بعد 8 أسابيع من تاريخ التسمين . فاذا كان لديها 20000 دجاجة . ويرغب متخذ القرار فى المزرعة فى تحديد الكميات المطلوبه من المواد الغذائية المختلفة الضرورية لتغذية الدواجن فى 8 أسابيع بحيث تكون تكلفة التغذية أقل مايمكن . وبالرغم أن المواد المطلوبه للتغذية تختلف فى الكمية بأختلاف عمر الدجاجة ، لكن من خبرة المزرعه فى التسمين ، أتضح أن متوسط استهلاك الدجاجه يصل الى 455 جرام تقريبا من خليط المواد الغ١ائية ، وسوف تعتبر 455 جرام كوحدة عبوى للمواد الغذائية ولكى تصل الدجاجة الى الوزن المحدد لها فى 8 أسابيع فأن التغذية يجب أن تتضمن العناصر الاساسيه من كالسيوم وبروتين وألياف ، ... وبالرغم من أن هذه العناصر توجد فى مواد غذائية كثيرة ، الا أن المزرعة حددت ثلاثه أنواع من هذه المواد وهى الحجر الجيرى ، الحبوب (الذرة ، القمح) ، وفول الصويا .

والجدول التالى يعطى كمية العناصر فى المواد الغذائية المحددرة وتكلفة وحدة العبوة من كل مادة .

جدول (٦-٩)

المواد	كمية العنصر فى وحدة العبوة (455 جرام) من المادة الغذائية			تكلفة وحدة العبوه من المادة الغائية بالوحدة النقدية
	الكالسيوم	البروتين	الالياف	
الحجر الجيرى	0.38	-	-	0.04
الحبوب (قمح ، ذرة)	0.001	0.09	0.02	0.15
فول الصويا	0.002	0.50	0.08	0.40

حيث أن الوجبه الغذائية للدجاجة يجب أن تحتوى على :

١- لايزيد الكالسيوم فيها عن 1.2% ولا يقل عن 0.8% ،
٢- لايقل البروتين عن 22% ،
٣- لاتزيد الالياف عن 5% .

والمطلوب : صياغة المشكلة السابقه فى نموذج برمجه خطيه لتحديد أقل تكلفه تسمين ممكنه .

الحل

أولا: المتغيرات القرارية

نفرض أن

عدد العبوات المطلوبه من الحجر الجيرى x_1 :
عدد العبوات المطلوبه من الحبوب x_2 :
عدد العبوات المطلوبه من فول الصويا x_3 :
بحيث $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ثانيا : الهدف
بما أن صانع القرار فى المزرعة يرغب فى تحقيق أقل تكلفة فأن دالـة الهدف تـأخذ الشكل التالى :

$$\text{Min. } z = 0.04x_1 + 0.15x_2 + 0.40x_1$$

ثالثا: القيود
بما أن الدجاجة الواحدة تحتاج الى عبـوى واحدة فـى المتوسـط خـلال الفـترة ، فـأن الكمية المطلوبه من المواد الغذائية الثلاثه يجب أن تحقق القيد التالى

$$x_1+x_2+x_3 > 20000$$

كذلك بالنسبه لكمية الكالسيوم يجب أن يتحقق القيدين التاليين :

$$0.30x_1+.001x_2+.002x_3 \geq .008\ (x_1+x_2+x_3) \qquad (6.41)$$
$$0.38x_1+.001x_2+.002x_3 \leq 0.012\ (x_1+x_2+x_3) \qquad (6.42)$$

وبالنسبه للبروتين

$$0.09x_1+0.50x_2 \geq 0.22(x_1+x_2+x_3) \qquad (6.43)$$

وبالنسبه للالياف

$$0.02x_2+0.08x_3 \leq 0.05(x_1+x_2+x_3) \qquad (6.44)$$

ومن (6.44)-(6.41) يتضح أن نموذج البرمجه الخطيه الذى يمثـل المشـكلة السـابقه هو :

أوجد قيمة $x_1+x_2+x_3$ بحيث :

$$\text{Min. } z = 0.04x_1+0.15x_2+40x_3$$

S.T.
$$x_1+x_2+x_3 \geq 20000$$

$$0.372x_1-0.007x_2-0.006x_3 \geq 0$$
$$0.368x_1-0.100x_2-0.01x_3 \leq 0$$
$$-0.22x_1-0.13x_2+0.24x_3 \geq 0$$
$$-0.05x_1-0.03x_2+0.03x_3 \leq 0$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

(٦-٦) تمرينات Exercises

(٦-١) تقوم احدى شركات أنتاج التليفزيونات الملونه بأنتاج تليفزيونات 7 نظام وأخرى 9 نظام . من خلال خطى أنتاج منفصلين . حيث أن الطاقة الانتاجية اليوميه للخط الاول 60 تليفزيون 7 نظاميوميا . والخط الثانى 75 تليفزيون 9 نظام يوميا . حيث يتطلب أنتاج التليفزيون الواحد من النوع الاول 8 مكونات ومن النوع الثانى 10 مكونات . وأجمالى عدد الواحدات من المكونات المتاحه يوميا 800 وحدة فقط . وربح التليفزيون الواحد من النوع الاول 150 جنيه ومن النوع الثانى 200 جنيه . وترغب الشركة فى تحديد عدد التليفزيونات التى يجب أنتاجها من كل نوع بحيث تحقق أقصى ربح ممكن .

(٦-٢) حل نماذج البرمجه الخطيه التالية بيانيا .

1) Min. $z = 4x_1+4x_2$

S.T.

$$x_1+x_2+ \leq 24$$
$$3x_1+x_2 \geq 27$$
$$x_1-x_2 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) Max. $z = 3x_1+x_2$

S.T.

$$x_1+3x_2 \geq 9$$
$$9x_1+6x_2 \leq 108$$
$$x_1 \geq 8$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3) Max. $z = 1.5x_1 + 3x_2$

S.T.

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\geq 10\\
5x_1+10x_2 &\leq 120\\
x_1 \quad &\leq 8\\
x_2 &\leq 6\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(٦-٣) حدد بيانيا منطقة الحلول الممكنه التى تحقق المتباينات التالية :

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2 \leq 4\\
&4x_1+3x_2 \leq 12\\
&-x_1 + x_2 \geq 1\\
&x_1 + x_2 \leq 6\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ثم حدد أى القيود تعتبر قيود زائدة . كذلك حدد القيود المؤثرة فىمنطقة الحل .

(٦-٤) أعتبر نموذج البرمجه الخطيه التالى :

Max. $z = 4x_1+3x_2$

S.T.

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2 \leq 6\\
&x_1, x_2 \geq 3\\
&2x_1+3x_2 \geq 3\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

أ) حدد أى نوع من الفئات التالية :
فئة تحتوى على عنصر واحد ، فئه تحتوى على عدد لانهائى من العناصر ، فئه خاليه تكون فئة الحلول الممكنه فى الحالات التاليه :

١- عندما تكون القيود كما هو فى النموذج المذكور أعلاه .

٢- عندما يحل القيد

$x_1+x_2 \leq 5$

بدلا من القيد

٣- عندما يحل القيد

$$x_1+x_2 \leq 6$$

$$x_1+x_2 \leq 7$$

بدلا من القيد

$$x_1+x_2 \leq 6$$

ب) فى (أ) حدد عدد النقط الطرفيه الممكنه فى كل الحالات .
ج) أوجد الحل الامثل فى كل حالة من الحالات الثلاثه فى (أ).

(٦-٥) أعتبر مشكلة البرمجة الخطية التالى :

$$\text{Max. } z = 3x_1+2x_2$$

S.T.

$$4x_1+2x_2 \leq 4$$

$$3x_1+4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

١- وضح بيانيا أن المشكلة ليس لها نقط طرفيه ممكنه .
٢- وماهو التغيير المطلوب فى المشكلة حتى تصبح مشكلة قابله للحل .

(٦-٦) تقوم أحدى الشركات بأنتاج وتسويق 5 أنواع من المـواد الغذائيـة المحفوظـة والجدول التالى يوضح تكلفه الوحدة الواحدة وثمن بيع الوحدة من كل نـوع من أنواع المنتجات بالجنيه .

جدول (٦-١٠)

التكلفة وثمن البيع	المنتج				
	A	B	C	D	E
تكلفة الوحدة	5	8	3	2.5	1
ثمن بيع الوحدة	7	9	3.5	5	1.5

فاذا كانت الكميات المطلوبه من كل نوع على النحو التالى :

- على الاقل 20% من أجمالى المنتجات من النوع A .
- على الاقل 10% من أجمالى المنتجات من النوع B .
- عدد الوحدات المنتجه من المنتج C يساوى عدد الوحدات من المنتج E.
- أجمالى عدد الوحدات المنتجة من جميع الانواع لايزيد عن 1000 وحدة يوميا .

والمطلوب : صياغة المشكلة السابقه بحيث يكون الربح اليومى أكبر مايمكن .

(٦-٧) رجل أعمال لديه أمكانيتين لاستثمار أمواله ، الاولى تضمن له أن كل جنيه سوف يكسب 0.70 جنيه بعد عام كامل . والامكانيه الثانيه تضمن له أن كل جنيه سوف يكسب 2.00 جنيه بعد سنتين . حيث أن هذه الامكانيه تتيح الاستثمار لمدة عامين أو مضاعفتهم فقط . فاذا كان الرجل يرغب فى استثمار 100,000 جنيه لمدة 3 سنوات بحيث تحقق أكبر ربح ممكن .
والمطلوب : تكوين نموذج برمجه خطيه يمثل هذه المشكلة .

(٦-٨) تقوم أحدى شركات أنتاج زيوت الطعام بأنتاج النوعين A, B من الزيوت ويتطلب أنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع المرور على 3 أنواع من العمليات الانتاجية I, II, III ، حيث أن الزمن العمل الكلى المتاح للعمل فى كل عمليه 20,16,18 ساعات يوميا فقط على الترتيب . والجدول التالى يعطى الزمن المطلوب لانتاج وحدة واحدة من كل منتج نهائى فى كل عمليه أنتاجيه وربح الوحدة الواحدة بالجنية .

جدول (٦-١١)

المنتج النهائى	الزمن المطلوب للوحدة النهائيه الواحدة فى كل عمليه انتاجيه بالدقائق			ربح الوحدة بالجنية
	I	II	III	
A	10	6	8	2
B	5	20	15	3

وترغب الشركة تحديد عدد الوحدات التى يجب أنتاجها يوميا من كل نوع بحيث تحقق أكبر ربح ممكن .

الباب السابع

التفاضل

Differentiation

(٧-١) النهايات والاتصال Limits and Continuity

فى البـاب الثـانى درسـنا الـدوال الرياضيـة مـن ناحيـة التعريـف والخصـائص وبعض أنواعها وكيفية التمثيل الهندسى لبعض الانواع من الدوال . وتتطلـب دراسـة استخدامات الدوال الرياضية من الناحية التطبيقية دراسة كل من العمليـات التفاضليـة وعمليات التكامل التى سـوف نتناولهـا فـى هـذا البـاب والبـاب التـالى . كذلـك كيفيـة اسـتخدام هـذه العمليـات فـى العلـوم الاداريـة والمحاسـبيه والاقتصاديـــة مـــن خـــلال مجموعة من الامثلة التطبيقية .

وتتطلب دراسة العمليات التفاضلية فى هذا الباب ضرورة دراسة النهايات والاتصـال للدوال . وسوف نتناول مفهوم كل من النهايات والاتصـــال مـن خـلال مجموعـة مـن التعريفات والنظريات التالية :

أولا: نهايات الدوال Limits of function

اذا كانت $f(x)$ دالة فى المتغير x حيث $a \le x \le b$,c نقطـة مـا داخـل الفتـرة $[a,b]$ ، وعادة يكون من الاهمية معرفة سلوك قيم الدالة $f(x)$ عندما يقترب المتغير x من النقطة c داخل الفترة $[a,b]$ من ناحية اليمين c^+ (أى من قيم أكـبر مـن c) أو مـن ناحيـة اليسـار c^- (أى مـن قيـم أقـل مـن c). فـاذا وجـدت قيمـة نـهائيـة (محـددة) Limiting value L فأنه يقال أن القيمة L نهاية Limit للدالة $f(x)$ عندمـا x تقترب من c وتكتب على النحو التالى :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad (7.1)$$

وتقرأ "نهاية الدالـة $f(x)$ عندمـا تقـترب x مـن النقطـة c (أو تـؤول x الـى النقطـة c وترمز بـ ($(x \to c)$) تساوى L "

وعاة اذا كان أقتراب المتغير x من النقطة c من اتجاه اليمين فأنه يرمـز للنهايـه فـى هذه الحالة على النحو :

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad (7.2)$$

وتقرأ "نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من جهة اليمين يساوى L" ، وأحيانا تسمى نهاية يمنه ، أى الاقتراب يتم من جهة اليمين واذا كان أقتراب المتغير x من النقطة c من أتجاه اليسار فأنه يرمز للنهاية فى هذه الحالة يشار الى ذلك على النحو:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad (7.3)$$

وتقرأ "نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من جهة اليسار يساوى L" وأحيانا تسمى نهاية يسرى أى الاقتراب يتم من جهة اليسار .

نظرية (٧-١)
تكون القيمة L نهاية للدالة $f(x)$ عندما x تقترب من النقطة c اذا كان الاقتراب من اليمين واليسار يساوى L بمعنى اذا كان

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad (7.4)$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad (7.5)$$

فأن

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad (7.6)$$

مثال (٧-١)
اذا كانت الدالة $f(x)$ بحيث $f(x)= x^2$
أوجد نهاية الدالة عندما x تقترب من 2 أى ايجاد $\lim_{x \to c} f(x) = L$

أ) من جهة اليمين (2^+).
ب) من جهة اليسار (2^-).

الحل
الجدول التالى يوضح سلوك قيم الدالة $f(x)$ عندما $x \to 2$ من جهتى اليمين واليسار .

جدول (٧-١)

$x \to 2^+$

x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
x(x)=x^2	9	6.25	4.41	4.203	4.04	4.02	4.004

$x \to 2^-$

x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
f(x)=x^2	1	2.25	3.61	3.80	3.96	3.98	3.996

من الجدول يتضح أن

$$\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4 \qquad (7.7)$$

وأيضا

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \qquad (7.7)$$

وبالتالى فأن :

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \qquad (7.8)$$

ومما هو جدير بالذكر أنه ليس بالضرورة أن تكون النهاية اليمنى تساوى النهاية اليسرى ، أو بعبارة أخرى فى بعض الحالات

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x) \qquad (7.9)$$

والمثالين التاليين يوضحين ذلك :

مثال (٧-٢)

اذا فرضنا أن :

$$f(x) = \begin{cases} 5-2x & x<2 \\ 2x & x\geq 2 \end{cases}$$

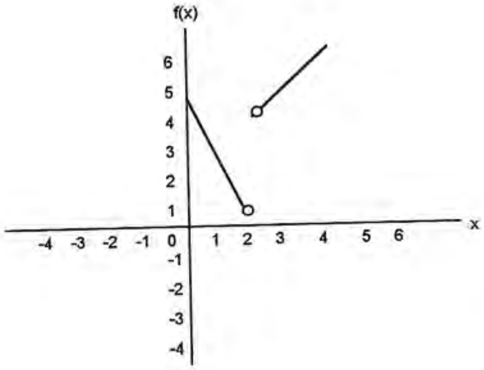
أوجد

$\lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$

ووضح ذلك بيانيا .

الحل

الشكل التالى يوضح الدالة f(x)



شكل (٧-١)

حيث نجد أن :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1\ ,\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \qquad (6.11)$$

والجدول التالى يوضح ذلك :

جدول (٧-٢)

$x \to 2^+$

x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
f(x)=2x	6	5	4.2	4.1	4.02		

$x \to 2^-$

x	1.0	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
f(x)=5-2x	3	2	1.2	1.1	1.02	1.01	1.002

مثال (٧-٣)
اذا كان

$$f(x) = \frac{x-5}{|x-5|} \qquad -\infty<x<\infty \qquad (7.12)$$

أوجد كل من النهايه اليمنى واليسرى للدالة f(x).

الحل

١- اذا كانت x>5 فأنه فى هذه الحالة نجد أن البسيط موجب ومساوى المقام فى الطرف الايمن للمعادلة (7.12) أى :

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 1$$

٢- واذا كانت x<5 فأنه فى هذه الحالة نجد أن البسيط سالب ومساوى للمقام فى الطرف الايسر للمعادلة (7.12) أى :

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -1$$

والجدول التالى يوضح ذلك :

جدول (٧-٣)

$x \to 5^+$

x	6	5.5	5.1	5.05	5.01	5.005	5.001
$f(x)=\frac{x-5}{\lvert x-5\rvert}$	1+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

$x \to 5^-$

x	4	4.5	4.9	4.95	4.99	4.995	4.999
$f(x)=\frac{x-5}{\lvert x-5\rvert}$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

٣- ونلاحظ أنه عندما تكون x=5 فأن كل من البسط والمقام فى الطرف الايمن للمعادلة (7.12) يساوى صفر ، وهذا يعنى أن الدالة f(x) تكون غير معرفه عند النقطة x=5 .

خصائص النهايات

(١) اذا كان f(x) دالة فى المتغير a, x مقدار ثابت بحيث :

$$f(x) = a$$

فانه عند أى نقطه c نجد أن

$$\lim_{x\to c} a = a \qquad (7.13)$$

مثال

$$\lim_{x\to 4} 100 = 100$$

(٢) اذا كان f(x) دالة فى المتغير n, x عدد صحيح موجب فأن :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \qquad (6.14)$$

مثال

$$\lim_{x\to -3} x^5 = (-3)^5 = -243$$

(٣) اذا وجد نهاية للدالة f(x) عندما x→a ، c أى عدد حقيقى فأن :

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x) \qquad (6.15)$$

مثال

$$\lim_{x\to 5} 15(x^3) = 15 \lim_{x\to 5} x^3$$
$$= 15(5^3) = 15(125)$$
$$= 1875$$

(٤) اذا وجدت Exist نهايتين للدوال $f(x), h(x)$ عند النقطه a أى اذا وجدت كل من $\lim_{x\to a} h(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ فأن :

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} h(x) \qquad (7.16)$$

مثال

$$\lim_{x\to -2}(x^2+10) = \lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 10$$
$$=(-2)^2 - 10$$
$$=4-10 = -6$$

(٥) اذا وجدت Exist النهايتين $\lim_{x\to a} h(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ فأن

$$\lim_{x\to a}[f(x)xh(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} h(x)] \qquad (7.17)$$

مثال

$$\lim_{x\to 5}[(x^3-100)(2x+3)] = \lim_{x\to 5}(x^3-100)\lim_{x\to 5}(2x+3)$$
$$= (125=100)\ (10+3)$$
$$= (25)(13)$$
$$= 325$$

(٦) اذا وجدت النهايتين $\lim_{x\to a} h(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ بحيث $\lim_{x\to a} h(x) \neq 0$ فأن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} \qquad (6.18)$$

مثال

أوجد

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x^3+5}$$

بما أن :

$$\lim_{x\to -1}(x^3+5) = (-1+5)$$
$$= 4 \neq 0$$

فأن :

$$\lim_{x\to a} \frac{x2}{x^3+5} = \frac{\lim_{x\to a} x^2}{\lim_{x\to a}(x^3+5)}$$
$$= \frac{(-1)^2}{(-1)^3+5} = \frac{1}{-1+5} = \frac{1}{4}$$

ثانيا: الاتصال Continuity

(١) يقال أن الدالة f(x) دالة متصله Continuous عند النقطة x=c اذا تحقق الشرطان التاليين :

أ) أن تكون الدالة f(x) دالة معرفة Defined فى النقطة c (راجع الدوال فى الباب الثانى).

ب) أن تكون نهاية الدالة f(x) فى النقطة c تساوى قيمة الدالة عند نفس النقطة ، بمعنى :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \qquad (7.19)$$

واذا لم يتحقق واحد على الاقل من الشرطان أ ، ب فأنه يقال أن الدالة غير متصلة Discontinuous.

مثال (٧-٤)
حدد أى الدوال التاليه متصلة وأيها غير متصلة عند النقط المطلوبه ووضح ذلك بيانيا .

i) $f(x) = x^2 \qquad -\infty<x<\infty$

عند النقطة $x=2$

ii) $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 3 \\ 2-x & x \geq 3 \end{cases}$$

عند $x=3$

الحل

بما أن

i) $f(x) = x^2$

بما أن

أ) $f(x=2)=(2)^2=4$

فأن الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=2$.

ب) كذلك بما أن :

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 = f(x=2)$$

اذن الدالة $f(x)=x^2$ دالة متصلة عند النقطة $x=2$. والشكل التالى يوضح ذلك .

واذا لم يتحقق واحد على الاقل من الشرطان أ ، ب فأنه يقال أن الدالة غير متصلة Discontinuous.

مثال (٧-٤)
حدد أى الدوال التاليه متصلة وأيها غير متصلة عند النقط المطلوبه ووضح ذلك بيانيا .

i) $f(x) = x^2$ $\quad -\infty<x<\infty$

عند النقطة $x=2$

ii) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 3 \\ 2 - x & x \geq 3 \end{cases}$

عند $x=3$

الحل
بما أن

i) $f(x) = x^2$

بما أن
أ)

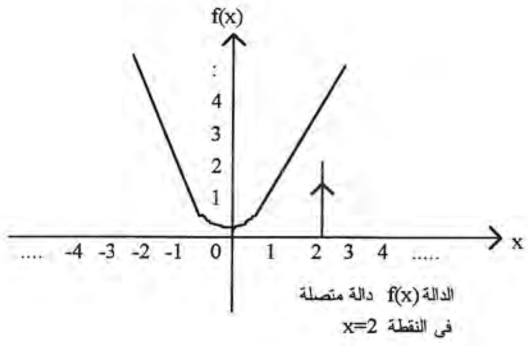
$f(x=2)=(2)^2=4$

فأن الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=2$.

ب) كذلك بما أن :

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 = f(x=2)$$

اذن الدالة $f(x)=x^2$ دالة متصلة عند النقطة $x=2$. والشكل التالى يوضح ذلك .

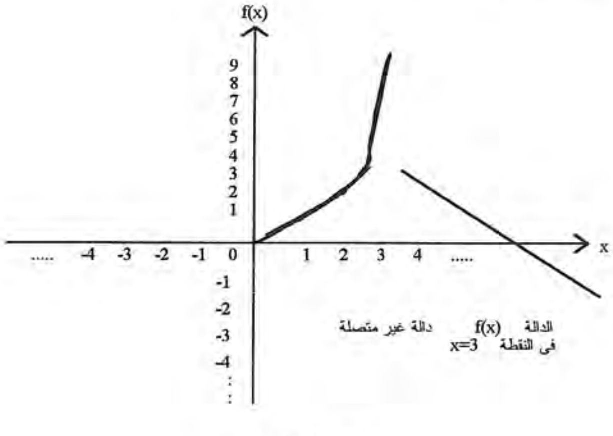


شكل (٧-٢)

بما أن :

$$\text{ii)} \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<3 \\ 6-x & x\ge 3 \end{cases}$$

بما أن الدالة عند النقطة x=3 غير معرفه ، بالتالى فأن الدالة f(x) دالة غير متصلـه عند النقطة x=3 هو موضح من الشكل التالى :



شكل (٧-٣)

مثال (٧-٥)
اختبر أتصال الدالة $f(x)$ عند النقط التالية

حيث $x=0,\ \ x=2,\ \ x=-2$

$$f(x)=\frac{5}{x^3-4x}$$

الحل
بما أن

$$f(x)=\frac{5}{x^3-4x}$$

$$=\frac{5}{x(x^2-4)}=\frac{5}{x(x-2)(x+2)} \qquad (7.20)$$

ويلاحظ أن قيمة المقام للطرف الايمن من المعادلة (7.20) تساوى صفر عندما $x=-2$ أو $x=2$ أو $x=0$.

وبالتالى فأن الدالة $f(x)$ تكون غير معرفة Indefined فى هذه النقط ، وبالتالى فأن $f(x)$ تكون دالة غير متصله فى النقط $x=0, x=2, x=-2$.

ويقال أن الدالة $f(x)$ متصله داخل الفترة $[a,b]$ اذا كانت الدالة $f(x)$ متصله عند كل نقطه تقع فى الفترة $[a,b]$.

مثال (٧-٦)
أختبر أتصال الدالة $f(x)$ حيث $f(x)=\dfrac{12}{6-x}$ داخل الفترة $[0, 10]$.

الحل

بما أن

$$f(x) = \frac{12}{6-x} \tag{7.21}$$

فنجد أن مقام المعادلة (7.21) يساوى صفر عندمـا x=6 ، وبالتـالى فـأن الدالـة f(x) تكون غير معرفه عند النقطة x=6 ، وبما أن x=6 تقع داخل الفترة [0, 10] وبالتالى فأن f(x) تكون غير متصله فى الفترة [0, 10].

(٧-٢) متوسط معدل التغير The Average Rate of Change

اذا كان

$$y = f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة فى المتغير المستقبل x . فاذا حدث تغير فـى المتغير x عندما $x=a$ بمقدار Δx (وتقرأ دلتا x) حيث Δx ممكن أن تكون قيمة موجبه أو سالبه) أى مـن $x=a$ الى $x=a+\Delta x$ ، وحدوث التغير فى x بمقدار Δx ، فأنـه يتبـع ذلـك أن يتغير المتغير التابع y بمقدار Δy (حيث Δy ممكن أن تكون قيمة موجبه أو سالبه أيضا) ويسمى خـارج قسمة التغير فـى $y(\Delta y)$ علـى التغير فـى $x(\Delta x)$ متوسـط بمعدل التغير ويرمز له بالرمز R ، وبعبارة أخرى فأن:

$$R = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7.22}$$

حيث يكون R هو متوسط معدل التغـير للدالـة y علـى الفترة الواقعه بيـن النقطتيـن $a, a+\Delta x$ بالنسبة للمتغير x . أى أن تغير x بمقدار وحدة واحدة خـلال الفـترة Δx سوف يؤدى الى تغير فى الدالـة $f(x)$ مقدارة فـى المتوسـط يسـاوى R. كمـا سـوف يتضح من الامثلة التالية .

مثال (٧-٧)
اذا كانت y, x متغيران يمثلان سعر بيع الوحدة من منتج معين والايراد اليومى مـن الوحدات المباعة من هذا المنتج بالجنية على الترتيب . فاذا كانت العلاقة بيـن y, x على النحو التالى :

$$y = x^2+2x-1 \tag{7.23}$$

فاذا تغير سعر بيع الوحدة x من 10 جنية الى 13 جنية ، فأننا نجد أن مقـدار التغير فى السعر (Δx) .

$$\Delta x=(a+\Delta x)-a = 13-10 = 3$$

كذلك ، مقدار التغير فى الايراد Δy حيث :

$\Delta y = f(a+\Delta x)-f(a)$
$=(a+\Delta x)^2+2(a+\Delta x)-1 - ((a^2)+2(a)-1)$
$=(13)^2+2(13)-1 - ((10)^2+2(10)-1)$
$=104.04 + 20.4-1 - (100+20-1)$
$= 169-26-1-(100+20-1)$
$= 142-119 = 23$ جنية

أى أن حدوث تغير فى سعر الوحدة بمقدار 3 جنية أدى الى حدوث تغير فى الايـراد اليومى بمقدار 23 جنية . وبالتالى فأن :

$$R = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{23}{3} = 7.7$$

أى أن تغير سعر الوحدرة بمقدار جنيـه واحد داخل الفترى مـن x=10 الـى x=13 سوف يؤدى أى تغير الايراد اليومى بمقدار 7.7 جنيه فى المتوسط .

كذلك اذا تغير السعر من 10 الى 8 (أى بالنقصـان) فأنه فى هذه الحالة .

$\Delta x = 8 - 10 = 2$
$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$
$=(8)^2+2(8)-1 - ((10)^2+2(10)-1)$
$= 64-16-1-(100+20-1)$
$= 47-119= -27$

أى أن نقص سعر الوحدة بمقدار 2 جنيه أدى الى نقـص الايـراد اليومـى بمقـدار 72 جنية وبالتالى فأن :

$$R = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-72}{-2} = 34$$

أى أن متوسط معدل التغير داخل الفترة 10 ,8 يساوى 34 جنية أو بعبارة أخرى فأن نقص السعر بجنيه واحد خلال الفترة من x=10 الى x=8 سوف يؤدى الى أنخفاض الايراد اليومى بمقدار 34 جنية فى المتوسط .

(٧-٣) تفاضل الدالة — Derivative of a Function

اذا فرضنا أن الدالة f(x) دالة معرفة على الفترة [a,b] ، وكانت النقطة c تقع داخل الفترة [a,b] بمعنى cε [a,b] فأن تفاضل الدالة y=f(x) بالنسبة للمتغير x عند النقطة c يعرف بأنه نهاية معدل التغير فى f(x) عندما تؤول Δx الى الصفر فىحالة وجود نهاية للدالة f(x).ويرمز لتفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x بالرمز $\frac{dy}{dx}$ وتقرأ " تفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x " ، وأحيانا يرمز للتفاضل بالرمز `y، أو f(x)' ومن التعريف للتفاضل نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} R = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (6.24)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (7.25)$$

وفى حالة عدم* وجود نهاية للدالة y عند نقطة معينة x=c فأنه يقال أن الدالة y=f(x) ليس لها تفاضل عند النقطة x=c . وأحيانا يسمى تفاضل الدالة y $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ بالمشتقة الاولى First derivative للدالة y بالنسبة للمتغير x .

ومن هذا التعريف لتفاضل الدالة f(x) عند النقطه x=c يتضح أنه ميل المماس لمنحنى الدالة f(x) عند النقطة c .

---

* أ.د. عبد الله الهلباوى (١٩٨٧): " الرياضة البحته للتجاريين " – مكتبة عين شمس – القاهرة .

ومن تعريف المشتقه الاولى للدالة f(x) فى (7.24) فهى تمثل معدل التغير اللحظى (أو الفورى)** Instantaneous rate of change للدالة f(x) بالنسبه لتغير المتغير المستقل x .

والمقصود بالتغير اللحظى هو التغير فى الدالة f(x) الناتج عن التغير الطفيف فى المتغير المستقل x .

ويطلق على المشتقه الاولى للدالة بمعدل التغير اللحظى للتمييز بينها وبين متوسط معدل التغير R فقط .

وسوف يتضح من الامثلة التطبيقية التايه الفرق بين متوسط معدل التغير ومعدل التغير اللحظى (المشتقه الاولى).

مثال (٧-٨)
أوجد تفاضل الدالة y حيث

$$y = x^2 + 10x + 5$$

بالنسبة للمتغير x عند النقطة x=1.

الحل
ولحساب التفاضل عند نقطة ما c ، بأستخدام النهايات يسمى بأسلوب النهايات Limit approach حيث تتبع الخطوات التالية :

١- نحسب قيمة الدالة y=f(x) عند النقطة $(x + \Delta x)$
٢- نوجد Δy.
٣- نوجد معدل التغير R .
٤- نوجد نهاية معدل التغير R عندما Δx تقترب من الصفر .
٥- نحسب قيمة $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ بالتعويض بـ x=c على النحو التالى :

** Budnick, F.S. (1986): "Applied Mathematics for Economics, and the Social Sciences" McGraw-Hill Book Co-Singapore, London.

1. $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+10(x+\Delta x)+5$
$=(x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2)+10x+10\Delta x+5$
$=x^2+10x+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+10(\Delta x)+5$
$\rightarrow$

2. $\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)$
$=x2+10x+2x(\Delta x)+10(\Delta x)+(\Delta x)2+5-x2-10x-5$
$=2x(\Delta x)+10(\Delta x)+(\Delta x)^2$

3. $$R = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x(\Delta x)+10(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$= 2x+10+(\Delta x)$
$\rightarrow$

4. $$\lim_{\Delta x \to 0} R = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+10$$

بما أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} R \qquad (7.27)$$
$=2x+10$

وبالتالى قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$ يمكن حسابها بالتعويض فى (7.27) بـ $x=1$ على النحو التالى :

$$\frac{dy}{dx} = 2x+10$$
$=2(1)+10= 2+10=12$

وعادة يرمز لتفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x عند نقطة معينة x=c على النحو التالى :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} \qquad (7.28)$$

مثال (٧-٨)
أوجد تفاضل الدالة y عند النقطة x=5 حيث

$$y = f(x) = 4x^2-5x+7$$

الحل

1) $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+7$

2) $\Delta y = f(x+\Delta x) = f(x)$
$=4(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+7$
$=8x(\Delta x)-5(\Delta x)+4(\Delta x)^2$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8x(\Delta x)-5(\Delta x)+4(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$= 9x-5+4(\Delta x)$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x-5+4(\Delta x))$
$=8x-5$

$\rightarrow$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
$=8x-5$

$\rightarrow$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = 8(5) - 5 = 40 - 5 = 35 \qquad (7.29)$$

ملحوظة

مما سبق يتضح أن الشرط الضرورى لوجود تفاضل للدالة f(x) عند نقطة معينة x=c أن تكون الدالة f(x) دالة متصلة عند النقطة x=c.ولكن ليس بالضرورة أن يكون لكل دالة متصلة f(x) عند نقطة c تفاضل عند هذه النقطة . فقد تكون الدالة f(x) دالة متصلة عند النقطة x=c ولكن ليس لها تفاضل عند هذه النقطة .

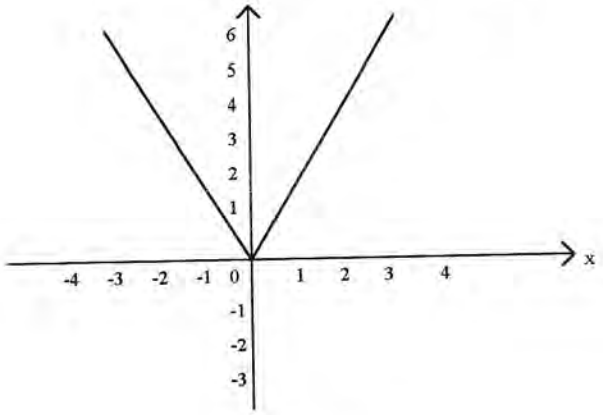
وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال (٧-٩)

اذا كانت الدالة

$$y=f(x)=|3x|$$

كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٧-٤)

أولا: من الرسم يتضح أن الدالة متصلة عند النقطة x=0 حيث أن :

$$y = f(x) = \begin{cases} -3x & x < 0 \\ +3x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

كذلك يمكن اثبات أن الدالة متصلة عند النقطة x=0 على النحو التالى :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad (7.30)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad (7.31)$$

وبما أن :

$$f(x=0) = |3(0)| = |0| = 0 \qquad (7.32)$$

من (7.32)-(7.30) نجد أن الدالة $f(x)=|3x|$ دالة متصلة عند النقطة x=0.

ثانيا: وسوف نوضح أن الدالة $f(x)=|3x|$ ليس لها تفاضل عند النقطة x=0 على النحو التالى :

بما أن

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|3(x+\Delta x)| - 3x|}{\Delta x}$$
$$= \frac{|3\Delta x|}{\Delta x}$$
$$= 3 \qquad (7.33)$$

وبما أن

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|3(x+\Delta x)|3x|}{\Delta x}$$

$$=\frac{|3\Delta x|}{\Delta x}=-3 \qquad (7.34)$$

من (7.34)-(7.33) يتضح أن النهايـة اليمنـى واليسرى للدالـة $f(x)=|3x|$ عنـد $x=0$ غير متساويتين وبالتالى فأن نهاية الدالة $|3x|$ عند $x=0$ تكون غير موجودة ، أى أن

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|3x|$$

غير موجودة .

ومن ذلك يتضح أن الدالة قد تكون متصلة عند نقطة ولكن ليس لهـا نهايـة عنـد هـذه النقطة وبالتالى سوف لايوجد لها تفاضل عند هذه النقطة .

المرونه **Elasticity**

ومن أهم التطبيقات الاقتصادية للمشتقه الاولى المرونه Elasticity كما سوف يتضح فيما يلى .

فـاذا فرضنـا أن y دالـة فـى المتغير المســتقل x أى أن $y=f(x)$ ، وأن $E(x)$ تمثـل مرونه الدالة y بالنسبه للمتغير x فأن المرونه تعرف على النحو التالى :

$$E(x)=\lim_{\Delta x}\frac{\text{التغير النسبة فى الدالة } y}{\text{التغير النسبى فى } x} \qquad (7.35)$$

أو بعبارة أخرى فأن مرونه الدالة y هى نهايه النسبه بين التغير النسبى فى الدالـة y (المتغير التابع) الى التغير النسـبى فـى المتغـير x (المتغـير المسـتقل) عندمـا يـؤول التغير النسبى فى المتغير المستقل x الى الصفر (أى عندما $\Delta x\to 0$) وبالتالى فأن:

$$E(x)=\lim_{\Delta x}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\left(\lim_{\Delta x}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)*\frac{x}{y}$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right) * \left(\frac{x}{y}\right) \qquad (7.36)$$

مثال (٧-٩)

فى أحدى الشركات قام قسم التسويق بعمل دراسة عن الطلب على منتجات الشركة (y) كدالة فى سعر بيع الوحدة الواحدة (x) بالجنيه فوجد أن :

$$y = 6000 - 20x^2$$

والمطلوب

١- أوجد الكمية المطلوبه عندما يكون سعر بيع الوحدة 5 جنيهات .
٢- أوجد مرونه الطلب بالنسبه للسعر (x) .
٣- أحسب قيمة مرونه الطلب عندما يكون السعر $x=8$ ، $x=16$ ثم عقب على النتائج .

الحل

١- عندما يكون السعر $x=5$ فأن الكميه المطلوبه

$y = 6000-20(5)^2=6000-500=5500$ وحدة

٢- مرونه الطلب $E(x)$ حيث

$$E(x) = \left(\frac{dy}{dx}\right) * \left(\frac{x}{y}\right) = (-40x)\left(\frac{x}{6000-20x^2}\right)$$

$$= \frac{-40x^2}{6000-20x^2} = \frac{-2x^2}{300-x^2}$$

٣- عندما $x=8$ فأن

$$E(8) = \frac{-2(8)^2}{300-(8)^2} = \frac{-128}{300-64} = \frac{-128}{236} = -0.54$$

وهذا يعنى أنه عندما يساوى سعر الوحدة 8 جنيهات فأن الزيادة النسبية الصغيرة فى السعر سوف تؤدى الى نقص نسبى فى كميه الطلب بمقدار 0.54 مرة من نسبة التغير فى السعر . فمثلا اذا حدث تغير نسبى فى السعر يساوى (10%) فأن هذا التغير النسبى سوف يؤدى الى نقص نسبى فى الكميه المطلوبه مساوى 5.4% من الكمية المطلوبة عندما يساوى السعر 8 حيث :

$$(10\%) \times (0.54) = 5.4\% \qquad (7.37)$$

أو بعبارة أخرى اذا كان سعر الوحدة 8 جنيهات وزاد (أو نقص) السعر بنسبة 10% أى زاد (أو نقص) السعر بمقدار 0.80 جنية حيث :

$$8 \times \frac{10}{100} = 0.80$$

فأن هذه الزيادة (أو النقص) فى السعر سوف تؤدى الى نقص (أو زيادة) الكمية المطلوبة بنسبة 5.4% من الكمية عند x=8 أى بمقدار يساوى 255 وحدة حيث :

$$y(x=8)\left(\frac{5.4}{100}\right) - (6000-1280)\left(\frac{5.4}{100}\right) \approx 255 \text{ وحدة}$$

وبصفة عامة فأن :

التغير النسبى فى الكمية المطلوبة = المرونه × التغير النسبى فى السعر
(7.38)

وبالمثل عندما x=16 فأن :

$$E(16) = \frac{-2(16)^2}{300-(16)^2} = \frac{-512}{44} = -11.64$$

وبالتالى فعندما يكون سعر الوحدة يساوى 16 جنيه فأن نسبه التغير فى الكميه المطلوبة سوف ينقص بمقدار 11.64 مرة من نسبة التغير فى سعر الوحدة .

ملحوظة

١- تكون الدالة y مرنه اذا كان

$$|E(x)| > 1 \qquad (7.39)$$

٢- وتكون الدالة y غير مرنه اذا كان

$$|E(x)| < 1$$

ففى المثال السابق نجد أنه عندما يكون سعر الوحدة $x=8$ فأن $|E(x)|=0.54$ أى أن الطلب غير مرن Inelastic ، أما عندما $x=16$ فنجد أن $|E(x)|=11.64$ أى أن الطلب مرن Elastic .

(٧-٤) قواعد التفاضل Rules of Differentiation

كما ذكرنا فى الفصل السابق أن عملية ايجاد المشتقة للدالة تسمى بالتفاضل. وتوجد مجموع من القواعد لحساب التفاضل بالنسبة لمعظم الدوال الرياضية شائعة الاستعمال والممكن تفاضلها Differentiable (أى الدوال التى يوجد Exist لها تفاضل).

وسوف نكتفى فى هذا الفصل بتقديم هذه القواعد وكيفية استخدامها دون أثباتها .

قاعدة (١)

اذا كانت الدالة f(x) دالة فى المتغير x بحيث

$$f(x) = c \qquad (7.35)$$

c مقدار ثابت فأن :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad (7.36)$$

الاثبات

$$f(x) = c \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x) = c \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0 \rightarrow$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (0) = 0$$

مثال (٧-١٠)

اذا كان الدالة y بحيث :

$$y = 100$$

أوجد تفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x .

$$\frac{dy}{dx}=0$$

قاعدة (٢)

اذا كانت الدالة f(x) دالة فى المتغير x بحيث

$$f(x)=x^n \tag{7.37}$$

n عدد حقيقى فأن :

$$\frac{df(x)}{dx}=n(x)^{n-1} \tag{7.38}$$

الاثبات

بما أن

$$f(x)=x^n \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$$

وباستخدام نظرية ذات الحدين (أنظر ملحق "٢") نجد أن :

$$(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}(\Delta x)+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\left[x^n+nx^{n-1}(\Delta x)+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n\right]-x^n$$
$$=nx^{n-1}(\Delta x)+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n$$
$$\rightarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)+\ldots+(\Delta x)^{n-1}$$
$$\rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right]$$
$$= nx^{n-1}$$
$$\rightarrow$$
$$f'(x)=nx^{n-1}$$

مثال (٧-١١)

أوجد المشتقة الاولى للدالة y حيث :

$$y=x^5$$

بتطبيق القاعدة (٢) نجد أن

$$y`=\frac{dy}{dx}=5x^4$$

مثال (٧-١٢)

أوجد المشتقة الاولى للدالة

$$f(x)=x$$

بتطبيق قاعدة (٢) نجد أن :

$$f'(x)=1x^{1-1}=1x^0=1(1)=1$$

مثال (٧-١٣)

أوجد تفاضل الدالة

$$f(x)=\sqrt[3]{x5}$$

الحل

بما أن

$$f(x)=\sqrt[3]{x5}=x^{\frac{5}{3}}$$

وبالتالى فأن

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$$

$$=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

قاعدة (٣)

اذا كان c مقدار ثابت بحيث

$$f(x) = cg(x) \tag{7.39}$$

الاثبات

بما أن

$$f(x)=cg(x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)= cg(x+\Delta x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)-f(x) = cg(x+\Delta x)-cg(x) = c[g(x+\Delta x)-g(x)]$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\left\{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}\rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x}\left\{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=c\frac{dg(x)}{dx}$$

$$'f(x)-cg'(x)$$

مثال (٧-١٤)

أوجد تفاضل الدالة التالية :

$$f(x) = 15x^4$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 15\frac{dx^4}{dx}$$
$$= 15\,(4x^3)$$
$$= 60x^3$$

قاعدة (٤)

اذا كانت الدالة f(x) بحيث :

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \qquad (7.41)$$

حيث كل من $f_1(x), f_2(x)$ دالتين فى المتغير x فأن :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} \pm \frac{df_2(x)}{dx} \qquad (7.42)$$

أو

$$'f(x) = 'f_1(x) \pm 'f_2(x) \qquad (7.43)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة فى حالة اذا كان

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) + f_3(x) \pm \ldots \pm f_n(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \pm f_i(x) \qquad (7.44)$$

فأن

$$'f(x) = 'f_1(x) \pm 'f_2(x) + 'f_3(x) \pm \ldots \pm 'f_n(x) \qquad (7.45)$$

الاثبات

بما أن

$$f(x) = g_1(x) \pm f_2(x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x) = f_1(x+\Delta x) \pm f_2(x+\Delta x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = [f_1(x+\Delta x) - f_1(x)] \pm [f_2(x+\Delta x) - f_2(x)] \rightarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right]\pm\left[\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right]\pm\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\left[\frac{df_1(x)}{dx}\right]\pm\left[\frac{df_2(x)}{dx}\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن أثبات الحالة العامة ، اذا كان :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

فأن

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\pm\frac{df_i}{dx}$$

مثال (٧-١٥)

أوجد تفاضل الدالة f(x) حيث

$$f(x)=2x^2+5x$$

وفى هذه الحالة نجد أن

$$f_1(x)=2x^2\rightarrow {}'f_1(x)=4x$$
$$f_2(x)=5x\rightarrow {}'f_2(x)=5$$

وبما أن

$$'f(x)={}'f_1(x)+{}'f_2(x)\rightarrow$$
$$'f(x)=4x+5$$

قاعدة (٥)

اذا فرضنا أن

$$f(x) = f_1(x).f_2(x) \tag{7.47}$$

فأن

$$\frac{df(x)}{dx} = f_2(x)\frac{df_1(x)}{dx} + f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx} \tag{7.48}$$

أو

$$'f(x) = f_2(x)'f_1(x) + f_1(x)'f_2(x) \tag{7.49}$$

الاثبات

$$f(x)=f_1(x)f_2(x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)=f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x) \rightarrow$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)$$

وبأضافة وطرح الكمية $f_1(x'+\Delta x)f_2(x)$ من الطرف الايمن نجد أن :

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)-f_1(x+\Delta x)f_1(x)=f_1(x+\Delta x)f_2(x)$$
$$=[f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x+\Delta x)f_2(x)]+[f_1(x+\Delta x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)]$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f_1(x+\Delta x)\left[\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right] + f_2(x)\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f_1(x+\Delta x)\left[\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right]$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0} f_2(x)\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=f_1(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right]+f_2(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx}=f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}+f_2(x)\frac{df_1(x)}{dx}$$

أو

$$'f(x)=f_1(x)'f_2(x)+f_2(x)'f_1(x)$$

مثال (٧-١٦)

اذا كانت الدالة $f(x)$ بحيث

$$f(x)=(x^2+3)(x^5-x^3)$$

أوجد تفاضل الدالة $f(x)$.

الحل

بما أن

$$f(x)=(x^2+3)(x^5-x^3)$$

نفرض أن

$$f_1(x)=(x^2+3)\to 'f_1(x)=2x$$

$$f_2(x)=(x^5-x^3)\to 'f_2(x)=5x^4-3x^2=x^2(5x^2-3)$$

وبما أن

$$\begin{aligned}'f(x)&='f_1(x)f_2(x)+'f_2(x)f_1(x)\\&=(2x)(x^5-x^3)+x^2(5x^2-3)(x^2+3)\\&=(2x(x^5-x^3)+x^2(5x^2-3)(x^2+3)\\&=2x^6-2x^4+5x^6-3x^4+15x^4-9x^2\\&=7x^6+10x^4-9x^2\\&=x^2(7x^4+10x^2-9)\end{aligned}$$

قاعدة (٦)

اذا كانت الدالة f(x) بحيث :

$$f(x)=f_1(x)/f_2(x) \qquad (7.50)$$

بحيث $f_2(x) \neq 0$ فأن :

$$`f(x) = \frac{f_2(x)`f_1(x) - f_1(x)`f_2(x)}{[f_2(x)]^2}$$

الاثبات

بما أن

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow$$

$$f(x+\Delta x) = \frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} \rightarrow$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$= \frac{f_2(x)f_1(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x+\Delta x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{f_2(x)f_1(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x+\Delta x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)} + \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)f_2(x)} - \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)f_2(x)}$$

$$= \frac{f_2(x)f_1(x+\Delta x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)f_2(x+\Delta x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)} + \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{f_2(x)[f_1(x+\Delta x) - f_1(x)] - f_1(x)[f_2(x+\Delta x) - f_2(x)]}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f_2(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}\right] - f_1(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}\right]}{f_2(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_2(x+\Delta x)}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f_2(x)\dfrac{df_1(x)}{dx} - f_1(x)\dfrac{df_2(x)}{dx}}{[f_2(x)]^2}$$

مثال (٧-١٧)
أوجد تفاضل الدالة

$$f(x) = \frac{(2x-5)}{15x^2}$$

بما أن

$$f_1(x) = (2x-5) \to {}'f_1(x) = 2$$
$$f_2(x) = 15x^2 \to {}'f_2(x) = 30x$$

حيث $f_2(x) \neq 0$ تجمع قيم x الحقيقية .
وبما أن :

$${}'f(x) = \frac{f_2(x)'f_1(x) - f_1(x)'f_2(x)}{(f_2(x))^2}$$

$${}'f(x) = \frac{(15x^2)(2) - (2x-5)(30x)}{(15x^2)^2}$$

$$= \frac{30x^2 - 60x^2 + 150x}{225x^4}$$
$$= \frac{30x^2 + 150x}{225x^4}$$
$$= \frac{15x(10 - 2x)}{225x^4}$$
$$= \frac{10 - 2x}{15x^3}$$

قاعدة (٧)

اذا كانت الدالة $f(x)$ بحيث

$$f(x) = (h(x))^n \tag{7.51}$$

حيث أن $h(x)$ دالة قابله للتفاضل فأن :

$$\frac{df(x)}{dx} = n(h(x))^{n-1}\ \frac{dh(x)}{dx} \tag{7.52}$$

أو

$$'f(x)=n(h(x))^{n-1}\ 'h(x) \tag{7.53}$$

مثال (٧-١٨)

أوجد تفاضل الدالة التالية

$$f(x)=(5x^3-12x^2+10)^7$$

الحل

فى هذه الحالة نجد أن $n=7$.

$$h(x)=5x^3-12x^2+10$$
$$'h(x)=15x^2-24x$$

وبما أن

$$'f(x)=n(h(x))^{n-1}\ 'h(x)$$

$'f(x)=7(5x^3-12x+10)^{7-1}(15x^2-24x)$
$=7(15x^2-24x)(5x^3-12x+10)^6$

مثال (٧-١٩)
أوجد المشتقه الاولى للدالة

$$f(x)=(2x+5)/\sqrt[3]{x^4+2x^3}$$

نفرض أن

$$f_1(x)=2x+5 \rightarrow 'f_1(x)=2$$

$$f_2(x)=\sqrt[3]{x^4+2x^3}$$

$$=(x^4+2x^3)^{\frac{1}{3}} \rightarrow 'f_2(x)=\frac{1}{3}(x^4+2x^3)^{\frac{-2}{3}}$$

وبما أن

$$'f(x)=\frac{f_2(x)`f_1(x)-f_1(x)`f_2(x)}{(f_2(x))^2}$$

$$'f(x)=\frac{\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3)}\right)(2)-(2x+5)\frac{1}{3}(x^4+2x^3)^{\frac{-2}{3}}}{\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3)}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3}\right)-\frac{1}{3}(2x+5)\left(x^4+2x^3\right)^{\frac{-2}{3}}}{\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3)}\right)^2}$$

$$=\frac{6\sqrt[3]{x^4+2x^3}-(2x+5)\sqrt[3]{(x^4+2x^3)^{-2}}}{3\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3}\right)^2}$$

$$=\frac{6\left(x^4+2x^3\right)^{\frac{1}{3}}-(2x+5)\left(x^4+2x^3\right)^{\frac{-2}{3}}}{3\left(x^4+2x^3\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=2\left(x^4+2x^3\right)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(2x+5)\left(x^4+2x^3\right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$=\left(x^4+2x^3\right)^{\frac{-1}{3}}\left[2-\frac{1}{3}(2x+5)(x^4+2x^3)^{-1}\right]$$

قاعدة (٨)

اذا كانت الدالة y بحيث :

$$y=f(u)$$

حيث :

$$u=g(x)$$

فأن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \quad (7.54)$$

مثال (٧-٢٠)

اذا كانت الدالة y بحيث :

$y(f(u)=2u^2-4$

حيث :

$u = g(x) = 3x+1$

بما أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

حيث

$$\frac{dy}{du} = 4u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 3$$

وبالتالى فأن :

$$\frac{dy}{du} = 4u(3)$$
$$= 12u = 12(3x+1$$
$$= 36x+1$$

قاعدة (٩)

اذا كانت الدالة f(x) دالة فى المتغير x بحيث

$$f(x) = e^{h(x)}$$

حيث h(x) دالة فى المتغير x فأن

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{h(x)}\left[\frac{dh(x)}{dx}\right]$$
$$= e^{h(x)}\,{}'h(x) \qquad (7.55)$$

مثال (٧-٢١)

أوجد المشتقة الاولى للدالة

$$f(x) = e^{3x^2+2x} \rightarrow$$

فأن

$h(x)=3x^2+2x$

$\rightarrow$

$h(x)=6x+2$

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{3x^2+2x}(6x+2)$$
$$= (6x+2(e^{3x^2+2x}$$

قاعدة (١٠)
اذا كانت الدالة f(x) دالة فى المتغير x بحيث

$$f(x) = \ln(h(x))\,*$$

حيث h(x) دالة فى المتغير x فأن

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}\left[\frac{dh(x)}{dx}\right] \qquad (7.56)$$

مثال (٧-٢٢)
أوجد المشتقه الاولى للدالة

$y = \ln\,(10x^2\text{-}2x+1)$

عندما x=1

الحل
بما أن

$y = \ln(10x^2\text{-}2x+1) \rightarrow$

وبالتالى فأن

$h(x) = 10x^2\text{-}2x+1$

$'h(x) = 20x\text{-}2 \rightarrow$

* $\log_e(z) = \ln(z)$ حيث $\ln e=1, \ln 1=0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(10x^2-2x+1)}(20x-2)$$
$$=\frac{20x-2}{10x^2-2x+1}$$

وعندما x=1 فأن

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{20(1)-2}{10(1)^2-2(1)+1}=\frac{20-2}{10-2+1}$$

$$=\frac{18}{9}=+2$$

(٧-٥) المشتقات من الرتب العليا Higher Order Derivatives

فى الفصول السابقه تناولنا عملية التفاضل للدالة $f(x)$ بالنسبه للمتغير x وأهم القواعد المستخدمة . وعادة نرمز لتفاضل الدالة $f(x)$ بالرمز $\frac{df(x)}{dx}$ أو $f'(x)$ وقد يسمى هذا التفاضل بالمشتقة من الرتبة الاولى للدالة $f(x)$ (أى تفاضل الدالة $f(x)$ أول مرة). وقد يكون التفاضل $f'(x)$ دالة أيضا فى المتغير x ، وبالتالى يمكن تفاضل الدالة $f'(x)$ بالنسبه للمتغير x ونرمز لهذا التفاضل بالرمز $f^{(2)}(x)$ أو $f''(x)$ أو $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ويسمى هذا التفاضل بالمشتقه من الرتبه الثانية للدالة $f(x)$ (أى تفاضل الدالة $f(x)$ مرتين على التوالى بالنسبة للمتغير x) .

وبصفة عامة فأن المشتقة من الرتبه n للدالة $f(x)$ هى تفاضل الدالة $f(x)$ عدد n من المرات المتتاليه بالنسبة للمتغير x وعادة يرمز لهذه المشتقه بالرمز $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ أو $f^{(n)}(x)$.

أو بعبارة أخرى

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)] \quad , \quad n=2,3,... \tag{7.57}$$

مثال (٧-٢٣)

أوجد المشتقات من الرتبه 3 للدوال التالية :

1) $f(x) = 5x+3$
2) $f(x) = 9x^2-2x+10$
3) $f(x) = 4x^3+2x^2-3x+2$
4) $f(x) = x^4-10x^3+8x$

الحل

$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
1) $f(x) = 5x+3$	5	0	0
2) $f(x)=9x^2-2x+10$	$9x-2$	9	0
3) $f(x)=4x^3+2x^2-3x+2$	$12x^2+4x-3$	$24x+4$	24
4) $f(x)=x^4-10x^3+8x$	$4x^3-30x^2+8$	$12x^2-60x$	$24x-60$

ومن المثال يتضح أنه اذا كانت الدالة من الدرجة الاولى كانت المشتقة الاولى لها مقدار ثابت والمشتقات من الترتيب الثانى ، الثالث ، ... تساوى صفر .

كذلك اذا كانت الدالة من الدرجة الثانيه كانت المشتقة من الترتيب الاول لها دالة من الدرجة الاولى والمشتقة من الترتيب الثانى مقدار ثابت والمشتقات من الترتيب الثالث ، الرابع ، .. تساوى صفر وبالمثل بالنسبه للدوال من الدرجات الثالثه ، الرابعه ، ... وبصفة عامة فأن :

$$\text{رتبة المشتقة – درجة الدالة = درجة المشتقة} \qquad (7.58)$$

ملحوظة

اذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n فأن المشتقة من الرتبه الاولى هو دالة كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ كذلك المشتقه من الرتبه الثانيه هو كثيرة حدود من الدرجة $(n-2)$، ... والمشتقة من الرتبه n تساوى مقدار ثابت ، والمشتقه من الرتبه $n, n+1, n+2$ ، .. تساوى صفر . وبالتالى أعلى رتبه لمشتقات الدالة $f(x)$ هى الرتبه n (درجة الدالة) .

مثال (٧-٢٤)

أوجد أعلى رتبه لمشتقات الدوال التالية :

1- $f(x) = 520$

2- $f(x)=5x^5-3x^4-20x^2$

3. $f(x)=(x-5)^3$

4- $f(x)=(2x+1)(3x+4)$

الحل

1) $f(x)= 520 \to 'f(x) = 0$

أعلى رتبه هى الرتبه الصغرية

2) $f(x)=5x^5-3x^4-20x^2 \to$

$f^{(1)}(x) = 25x^4-12x^3-40x$

$f^{(2)}(x) = 100x^3-36x^2-40$

$f^{(3)}(x) = 300x^2-72x$

$f^{(4)}(x) = 600x-72$

$f^{(5)}(x) = 600$

$f^{(6)}(x) = 0$

وبالتالى أعلى رتبه لمشتقات الدالة f(x) هى الرتبه الخامسة .

3) $f^{(1)}(x)=(x-5)^3=x^3-15x^2+75x-125 \to$

$f^{(2)}(x)=3x^2-30x+75$

$f^{(3)}(x)=6x-30$

$f^{(4)}(x) = 6$

$f^{(5)}(x) = 0$

وبالتالى أعلى رتبه لمشتقات الدالة f(x) هى الرتبه الثالثة .

4) $f(x)=(2x+1)(3x+4)=6x^2+11x+4$

$\to$

$f^{(1)}(x)=12x+11$

$f^{(2)}(x)=12$

$f^{(3)}(x)=0$

وبالتالى أعلى رتبه لمشتقات الدالة f(x) هى الرتبه الثانية .

(٧-٦) المشتقات الجزئية **Partial Derivatives**

فى الباب الثانى تناولنا الدوال متعددة المتغيرات فاذا كانت الدالة y دالة فى n من المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، فأننا نرمز لذلك بالرمز

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \tag{7.59}$$

وهذا يعنى أن لكل متجه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ توجد قيمة واحدة للمتغير التابع y .

والمشتقه الجزئية للدالة y ، هى تفاضل الدالة y بالنسبه لاحد المتغيرات مع اعتبار باقى المتغيرات كثوابت . ويمكن ايجاد المشتقات الجزئية من رتب عليا وتسمى بالمشتقات الجزئيه الاولى ، الثانيه ، الثالثه ، ...

وفى هذا الفصل سوف نتناول المشتقات الجزئيه الاولى (من الرتبه الاولى) والثانيه (من الرتبه الثانيه) على النحو التالى .

أولا: المشتقات الجزئيه الاولى **First order partial derivatives**

اذا كانت

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, n_n)$$

فأن المشتقه الجزئيه الاولى للدالة y بالنسبه للمتغير x_j هى عبارة عن تفاضل الدالة y بالنسبه للمتغير x_j مع اعتبار باقى المتغيرات كثوابت ويرمز لهذه المشتقه بالرمز $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ (وتقرأ : المشتقه الجزئيه الاولى للدالة y بالنسبه للمتغير x_j) ، أو بعبارة أخرى :

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{dy}{dx_j} \quad , \; j=1,2,\ldots,n \tag{7.58}$$

وبالتالى فأن المشتقه الجزئيـه الاولـى للدالـة y بالنسـبه للمتغير x_j مـع أعتبـار بـاقى المتغير الاخرى كثوابت ، هى معدل تغير الدالة y بالنسبة للمتغير x_j .

مثال (٧-٢٥)
أوجد المشتقات الجزئيه الاولى للدوال التالية :

1) $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 10$

2) $f(x_1,x_2,x_3) = 8x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 5x_1x_3^2 + 5x_2^2x_1 - 10x_3^4$

الحل
بما أن

1) $y = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 10 \rightarrow$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 \qquad (7.60)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 + 8x_2 \qquad (7.61)$$

بما أن

2) $y = 8x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 5x_1x_3^2 + 5x_1x_2^2 - 10x_3^4$
$\rightarrow$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 32x_1^3 + 6x_1x_2x_3 - 5x_3^2 + 5x_2^2 \qquad (7.62)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_1^2x_3 + 10x_1x_2 \qquad (7.63)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 3x_1^2x_2 - 10x_1x_3 - 40x_3^3 \qquad (7.64)$$

ثانيا: المشتقات الجزئية الثانيه Second Order Partial Derivatives

ومن المثال السابق يتضح أن المشتقات الجزئيـةالاولى $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ حيث $j=1,2,..,n$ عـادة تكون أيضا دوال فى المتغيرات $x_1,x_2,...,n_n$ وبمفاضله الدوال $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ جزئيـا بالنسـبه للمتغير x_j ، حيث $j=1,2,..,n$ مـع أعتبـار بـاقى المتغيرات كثوابـت نحصـل علـى المشتقات الجزئية الثانيه للدالة y بالنسبة للمتغير x_j ويرمـز للمشـتقه الثانيـة بـالرمز $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$ ، بعبارة أخرى

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) \qquad j=1,2,...,n \qquad (7.65)$$

كذلك نجد أن المشتقه الجزئية الثانيه للدالة y بالنسبه للمتغيران x_k, x_j حيث $j \neq k$ هى عبارة عن التفاضل الجزئى للدالة $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ بالنسبه للمتغير x_k ويرمـز لهـا بـالرمز $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k}$ أو بعبارة أخرى .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) \qquad (7.66)$$

كذلـك نجـد أن المشـتقه الجزئيـه الثانيـه للدالـة y للمتغيران x_j, x_k هـى عبـارة عـن التفاضل الجزئـى للدالـة $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ بالنسـبه للمتغير x_j ويرمـز لهـا بـالرمز $\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_j}$ أو بعبارة أخرى

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) \qquad (7.67)$$

ومما هو جدير بالاشارة أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_j} \qquad (7.68)$$

أى أن الترتيب فى أجراء عمليات التفاضل الجزئية بالنسبه للمتغيرات x_j ,x_k غير مؤثرة . وعادة اذا كانت y دالة فى متغيران $x_1,\ x_2$ فأن المشتقات الجزئية الثانيه يمكن ترتيبها فى مصفوفه متماثله من الترتيب 2x2 (أنظر الفصل "٤- ") على النحو:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{2x2} \qquad (7.69)$$

وفى حالة اذا كانت y دالة فى ثلاثه متغيرات x_1,x_2,x_3 فأن المشتقات الجزئية الثانيه للدالة y يمكن ترتيبها فى مصفوفه متماثله من الترتيب 3x3 على النحو :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad (7.70)$$

وفى الحالة العامة اذا كانت y دالة $x_1,x_2,...,x_n$ أى فى عـدد n مـن المتغيرات فـأن المشتقات الجزئية الثانيه للدالة y يمكن ترتيبها فى مصفوفة متماثلة من الترتيب nxn على النحو :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{nxn} \qquad (7.71)$$

وسوف يتضح ذلك من الامثله التالية .

مثال (٧-٢٦)

فـى المثـال السـابق أوجـد المشـتقات الجزئيـة الثانيـه للـدوال $f(x_1,x_2)$, $f(x_1,x_2,x_3)$ عندما $x_1=0, x_2=1, x_3=3$.

الحل

بما أن

$$1) \quad y(f(x_1,x_{2\_} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 10$$

من (7.61) ,(7.60) نجد أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 8 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 2$$

ويتضح أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 2$$

وبالتالى فأن

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

بما أن

2) $y = f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^4 + 3x_1^2 x_2 x_3 - 5x_1 x_3^2 + 5x_2^2 x_1 - 10x_3^4$

من (7.64)-(7.62) نجد أن :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 96x_1^2 + 6x_2 x_3 \qquad (7.72)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 10x_1 \qquad (7.73)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = -1 - x_1 - 120x_3^2 \qquad (7.74)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 6x_1x_3 + 10x_2 \qquad (7.75)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 6x_1x_3 + 10x_2 \qquad (7.76)$$

من (7.76) ,(7.72) يتضح أن :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} 6x_1x_3 + 10x_2$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_1} 6x_1x_2 - 10x_3 \qquad (7.77)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} 3x_1^2 \qquad (7.78)$$

وبالتالى فأن :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (96x_1^2+6x_2x_3) & (6x_1x_3+10x_2) & (6x_1x_2-10x_3) \\ (6x_1x_3+10x_2) & (10x_1) & (3x_1^2 \\ (6x_1x_2-10x_3) & (3x_1^2) & (-10x_1-120x_3^2) \end{bmatrix}$$

وعندما $x_3=2$, $x_2=1$, $x_1=0$ فأن مصفوفة المشتقات الجزئية الثانيه H للدالة y هى

$$H=\begin{bmatrix} 12 & 10 & -20 \\ 10 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & -480 \end{bmatrix}$$

مثال (٧-٢٧)
أوجد مصفوفة المشتقات الجزئية الثانيه للدالة.

$$f(x,y)=xe^x+xe^y+y$$

عندما $x=2,\ y=1$

الحل
المشتقات الجزئية الاولى

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\left[xe^x+e^x(1)\right]+e^y$$
$$=e^x(x+1)+e^y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^y+1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\left[e^x(1)+(x+1)(e^x)\right]$$
$$=e^x(1+x+1)=(2+x)\,e^x$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^y \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = e^y$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+x)e^x & e^y \\ e^y & e^y \end{bmatrix}$$

عندما $x=2, y=1$ فأن

$$H = \begin{bmatrix} (2+x)e^x & e^y \\ e^y & e^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^2 & e \\ e & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.56 & 2.718 \\ 2.718 & 2.718 \end{bmatrix}$$

مثال (٧-٢٨)

أوجد المشتقات الجزئية الاولى والثانيه للدالة

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$$

ثم أوجد مصفوفه المشتقات الجزئية الثانية عندما $x=1, y=1.5, z=0.5$

الحل

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}(2x)$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \qquad (7.79)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \tag{7.80}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \tag{7.81}$$

ويلاحظ من المشتقات الجزئية الاولى (7.81)-(7.79) أنها تمثل دوال كل منها فى صورة خارج قسمه دالتين وبالتالى بتطبيق القاعدة (٦) للتفاضل نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \tag{7.82}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \tag{7.83}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=\frac{2x^2+2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y}=\frac{-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y}=\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{-2y(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

وعند النقطه x=1, y=1.5, z=0.5
فأن

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{-2(1)^2+2(1.5)^2+2(0.5)^2}{\left((1)^2+(1.5)^2+(0.5)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2+4.5+0.5}{(1+2.25+0.25)^2} = \frac{3}{(3.5)^2} = 0.25$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = \frac{2(1)^2-2(1.5)^2+2(0.5)^2}{\left((1)^2+(1.5)^2+(0.5)^2\right)^2}$$

$$= \frac{2-4.5+0.5}{(1+2.25+0.25)^2}$$

$$= \frac{-2}{(3.5)^2} = -0.16 \qquad (7.85)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = \frac{2(1)^2+2(1.5)^2-2(0.5)^2}{\left((1)^2+(1.5)^2+(0.5)^2\right)^2}$$

$$= \frac{2+4.5-0.5}{(1+2.25+0.25)^2} = \frac{6}{(3.5)^2} = 0.49 \qquad (7.86)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{-2(1.5)}{\left((1)^2 + (1.5)^2 + (0.5)^2\right)^2} = \frac{-3}{(3.5)^2} = -0.25 \qquad (7.87)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{-2(0.5)}{\left((1)^2 + (1.5)^2 + (0.5)^2\right)^2} = \frac{-1}{(3.5)^2} = -0.08 \qquad (7.88)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{-4(1.5)(0.5)}{\left((1)^2 + (1.5)^2 + (0.5)^2\right)^2} = \frac{-3}{(3.5)^2} = -0.25 \qquad (7.89)$$

وبالتالى فأن مصفوفه المشتقات الجزئية الثانيه عند النقطة $x=1, y=1.5, z=0.5$ هى

$$H = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.08 \\ 0.25 & -0.16 & -0.25 \\ -.08 & -0.25 & 0.49 \end{bmatrix}$$

المرونة الجزئية **Partial Elasticity**

فى الفصل (٧-٤) تم تعريف المرونـه بالنسبه للدوال فى متغير واحد فاذا كانت الدالة y دالة فى n من المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أى :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

فأن مرونه الدالة y بالنسبة للمتغير x_j ويرمز لها بالرمز $E_j(x)$ وتسمى بالمرونه الجزئية للدالة y بالنسبة للمتغير x_j وتعرف على النحو التالى :

$$E_j(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\left(\frac{x_j}{y}\right) \qquad (7.90)$$

مثال (٧-٢٩)
اذا كانت دالة العرض (y) بالنسبة لاحدى السلع دالة فى سعر بيع الوحدة (x_1) من السلعة كذلك دالة فى سعر بيع الوحدة الواحدة من سلعة أخرى مكملة لها (x_2) على النحو التالى :

$$y = 100x_1+0.5x_2-15$$

والمطلوب
١- أوجد المرونه الجزئية للعرض بالنسبة لسعر الوحدة من السلعة وسعر الوحدة من السلعة المكملة .
٢- حدد نوع العرض عند x_2-10, x_1=5 .

الحل

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 100 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.5$$

مرونه العرض بالنسبة لسعر الوحدة من السلعة .

$$E_1(x) = \left(\frac{dy}{\partial x_1}\right)\left(\frac{x_1}{y}\right) = 100\left(\frac{x_1}{100x_1 + 0.5x_2 - 15}\right)$$

$$= \frac{100x_1}{100x_1 + 0.5x_2 - 15}$$

وعند x_1=5, x_2=10 فأن

$$E_1(5,10) = \frac{100(5)}{100(5) + 0.5(10) - 15} = \frac{500}{500 + 5 - 15} = \frac{500}{490}$$

$$= +0.82$$

وبما أن المرونه $E_1(x_1,x_2)$ أقل من واحد (.82) فأن عرض السلعة غير مرن بالنسبة لسعر بيع الوحدة من السلعة عند $x_1=5, x_2=10$.

٢- كذلك مرونه العرض بالنسبة لسعر الوحدة من السلعة المكملة $E_2(x)$ حيث :

$$E_2(x) = \left(\frac{dy}{dx_2}\right)\left(\frac{x_2}{y}\right) = 0.5\left(\frac{x_2}{100x_1 + 0.5x_2 - 15}\right)$$

$$= \frac{0.5x_2}{100x_1 + 0.5x_2 - 15}$$

وعند $x_1=5, x_2=10$ فأن

$$E_2(5,10) = \frac{0.5(10)}{100(5) + 0.5(10) - 15} = \frac{5}{500 + 5 - 15} = \frac{5}{490} = +0.01$$

وبما أن المرونه $E_1(x_1,x_2)$ أقل من واحد (+0.01) فأن عرض السلعة غير مرن بالنسبة لسعر بيع الوحدة من السلعة المكملة عند x_1-$5, x_2=10$.

(٧-٧) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)

فى أحدى محافظات الوجه البحرى بجمهورية مصر العربيه وجد أن دالة الطلب (z) بالكيلو جرامات على احدى المنتجات الغذائية دالة فى سعر بيع الكيلو الواحد (x) من السلعه المنتجه محليا (بالجنيه) وفى سعر الكيلو الواحد من السلعه المستوردة y (بالجنيه) على النحو التالى :

$$z = 5 - 0.75x + 0.85y$$

المطلوب

١- أوجد متوسط معدل التغير فى الطلب بالنسبه لسعر بيع الوحدة من السلعه من المنتج المحلى من $x=2$ الى $x=5$ مع أعتبار عدم تغير سعر بيع الوحدة من المنتج المستورد ثم عقب على الناتج .

٢- أوجد متوسط معدل التغير فى الطلب بالنسبه لسعر بيع الوحدة من السلعه من المنتج المستورد من $y=2$ الى $y=5$ مع أعتبار عدم تغير سعر بيع الوحدة من المنتج المحلى ثم عقب على الناتج .

٣- أوجد المشتقات الجزئيه الاولى لدالة الطلب بالنسبة لسعر الوحدة من المنتج المحلى والمنتج المستورد ، ثم عقب على الناتج .

الحل

١- اذا فرضنا أن Δx هى مقدار التغير فى سعر بيع الوحدة من المنتج المحلى فأن:

$\Delta x = 5 - 2 = 3$ جنيه

كذلك Δz هى مقدار التغير فى الطلب الراجع الى مقدار التغير Δx فأن :

$$\Delta z_1 = [5 - 0.75(5) + 0.85y] - [5 - 0.75(2) + 0.85y]$$
$= 0.75(2-5) = -2.25$ كيلو جرام

أى أن زيادة سعر الوحدة المحليه بمقدار 3 جنيه سيؤدى الى نقص الطلب بمقدار 2.25 كيلو جرام عند ثبات سعر المنتج المستورد . وبالتالى فأن متوسط معدل التغير للطلب بالنسبه لسعر الوحده المحليه R_1 هو

$$R_1 = \frac{\Delta z_1}{\Delta x} = \frac{-2.25}{3} = -0.75 \text{ كيلو جرام} \qquad (1)$$

أى اذا زاد سعر الوحدة المحلية بجنيه واحد فى الفترة من x=2 الى x=5 فأن الكمية المطلوبه سوف تنخفض بمقدار 0.75 كيلو جرام فى المتوسط .

٢- بالمثل اذا فرضنا أن Δy هى مقدار التغير فى سعر بيع الوحدة من المنتج المستورد فأن :

$\Delta y = 5\text{-}2 = 3$ جنيه

كذلك Δz_2 هى مقدار التغير فى الطلب الراجع الى مقدار التغير Δy فأن

$$\Delta z_2 = [5\text{-}0.75x+0.85(5)\text{-}[5\text{-}0.75x+0.85(2)]$$
$$= 0.85(5\text{-}2) = 0.85(3) = 2.55 \text{ كيلو جرام}$$

أى أن زيادة سعر الوحدة المستوردة بمقدار 3 جنيه سيؤدى الى زيادة الطلب بمقدار 2.55 كيلو جرام عند ثبات سعر المنتج المحلى .

وبالتالى فأن متوسط معدل التغير للطلب بالنسبه لسعر الوحدة المستوردة R_2 هو :

$$R_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta y} = \frac{2.25}{3} = 0.85 \text{ كيلو جرام} \qquad (2)$$

أى اذا زاد سعر الوحدة المحليه بجنيه واحد فى الفترة من y=5 فأن الكمية المطلوبه سوف تزداد بمقدار 0.85 كيلو جرام فى المتوسط .

تطبيق (٢)

فى احدى الشركات وجد أن عدد الوحدات الممكن أنتاجها من أحدى السلع الاستهلاكيه دالة فى عدد الوحدات من مستلزمات الأنتاج (t) المتاحه وكذلك عدد ساعات التشغيل المتاحه (k) حيث :

$z = 100-0.5t^2+4tk+40k-k^2$

المطلوب

١- أوجد الانتاجيه الحديـة Marginal productivity بالنسبه لعدد الوحدات المستخدمه من مستلزمات الانتاج (t) كذلك الانتاجيه الحديه بالنسبه لعدد ساعات التشغيل k وعقب على النتائج عندما t=50, k=60.

٢- أوجد مرونه دالة الانتاج بالنسبة لكل من مستلزمات الانتاج وساعات التشغيل عند t=10, k=60.

الحل

١- تعرف الانتاجيه الحديه بالنسبه لعدد الوحدات من مستلزمات الانتاج بأنها المشتقه الجزئيه الاولى للدالة z بالنسبه لـ t أى

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -0.5(2)t + 4k$$

كذلك الانتاجيه الحديه بالنسبه لعدد ساعات التشغيل بأنها المشتقه الجزئية الاولى للدالة z بالنسبه لـ k أى

$$\frac{\partial z}{\partial k} = 4t + 40 - 2k$$

وعندما t=50, k=60 فأن :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -0.5(2)(50) + 4(60)$$

= -25+240

= +190 وحدة منتجه

وهذا يعنى أنه اذا كان عدد الوحدات المتاحه من مستلزمات الانتاج تساوى 50 ، وعدد ساعات التشغيل تساوى 60 ساعة وحدث تغير فى عدد الوحدات من مستلزمات الانتاج بمقدار وحدة واحدة أى من 50 الى 51 (أو من 50 الى 49) مع عدم تغير فى عدد ساعات التشغيل (والتى تساوى 60 ساعة) فأن هذا التغير سوف يؤدى الى زيادة (أو نقص) عدد الوحدات المنتجه بمقدار 190 وحدة.

بالمثل

$$\frac{\partial z}{\partial k} = 4(50) + 40 - 2(60)$$

$$=200+40-120$$

$$=240-120=+120$$ وحدة منتجه

وهذا يعنى أنه عند t=50, k=60 وزادت (أو نقصت) عدد ساعات التشغيل بمقدار ساعة واحدة أى من k=60 الى k=61 (أو من k=60 الى k=59) مع عدم تغير t فأن هذا التغير سوف يؤدى الى زيادة (أو نقص) عدد الوحدات المنتجه بمقدار 120 وحدة

٢- مرونه دالة الانتاج بالنسبة لمستلزمات الانتاج $E_1(t,k)$ هى :

$$E_1(t,k) = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{t}{z}\right)$$

$$=(-0.5t + 4k)\left(\frac{t}{100 - 0.5t^2 - 4tk + 40k - k^2}\right)$$

$$=\frac{-0.5t^2 + 4tk}{100 - 0.5t^2 + 4tk + 40k - k^2}$$

وعندما t=50, k=60 فأن :

$$E_1(50,60) = \frac{-0.5(50)^2 + 4(50)(60)}{100 - 0.5(50)^2 + 4(50)(60) - 40(60) - (60)^2}$$

$$= \frac{-1250+12000}{100+1250+12000-240+3600}$$

$$= \frac{10750}{12050} = 0.89$$

أى دالة الانتاج غير مرونه بالنسبة لمستلزمات الانتاج عندما t=50, k=60 .

كذلك مرونه دالة الانتاج بالنسبة لساعات التشغيل $E_2(t,k)$ حيث :

$$E_2(t,k) = \left(\frac{\partial z}{\partial k}\right)\left(\frac{k}{z}\right)$$
$$= (4t+40-2k)\left(\frac{k}{100-0.5t^2+4tk+40k-k^2}\right)$$

$$= \frac{4t+40k-2k^2}{100-0.5t^2+4tk+40k-k^2}$$
$$\rightarrow$$

$$E_2(50,60) = \frac{4(50)+40(60)-2(60)^2}{100-0.5(50)^2+4(50)(60)+40(60)-(60)^2}$$

$$= \frac{200+2400-7200}{100-1250+12000+2400-3600}$$

$$= \frac{-4600}{9650} = -0.48$$

أى دالة الانتاج غير مرنه بالنسبة لمستلزمات الانتاج عند t=50; k=60.

تطبيق (٣)

اذا كانت التكلفه الكليه لانتاج أحدى المنتجات C دالة فى تكلفة مستلزمات الانتاج x (بالجنيه) كذلك تكلفه العمالة (y) على النحو التالى :

$$C(x,y) = 250+20x+18y$$

والمطلوب :

١- حدد التكاليف الثابته فى الانتاج .

٢- متوسط معدل التغير للتكلفه بالنسبه لتكاليف مستلزمات الانتاج عندما تتغير تكلفه مستلزمات الانتاج من x=1000 الى x=1100.

٣- أوجد التكاليف الحديه بالنسبه لكل من تكلفه مستلزمات الانتاج (x) كذلك تكلفه العمالة (y) وعقب على النتائج التى تصل اليها .

٤- أوجد مرونه التكلفة بالنسبة لمستلزمات الانتاج عندما x=100, y=50.

الحل

١- بما أن

$$C(x,y)=250+20x+18y$$

بالتالى فأن التكاليف الثابته تساوى 250 .

٢- مقدار التغير فى مستلزمات الانتاج (Δx) حيث :

$\Delta x=1100-1000 = 1000$ جنيه

وبالتالى فأن التغير فى التكلفه الكليه الناتج عن مقدار التغير (Δc) هو :

$$\begin{aligned}\Delta c &= C(x+\Delta x,y) - C(x,y)\\ &= [250+20(1100)+18y]-[250+20(1000)+18y]\\ &= 20(1100)-20(1000)\\ &= 20(100)= 2000 \text{ جنيه}\end{aligned}$$

وبالتالى متوسط معدل تغير التكاليف بالنسبه لمستزلمات الانتاج خلال الفترة x=1000 الى x=1100 يساوى R حيث :

$$R=\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{2000}{100}=20 \text{ جنيه}$$

أى اذا زادت تكلفه مستلزمات الانتاج بمقدار وحده فأن هذا سوف يؤدى الى زيادة التكاليف الكلية بمقدار 20 جنية فى المتوسط .

تطبيق (٤)

اذا كانت دالة الطلب y على شراء اجهزة الكمبيوتر من نوع معين فى أحد الدول الناميه هى

$$y=\sqrt{(5000-2x)}$$

حيث x يمثل ثمن بيع الجهاز بالجنيه

والمطلوب

١- أوجد الكميه المطلوبه عندما يكون سعر بيع الجهاز 1700 .

٢- أوجد مرونه الطلب عندما x=2000, x=1500 .

الحل

١- عندما يكون ثمن الجهاز 1700 جنيه فأن الكميه المطلوبه y حيث :

$$y=\sqrt{(5000-2(1977))}=\sqrt{5000-3400}$$
$$=\sqrt{1600}=40 \text{ جهاز}$$

٢- بما أن

$$y=\sqrt{5000-2x}=(5000-2x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(5000-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)=-(5000-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتالى فأن مرونه الطلب E(x) حيث :

$$E(x)=\frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-(5000-2x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{5000-2x}}\right)$$

$$=-x(5000-2x)^{-1}=\frac{-x}{(5000-2x)}$$

وعندما x=1500 فأن :

$$E(1500)=\frac{-1500}{(5000-2(1500))}=\frac{-1500}{(5000-3000)}$$

$$=-\frac{1500}{2000}=-0.75$$

وبالتالى فأنه عند سعر الجهاز 1500 جنيه فأن الطلب غير مرن .
وعندما x=2000 فأن :

$$E(2000)=\frac{-2000}{5000-2(2000)}=\frac{-2000}{1000}=-2$$

وبالتالى فأنه عند سعر الجهاز 2000 جنيه فأن الطلب يكون مرن .

تطبيق (٥)

فى أحدى الدراسات التربويه تم تقسيم مستوى تحصل الطالب فى المرحله الابتدائيه الى المستويات y حيث y=0,1,2,3 حيث يعتبر أقصى مستوى تحصيل للطالب (3).

وتم التوصل الى العلاقه بين كثافه الفصل ومستوى تحصيل الطالب على النحو التالى :

$$y=4-\frac{x}{30}$$

حيث x تمثل كثافه الفصل (عدد الطلاب بالفصل).

والمطلوب

١- تحديد المستوى الحدى لتحصيل الطالب بالنسبه لكثافه الفصل ثم عقب على الناتج .

٢- هل مستوى تحصيل الطالب يعتبر مرن بالنسبه لكثافه الفصل عند كثافه الفصل $x=80$.

الحل

١- المستوى الحدى لتحصيل الطالب بالنسبه لكثافه الفصل هو $\frac{dy}{dx}$ حيث :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{30}$$

وهذا يعنى أنه تجد علاقة عكسيه بين كثافه الفصل ومستوى تحصيل الطالب حيث زيادة (أو نقص) الفصل بتلميذ واحد سوف يؤدى الى أنخفاض (أو زيادة) مستوى الطالب فى الفصل بمقدار $\left(\frac{1}{30}\right)$.

٢- بما أن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{30}\rightarrow$$

فأن مرونه مستوى الطالب فى الفصل $E(x)$ حيث :

$$E(x)=\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{30}\right)\left(\frac{30x}{(120-x)}\right)$$

$$=\frac{-x}{120-x}=\frac{x}{x-120}$$

وعندما x=80 فأن :

$$E(80)=\frac{80}{80-120}=\frac{80}{-40}=-2$$

$\rightarrow$

$|E(8)|=2>1$

وبالتالى فأن مستوى تحصيل الطالب يعتبر مرن بالنسبه لكثافه الفصل .

(٧-٨) تمرينات Exercises

(٧-١) أوجد نهايات الدوال التاليه اذا وجدت عند النقط الموضحه وذلك بأستخدام جداول توضح سلوك قيم كل دالة عند النقطه الموضحة من جهتى اليمين واليسار.

1. $\lim\limits_{x\to 3} 3x^2$
2. $\lim\limits_{x\to 3} (4x+4)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2-16x-20}{4x+4}$
6. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{x+4}$
7. $\lim\limits_{x\to 3} x^3$
8. $\underset{x\to 0}{f(x)} = x^{\frac{1}{2}}$

(٧-٢) أوجد نهايات الدوال التاليه (اذا وجدت) عند النقط المحددة ووضح ذلك بيانيا .

1. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x<4 \\ 20-2x & \quad x\geq 4 \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

حيث

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 1-x & \geq 2 \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x\to5} f(x)$

حيث

$$f(x)=\begin{cases}5-x & x<5\\ 2x & x\geq5\end{cases}$$

4. $\lim\limits_{x\to3} h(x)$

حيث

$$h(x)=\frac{x^2-9}{x-9}$$

(٧-٣) أختبر أتصال الدوال التالية :

1. $f(x)=x+3$
2. $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$
3. $h(x)=|x+1|$
4. $f(x)=\dfrac{5}{3+x}$
5. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-2x}$
6. $y(x)=\dfrac{10}{x^3+x^2-6x}$
7. $z(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x-24}$
8. $f(x)=\dfrac{12x-3}{x^2-3x}$
9. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
10. $f(x)=5x^2-15x+10$

(٧-٤) أوجد قيم معدلات التغير للدوال التاليه عندما يتغير المتغير المستقل x خلال الفترة $x=-2$ الى $x=+2$

1. $f(x)=4x^2+1$
2. $f(x)=3x^3$
3. $f(x)=x^2-4x+2$
4. $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

5. y=u2-10 , u=2x2+5
6. z=-y3+2y2-10 , y=x+1
7. $f(x)=x^3+3x^2-x+10$
8. $f(x)=\frac{x^4}{10}$

(٧-٥) أوجد تفاضل الدوال التاليه (المشتقه الاولى) عند النقط التاليه x=1,-1,2,-2.

1. $f(x)=4x+4$
2. $f(x)=30$
3. $f(x)=7x^2-3$
4. $f(x)=-9x^3+1$
5. $f(x)=3x^4-5x+10$
6. $f(x)=4x^3$
7. $f(x)=1/x^3$
8. $f(x)=e^{3x+1}$
9. f(x)=ln(3x+1
10. $f(x)=3x+e^{x^2-1}$
11. $f(x)=(x+1)(3x-5)$
12. $f(x)=\frac{(2x^2+5x-3)^2}{(x-3)^2}$
13. $f(x)=(9x-3)^{\frac{7}{2}}$
14. $f(x)=\frac{10}{x^5}$
15. $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{3x^2+7x-1}$
16. $f(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(x^2-1)}$
17. $f(x)=\ln(x-2)e^{(x+1)}+10$
18. $f(x)=e^{x^2-5}/e^{x+10}$
19. $f(x)=\frac{\ln(x+3)^4+5x}{\ln(7x)}$
20. $f(x)=\frac{(3x-10)^{2/3}}{\sqrt[5]{(x+3)}}$

(٧-٦) أوجد المشتقات من الرتبه الثالثه للدوال التاليه عند x=1

1. f(x)=310
2. f(x)=25-3x
3. f(x)=6x3
4. f(x)=(x2-2)3
5. $f(x)=1/x$
6. $f(x)=x^{4/2}-x^{3/2}+9$

(٧-٧) أوجد كل من المشتقات الجزئية الاولى والثانيه للدوال التاليه . ثم أحسب عناصر مصفوفه المشتقات الجزئيه الثانيه عندما x=3, y=5, z=-1 .

1. $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{4y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$
4. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(y)}$
5. $f(x,y) = (3x + 7y)^2(x - y)$
6. $f(x,y) = \dfrac{(5x-3)^2}{(4y + xy)}$
7. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 3xy)$
8. $f(x,y) = e^{5x-3y}$
9. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x-y)}{\ln(x^2 - y^2)}$
10. $f(x,y) = x^2 + 3e^x + 7^y - xy$
11. $f(x,y,z) = 5(3x)(y^2)(z^3)$
12. $f(x,y,z) = \dfrac{(8xyz)}{y^2 - z^2}$
13. $f(x,y,z)=e^{(x^2+y^2+z^2)}$
14. $f(x,y,z) = xe^{x^2} + ye^{y^2} + ze^{z^2}$
15. $f(x,y,z) = x^3y + 2x^2yz - 2z^4$
16. $f(x,y,z) = x\ln y + y\ln z + z\ln x$
17. $f(x,y,z)=2\ln(xy)+3\ln(xz)-5\ln(yz)$
18. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2x^2y^2z^2}$
19. $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt[2]{xyz}}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 - z^2}}$
20. $f(x,y,z) = (x + y - z)^{2/3}(e^{xy} - e^{yz})$

(٧-٨) ترغب احدى الشركات فى زيادة ايراداتها من بيع احدى سلعها عن طريق خفض سعر بيع الوحدة . فاذا كانت دالة الطلب على هذه السلعه هى :

$$y = \frac{20000}{x^2}$$

حيث x ثمن بيع الوحدة .

١- أوجد مرونه الطلب بالنسبه لسعر الوحدة .

٢- هل تنجح الشركة فى زيادة ايرادتها عن طريق سياستها المقترحة .

(٧-٩) تقوم احد الشركات بأنتاج نوعين من المنتجات A,B فاذا كانت دالة التكلفه الكليه (بالجنيه) للنوع A هى

$C_1(x,y)=2000+3x+10y$

ودالة التكلفه الكليه للمنتج B هى

$C_2(x,y)=5000+2x+8y$

حيث يتطلب كل منتج نوعين من مستلزمات الانتاج ، حيث x تمثل عدد الوحدات من مستلزمات الانتاج الاولى ، y تمثل عدد الوحدات من مستلزمات الانتاج الثانى .

١- أوجد التكاليف الحديه بالنسبه لكل نوع من مستلزمات الانتاج عندما x=100, y=200 ثم عقب على الناتج .
٢- أوجد متوسط معدل التغير فى التكاليف عندما x=100 الى x=110 ثم عقب على الناتج .
٣- أوجد مرونه التكلفة بالنسبة لمستلزمات الانتاج عندما x=100, y=10 .

(٧-١٠) فى أحدى الدراسات السكانية بأحدى الدول وجد أن عدد السكان (بالمليون) دالة فى الزمن تأخذ الشكل التالى :

$$y = 5 + \frac{e^t}{100t}$$

حيث y تمثل عدد السكان بالمليون ، t تمثل الزمن (بالسنوات) .

والمطلوب

١- تقدير عدد السكان عندما t=10 .
٢- أوجد متوسط معدل التغير لعدد السكان بالنسبه للزمن .
٣- أوجد الزيادة الحديه للسكان فى السنه بعد سنتين .
٤- أوجد متوسط معدل التغير فى عدد السكان فى الفترى من t=3 الى t=5 .

الباب الثامن

التفاضل ومشاكل الامثلية

Differentation and Optimization Problems

(٨-١) مشاكل الامثلية **Optimization problems**

فى الباب السابق تناولنا بالتفصيل مفهوم العملية التفاضلية والانواع المختلفة من المشتقات الجزئية ومشتقات الرتب العليا.

وتستخدم المشتقات فى دراسة سلوك الدوال الرياضية .

ودراسة سلوك الدوال الرياضية أهمية بالغة فى حل العديد من المشاكل التطبيقية . فمثلا بالنسبة للمشاكل القرارية يرغب متخذ القرار فى اتخاذ القرار الذى يحقق اقصى ربح ممكن أو أقل خسارة ممكنه أو تحديد الحجم الامثل للمشروع أو أقل مخاطرة Risk ممكنة ، ... الخ . وتسمى هذه المشاكل بمشاكل الامثلية Optimization problems.

وكثير من مشاكل الامثلية يعتمد فى طريقة حله على المشتقات الاولى والثانيه .

وفى هذا الباب سوف نقدم طرق استخدام المشتقات فى ايجاد الحلول المثلى لكثير من المشاكل التطبيقية .

(٨-٢) القيم العظمى والصغرى للدوال فى متغير واحد
Maximum and Minimum Values of Function of One Variable

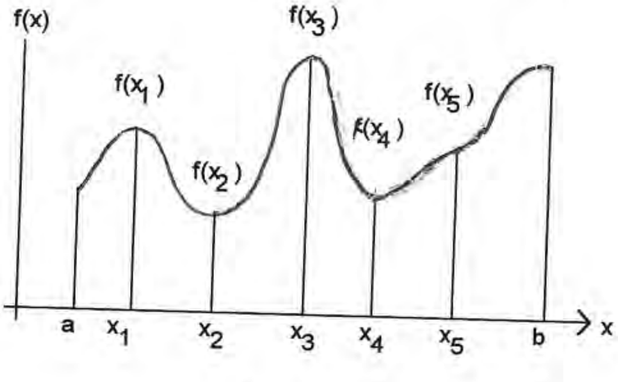
اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة معرفة فى الفترة $a \le x \le b$ فاذا فرضنا أن $x=x_0$ فانـه يقال أن النقطة $(x_0, f(x_0))$ تكون نقطه نهاية عظمى Maximum point اذا كان

$$f(x_0) \ge f(x_0+h) \quad , \qquad |h| \to 0 \qquad (8.1)$$

كذلك تكون النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة نهاية صغرى Minimum point اذا كان

$$f(x_0) \le f(x_0+h) \quad , \qquad |h| \to 0 \qquad (8.2)$$

والشكل التالى يوضح أنه عند النقط



شكل (٨-١)

وتسمى النقطتين $(x_3, f(x)_3), (x_1, f(x_1))$ نقط نهاية عظمى نسبيه أو محليه Relative (local) maximum points. فعند $x=x_1$ نجد أن قيمة الدالة عند النقطة المجاورة لـ x_1 ولتكن x_1+h (فى اتجاه اليمن)أقل منها عند $x=x_1$ كذلك قيمة الدالة عند النقطة المجاورة لـ x_1 ولتكن $x\text{-}h$ (فى اتجاه اليسار) أقل منها عند $x=x_1$ أى أن

قيمة الدالة $f(x)$ عند x_1 تكون أكبر من قيمتها عند أى نقطه أخرى مجاورة . ونفس الشئ بالنسبه للنقطة عند $x=x_3$.

ومن الشكل نجد أن $f(x_3) > f(x_1)$ أو بعبارة أخرى فأن

$$f(x_3)= \max. \{f(x_1), f(x_3)\} \tag{8.3}$$

وتسمى $f(x_3)$ نهايه عظمى مطلقة Global (absolute) maximum أى أن النهايه العظمى المطلقة هى أكبر قيمة فى قيم النهايات العظمى النسبيه للدالة $f(x)$.

ومن الشكل ايضا يتضح أن النقطتين $(x_4, f(x_4)), (x_2, f(x_2))$ تعتبر نقط نهايات صغرى محلية Relative (local) minimum points.

فعند النقطه $x=x_2$ نجد أن قيمة الدالة عند النقطة المجاورة لـ x_2 ولتكن x_2+h (فى اتجاه اليمين) أكبر منها عند $x=x_2$ كذلك قيمة الدالة عند النقطة المجاورة لـ x_2 ولتكن x_2-h (فى اتجاه اليسار) أكبر منها عند $x=x_2$. أى أن قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة x_2 يكون أقل من قيمتها عند اى نقطه اخرى مجاورة . ونفس الشء بالنسبة للنقطه $x=x_4$.

ومن الشكل يتضح أن $f(x_2) < f(x_4)$ أو بعبارة أخرى .

$$f(x_2) = \min. \{f(x_2), f(x_4)\} \tag{8.4}$$

وتسمى $f(x_2)$ نهاية صغرى مطلقة Global (absolute) minimum. أى أن النهايه الصغرى المطلقه هى أقل قيمة فى قيم النهايات الصغرى النسبيه للدالة $f(x)$.

ومما هو جدير بالذكر أن ميل Slop المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقط x_4 أو x_3 أو x_2 أو $x=x_1$ يساوى صفر ، كذلك نجد أن ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطه $x=x_5$ يساوى صفر علما بأن قيمة الدالة عند النقطة $x=x_5$ أى $f(x_5)$ ليست

نهايه عظمى أو صغرى . وتسمى النقطه بنقطه أنقلاب Inflection point. وتسمى جميع النقط التى يكون عندها ميل المماس لمنحنى الدالـة f(x) يساوى صفر تسمى بـالنقط استقرار Stationary points ، أى أن نقـط النهايـة العظمـى والصغـرى والانقلاب تمثل نقط استقرار للدالة f(x). وتسمى نقـط النهايـات العظمـى والصغرى بالنطق الطرفيه Extreme points.

نظرية (٨-١)
الشرط الضرورى لتكون النقطة $(x=x_0, f(x_0))$ نقطه استقرار للدالـة f(x) أن تكون قيمة المشتقه الاولى للدالة عند النقطة $x=x_0$ تساوى صفر . أى أن

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \tag{8.5}$$

مثال (٨-١)
اذا فرضنا أن الدالة

$$f(x) = x^2-6x+5$$

حدد أى النقط التاليه تمثل نقط استقرار للدالة f(x) .

أ) $x=3$

ب) $x=4$

الحل
بما أن

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x-6$$

عندما $x=3$ فأن

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=3} = 2(3)-6=0$$

وبما أن $f'(x=3)=0$ اذن فالنقطه $(x=3,\ f(3))$ تمثل نقطه استقرار للدالة $f(x)$ قد تكون نهاية عظمى أو صغرى أو نقطه أنقلاب .

ب) عندما $x=4$ فأن

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=4} = 2(4)-6=+2$$

اذن النقطه $(x=4, f(4))$ ليست نقطه استقرار للدالة $f(x)$.

مثال (٨-٢)

أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية :

$$f(x)=\frac{1}{5}x^5+x^4-3x^3-8x^2+20x$$

بما أن قيمة المشتقه الاولى للدالة $f(x)$ عند نقط الاستقرار تساوى صفر أى أن

فأن

$$f'(x)=0$$

$$f'(x) = x^4+4x^3-9x^2-16x+20 = 0 \rightarrow$$
$$(x-2)(x+2)(x-1)(x+5) = 0 \rightarrow$$
$$x=2,\ x=-2,\ x=1,\ x=5$$

أى أن النقط

$(x=2, f(2)=6.2), (x=-2, f(-2)=-25.6), (x=1, f(1)=10.2), (x=5, f(5)=775)$

نقط أستقرار للدالة $f(x)$.

أختبار المشتقه الاولى **The First-Derivative Test**

تعطى نظرية (٨-١) الشرط الضرورى فقط لتكون قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطه $x=x_0$ نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة انقلاب .

ويمكن تحديد نوع النقط بمعنى نقطه نهاية عظمى او صغرى أو انقلاب باجراء الاختبار التالى :

١- اذا كان المطلوب اختبار النقطه $x=x_0$ ، نفرض النقطتين x_0'', x_0' المتجاورتين للنقطة $x=x_0$ بحيث $x=x'_0$ (يمين النقطه $x=x_0$) والنقطه $x = x_0''$ (يسار النقطه $x=x''_0$).

٢- تحسب قيمة المشتقه الاولى عند النقطتين $x = x_0', x_0''$ فاذا كان

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0'} &= f'(x = x_0') < 0, \\ \left.\frac{df(x)}{d(x)}\right|_{x_0''} &= f'(x = x_0'') > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

فأن النقطه $(x=x_0, f(x_0))$ نقطة نهايه عظمى نسبيه للدالة $f(x)$.

٣- اذا كان

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0'} &= f'(x = x_0') > 0, \\ \left.\frac{df(x)}{d(x)}\right|_{x_0''} &= f'(x = x_0'') < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

فأن النقطة x_0 تكون نقطه نهايه صغرى نسبيه للدالة $f(x)$.

٤- اذا كان

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0'} ='f(x=x_0')>0\\
&\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0''} ='f(x=x_0'')>0\\
&\qquad\qquad\text{أو}\\
&\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0'} ='f(x=x_0'')<0\\
&\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0''} ='f(x=x_0'')<0
\end{aligned}\right\} \qquad (8.8)$$

فأن النقطه x_0 تكون نقطه انقلاب .

ملاحظات

١- من (8.6) نجد أن قيمة المشتقه الاولى للدالة يمين النقطه $x=x_0$ تكون موجبه وتكون سالبه يسارها .

$$\boxed{\begin{array}{c} 'f(x_0'')=+\leftarrow\ \underset{\substack{\downarrow\\ 'f(x_0)=0}}{'f(x)}\ \rightarrow 'f(x_0')=- \end{array}}$$

شكل (٨-٢)

(أى الاشارتين مختلفتين) عند نقطه النهايه العظمى .

٢- من (8.7) نجد أن قيمة المشتقه الاولى للدالة يمين النقطه $x=x_0$ تكون سالبه وتكون موجبه يسارها .

$$\boxed{\begin{array}{c}'f(x_0'') = - \leftarrow 'f(x) \rightarrow 'f(x_0') = + \\ \downarrow \\ 'f(x_0)=0\end{array}}$$

شكل (٨-٣)

(أى أن الاشارتين مختلفتين) عند نقطه النهاية الصغرى .

٣- من (8.8) نجد أن قيمة المشتقه الاولى للدالة عند النقط المجاورة x_0'', x_0' تكون متفقه الاشارة .

$$\boxed{\begin{array}{c}'f(x_0'') = \pm \leftarrow 'f(x) \rightarrow 'f(x_0') = \pm \\ \downarrow \\ 'f(x_0)=0\end{array}}$$

شكل (٨-٤)

عندما تكون النقطة $(x=x_0, f(x_0))$ نقطه انقلاب .

مثال (٨-٣)
اذا كانت النقط التالية :

$$(x=0, f(0)=10), (x=1, f(-1)=\frac{111}{12}), (x=3, f(3)=\frac{-5}{4})$$

تمثل نقط استقرار للدالة f(x) حيث .

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+10$$

أختبر نوع كل نقط من النقاط السابقة .

الحل

١- بما أن $x_0=0$ نفرض أن $x_0' = 0.1, x_0'' = -0.1$ ، وبما أن

$'f(x)=x^3-2x^2-3x \rightarrow$ (1)

$$'f(x_0' = 0.1) = (0.1)^3 - 2(0.1)^2 - 3(0.1)$$
$$= 0.001-.02-0.30$$
$$= -0.319 \qquad (2)$$

$$''f(x_0'' = -0.1) = (-0.1)^3 - 2(-0.1)^2 - 3(-0.1)$$
$$= -0.001-0.02+0.30$$
$$= +0.279 \qquad (3)$$

من (3)-(1) نجد أن اشارة الدالة $f(x)'$ تتغير من اليمين الى اليسار من – الى + على الترتيب حول النقطه $x=0$ ، وبالتالى فأن النقطه $(x=0, f(0)=10)$ نقطه نهايه عظمى .

٢- بالمثل عند النقطه $x=x_0=-1$ نفرض أن $x_0' = -0.9, x_0'' = -1.1$ نجد أن

$$'f(x_0' = -0.9) = (-0.9)^3 - 2(-0.9)^2 - 3(-0.9)$$
$$= -0.729-1.62+2.7$$
$$= +0.351 \qquad (4)$$

وعند النقطة $x_0'' = -1.1$ نجد أن :

$$'f(x_0'' = -1.1) = (-1.1)^3 - 2(-1.1)^2 - 3(-1.1)$$
$$= -1.331 - 2.420 + 3.3$$
$$= -0.451 \qquad (5)$$

من (5) ,(4) نجد أن اشارة الدالة $f'(x)$ تتغير من اليمين الى اليسار من + الى - حول النقطة $x=-1$ ، وبالتالى فأن النقطة $\left(x=-1, f(-1)=\frac{121}{12}\right)$ نقطة نهايه صغرى .

٣- بالمثل نجد النقطة $\left(x=3, f(3)=\frac{-5}{4}\right)$ نقطة نهاية صغرى .

أختبار المشتقه الثانيه The Second-Derivative Test

والاختبار السابق يعتمد على معرفة سلوك الدالة $f(x)$ عن طريق معرفة قيمة المشتقه الاولى $f'(x)$ يمين ويسار النقطه المراد اختبارها ، ويمكن معرفه سلوك الدالة $f(x)$ عن طريق معرفه قيمة المشتقه الثانيه $f''(x)$ عند النقطة المراد اختبارها.

فاذا كان المراد اختبار النقطة $x=x_0$ فأنه يمكن اجراء هذ الاختبار على النحو التالى:

١- نوجد المشتقه الثانيه للدالة $f(x)$ أى نوجد $f''(x)$.

٢- نحسب قيمة الدالة $f''(x)$ عند النقطة $x=x_0$ - فاذا كانت قيمة الدالة $f''(x_0)$ سالبه أو بعبارة أخرى :

$$f''(x=x_0) < 0 \tag{8.9}$$

تكون النقطة $(x=x_0,\ f(x_0))$ نقطة نهاية عظمى - واذا كانت قيمة الدالة $f''(x_0)$ موجبه أو بعبارة أخرى :

$$f''(x=x_0) > 0 \tag{8.10}$$

٣- تكون النقطة $(x=x_0, f(x_0))$ نطقة نهاية صغرى . واذا كانت قيمة الدالة $f''(x)$ عند النقطة $x=x_0$ تساوى صفر أو بعبارة أخرى

$$f''(x=x_0) = 0 \tag{8.11}$$

فأن أختبار المشتقة الثانية يفشل فى تحديد نوع نقطة الاستقرار ويتطلب معرفة هذه النقطة استخدام أختبار آخر .

مثال (٨-٤)

فى المثال السابق نجد أن

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+10\rightarrow \quad (1)$$

$$'f(x)=x^3-2x^2-3x\rightarrow \quad (2)$$

$$''f(x)=3x^2-4x-3\rightarrow \quad (3)$$

١- فأننا نجد عند النقطة $x_0=0$ فأن

$$''f(x=0)=3(0)^2-4(0)-3=-3$$

اذن النقطة $(x=0, f(0)=10)$ نقطة نهاية عظمى .

٢- عند النقطة $x_0=-1$ فأن :

$$''f(x=-1)=3(-1)^2-4(-1)-3$$
$$=3+4-3=+4$$

(5)

اذن النقطة $\left(x=-1, f(-1)=\frac{111}{12}\right)$ نقطة نهاية صغرى .

٣- عند النقطة $x_0=3$ فأن

$$''f(x=3)=3(3)^2-4(3)-3$$
$$=27-12-3=27-15=+12$$

(6)

اذن النقطة $\left(x=3, f(3)=\frac{-5}{4}\right)$ نقطة نهاية صغرى أيضا .

وهى نفس النتائج التى توصلنا اليها بأستخدام أختبار المشتقة الاولى .

مثال (٨-٥)

اذا كانت الدالة

$$f(x)=x^3 \quad (1)$$

فأن

$$f'(x)=3x^2 \quad (2)$$

ومن نظرية (٨-١) نجد أنه عند نقط الاستقرار فأن :

$$f'(x) = 0 \rightarrow$$
$$3x^2=0 \rightarrow x=0 \quad (3)$$

وبالتالى فأن النقطة $(x=0, f(0)=0)$ تمثل نقطة استقرار للدالـة $f(x)$، ومـن (2) نجـد أن :

$$f''(x)=6x$$

وعند النقطة $x=0$ فأن

$$f''(x=0)=6(0)=0$$

من (4) نجد أن قيمة المشـتقه الثانيـه عنـد النقطـة $x=0$ تسـاوى صفـر وبالتـالى فـأن اختبار المشـتقه الثانيـة يفشـل فـى معرفـة نـوع نقطـة الاسـتقرار $x=0$. وهنـا يمكـن استخدام أختبار المشتقه الاولى على النحو التالى :

نفرض أن $x_0' = 0.5,\ x_0'' = -0.5$ فأن :

$$f'(0.5)=3(0.5)^2 = +0.75 \quad (5)$$

كذلك

$$f'(-0.5)=3(-0.5)^2=+0.75$$

وبما أن اشارة المشتقه الاولى للدالة $f'(x)$ عنـد النقـط $x=0.5$ ، $x=-0.5$ لـم تتغير . اذن النقطه $(x=0, f(0)=0)$ تمثل نقطة انقلاب .

أختبار المشتقه من الرتبة (n) **n-order Derivative Test**

ويعتبر هذا الاختبار أكفأ أختبار Efficient test لتحديد نوع نقطـة الاسـتقرار. ويتـم هذا الاختبار لتحديد نوع النقطة $(x=x_0, f(x_0))$ على النحو التالى :

١- نضع $n=2$

٢- نوجد المشتقه التفاضليه من الرتبة n حيث $n=2,3,4,...$ وعند كل قيمة لـ n نحسب قيمة

$f^{(n)}(x=x_0)$

أ) اذا كان $f^{(n)}(x=x_0) \neq 0$ ، n عدد زوجى فأن النقطة $x=x_0$ تكون نهايه عظمى اذا كان

$f^{(n)}(x=x_0) < 0$

ب) وتكون النقطة $x=x_0$ نهاية صغرى اذا كان

$f^{(n)}(x=x_0) > 0$

ج) اذا كان $f^{(n)}(x=x_0) \neq 0$ ، n عدد فردى فأن النقطة $x=x_0$ نقطة انقلاب .

٣- اذا كان $f^{(n)}(x=x_0) = 0$ فأننا نضع $n=n+1$ ونعود للخطوة رقم (٢). والامثلة التالية توضح ذلك :

مثال (٨-٦)

اذا كانت الدالة f(x) بحيث :

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+10$

أ) أوجد نقط استقرار الدالة f(x) ،

ب) حدد نوع كل نقط من نقط الاستقرار فى (أ).

الحل

أ) بما أن

$f'(x)=4x^3-6x^2+2x$

وحيث أن

$f'(x) = 0$

عند نقط الاستقرار فأن

$4x^3-6x^2+2x=0 \rightarrow$

$2x(2x^2-3x+1)=0 \rightarrow$

$2x(2x-1)(x-1)=0 \rightarrow$

$x=0$ أو $x=\frac{1}{2}$ أو $x=1$

وبالتالى فأن نقط الاستقرار هى :

$$(x=0, f(0)=10), \left(x=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}\right), (x=1, f(x)=10)$$

أولا : عند نقطة الاستقرار $(x=0\ f(0)=10)$
نجد أن

$f^{(2)}(x)=12x^2-12x+2$
$f^{(2)}(0)=12(0)^2-12(0)+2=+2$

أذن النقطة $(x=0, f(0)-10)$ نقطة نهاية صغرى حيث n عدد زوجى (يساوى 2)، $f^{(2)}(0)=0$.

ثانيا: عند نقطة الاستقرار $\left(x=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}\right)$ نجد أن

$$\begin{aligned} f^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) &= 12\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\left(\frac{1}{2}\right)+2 \\ &= \frac{12}{4}-\frac{12}{2}+2 \\ &= 3-6+2=-1 \end{aligned}$$

وبما أن n عدد زوجى (يساوى 2) ، $f^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ اذن النقطة $\left(x=\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}\right)$ نقطة نهاية عظمى .

ثالثا: عند نقطة الاستقرار $(x=1, f(1)=10)$ نجد أن

$$f^{(2)}(1)=12(1)^2-12(1)+2$$
$$=+2$$

اذن النقطة $(x=1, f(1)=10)$ نقطة نهاية صغرى أيضا .

مثال (٨-٧)
أختبر النقطة الاستقرار $(x=0, f(0)=0)$ للدالة

$$f(x)=x^5$$

الحل

$$f'(x)=5x^4$$

والمشتقة من المرتبه $n=2$.

$$f^{(2)}(x)=20x^3$$

وبما أن

$$f^{(2)}(0)=20(0)^2=0$$

لذلك نضع

$$n = 2+1=3$$

ونوجد $f^{(3)}(x)$

$$f^{(3)}(x) = 60x^2$$

وعند $x=0$ فأن

$$f^{(3)}(x) =60(0)^2=0$$

لذلك نضع $n=3+1$ ونوجد $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = 120 x$$

وعند $x=0$ فأن

$$f^4(0) = 0$$

لذلك نضع $n=4+1$ ونوجد $f^{(5)}(x)$ حيث

$$f^{(5)}(x) = 120$$

وبما أن $f^{(5)}(0) = 120$ أى أن $n=5$ عدد فردى وقيمة $f^{(5)}(0) \neq 0$ بالتالى فأن النقطة $(x=0, f(0)=0)$ نقطة أنقلاب .

(٨-٣) القيم العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات
Maximum and Minimum Values of Function of Several Variables

فى الباب الثانى تناولنا بالتفصيل الدوال الرياضية فى اكثر من متغير ، وفى الباب السابق قدمت عملية اجراء التفاضل للدوال متعددة المتغيرات أو مايسمى بالمشتقات الجزئية والفصل السابق (٨-٢) تم تعريف وتحديد نقط الاستقرار والنهايات العظمى والصغرى للدالة فى متغير واحد وفى هذا الفصل سوف نتناول كيفية تحديد نقط الاستقرار والنهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات وكيفيفة الاستفادة من هذا النقط فى المجالات التطبيقية.

فاذا كانت الدالة $z=f(x_1,x_2)$ دالة فى المتغيران x_1,x_2 فأنه يقال أن النقطه $z'=f(x_1',x_2')$ تسمى نقطة نهاية غظمى نسبيه (أنظر الفصل السابق) اذا كان :

$$f(x_1',x_2') \geq f(x_1'+h_1,x_2'+h_2) \qquad (8.14)$$

حيث h_2, h_1 مقادير صغيرة جدا تؤول الى الصفر أو بعبارة اخرى
$|h_1| \to 0,\ |h_2| \to 0$
كذلك يقال أن النقطة $z''=f(x_1''+x_2'')$ نقطة نهايه صغرى نسبيه اذا كان

$$f(x_1'',x_2'') \leq f(x_1''+h_1,x_2''+h_2), \qquad |h_1| \to 0, |h_2| \to 0 \qquad (8.15)$$

فاذا كانت كل نقطة من النقاط التالية :
$f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2),\ldots,f_i(x_1,x_2),\ldots\ldots$

تمثل نقطه نهاية عظمى نسبيه للدالة $f(x_1,x_2)$ فأن النقطة $f(x_1^*,x_2^*)$ تسمى نهايه عظمى مطلقة اذا كان

$$f(x_1^*,x_2^*) = \max_i .\{f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2),\ldots f_i(x_1,x_2),\ldots\} \qquad (8.16)$$

كذلك اذا كانت كل نقطة من النقاط :

$f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2),\ldots,f_j(x_1,x_2),\ldots\ldots$

تمثل نقطه نهاية صغرى نسبية للدالة $f(x_1,x_2)$ فأن النقطـه $f(x_1^*,x_2^*)$ تسـمى نهايـة صغرى مطلقه اذا كان :

$$f(x_1^*,x_2^*) = \min_j .\{f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2),\ldots,f_j(x_1,x_2),..\} \qquad (8.17)$$

ويمكن تعميم التعريفات للنهايات العظمى والصغرى النسـبيه والمطلقـه فـى حالـة اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة فى n من المتغيرات بمعنى x متجه فـى n مـن المتغيـرات أى أن :

$$f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (8.18)$$

على النحو التالى :

١- تكون النقطـه $f(x_1',x_2',..,x_n')$ نهاية عظمى نسبيه اذا كان

$$f(x_1',x_2',..,x_n') \geq f(x_1'+h_1,x_2'+h_2,\ldots,x_n'+h_n) \qquad (8.19)$$

حيث :

$$|h_i| \to 0 \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,n$$

٢- وتكون النقطة $f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ نهاية عظمى مطلقة اذا كان

$$f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*) = \max_i .\{f_1(x_1,x_2..,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_i(x_1,x_2,..,x_n),\ldots\} \qquad (8.20)$$

حيث تمثل كل نقطـه مـن النقط $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ نهايـة عظمـى نسـبيه لجميـع قيـم $i=1,2,\ldots$.

٣- تكون النقطه $f(x_1'',x_2'',\ldots,x_n'')$ نهاية صغرى نسبيه اذا كان :

$$f(x_1'',x_2'',..,x_n'') \leq f(x_1''+h_1,x_2''+h_2,\ldots,x_n''+h_n) \qquad (8.21)$$

حيث

$$|h_i| \to 0 \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,n$$

٤- تكون النقطة $f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ نهاية صغرى مطلقة اذا كان :

$$f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*) = \min_j \{f_1(x_1,x_2..,x_n), f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_i(x_1,x_2,..,x_n),...\} \tag{8.22}$$

ملحوظة

من (8.18) يتضح أن الحالة الخاصة للدالة متعدد المتغيرات $f(x_1,x_2,...,x_n)$ دالة فى متغير واحد $f(x_1)$ ومن (8.21)-(8.19) نحصل على نفس التعريفات للنهايات العظمى والصغرى المقدمة فى (8.2)-(8.1).

نظرية (٨-٢)

الشرط الضرورى لكى تكون النقطة $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ نقطى استقرار للدالة $f(x_1,x_2,...,x_n)$ أن تكون .

$$\left.\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right|_{(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)} = 0\ ,\ j=1,2,...,n \tag{8.23}$$

ومجموعة المعادلات (8.23) تعنى أن قيم المشتقات الجزئية الاولى للدالة $f(x_1,x_2,...,x_n)$ عند نقط الاستقرار يجب أن تساوى صفر .

مثال (٨-٨)

أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية :

$$y = f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 + 5x_2 + 2x_1$$

الحل

١- نوجد المشتقات الجزئية الاولى للدالة $f(x_1,x_2)$ على النحو التالى :

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 - 5x_2 + 2$$

$$\frac{\partial f(x_2,x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 - 5x_1 + 5$$

وعند نقط الاستقرار للدالة $f(x_1,x_2)$ فأن

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \rightarrow$$

$$2x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \qquad (1)$$

وبحل المعادلتين (2) ,(1) نجد أن :

$x_1=-1,\ x_2=0$

وبالتالى فأن النقطة $(x_1=-1,\ x_2=0,\ y=-1)$ نقطة استقرار للدالة .

مثال (٨-٩)

أوجد نقط الاستقرار للدالة

$$z = f(x_1,x_2,x_3) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 5x_2x_3 - 6x_1 - 10x_2 - 4x_3$$

الحل

عند نقط الاستقرار نجد ان:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 5x_3 - 10 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_1 - 5x_2 - 4 = 0 \qquad (3)$$

أو

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3&=6 \\ 2x_1+2x_2-5x_3&=10 \\ 2x_1-5x_2+2x_3&=4 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

وبحل المعادلات (4) (راجع حل المعادلات الخطية بالباب الخامس) نجد أن النقطة

$$x_1=\frac{23}{7}, x_2=\frac{2}{7}, x_3=\frac{-4}{7},$$

$$f\left(\frac{23}{7},\frac{2}{7},\frac{-4}{7}\right)=\frac{-589}{94}$$

نقطة استقرار للدالة $f(x_1,x_2,x_3)$.

ونظرية (٨-٢) تعطى الشروط الضرورية التى يجب توافرها فى نقط الاستقرار .

وفيما يلى سوف نقدم الشروط الكافية Sufficient conditions لتحديد نوع نقط الاستقرار الطرفيه أى هل هى نقط نهاية عظمى أو صغرى فى الفصل (٧-٥) تم تعريف مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية . فاذا كانت الدالة $f(x)=f(x_1,x_2,..,x_n)$ دالة فى n متغير فأن مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية H حيث :

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{n.n} \qquad (8.24)$$

وتسمى المصفوفة H بالمصفوفة الهيسينه Hessian matrix. وهى مصفوفة متماثلة من الترتيب nxn ويمكن تجزئ هذه المصفوفة الى n من المصفوفات الجزئية المتماثلة ايضا $H_1, H_2, \ldots, H_n$ حيث :

$$H_1 = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right]_{1x1}, \tag{8.25}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{2x2}, \tag{8.26}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{3x3} \tag{8.27}$$

وهكذا فأن H_j هو

$$H_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_j} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_j} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} \end{bmatrix}_{j \times j} \tag{8.28}$$

ويلاحظ أن

$$H_n = H$$

وتسمى محددات المصفوفات الجزئية $|H_1|, |H_2|, \ldots, |H_n|$ بالمحيدات الاساسية Principal minors.

نظرية (٨-٣)

١- تكون نقطة الاستقرار للدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نقط نهاية عظمى نسبيه اذا كانت قيم المحيدات الاساسية عند هذه النقطة بحيث :

$$|H_1| < 0,\ |H_2| > 0,\ |H_3| < 0, \ldots \tag{8.29}$$

٢- وتكون نقطة الاستقرار للدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نهاية صغرى نسبيه اذا كانت قيم المحيدات الاساسية عند هذه النقطة بحيث :

$$|H_1| > 0,\ |H_2| > 0,\ |H_3| > 0, \ldots \tag{8.30}$$

أى جميعها قيم موجبة .

٣- اذا لم يتحقق الشرطين السابقين لايمكن تحديد نوع النقطة ويجب فحص سلوك الدالة عند النقط المجاورة لها (أنظر أختبار المشتقه الاولى فصل "٧-٥").

مثال (٨-١٠)
أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل منها .

$$f(x_1,x_2)=3x_1^2+5x_2^2-15x_1-20x_2$$

الحل

١- نوجد المشتقات الجزئية الاولى للدالة y .

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=6x_1-15 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=10x_2-20 \qquad (2)$$

وبما أن عند نقط الاستقرار

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0\rightarrow$$

$$6x_1-15=0\rightarrow x_1=\frac{15}{6}=\frac{5}{2},$$

$$10x_2-20=0\rightarrow x_2=\frac{20}{10}=2$$

اذن النقطة $\left(x_1=\frac{5}{2},x_2=2\right)$ نقطة استقرار للدالة .

٢- نوجد المشتقات الجزئية الثانيه للدالة

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x^2}=6,\quad \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=10$$

$$\rightarrow$$

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

من (3) يتضح أن

$$|H_1| = |6| = 6 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 60 > 0$$

اذن النقطة $\left(x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 2\right)$ نقطة نهاية صغرى ..

مثال (٨-١١)
حدد نوع نقط الاستقرار للدالة التالية

$$f(x_1 x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$$

الحل
١- نوجد المشتقات الجزئية الاولى للدالة .

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 4x_2 + 12x_3 \qquad (3)$$

وعند نقطة الاستقرار نجد أن :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$$

فأن

$$2x_1-3x_2 = 0$$
$$-3x_1+6x_2+4x_3 = 0$$
$$4x_2 + 12x_3 = 0$$
$$\rightarrow$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية الثانية

$$\frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1 \partial x_2} = 3$$

$$\frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2^2} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2} = 12 \quad , \quad \frac{\partial^2 (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = 4$$

وبالتالى فأن

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$|H_1| = |2| = +2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = +3 > 0$$

$$|H_3|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}$$
$$= 2(72-16)+3(-36-0)$$
$$=2(56)+3(-36)$$
$$=112-108$$
$$=+4>0$$

اذن النقطة $(x_1=0, x_2=0, x_3=0)$ نقطة نهاية صغرى .

مثال (٨-١٢)
اذا كان الطلب على احدى المنتجات دالة y فـى سـعر الوحـدة مـن هـذا المنتـج (x_1) وأسعار الوحدة من السلع المكملة لها (x_2), (x_3) ، حيث :

$$y = f(x_1, x_2, x_3) - 5000 - x_1^3 - 0.5x_2^2 - x_3^2 + 27x_1 + 25x_2 + 10x_3$$

والمطلوب
أوجد سعر الوحدة الواحدة من السلعة ومن السلع المكملة التى تجعل الكمية المطلوبـه من السلعة أكبر مايمكن ثم عقب على الناتج .

الحل
١- بما أن
$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 5000 - x_1^3 - 0.5x_2^2 - x_3^2 + 27x_1 + 25x_2 + 10x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 27, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -(0.5)(3x_2^2) + 25 = -1.5x_2^2 + 25$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -3x_3 + 10$$

وبما أن عند نقط الاستقرار نجد أن

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 \rightarrow$$

$$-3x_1^2 + 27 = 0 \rightarrow x_1^2 = 9 \rightarrow x_1 \pm 3$$

$$-1.5x_2^2 + 25 = 0 \rightarrow x_2^2 = \frac{25}{1.5} \rightarrow x_2 = \pm 4.08$$

$$-2x_3 + 10 + 0 \rightarrow x_3^2 = 5$$

أى أنه يوجد 4 نقط استقرار للدالة هى :

$(x_1=-3,\ x_2=-4.08,\ x_3=5)$, $(x_1=-3,\ x_2=4.08,\ x_3=5)$,
$(x_1=3,\ x_2=-4.08,\ x_3=5)$, $(x_1=3,\ x_2=4.08,\ x_3=5)$

وبما أن x_1, x_2, x_3 تمثل اسعار فأننا نرفض الثلاثة نقط الاولى ونفحص النقطة الاخيرة فقط على النحو التالى :

-٢

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -3(2)x_1 = -6x_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -1.5(2)x_2 = -3x_2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = -3$$

$$\rightarrow$$

وعند نقطة الاستقرار $(x_1=3,\ x_2=+4.08,\ x_3=5)$

فأن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -6(3) = -18$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -3(+4.08) = -12.24$$

وبالتالى فأن المصفوفة الهيسينة H عند النقطة $(x_1=3, x_2= +4.08, x_3=5)$

$$H = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -12.24 & - \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$|H_1| = |-18| = -18 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -12.24 \end{vmatrix} = 220.32 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -12.24 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -18 \begin{vmatrix} -12.24 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -18(15.24 - 0)$$

$$= -274.32 < 0$$

وبالتالى فأن النقطة $(x_1=3, \ x_2=4.08, x_3=5)$ نقطـة نهايـة عظمـى لدالـة الطلـب y وتكون الكمية المطلوبة عند هذه النقطة

$$
\begin{aligned}
y(x_1=3, x_2-4.08, x_3=5) &= 5000-(3)3-0.5(4.08)2-(5)3 \\
&\quad +27(3)+25(4.08)+10(5) \\
&=5000-27-8.32-125+81+102+50 \\
&=5072.68 \approx 5073 \text{ وحدة}
\end{aligned}
$$

أى أن اكبر كمية يمكن طلبها مـن المنتـج تسـاوى 5073 وحـدة وذلـك عندمـا يكـون سعر بيع الوحدة منها 3 جنيهات وسعر بيع الوحدة من السلعة الاولـى المكملـة 4.08 جنية وسعر بيع الوحدة من السلعة الثانية المكملة 5 جنيهات .

(٨-٤) طريقة لاجرنج The Lagrange Multiplier Method

فى الفصلين (٨-٢)، (٨-٣) تناولنا بعض المشاكل التى يمكن حلها بأستخدام أساليب التفاضل . حيث أمكن صياغة كل من هذه المشاكل فى صورة دالة يراد البحث عن قيم متغيراتها التى تجعلها نهاية عظمى (أو صغرى). وهذا النوع من المشاكل يسمى بمشاكل الامثلية غير المقيدة Unconstrained optimization problem. ويوجد نوع آخر من المشاكل يمكن صياغة كل منها فى صورة دالة يراد ايجاد نهايتها العظمى (أو الصغرى) ولكن تحت شرط أو مجموعة من الشروط تصاغ فى شكل معادلات (أو متباينات) وهذا النوع من المشاكل يسمى بمشاكل الامثلية المقيدة Constrained optimization problems .

وتوجد طرق متعددة لصياغة وحل هذا النوع من المشاكل . وفى هذا الفصل سوف نتناول كيفية صياغة هذا النوع من المشاكل من خلال بعض الامثلة التطبيقية كذلك سوف نتناول أحد طرق حل هذا النوع من المشاكل وأهمها وهى ماتسمى بطريقه لاجرانج نسبة الى عالم الرياضيات الكبير "لاجرانج".

مثال (٨-١٣)

تقوم أحد شركات أنتاج الورق بأنتاج النوعين A,B ومن خلال دراسة ربح الشركة من أنتاج النوعين A,B فى السنوات السابقة أمكن صياغة دالة الربح بالجنية (z) على الصورة التالية :

$$z = 1200x + 1600y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

حيث تمثل x عدد الوحدات التى يتم أنتاجها من النوع A (بالطن)، y عدد الوحدات التى يتم أنتاجها من النوع B (بالطن).

فاذا قامت ادارة التسويق بدارسة الطلب المتوقع فى السوق هذا العام على النوعين A,B وجدت أن اجمالى الطلب على النوعين فى السوق يساوى 10000 طن ، أى:

$$x + y = 10000$$

والمطلوب تقدير عدد الوحدات التى يجب أنتاجها هذا العام من النوع A(x) ، ومن النوع B(y) بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن .

الحل

مما سبق يتضح أن مشكلة هذه الشركة يمكن صياغتها على النحو التالى :
أوجد قيم x, y التى تجعل الدالة z نهاية عظمى :

$$\text{Max. } z = 1200x+1600y-2x^2-4y^2-4xy \qquad (8.30)$$

تحت القيود

Subject to:

$$x + y = 10000 \qquad (8.31)$$

$$x,y \geq 0 \qquad (8.32)$$

وتسمى المشكلة (8.32)-(8.30) بمشكلة برمجة غير خطية Nonlinear programming problem حيث تسمى الدالة (8.30) بدالة الهدف وتسمى المعادلات والمتباينات(8.32),(8.31) بالقيود constraints (Conditions).

وبالتالى فأن الصياغة العامة لهذا النوع من المشاكل تأخذ الشكل التالى :

أوجد قيم $x_1,x_2,...,x_n$ التى تجعل الدالة z .

$$\text{Max. (or Min.) } z = f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (8.33)$$

Subject to

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n) = k_i \quad , \quad i=1,2,...,m \qquad (8.34)$$

حيث k_i مقادير ثابتة .

ملاحظات

١- عندما تكون كل دالة من الدوال z, $g_i(x_1,...,x_n)$, $i=1,2,..,n$ فأن النموذج (8.34)-(8.33) يصبح نموذج برمجة خطية يمكن حله بأستخدام الطريقة البيانية أو طريقة السمبلكس (أنظر الباب السادس).

٢- ولكن عندما تكون واحدة على الاقل من الدوال z ، $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ دالة غير خطية يصبح النموذج (8.34)-(8.33) نموذج غير خطى .

طريقة لاجرانج Lagrangian Method

وكما ذكرنا سابقا توجد طرق مختلفة لحل النموذج (8.34) - (8.33).وهنا سوف نتناول طريقة لاجرانج وتعتمد هذه الطريقة على تحويل المشكلة المقيدة الى مشكلة غير مقيدة ثم حل المشكلة غير المقيدة بأستخدام الطرق المقدمة فى الفصل (٨-٣).وفى هذا الفصل سوف نكتفى بالمشاكل المقيدة بقيد واحد فقط . وسوف نوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالى :

مثال (٨-١٤)

أوجد قيم x_1,x_2 التى تجعل الدالة .

$$\text{Min. } z = f(x_1,x_2) = 5000 - x_1^2 - x_2^2$$

S.T.

$$g(x_1,x_2):\ 5x_1+x_2 = 10$$

الحل

١- يتم تحويل المشكلة المقيد الى مشكلة غير مقيدة بتكوين الدالة (L) والتى تسمى بدالة لاجرانج Lagrangian function على النحو التالى :

$$L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) - \lambda[g(x_1,x_2) - k\ \ ]$$

$$\rightarrow$$

$$L(x_1,x_2,\lambda) = 5000 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda[5x_1 + x_2 - 10]$$

حيث تسمى λ بمعامل لاجرانج Lagrange multiphier وقد أثبت لاجرانج أن قيم x_1,x_2,λ التى تجعل الدالة $L(x_1,x_2,\lambda)$ نهاية عظمى (أو صغرى) هى نفس القيم التى تجعل الدالة $f(x_1,x_2)$ نهاية عظمى (أو صغرى).

٢- وبالتالى تصبح المشكلة هى ايجاد النهاية العظمى (أو الصغرئ) للدالة z على النحو الذى تم شرحه فى الفصل (٨-٣) كما يلى :

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - 5\lambda = 0 \qquad (8.35)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \qquad (8.36)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x} = -5x_1 - x_2 + 10 = 0 \qquad (8.37)$$

وبحل المعادلات (8.37)-(8.35) نجد أن :

$$x_1 = \frac{50}{26} \quad , \quad x_2 = \frac{10}{26} \quad , \quad \lambda = \frac{20}{26}$$

وبالتالى تصبح النقطة $\left(x_1 = \frac{50}{26},\ x_2 = \frac{10}{26},\ \lambda = \frac{20}{26}\right)$ نقطة استقرار للدالة $L(x_1,x_2,\lambda)$.

٣- نوجد المشتقات من الرتبة الثانية للدالة $L(x_1,x_2,\lambda)$ عند نقطة الاستقرار على النحو التالى :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} = -5$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} = -1$$

٤- ثم تكون المصفوفة الهيسينية المتاخمة The bordered hessian matrix ونرمز لها بالرمز H_B. والتى يتم تعريفها على النحو التالى :

$$H_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

٥- نوجد قيمة المحدد $|H_B|$ فاذا كانت قيمة موجبه تكون قطة نهاية الاستقرار عظمى ، واذا كانت قيمة المحدد $|H_B|$ قيمة سالبة تكون النقطة نهاية صغرى .

أو بعبارة أخرى

- تكون نقطة الاستقرار نهاية عظمى اذا كان

$|H_B| > 0$

- وتكون نقطة الاستقرار نهاية صغرى اذا كان

$|H_B| < 0$

وبما أن

$$|H_B| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -52$$

اذن النقطة $(x_1 = \frac{50}{26}, x_2 = \frac{10}{26})$ نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x_1,x_2)$ حيث :

$$f(x_1 = \frac{50}{26}, x_2 \frac{10}{26}) = 5000 - (\frac{50}{26})^2 - (\frac{10}{26})^2$$

وفيما يلى سوف نلخص الخطوات التى يجب أتباعها لحل النموذج العام فى(8.33) - (8.34) على النحو التالى :

١- نكون دالة لاجرانج على النحو :

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)-\lambda[g(x_1,\dots,x_n)-k]$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية الاولى لدالة لاجرانج ونساوى كل منها بالصفر لنحصل على نقط الاستقرار للدالة $L(x_1,\dots,x_n,\lambda)$ أو بعبارة أخرى .

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial L(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial_1 x_1}=0\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial L(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial x_n}=0\\
&\frac{\partial L(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial \lambda}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (8.39)$$

٣- نوجد المشتقات الجزئية الثانية عند نقطة الاستقرار المراد تحديد طبيعتها وتكون المصفوفة الهيسينية المتاخمة H_B حيث :

$$H_B=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x_n}\\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_n}\\
\vdots & & & & \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}
\end{bmatrix}\qquad (8.40)$$

٤- نوجد المحيددات الاساسية المتاخمة Bordered principal minors التى يتم تعريفها على النحو التالى

$$\left|H_{B_2}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \tag{8.41}$$

$$\left|H_{B_3}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} \tag{8.42}$$

$$\vdots$$

$$\left|H_B\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \tag{8.43}$$

٥- تكون نقطة الاستقرار نقطة نهاية عظمى اذا كان :

$$\left|H_{B_2}\right| > 0,\ \left|H_{B_3}\right| < 0,\ \left|H_{B_4}\right| > 0, \ldots\ldots$$

وتكون نقطة الاستقرار نهاية صغرى اذا كان

$$\left|H_{B_2}\right| < 0,\ \left|H_{B_3}\right| < 0,\ \left|H_{B_4}\right| < 0, \ldots\ldots$$

مثال (٨-١٥)

أوجد الحل الامثل للمشكلة التالية :

Max. $f(x_1,x_2,x_3)= 100\, x_1x_2x_3$

S.T.

$x_1+2x_2+3x_3 = 18$

الحل

١- نحول المشكلة من مشكلة مقيدة الى مشكلة غير مقيدة عن طريق تكوين دالة لاجرانج $L(x_1,x_2,x_3,\lambda)$ على النحو التالى :

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= f(x_1,x_2,x_3) - \lambda[g(x_1,x_2,x_3) - k] \\ &= 100x_1x_2x_3 - \lambda[x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 18] \end{aligned}$$

٢- نوجد نقط الاستقرار للدالة $L(x_1,x_2,x_3,\lambda)$ وذلك بأيجاد المشتقات الاولى ومساواة كل منها بالصفر على النحو التالى :

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_1} = 100x_2x_3 - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_2} = 100x_1x_3 - 2\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial x_3} = 100x_1x_2 - 3\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,x_3,\lambda)}{\partial\lambda} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 18 = 0 \qquad (4)$$

من المعادلتين (2) ,(1) نجد أن :

$$\lambda = 100x_2x_3 \qquad (5)$$
$$\lambda = 50x_1x_3 \qquad (6)$$

وبقسمة المعادلة (5) على المعادلة (6) نجد أن :

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 \qquad (7)$$

بالتعويض بـ (5) ,(7) فى (3) نجد أن :

$$x_3 = \frac{1}{3}x_1 \qquad (8)$$

بالتعويض بقيم x_3, x_2 بدلالة x_1 فى المعادلة (4) نجد أن :

$$x_1 + 2(\frac{1}{2}x_1) + 3(\frac{1}{3}x_1) = 18 \rightarrow$$
$$x_1 + x_1 + x_1 = 18 \rightarrow$$
$$3x_1 = 18 \rightarrow \quad x_1 = 6 \rightarrow$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(6) = 3 \quad , \quad x_3 = \frac{1}{3}(6) = 2 \rightarrow$$
$$\lambda = 100(3)(2) = 600$$

وبالتالى فأن النقطة $(x_1 = 6, x_2 = 3, x_3 = 2, \lambda = 600)$ تمثل نقطة اسـتقرار للدالـة $L(x_1,x_2,x_3,\lambda)$.

٣- نوجد المشتقات الجزئية الثانية عند نقطة الاستقرار على النحو التالى :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 100x_3 = 100(2) = 200$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 100x_1 = 100(6) = 600$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \lambda} = -3 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 100x_2 = 100(3) = 300$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 0$$

$\rightarrow$

وبالتالى فأن عناصر المصفوفة الهيسينية المتاخمة H_B عند نقطة الاستقرار على النحو التالى :

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 200 & 300 \\ -2 & 200 & 0 & 600 \\ -3 & 300 & 600 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

٤- نقوم بحساب قيم المحيددات الرئيسية المتاخمة على النحو التالى :

$$|H_{B_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 200 \\ -2 & 200 & 0 \end{vmatrix} = 800 > 0$$

$$|H_B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 200 & 300 \\ -2 & 200 & 0 & 600 \\ -3 & 300 & 600 & 0 \end{vmatrix}^{*}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 200 & 300 \\ -2 & 0 & 600 \\ -3 & 600 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 300 \\ -2 & 200 & 600 \\ -3 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(-3)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 200 \\ -2 & 200 & 0 \\ -3 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{-(2)\begin{vmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 0 \end{vmatrix} - (600)\begin{vmatrix} -1 & 200 \\ -3 & 600 \end{vmatrix}\right\}$$

$$-2\left\{-1\begin{vmatrix} 200 & 600 \\ 300 & 0 \end{vmatrix} + 300\begin{vmatrix} -2 & 200 \\ -3 & 300 \end{vmatrix}\right\}$$

* أنظر الباب الرابع (٤-٣).

$$+3\left\{-1\begin{vmatrix}200 & 0\\ 300 & 600\end{vmatrix}+200\begin{vmatrix}-2 & 200\\ -3 & 300\end{vmatrix}\right\}$$

$$= -1140000 < 0$$

وبما أن $|H_{B_2}| > 0,\ |H_B| < 0$ عند نقطة الاستقرار اذن نقطة الاستقرار نقطة نهايــة عظمى . وبالتالى يكون الحل الامثل للمشكلة هو :

$x_1 = 6\ ,\ x_2 = 3,\ \ x_3 = 2$

$f(x_1{=}6,\ x_2{=}3,\ x_3{=}2) = 100(6)(3)(2)$

$= 3600$

(٨-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)

اذا كان العائد الشهرى ((y(P)) لاحدى المنتجات الاستهلاكية دالة فى سعر الوحدة الواحدة من السلعة (P) على النحو التالى :

$$y(P)=2000P - 30P^2$$

المطلوب

أ) أوجد معدل التغير اللحظى للعائد عندما يكون سعر الوحدة 15 جنية وعقب على الناتج .

ب) أوجد أقصى عائد يمكن الوصول اليه ثم حدد السعر الذى يحقق ذلك .

الحل

أ) معدل التغير اللحظى 'y حيث :

$$y'=\frac{dy(P)}{dP}=2000-60P$$

عندما P=15 فأن

$$\left.\frac{dy(P)}{dP}\right|_{P=100}=2000-60(15)$$

=2000-900=1100جنية

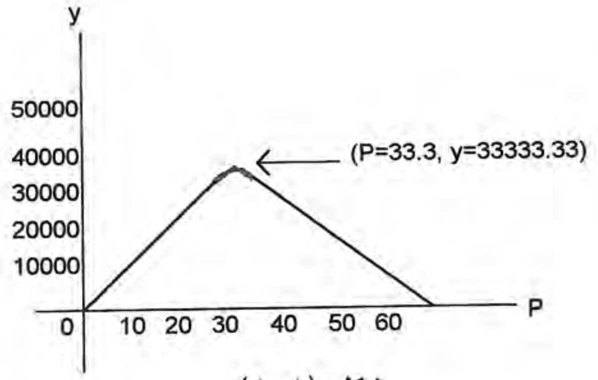
وهذا يعنى أنه اذا زاد (أو نقص) سعر الوحدة من السلعة من 15 الى 16 جنية (أو من 15 الى 14 جنية) سوف يؤدى الى زيادة (أو نقص) العائد الشهرى بمقدار 1100 جنية .

ب) بما أن

$$y(P)=2000P-30P^2\rightarrow$$
$$y'=2000-60P$$

وعند نقط الاستقرار

$$y' = 0 \rightarrow$$
$$2000 - 60P = 0 \rightarrow$$



شكل (٨-٤)

$$P = \frac{2000}{60} = \frac{200}{6} = 33.33 \text{ جنية}$$

وعندما P=33.33 فأن

y(P)=2000(33.33)-30(33.33)2
= 33.33 [2000-30(33.33)]
= 33.33 [2000-999.9]
= 33.33(1000.1)
= 33333.33 جنية

وشكل (٨-٤) يوضح ذلك . ويمكن أختبار أن أقصى عائد ممكن الوصول اليه 33333.33 جنية على النحو التالى :

y"(P=33.33)=-60

اذن يكون العائد أكبر مايمكن عندما يكون سعر بيع الوحدة من السلعة 33.33 جنية.

تطبيق (٢)

فى أحدى شركات صناعة الالات الثقيلة تم تحديد التكلفة الكلية f(x) كدالة فى عدد الوحدات المنتجة (x) على النحو التالى :

$$f(x)=30000 + 1200x+0.3x^2$$

والمطلوب

١- أوجد التكلفة الكلية لانتاج 10 آلات وحدد متوسط تكلفة الاله الواحدة .

٢- أوجد عدد الالات التى يمكن انتاج بحيث تكون التكلفة المتوسطة أقل مايمكن .

الحل

١- بما أن

$f(x) = 30000 + 1200x + 0.3x^2 \rightarrow$

$f(10) = 30000 + 1200(10) + 0.3(10)^2$

$= 30000 + 12000 + 30$

$= 42030$ جنية

متوسط تكلفة الوحدة $A(x)$ يمكن ايجادها من المعادلة التالية:

$$A(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{30000 + 1200x + 0.3x^2}{x}$$

$$A(x = 10) = \frac{42030}{10} = 4203 \text{ جنية}$$

٢- بما أن متوسط تكلفة الوحدة

$A(x) = 30000x^{-1} + 1200 + 0.3x$

أذن

$A'(x) = -30000x^{-2} + 0.3$

وعند نقط الاستقرار لدالة التكلفة المتوسطة نجد أن

$A'(x) = 0 \rightarrow$

$-30000x^{-2} + 0.3 = 0 \rightarrow$

$\frac{-30000}{x^2} + 0.3 = 0 \rightarrow$

$-30000 + 0.3x^2 = 0 \rightarrow$

$x^2 = \frac{30000}{0.3} = 100000$

$$x = \pm\sqrt{100000} = \pm 316.2 \approx \pm 316$$

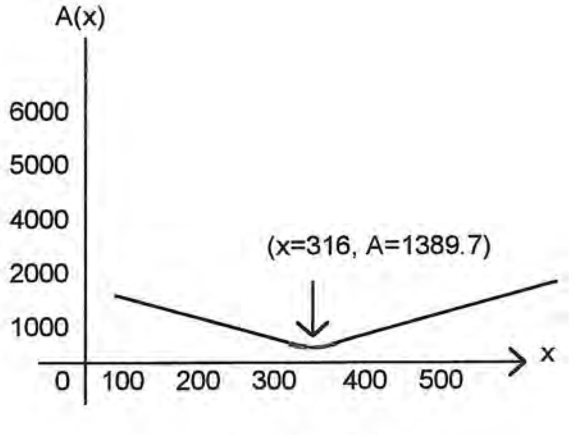
x=-316 أو x=+316

وبما أن x تمثل عدد الالات التى يمكن انتاجها وبالتالى فأننا نأخذ x=316 .

$$"A(x) = -30000(-2)x^{-3}$$
$$= +60000x^{-3}$$

$$"A(x=316) = +60000(316)^{-3}$$
$$= +0.002 > 0$$

وبما أن قيمة المشتقة الثانية عند x=316 قيمة موجبة اذن النقطة (x=316, A(316):1389.74) نقطة نهاية صغرى للدالة A(x) . كما هو موضح بالشكل التالى.



شكل (٨-٥)

أو بعبارة أخرى أقل تكلفة متوسطة للالة الواحدة تساوى 1389.74 جنية وتتحقق أقل تكلفة متوسطة عندما يتم انتاج عدد من الالات يساوى 316 آلة .

تطبيق (٣)

فى أحدى الدول التى عانت من الحروب فى الفترة (١٩٨٨-١٩٩٣) تم تقدير عدد السكان (z) بالمليون نسمة لدالة فى معدل النمو السكانى (x) ، والفترة الزمنية (t) بالسنوات ، حيث أعتبر سنه ١٩٨٨ سنه الاساس على النحو التالى :

$z = 10-3x^2+0.2xt-0.01t^2-0.01t$

والمطلوب

١- قدر عدد السكان سنة ١٩٩٢ اذا كان معدل النمو السنوى x=0.03 وعلق على الناتج .

٢- أوجد السنه التى يحدث فيها أعلى معدل للنمو السكانى وقدر عدد السكان فى هذه السنه .

الحل

١- فى سنة ١٩٩٢ نجد أن t=4 , x=0.003

$z(x=0.003, t=4)=10-3(0.03)^2+0.2(0.03)(4)-0.01(4)^2-.01(4)$

$=10-0.0027+0.024-01.6-0.04$

$=8.0053$ مليون نسمة (1)

أى أن مقدار النقص فى عدد السكانية I فى 4 سنوات وليكن I حيث :

$I = 8.0053-10 = -1.9947$ مليون نسمة (2)

٢- لتحديد x,t التى تجعل الدالة z أكبر مايمكن نوجد نقط الاستقرار للدالة z على النحو التالى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -6 + 0.2t - 0 = 0 \rightarrow \qquad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0.2x - 0.02t - 0.01 = 0 \rightarrow \qquad (4)$$

$x = 0.071$ $\qquad$ $t = 2.14$ سنة

٣- نوجد المشتقات الجزئية الثانيه عند النقطة $(x=0.07), t=2.14$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0.2 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -0.02$$

$$\rightarrow$$

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 0.2 \\ 0.2 & -0.02 \end{bmatrix} \rightarrow \tag{5}$$

$$|H_1| = |-6| = -6 < 0 \tag{6}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0.2 \\ 0.2 & -.02 \end{vmatrix} = +0.12 - 0.04$$
$$= +.08 > 0 \tag{7}$$

من (6) ,(7) يتضـح أن النقطـة $(z=9.9482, \ x=0.071, \ t=2.14)$ نهايـة عظمـى ، وبالتالى أكبر عدد للسكان لهذه الدولة وفقا للدالة z سوف يحدث فى النصف الاول من سنة 1991 تقريبا .

ويكون معدل النمو $x=0.071$ وفى هذه الحالة يكون عدد السكان $z=9.9482$ مليـون نسمة .

تطبيق (٤)

قامت احدى شركات انتاج وبيع اجهزة الكمبيوتر من نوع معين بتقدير عدد الاجهـزة المطلوبة خلال عام فـى السـوق مـن النـوع الـذى تقوم بانتاجـه فوجـدت أن الكميـه المطلوبة (z) تعتمد على سعر الجهاز (x_1) بالالف جنية والذى تحـدده الشركـة والسعر لنفس الجهاز من أنتاج شركتين أخرتين فى السوق (سلع بديلة) أولهما تبيع

الجهاز بسعر (x_2) بالالف جنية والاخرى تبيع الجهاز بسعر (x_3) بالالف جنيـة فـاذا كان :

$$z = 120000 - 0.5x_1^2 - 0.4x_2^2 - 0.2x_3^2 + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

المطلوب

أوجد سعر الجهاز الواحد من أنتاج الشركة ومن انتاج الشركات الاخرى الذى يجعل الكمية المطلوبة أكبر مايمكن . وعلق على الناتج .

الحل

١) نوجد نقط الاستقرار

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -(0.5)(2x_1) + 10 = -x_1 + 10 = 0 \rightarrow$$

$x_1 = 10$ ألف جنية

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -0.4(2x_2) + 5 = -0.8x_2 + 5 = 0 \rightarrow$$

$x_1 = 6.25$ ألف جنية

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -.2(2x_3) + 4 = -.4x_3 + 4 = 0 \rightarrow$$

$x_3 = 10$ ألف جنية

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = -1 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0.8 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = -0.4$$

$$H=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -0.8 & 0\\ 0 & 0 & -0.4\end{bmatrix}\rightarrow$$

$|H_1|=|-1|=-1<0$

$$|H_2|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -.8\end{vmatrix}=+.8-0=+.8>0$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -0.8 & 0\\ 0 & 0 & -0.4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-0.8 & 0\\ 0 & -0.4\end{vmatrix}$$
$$=-1(0.32-0)=-1<0$$

اذن النقطة $(z=120086, x_1=10, x_2=6.25, x_3=10)$ نقطة نهاية عظمى أى أقصى كمية مطلوبة من أجهزة الشركة تساوى 120086 جهاز عندما يكون سعر الجهاز 10 آلاف جنية وأسعار الاجهزة البديلة 6.25 ألف جنية سعر الجهاز من أنتاج الشركة الاولى ، 10 آلاف جنية سعر الجهاز من أنتاج الشركة الثانية .

تطبيق (٥)

فى أحدى شركات أنتاج أجهزة الكمبيوتر تقوم الشركة بأنتاج النوعيين A, B . وبدراسة الطلبات على شراء أجهزة الشركة من النوعين وجد طلبات لـ 500 جهاز من النوعين ، فاذا كانت دالة تكلفة الانتاج على النحو التالى :

$$C(x_1,x_2)=50x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1000$$

حيث x_2, x_1 هى عدد الاجهزة المنتجة من النوع B, A على الترتيب .

والمطلوب

أ) تقدير التكاليف عند أنتاج 100 جهاز من النوع A ,80 جهاز من النوع B.

ب) أوجد التكاليف الحدية عندما $x_1=10, x_2=10$.

ج) أوجد عدد الاجهزة التى يجب أنتاجها من النوعين بحيث تكون التكاليف أقل مايمكن (بأستخدام طريقة لاجرانج).

الحل

أ)

$$\begin{aligned} C(x_1=100, x_2=80) &= 500(100)^2+(100)(80)+(80)^2+1000 \\ &= 50(10000)+8000+6400+1000 \\ &= 500000+8000+6400+1000 \\ &= 515400 \text{ جنية} \end{aligned}$$

ب) التكلفة الحدية بالنسبة لـ x_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x_1,x_2)}{\partial x_1} &= 100x_1 + x_2 \\ &= 100(10)+10 \\ &= 1000+10 = 1010 \text{ جنية} \end{aligned}$$

التكلفة الحدية بالنسبة لـ x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x_1,x_2)}{\partial x_2} &= x_1 + 2x_2 \\ &= (10)+2(10)=10+20 \\ &= 30 \text{ جنية} \end{aligned}$$

$$\text{Min } C(x_1,x_2) = 50x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1000$$

S.T.

$x_1+x_2 = 500$

١- نحول المشكلة الى مشكلة غير مقيدة وذلك بتكوين دالة لاجرانج .

$$L(x_1,x_2,\lambda)=50x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1000-\lambda[x_1+x_2-500]$$

٢- نوجد نقط الاستقرار للدالة $L(x_1,x_2,\lambda)$ على النحو التالى :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=100x_1+x_2-\lambda=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1+2x_2-\lambda=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-500=0 \qquad (3)$$

وبحل المعادلات (3)-(1) نجد أن :

$x_1=5,\ x_2=495\ ,\ \lambda=203$

وبالتالى تمثل النقطة $(x_1=5, x_2=495\ ,\ \lambda=203)$ نقطة استقرار نقوم بفحصها على النحو التالى :

-٣

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=100 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda}=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda}=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0$$

$\rightarrow$

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 100 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$|H_B| = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 100 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-2+1)-(-1+100)$
$= -1-(99)$
$= -100 < 0$

$\rightarrow$

اذن النقطـة $x_1=5,\ x_2=495$ نقطـة نهايـة صغـرى للدالـة $C(x_1,x_2)$ ، وبالتـالى أقـل تكلفة التى تحقق طلب يساوى 500 جهاز من النوعين هى :

$C(x_1=5), x_2=495)=50(5)2+(5)(495)+(495)2+1000$
$=50(25)+2475\_245025+1000$
$= 249750$ جنية

(٨-٦) تمرينات Exercises

(١) أوجد نقط الاستقرار لكل دالة من الدوال التالية . ثم أختبر كل نقطة لتحديد اذا كانت نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة انقلاب .

1. $f(x)=10x-40$
2. $f(x)-2x^2-10x+20$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-25$
4. $f(x)=x^2/6-x$
5. $f(x)=(5x-2)^4$
6. $f(x)=x(x+3)^4$
7. $f(x)=\frac{x^2 1}{(x^2+1)}$
8. $f(x)=e^{2x+1}$
9. $f(x)=x^2(x^2+x-1)$
10. $f(x)=2e^{x^2}+3e^{x^3}+4e^{x^4}$
11. $f(x)=e^{(x^2-1)}/e^{3x}$
12. $f(x)=(x^3-9)^4/(x^2+5)^2$
13. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x$
14. $f(x)=\ln(2x+5)$
15. $f(x)=x^2-10x+8$
16. $f(x)=(x+10)\ln(x)$
17. $f(x)x^6/6-x$
18. $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}, \; 1<x\leq 9$
19. $f(x)=-x^2+8x-100, \; -4\leq x\leq 2$

(٢) اذا كان الربح السنوى لاحدى الشركات يعتمد على عدد الوحدات المنتجه سنويا من انتاجها . فاذا كانت العلاقة بين الربح السنوى $f(x)$ وعدد الوحدات النتجة خلال عام تأخذ الشكل التالى :

$$f(x)= 300000 + 6000x - 0.05x^2$$

١- أرسم الدالة $f(x)$

٢- أوجد عدد الوحدات التى يجب أنتاجها سنويا بحيث يكون الربح السنوى أكبر مايمكن .

(٣) أوجد نقط الاستقرار للمشاكل التالية ، ثم أختبر طبيعة كل نقطة

1. $f(x_1,x_2) = -5x_1^2 - 3x_2^2 + 15x_1x_2$
S.T.
$x_1+x_2 = 100$

2. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$
S.T.
$x_1+x_2 = 20$

3. $f(x_1\ x_2)=x_1\ x_2$
S.T.
$x_1+x_2 = 10$

4. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
S.T.
$2x_1-x_2+x_3 = 10$

5. $f(x_1,x_2,x_3)=x1*x3$
S.T.
$2x_1+3x_2+x_3 = 18$

(٤) تقوم احدى شركات انتاج التليفزيونات بأنتاج النوعين A, B من التليفزيونات فاذا قامت الشركة بتقدير دالة الربح الشهرى على النحو :

$$f(x_1,x_2) = \frac{80x_1}{5+x_1} + \frac{40x_2}{10+x_2} - 2x_1 - 2x_2$$

حيث x_1 هى عدد الوحدات المباعة شهريا من النوع A, X_2 عدد الوحدات المباعة شهريا من النوع B. فاذا كانت الطاقة الانتاجية الشهرية للشركة تساوى 1000 تليفزيون شهريا من النوعين .

والمطلوب

أ) أوجد الربح للشركة فى حالة بيع عدد 100 جهاز مـن النـوع A ، 150 جهـاز من النوع B .

ب) أوجد العدد الامثل للاجهزة التى يجب أنتاجها من كل نوع .

الباب التاسع

التكامل (أو العملية العكسية للمشتقات)

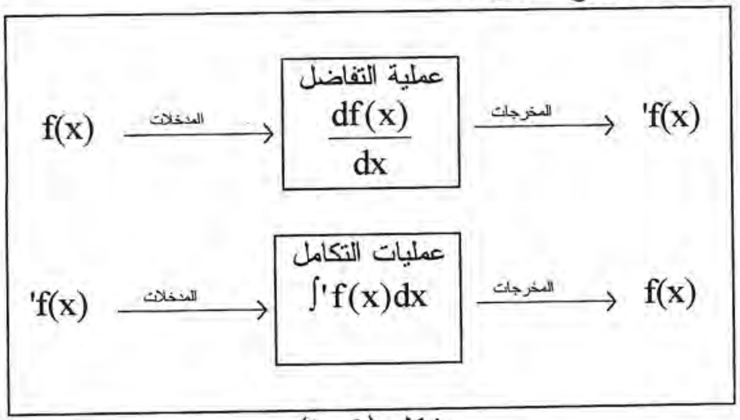
Integration (Antiderivatives)

(٩-١) مفهوم التكامل **Concept of Integration**

اذا كانت المشتقة الاولى للدالة $f(x)$ هى $f'(x)$ وفى الباب السابع تم تقديم عملية التفاضل وهى العملية التى بأستخدامهايمكن الحصول على المشتقه الاولى $f'(x)$ للدالة الاصلية $f(x)$.

فاذا كان لدينا المشتقة الاولى $f'(x)$ فأننا يمكن بأستخدامها الحصول على الدالة الاصلية $f(x)$. وتسمى عملية الحصول على الدالة الاصلية $f(x)$ من الدالة $f'(x)$ بعملية التكامل Integration process ، وبالتالى فأن عملية التكامل هى العملية العكسية للتفاضل Antiderivative process .

وكما سبق أن اشرنا فى الباب السابع الى عملية اجراء التفاضل للدالة $f(x)$ على النحو $\frac{df(x)}{dx}$ أو $f'(x)$ فأن عملية اجراء التكامل للدالة $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ يشار اليها على النحو $\int f'(x)dx$ وتقرأ "تكامل الدالة $f'(x)$ بالنسبه للمتغير x". والشكل التالى يوضح كل من عملية التفاضل والتكامل .



شكل (٩-١)

فاذا كانت المشتقه الاولى للدالة $f(x)$ هى $f'(x)$ حيث :

$$f'(x)=10$$

فأن الدالة التى لها المشتقه الاولى تساوى 10 هى :

$$f(x) = \int' f(x)dx = \int 10dx = 10x$$

وقد تكون

$$f(x) = \int 10dx = 10x + 1$$

أو

$$f(x) = \int 10dx = 10x + 2$$

وبصفة عامة يمكن كتابه الدالة f(x) على النحو

$$f(x)=10x+C$$

حيث C أى مقدار ثابت Any constant يسمى بثابت التكامل Constant of integration .

مثال (٩-١)
أوجد الدوال التى لها المشتقات التالية :

1. $'f(x)=3x+5$
2. $'f(x)=0$
3. $'f(x)=5x^4-4x^4$

الحل
١- بما أن

$$'f(x)=3x+5 \rightarrow$$
$$f(x) = \int' f(x)dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

٢- بما أن

$$'f(x) = 0 \rightarrow$$
$$f(x)=f'f(x)dx=f0dx=C$$

٣- بما أن

$$'f(x)=5x^4-4x^3 \rightarrow$$

حيث C مقدار ثابت .

$f(x)=\int f'(x)dx=x^5-x^4+C$

مثال (٩-٢)

اذا كانت دالة التكلفة الحدية Marginal cost $f'(x)$ لاحدى المنتجات دالة فى عدد الوحدات المنتجة (x) على النحو .

$f'(x)=300+x$

أوجد دالة التكلفة $f(x)$ ، واذا كان تكلفة 10 وحدات تساوى 10000 جنية ، فأوجد قيمة ثابت التكامل .

الحل

بما أن

$$f'(x)=300+x \rightarrow$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=300x+\frac{1}{2}x^2+C$$

حيث C مقدار ثابت .

وعند $x=10,\ f(10)=10000$ فأن

$$f(10)=300(10)+\frac{1}{2}(10)^2+C \rightarrow$$

$$10000=3000+50+C$$
$$=3050+C \rightarrow$$

$$C=10000-3050 \rightarrow$$
$C=6950$ جنية

$$\rightarrow$$
$$f(x)=300x+\frac{1}{2}x^2+6950$$

مثال (٩-٣)
اذا كانت دالة العائد الحدى لاحدى المنتجات هى دالة فى عدد الوحدات المنتجة x على النحو :

$$f'(x) = 3000 - x$$

أوجد دالة العائد ، اذا كان العائد يساوى 50000 عندما x=5

الحل
بما أن

$$f'(x) = 3000-x \rightarrow$$

وبالتالى دالة العائد f(x) حيث

$$f(x) = 3000x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

حيث C مقدار ثابت .

وبما أن f(5)=50000 فأن

$$50 = 3000(5) - \frac{1}{2}(5)^2 + C \rightarrow$$

$$50000 = 15000 - \frac{25}{2} + C$$

$$\rightarrow$$

$$C = 50000-15000+12.5$$
$$= 35012.5 \rightarrow$$

$$f(x) = 3000x - \frac{1}{2}x^2 + 35012.5$$

مثال (٩-٤)
أوجد

$$\int (5x-1)^2 dx$$

بما أن

$$\int(5x-1)^2dx = \int(25x^2-10x+1)dx$$

$$= \frac{25}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + x + C$$

حيث C مقدار ثابت .

مما سبق يمكن تعريف التكامل على النحو التالى اذا كانت الدالة f(x) دالـة متمصلـة فأن :

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (9.1)$$

حيث أن C مقدار ثابت ، $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

(٩-٢) قواعد التكامل Rules of Integration

وفيما يلى سوف نقدم أهم القواعد التى يمكن اتباعها لايجاد تكامل بعض الدوال الاكثر استخدام .

قاعدة (١)

اذا كانت K مقدار ثابت فأن

$$\int k dx = kx + C \tag{9.2}$$

حيث C ثابت التكامل .

مثال (٩-٥)

أوجد كل مما يلى :

a) $\int(-15)dx$ b) $\int \frac{8}{9}dx$

c) $\int \sqrt[3]{10}dx$ d) $\int 0dx$

الحل

a) $\int(-15)dx=-15x+C$

b) $\int \frac{8}{9}dx = \frac{8}{9}x + C$

c) $\int \sqrt[3]{10}dx = \sqrt[3]{10}x + C$

d) $\int 0dx = (0)x+C = C$

حيث C ثابت التكامل .

قاعدة (٢)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1 \tag{9.3}$$

مثال (٩-٦)
أوجد

a) $\int x dx$ b) $\int x^4 dx$
c) $\int x^{3/2} dx$ d) $\int \frac{1}{x^5} dx$

الحل
بتطبيق القاعدة السابقة نجد أن

a) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

c) $\int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$

$$= \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$

d) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4} x^{-4} + C$$

قاعدة (٣)
اذا كان k مقدار ثابت فأن

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \qquad (9.4)$$

مثال (٩-٧)

أوجد

a) $\int 100x^3dx$

b) $\int -7x^8dx$

c) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$

d) $\int -9\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

الحل

a) $\int 100x^3\,dx = 100\int x^3\,dx$

$$= 100\left[\frac{x^4}{4} + C\right]$$

$$= \frac{100}{4}x^4 + C$$

$$= 25x^4 + C$$

C ثابت التكامل .

b) $\int -7x^8dx = -7\int x^8dx$

$$= -7\left[\frac{x^9}{9} + C\right]$$

$$= \frac{7}{9}x^9 + C$$

c) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = 3\int \sqrt[4]{x^3}dx$

$$= 3\int x^{\frac{3}{4}}dx$$

$$= 3\left[\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C\right]$$

$$= 3\left[\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C\right]$$

$$= \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$$

d) $\int -9\frac{1}{\sqrt{x}}dx = -9\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$= -9\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -9\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C\right]$$

$$= -9\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C\right]$$

$$= -18x^{\frac{1}{2}} + C$$

قاعدة (٤)

اذا كان $f(x), k(x)$ دالتين متصلتين فى المتغير x فأن :

$$\int [f(x) \pm k(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int k(x)dx \qquad (9.5)$$

مثال (٩-٨)

أوجد

1. $\int (x^2 + 7x)dx$

2. $\int(10x^7 - 4\sqrt{x} + 2x^5)dx$

الحل

1. $\int(x^2+7)dx = \int x^2dx + \int 7xdx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 7\int xdx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 7\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 + C$$

حيث C_2, C_1 مقادير ثابته ، وثابت التكامل C يساوى (C_1+C_2) .

2. $\int(10x^7 - 4\sqrt{x} + 2x^5)dx = \int 10x^7dx - \int 4\sqrt{x}dx + \int 2x^5dx$

$$= 10\int x^7dx - 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^5dx$$

$$= 10\frac{x^8}{8} - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 2\frac{x^6}{6} + C$$

$$= \frac{10}{8}x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{2}{6}x^6 + C$$

$$= \frac{5}{4}x^8 - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^6 + C$$

قاعدة (٥)

$$f x^{-1}dx = \ln x + C \qquad (9.6)$$

قاعدة (٦)

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad (9.7)$$

قاعدة (٧)

$$\int [f(x)]^{n} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (9.8)$$

حيث $n \neq -1$

مثال (٩-٩)

أوجد مايلى

1. $\int (x-1)^3 dx$
2. $\int (5x^2+2x)^{10}(10x+2)dx$
3. $\int \sqrt[3]{(x^2+x)^5}\,(2x+1)dx$

الحل

1. $$\int (x-1)^3(1)dx = \frac{(x-1)^4}{4} + C$$
$$= \frac{1}{4}(x-1)^4 + C$$

2. $$\int (5x^2+2x)^{10}(10x+2)dx = \frac{(5x^2+2x)^{11}}{11} + C$$
$$= \frac{1}{11}(5x^2+2x)^{11} + C$$

3. $$\int \sqrt[3]{(x^2+x)^5}\,(2x+1)dx =$$
$$\int (x^2+x)^{\frac{5}{3}}(2x+1)dx = \frac{(x^2+x)^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C$$

$$= \frac{(x^2+x)^{\frac{8}{3}}}{8/3} + C$$

$$= \frac{3}{8}(x^2+x)^{\frac{8}{3}} + C$$

قاعدة (٨)

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

مثال (٩-١٠)
أوجد مايلى :

1. $\int e^{5x+3}(5)dx$
2. $\int e^{x^2+7x}(2x+7)dx$
3. $\int e^{x^{-2}+5x^{-3}+10x}(4x^{-3}-30x^{-4}-10)dx$

الحل

1. $$\int e^{5x+3}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x+3}(5)dx$$
$$= \frac{1}{5}\left[e^{5x+3}\right] + C$$

2. $$\int e^{x^2+7x}(2x+7)dx = e^{x^2+7x} + C$$
$$\int e^{x^{-2}+5x^{-3}+10x}(4x^{-3}+30x^{-4}-20)dx =$$
$$-2(-2x^{-3}-15x^{-4}+10)e^{x^{-2}+5x^{-3}+10x}dx$$
$$= -2\left[e^{x^{-2}+5x^{-3}+10x}\right] + C$$
$$= -2\ \mathrm{Exp}(x^{-2}+5x^{-3}+10x) + C$$

قاعدة (٩)

$$\int \frac{'f(x)}{f(x)} dx = \ln \ f(x) + C \qquad (9.10)$$

مثال (٩-١١)

أوجد مايلى :

1. $\int \frac{1}{(x+1)} dx$
2. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+1)} dx$
3. $\int \frac{2x+3}{(10x^2+30x)} dx$

الحل

1. $\int \frac{1}{(x+1} dx = \ln(x+1) + C$
2. $\int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+1} dx = \ln(x^2-3x+1) + C$
3. $\int \frac{(2x+3)}{(10x^2+30x} dx = \frac{1}{10} \int \frac{20x+30}{(10x^2+30x)} dx$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln(10x^2+30x)\right] + C$$

$$= \ln\left(\sqrt[10]{10x^2+30x}\right) + C$$

ملحوظة

لاختبار صحة التكامل يمكن اجراء التفاضل للدالة التى حصلنا عليها من عملية التكامل فاذا تساوت مع الدالة التى تم تكاملها كان التكامل صحيح ، أو بعبارة أخرى اذا كان .

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (9.11)$$

حيث C ثابت التكامل .

فاذا كان

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \qquad (9.12)$$

كانت عملية التكامل صحيحة ، أما اذا كان :

$$\frac{dF(x)}{dx}\neq f(x) \qquad (9.13)$$

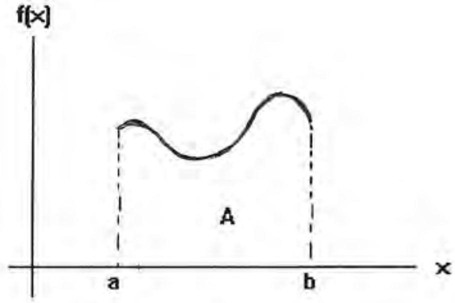
كانت عملية التكامل غير صحيحة .

(٩-٣) التكامل المحدود **Definite Integral**

فى الفصل السابق تناولنا عملية التكامل لبعض انواع الدوال الاكثر شيوعا ويطلق على عملية التكامل هذه بالتكامل غير المحدود Indefinite integral وذلك لتمييزها عن نوع آخر من عملية التكامل تسمى بالتكامل المحدود Definite integral.

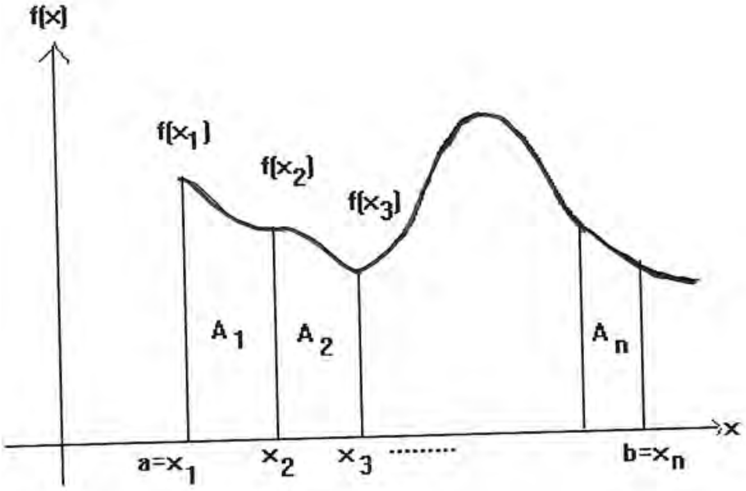
وفى هذا الفصل سوف نتناول بالدراسة مفهوم التكامل المحدود وأهميته من الناحية التطبيقية .

اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $[a,b]$ فأن المساحة المحصورة بين محور المتغير x فى الفترة $a \le x \le b$ ومنحنى الدالة $f(x)$ ولتكون A. كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٩-٢)

يمكن حسابها بتجزئى الفترة $[a,b]$ الى عدد n من الفترات المتساوية بحيث يكون طول كل منها Δx_j حيث $j=1,2,\dots,n$ ، $x_1=a,\ x_n=b$ كما هو موضح بالشكل التالى:



شكل (٩-٣)

وعندما $\Delta x_j \to 0$ لجميع قيم $j=1,2,...,n$ نجد أن كل من المساحات $A_1, A_2, ..., A_2$ قاعدته Δx_j وبالتالى فأن المساحة A هى :

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lim_{n\to\infty} f(x_j)\Delta x_j \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

وعندما يكون المتغير x متغير متصل فأن اشارة المجموع $\sum_{j=1}^{n}$ (أنظر ملحق رقم ١) تستبدل بأشرة التكامل $\int_a^b$.

وبالتالى فأن

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j \qquad (9.15)$$

حيث تسمى كل من a,b بحدود التكامل حيث a الحد الادنى للتكامل Lower limit of integration ، b الحد الاعلى للتكامل Upper limit of integration. والطرف الايسر من العلاقة (9.12) يقرأ "التكامل المحدد للدالة f(x) عند الحد الادنى a والاعلى b" .

نظرية (٩-١)

اذا كان

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

فأن

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (9.16)$$

أى أن قيمة التكامل المحدود لمشتقه دالة يساوى الفرق بين قيمتى الدالة الاصلية عند الحدى الاعلى والادنى للتكامل .

مثال (٩-١٢)

أوجد قيم كل من التكاملات التالية :

1. $\int_0^2 (x+5)dx$
2. $\int_{-1}^{+1} x(x^2-2)dx$
3. $\int_4^{10} \frac{2x}{x^2-1}dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}dx$

5. $\int_{0}^{3}(x^2+2x+1)^2(x+1)dx$ 6. $\int_{0}^{\infty}e^{-3x+1}dx$

الحل

1. $$\int_{0}^{2}(x+5)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_0^2$$
$$=\left[\frac{1}{2}(2)^2+5(2)\right]-\left[\frac{1}{2}(0)^2+5(0)\right]$$
$$=[2+10]-[0]=12$$

2. $$\int_{-1}^{+1}x(x^2-2)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}2x(x^2-2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-2)^2}{2}\right]_{-1}^{+1}$$
$$=\frac{1}{4}\left[(x^2-2)^2\right]_{-1}^{+1}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{[(1)^2-2]^2-[(-1)^2-2]^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(1-2)^2-(1-2)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{1-1\}=0$$

حل آخر

$$\int_{-1}^{+1}x(x^2-2)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}2x(x^3-2x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2\right)_{-1}^{+1}$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^2\right] - \left[\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2\right]$$
$$= \left(\frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$
$$= \frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

3. $$\int_4^6 \frac{2x}{x^2 - 1} dx = [\ln(x^2 - 1)]_4^6$$
$$= [\ln(36\text{-}1)\text{-}\ln(16\text{-}1)]$$
$$= [\ln(35)\text{-}\ln(15)]$$
$$= 3.56\text{-}2.71$$
$$= 0.85$$

4. $$\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 2e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2}[e^{2x}]_{-\infty}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}[e^{2(0)} - e^{2(-\infty)}]$$
$$= \frac{1}{2}[e^{0} - e^{-\infty}]$$
$$= \frac{1}{2}[1 - 0]$$
$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

5. $$\int_0^3 (x^2+2x+1)^5(x+1)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (x^2+2x+1)^5(2x+2)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+2x+1)^6}{6}\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{12}[(x^2+2x+1)^6]_0^3$$
$$= \frac{1}{12}[(9+6+1)^6-(0+0+1)^6]$$
$$= \frac{1}{12}[(16)^6-(1)]$$
$$= \frac{1}{12}(16777216-1)$$
$$= 1398101.25$$

6. $$\int_0^\infty e^{-3x+1}dx = \frac{-1}{3}\int_0^\infty -3e^{-3x+1}dx$$
$$= \frac{-1}{3}\left[e^{-3x+1}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{-1}{3}\left[e^{-3(\infty)+1}-e^{-3(0)+1}\right]$$
$$= \frac{-1}{3}\left[e^{-\infty}-e^{+1}\right]$$
$$= \frac{-1}{3}[0-2.718]$$
$$= \frac{2.718}{3} = 0.906$$

خصائص التكامل المحدود **Properties of Definite Integrals**

١- اذا كانت الدالة f(x) دالة متصلة ومعرفة على الفترة [a,b] فأن

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال (٩-١٣)

اذا كانت الدالة f(x) بحيث

$$f(x)=30x^2$$

فأن

$$\int_{-3}^{+2} f(x)dx = \int_{-3}^{2} 30x^2 dx$$

$$= 30\left[\frac{x^2}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= 30\left[\frac{(2)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{30}{3}[8+27] = 10(35)$$

$$= 350 \qquad (1)$$

كذلك نجد

$$\int_{2}^{-3} f(x) = \int_{2}^{-3} 30x^2 dx$$

$$= 30\left[\frac{x^3}{3}\right]_{2}^{-3} = \frac{30}{3}[(-3)^3 - (2)^3]$$

$$= 10[-27-8] = 10(-35)$$

$$= -350 \qquad (2)$$

من (1) ,(2) يتضح أن

$$\int_{-3}^{2} 30x^2 dx = -\int_{2}^{-3} 30x^2 dx$$

-٢

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (9.17)$$

مثال (٩-١٤)

اذا كان

$$f(x)=x^5+3$$

فأن

$$\begin{aligned}\int_{10}^{10} f(x)dx &= \int_{10}^{10} (x^5+3)dx \\ &= \left[\frac{x^6}{6}+3x\right]_{10}^{10} \\ &= \left[\frac{(10)^6}{6}+(10)\right]-\left[\frac{(10)^6}{6}+3(10)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

٣- اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة ومعرفة علـى الفترة $[a,b]$ ، C نقطـة بحيث $a \le C \le b$ فأن .

$$\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (9.18)$$

مثال (٩-١٥)
أثبت أن

$$\int_1^3 6x^5dx = \int_1^2 6x^5dx + \int_2^3 6x^5dx$$

الطرف الايسر

$$\int_1^3 6x^5dx = [x^6]_1^3 = (3)^6 - (1)^6$$
$$= 729-1=728$$

(1)
الطرف الايمن

$$\int_1^2 6x^5dx + \int_2^3 6x^5dx = [x^6]_1^2 + [x^6]_2^3$$
$$= (2^6-1^6)+(3^6-2^6)$$
$$=(64-1)+(729-64)$$
$$=(63)+(665)$$
$$= 728$$

(2)
من (1) ,(2) يتضح أن

$$\int_1^3 6x^5dx = \int_1^2 6x^5dx + \int_2^3 6x^5dx$$

٤- اذا كان C مقدار ثابت فأن

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

مثال (٩-١٦)
أوجد قيمة التكاملات التالية :

1. $\int_3^5 100(x^2 - x + 1)dx$

2. $\int_0^{10} 10e^{-5x}dx$

الحل

1. $\int_3^5 100(x^2 - x + 1)dx = 100\int_3^5 (x^2 - x + 1)dx$

$$= 100\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_3^5$$

$$= 100\left\{\left[\frac{(5)^3}{3} - \frac{(5)^2}{2} + 5\right] - \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} + 3\right]\right\}$$

$$= 100\left\{\left(\frac{125}{3} - \frac{25}{2} + 5\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 3\right)\right\}$$

$$= 100\left\{\left(\frac{250 - 75 + 30}{6}\right) - \left(\frac{54 - 27 + 18}{6}\right)\right\}$$

$$= 100\left\{\frac{205}{6} - \frac{45}{6}\right\}$$

$$= 100\left[\frac{160}{6}\right]$$

$$= \frac{16000}{6} = 2666.67$$

2. $$\int_0^{0.6} 10e^{-5x}dx = \int_0^{0.6} (-2)(-5)e^{-5x}dx$$
$$= -2\left[e^{-5x}\right]_0^{0.6}$$
$$= -2\left[e^{-5(.6)} - e^{-5(0)}\right]$$
$$= -2\left[e^{-3.0} - e^{0}\right]$$
$$= -2[0.05-1]$$
$$= -2[-0.95]$$
$$= 1.9$$

(٩-٤) بعض اساليب التكامل Some Techniques of Integration

فى الفصل (٩-٢) تناولنا بعض القواعد التى بأستخدامها يمكن ايجاد تكامل الدالة f(x). ولكن فى بعض الحالات قد يكون غير ممكن أو صعب أستخدامها فى ايجاد التكامل لذلك توجد بعض الاساليب الاخرى لايجاد التكامل سوف نتناول بعضها فى هذا الفصل .

أولا: التكامل بالتجزئ Integration by parts

اذا كانت

$$f(x)=g(x)h(x) \qquad (9.19)$$

فمن الباب الفصل (٧-) نجد أن :

$$'f(x)=h(x)g'(x)+g(x)'h(x) \qquad (9.20)$$

أو بعبارة أخرى

$$\frac{df(x)}{dx}=h(x)g'(x)+g(x)'h(x) \qquad (9.21)$$

أو

$$\frac{d[g(x)h(x)]}{dx}=h(x)g'(x)+g(x)'h(x) \qquad (9.22)$$

وبالتالى فأن

$$\int\frac{d}{dx}[g(x)h(x)]=\int h(x)g'(x)dx+\int g(x)'h(x)dx \qquad (9.23)$$

$$\rightarrow$$

$$g(x)h(x)=\int h(x)g'(x)dx+\int g(x)'h(x)dx$$

$$\rightarrow$$

$$\int g(x)'h(x)dx=g(x)h(x)-\int h(x)'g(x)dx \qquad (9.24)$$

مثال (٩-١٧)

أوجد التكاملات التالية :

1. $\int xe^x\,dx$ 2. $\int \ln x\,dx$

3. $\int x^2 \ln x\, dx$

الحل

1. $\int xe^x\, dx$

اذا فرضنا أن

$'h(x)= e^x \rightarrow h(x) = e^x$
$g(x)=x \rightarrow 'g(x) = 1$

وبالتالى فأن

$$\int xe^x dx = e^x(x) - \int \frac{x^2}{2}(x)dx$$
$$= xe^x - \frac{1}{2}\int x^2 dx$$
$$= xe^x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$= xe^x - \frac{1}{6}x^3 + C$$

حيث C ثابت التكامل.

ملحوظة

والحل بطريقة التجزئ يتطلب صحة افتراض كل من الدوال $h(x)$, $g(x)$ بحيث يمكن ايجاد التكامل $\int h(x)'g(x)dx$ ففى المثال السابق اذا فرضنا أن :

$$'h(x) = x \rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$g(x) = e^x \rightarrow 'g(x) = e^x$$

وبالتالى فأن :

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

فيلاحظ أن ايجاد التكامل $\int \frac{x^2}{2} e^2 dx$ أكثر صعوبه من التكامل الاصلى $\int xe^x dx$.

2. $\int \ln x\, dx = \int \ln x(1)dx$

فاذا فرضنا أن

$$'h(x)=1 \rightarrow h(x)=x$$

$$g(x) = \ln x \rightarrow 'g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1\, dx \\ &= x \ln x - x \\ &= x[(\ln x)-1]+C\end{aligned}$$

حيث C ثابت التكامل .

3. $\int x^2 \ln x\, dx$

اذا فرضنا أن

$$'h(x) = x^2 \rightarrow h(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$g(x) = \ln x \rightarrow 'g(x) = \frac{1}{x}$$

وبالتالى فأن

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\left[(\ln x) - \left(\frac{1}{3}\right)\right] + C$$

حيث C ثابت التكامل .

ملحوظة

ويستخدم التكامل بالتجزئ بالنسبة للتكامل المحدود أيضا .

ثانيا: التكامل بأستخدام الكسور الجزئية Integration by Partial Fractions

وكثيرا من الدوال النسبية Rational function يكون من الصعوبة بأستخدام قواعد التكامل ايجاد تكاملها ولكن اذا أعيد صياغتها فى صورة مجموعة من الكسور الجزئية يمكن اجراء تكامل كل جزء بسهولة كما سوف يتضح من الامثلة التالية.

مثال (٩-١٨)

أوجد التكاملات

1. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+5x+6}$

2. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-2}$

3. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{5x^3+3x^2}$

الحل

بما أن

1. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+5x+6}$

وبالتالى فأن الدالة f(x) لايمكن تكاملها بهذه الصياغة بقواعد التكامل العادية ولذلك يمكن اعادة صياغتها على النحو التالى :

$$f(x)=\frac{x+5}{(x+2)(x+3)}=\frac{A_1}{(x+2)}+\frac{A_2}{(x+3)}$$

ويمكن حساب كل من A_1, A_2 على النحو التالى :

$A_1(x+3)+A_2(x+2)=x+5 \rightarrow$
$(A_1+A_2)x=x \rightarrow A_1+A_2=1$
$3A_1+2A_2=5 \rightarrow 3A_1+2A_2=5$

وبحل المعادلتين نجد أن :

$A_1 = 3$, $A_2 = -2$

وبالتالى فأن

$$f(x)=\frac{x+5}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{(x+2)}+\frac{2}{(x+3)}$$

وبالتالى فأن

$$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{x^2+5x+6}dx &= \int\frac{3}{(x+2)}dx-\int\frac{2}{(x+3)}dx\\ &= 3\ln(x+2)-2\ln(x+3)+C\\ &= \ln(x+2)^3-\ln(x+3)^2+C\\ &= \ln\left[\frac{(x+2)^3}{(x+3)^2}\right]+C\end{aligned}$$

حيث C ثابت التكامل .

كذلك الدالة

2. $\quad f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-2}$

نجد أنه غير ممكن اجراء تكاملها مباشرة بقواعد التكامل كذلك نجد أن درجة الدالة فى البسط أكبر من درجة الدالة فى المقام . لذلك يجب أولا اجراء قسمة البسط على المقام فنجد أن :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 2} = (x^2 + 2x + 4) + \frac{7}{x - 2}$$

ويتضح أن أعادة صياغة الدالة فى $f(x)$ فى الصورة $(x^2 + 2x + 4) + \frac{7}{x - 2}$ يمكن اجراء تكاملها بقواعد التكامل المتعارف عليها على النحو التالى :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x - 2} dx = \int (x^2 + 2x + 4) + \frac{7}{x - 2} dx$$
$$= \int (x^2 + 2x + 4) dx + \int \frac{7}{x - 2} dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 7\ln(x - 2) + C$$

كذلك الدالة

3. $f(x) \frac{4x^2 - 1}{5x^3 + 3x^2}$

نجد أن درجة الدالة فى البسيط أقل من درجة الدالة فى المقام . وبالتالى يمكن اعادة صياغة $f(x)$ على النحو :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2(5x + 3)} = \frac{A_1 x + B}{x^2} + \frac{A_2}{(5x + 3)}$$

ويمكن حساب كل من A_1, B, A_2 على النحو التالى :

$(A_1x+B)(5x+3)+A_2x^2=4x^2-1 \rightarrow$

$5A_1x^2+3A_1x+5Bx+3B+A_2x^2=4x^2-1 \rightarrow$

$x^2(5A_1+A_2)=4x^2 \rightarrow 5A_1+A_2 = 4$ (1)

$x(3A_1+5B)=0 \rightarrow 3A_1+5B = 0$ (2)

$3B \quad = -1 \rightarrow B= -\frac{1}{3}$ (3)

وبالتالى فأن

$$A_1 = \frac{5}{9}\ , \qquad A_2 = \frac{9}{11}\ , \qquad B = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{\frac{5}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2} + \frac{\frac{9}{11}}{(5x+3)}$$
$$= \frac{5x-3}{9x^2} + \frac{9}{11(5x+3)}$$

وبالتالى فأن

$$\int f(x)dx = \int \frac{(5x-3)}{(9x^2)}dx + \frac{9}{11}\int \frac{1}{(5x+3)}dx$$

$$= \int \frac{5x}{9x^2}dx - \int \frac{3}{9x^2}dx + \frac{9}{11}\int \frac{1}{(5x+3)}dx$$
$$= \int \frac{5}{9}\frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{3x^2} + \frac{9}{11}\int \frac{1}{(5x+3)}dx$$
$$= \frac{5}{9}\ln x - \frac{1}{3}(-x^{-1}) + \frac{9}{11(5)}\ln(5x+3) + C$$
$$\frac{5}{9}\ln x + \frac{1}{3x} + \frac{9}{55}\ln(5x+3) + C$$

حيث C ثابت التكامل .

ملاحظات

١- اذا كانت درجة دالة البسط اكبر من درجة أو تساوى دالة المقام فأننا نقوم أولا بعملية القسمة .

٢- فى حالة اذا كانت درجة دالة البسط أقل من درجة دالة المقام فأننا نحول الدالـة الى مجموعة من الدوال التى يمثل كل منها كسر جزئ على النحو التالى :

أ) اذا كان المقام دالة خطية على النحو $(ax+b)$ فأن الكسر الجزئ يأخذ الصورة $\frac{A}{ax+b}$ حيث A مقدار ثابت .

ب) اذا كان المقام دالة على النحو $(ax+b)^n$ فأن الكسور الجزئية تأخذ الصورة

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+....+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

ج) اذا كان المقام دالة من الدرجة الثانية على النحو

(ax^2+bx+C)

فأن الكسر الجزئ يكون على النحو $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+C}$ حيث A,B مقادير ثابتة .

٣- يستخدم نفس الاسلوب فى حالة التكامل المحدود .

مثال (٩-١٩)

أوجد التكاملات التالية :

$$1.\quad \int_1^2 \frac{2x^2-1}{(3x-1)^3}dx\ , \qquad 2.\quad \int_{-1}^1 \frac{5x-1}{3x^2+2x-1}dx$$

الحل

بما أن

$$1.\quad f(x)=\frac{2x^2-1}{(3x-1)^3}$$
$$=\frac{A_1}{(3x-1)}+\frac{A_2}{(3x-1)^2}+\frac{A_3}{(3x-1)^3}$$
$$\rightarrow$$

$A_1(3x-1)^2+A_2(3x-a)+A_3=2x^2-a$

$$\rightarrow$$

$9A_1x^2-6A_1x+A_1+3A_2x-A_2+A_3=2x^2-1$

$$\rightarrow$$

$$9A_1x^2 = 2x^2 \to A_1 = \frac{2}{9}$$

كذلك

$$x(-6A_1+3A_2)=0 \to$$
$$-6\left(\frac{2}{9}\right)+3a_2 = 0 \to$$
$$A_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{12}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

كذلك

$$A_1 - A_2 + A_3 = 1 \to$$
$$A_3 - 1 - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{11}{9}$$

$$\to$$

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{(3x-1)^3} = \frac{2}{9(3x-1)} + \frac{4}{9(3x-1)^2} + \frac{11}{9(3x-1)^3}$$

$$\to$$

$$\int_1^2 \frac{2x^2-1}{(3x-1)^3}dx = \int_1^2 \left[\frac{2}{9(3x-1)} + \frac{4}{9(3x-1)^2} + \frac{11}{9(3x-1)^3}\right]dx$$
$$= \frac{2}{9}\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)} + \frac{4}{9}\int_1^2 (3x-1)^{-2}dx$$
$$+\frac{11}{9}\int_1^2 (3x-1)^{-3}dx$$
$$= \left[\frac{2}{9(x)}\ln(3x-1) + \frac{4}{9(-1)(3)}[(3x-1)^{-1}\right.$$

$$+\frac{11}{9(3)(-2)}(3x-1)^{-2}\Big]_1^2$$

$$=\left[\frac{2}{27}\ln(3x-1)-\frac{4}{27}(3x-1)^{-1}\right.$$

$$\left.-\frac{11}{54}(3x-1)^{-2}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{2}{27}\ln(5)-\frac{4}{27}(5)^{-1}-\frac{11}{54}(5)^{-2}\right]$$

$$-\left[\frac{2}{27}\ln(2)-\frac{4}{27}(2)^{-1}-\frac{11}{54}(2)^{-2}\right]$$

$$=\left[\frac{2}{27}(1.61)-0.03-0.008\right]$$

$$-\left[\frac{2}{27}(0.69)-0.074-0.05\right]$$

$$=(0.081)\text{-}(-0.073)$$

$$=0.154$$

بما أن

2. $$f(x)=\frac{5x-1}{3x^2+2x-1}=\frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{A_1}{(3x-1)}+\frac{A_2}{(x+1)}\rightarrow$$

$A_1(x+1)+A_2(3x-1)=5x-1 \rightarrow$

$A_1+3A_2 = 5$

$A_1-A_2 = -1$

ويحل المعادلتين نجد أن :

$A_1 = 2 \ , \ \ A_2 = 1$

وبالتالى فأن :

$$f(x)=\frac{2}{(3x-1)}+\frac{1}{(x+1)}$$

$$\int_{1}^{2}\frac{5x-1}{3x^2+2x-1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3x-1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+1}$$

$$=\left[\frac{2}{3}\ln(3x-1)+\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{2}{3}\ln(5)+\ln(3)\right]-\left[\frac{2}{3}\ln(2)+\ln(2)\right]$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1.609)+(1.099)-[\frac{2}{3}(0.693)+(0.693)]\right]$$

$$=(1.073+1.099)-(0.462+0.693)$$

$$=(2.172)-(1.155)$$

$$=1.017$$

ملحوظة

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد جداول تسمى بجداول التكامل Tables of integrals تعطى تكاملات كثير من الدوال التى لايمكن تكاملها بالقواعد العادية .

كذلك توجد جداول تعطى تكاملات بعض الدوال فى صورة مجموع من الدوال الجزئية . وملحق رقم (٤) يعطى جزء من هذه الجداول .

(٩-٥) المعادلات التفاضلية **Differential Equations**

المعادلة التفاضلية Differential equation هى المعادلة التى تتضمن مشتقة derivativeأو أكثر . ويمكن تقسيم المعادلات التفاضلية الى نوعين :

١- معادلات تفاضلية تتضمن مشتقات الدوال لدوال فى متغير واحد وتسمى بالمعادلات التفاضلية العادية Ordinary differential equations.

٢- معادلات تفاضلية تتضمن مشتقات الدوال لدوال فى أكثر من متغير وتسمى بالمعادلات التفاضلية الجزئية Partial differential equations.

أولا: المعادلات التفاضلية العادية :

والمعادلة التفاضلية العادية هى معادلة تشتمل على المشتقة من الرتبه الاولى أو الثانية .... أو من الرتبة n-order derivative n ، وقد تكون من الدرجة الاولى First degree ، أو الدرجة الثانية Second degree ، ...ودرجة المعادلة التفاضلية هو أكبر أس للمشتقة من أعلى رتبة .

مثال (٩-٢٠)

حدد رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية :

1. $\frac{dy}{dx} = x^3 + 2x^2 + 1$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 5x = 0$
4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 4x^4 - 3 = 0$

الحل

1. – المعادلة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى .
2. – المعادلة من الرتبة الثانية ومن الدرجة الاولى .
3. – المعادلة من الرتبه الثانية ومن الدرجة الاولى .
4. – المعادلة من الرتبه الثالثه والدرجة الثالثا أيضا .

حل المعادلات التفاضلية العادية :

اذا كان لدينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 + 10 \qquad (9.25)$$

فأن

$$\overset{*}{d}y = (5x^4 - 3x^2 + 10)dx$$

وبأجراء التكامل للطرفين نجد أن

$$\int dy = \int (5x^4 - 3x^2 + 10)dx \rightarrow$$

$$y = x^5 - x^{٣} + 10x + C \qquad (9.26)$$

حيث C ثابت التكامل .

ويسمى حل المعادلة فى (9.26) بالحل العام General solution للمعادلـة التفاضليـة فى (9.25) أو عندما يحسب قيمة المقدار الثابت C وفقا لاى شـروط مبدئيـة Initial conditions (boundary conditions) يسمى الحل فى هذه الحالـة بـالحل الخـاص للمعادلة Particular solution .

مثال (٩-٢١)

أوجد الحل العام والخاص للمعادلات التفاضلية التالية :

1. $\frac{dy}{dx} - 5x^2 - 9 = 0$

* يسـمى كل من dy ، dx بالمعـامل التفـاضلى Differentials للمتغير y، المتغير x علـى الترتيب وهما يعكسان التغير اللحظى فى كل من x, y على الترتيب .

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x - 10 = 0$$

حيث y=10 عندما x=0

حيث أن $\frac{dy}{dx} = 5$ عندما x=0

y=10 عندما x=1

3. $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - x - 100 = 0$$

حيث $\frac{dy}{dx} = 200$ عندما x=4

y = 10000 عندما x=0

الحل

1. $$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 9 \rightarrow \qquad (2.27)$$

$$\int dy = \int (5x^2 + 9)dx$$

$$y = 5\frac{x^3}{3} + 9x + C \qquad (9.28)$$

والمعادلة (9.28) تمثل الحل العام للمعادلة (9.27) وبما أن عندما x=0 فأن y=10. بالتعويض فى المعادلة (9.28) بـ x=0 ، y=10 فأن

$$10 = 5\left(\frac{0^3}{3}\right) + 9(0) + C \rightarrow$$

$$C = 10 \rightarrow$$

$$y = \frac{5}{3}x^3 + 9x + 10 \qquad (9.29)$$

والمعادلة (9.29) تمثل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (2.27) عند y=10, x=0.

بما أن

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x - 10 = 0 \rightarrow \qquad (9.30)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 10 \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 10x + C_1 \qquad (9.31)$$

$$\rightarrow$$

$$\int dy = \int (x^2 + 10x + C_1)dx \rightarrow$$

$$y = \frac{x^3}{3} + 5x^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.32)$$

ويسمى الحل (9.32) بالحل العام للمعادلة التفاضلية (9.30). وبالتعويض فى (9.31) بـ $\frac{dy}{dx} = 5$, x=0 فأن :

$$5(0)^2 + 10(0) + C_1 \rightarrow$$

$$C_1 = 5$$

بالتعويض بـ $C_1=5$, x=1, y=10 فى (9.32) نجد أن

$$10 = \frac{(1)^3}{3} + 5(1)^2 + 5(1) + C_2 \rightarrow$$

$$C_2 = 10 - \frac{1}{3} - 5 - 5$$

$$= -\frac{1}{3}$$

وبالتعويض فى (9.32) بـ $C_1 = 5, C_2 = \frac{-1}{3}$ نجد أن :

(9.33) $$y = \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 5x - \frac{1}{3}$$

ويمثل الحل (9.33) حل خاص للمعادلة التفاضلية (9.30)

بما أن

(9.34) 3. $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - x - 100 = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = x + 100 \rightarrow$$

(9.35) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\sqrt{x+100}$$

أ) وعندما

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{x+100}$$

$$= (x+100)^{\frac{1}{2}} \rightarrow$$

(9.36) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x+100)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

وعندما $x = 4$, $\frac{dy}{dx} = 200$ فأن

$$200 = \frac{2}{3}(4+100)^{\frac{3}{2}} + C_1 \rightarrow$$

$$C_1 = 200 - 707.06 \rightarrow$$

(9.37) $$C_1 = -507.06$$

وبحل المعادلة التفاضلية (9.36) نجد أن :

$$y=\left(\frac{(x+100)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)+C_1x+C_2$$

$$\rightarrow$$

$$y=\frac{4}{15}(x+100)^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2 \qquad (9.38)$$

والحل (9.38) يمثل حل عام للمعادلة (9.34) وعندما

$$\frac{dy}{dx}=200,\ x=4,\ y=10000, x=0$$

فأن

$$y=\frac{4}{15}(0+100)^{\frac{5}{2}}-507.06(0)+C_2 \rightarrow$$
$$10000=26666.67 - 0 + C_2 \rightarrow$$
$$C_2 = 1000\text{-}26666.67 \rightarrow$$
$$= -16666.67 \rightarrow$$

$$y=\frac{4}{15}(x+100)^{\frac{5}{2}}-507.06x-16666.67 \qquad (9.39)$$

والحل (9.39) يمثل حل خاص للمعادلة (9.34).

٣- عندما

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sqrt{x+100}$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}(x+100)^{\frac{3}{2}}+C_1 \qquad (9.40)$$

$$\rightarrow$$

$$y = -\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(x+100)^{\frac{5}{2}} + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{-4}{15}(x+100)^{\frac{5}{2}} + C_1x + C_2 \qquad (9.41)$$

والحل (9.41) يمثل حل عام للمعادلة (9.34) وعندما $\frac{dy}{dx} = 100, x = 4$. بالتعويض في (9.40) نجد أن :

$$200 = -\frac{2}{3}(4+100)^{\frac{3}{2}} + C_1 \rightarrow$$

$$200 = -707.06 + C_1 \rightarrow$$

$$C_1 = 200+707.06$$

$$= 907.06 \qquad (9.42)$$

وعندما y=10000, x=0 بالتعويض في الحل (9.41) نجد أن :

$$10000 = \frac{-4}{15}(0+100)^{\frac{5}{2}} + 907.06(0) + C_2$$

$$\rightarrow$$

$$10000 = -26666.67 + C_2 \rightarrow$$

$$C_2 = 10000 + 26666.67 \rightarrow$$

$$C_2 = 36666.67 \qquad (9.43)$$

بالتعويض في (9.41) بـ C_2, C_1 في (9.41), (9.42) فأن :

$$y = \frac{-4}{15}(x+100)^{\frac{5}{2}} + 907.06x + 36666.67 \qquad (9.44)$$

ويمثل الحل (9.44) حل خاص للمعادلة التفاضلية (9.34) .

ثانيا: المعادلات التفاضلية الجزئية
واذا كانت المعادلة التفاضلية تشتمل على المشتقات الجزئية لمتغيرين أو اكثر فأنها تسمى فى هذه الحالة معادلة تفاضلية جزئية Partial differential equation. وفى هذا الفصل سوف نكتفى بتعريف رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية فقط .
فعلى سبيل المثال نجد أن المعادلة :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{\partial y}{\partial x_2}+5x_1-2x_2=0 \qquad (9.45)$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبه الاولى والدرجة الاولى .

كذلك المعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4-3x_1+10x_2=0 \qquad (9.46)$$

تمثل معادلة تفاضلية جزئية من الرتبه الثانيه والدرجة الاولى .

مثال (٩-٢٣)
حدد رتبة ودرجة كل معادلة تفاضلية جزئية من المعادلات التالية :

1. $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+3x-50y=0 \qquad (9.50)$$

2. $$\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}-4x_1^3-7x_2=0 \qquad (9.51)$$

3. $$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}\right)^5+\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x_2^4}\right)^3-2x_1^4+5x_2^3=0 \qquad (9.52)$$

4. $$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^5+\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2-\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}=0 \qquad (9.53)$$

الحل

١- المعادلة (9.52) معادلة تفاضلية من الرتبه الثانيه والدرجة الاولى .
٢- المعادلة (9.51) من الرتبه الثانيه والدرجة الاولى .
٣- المعادلة (9.52) من الرتبه الرابعه والدرجة الثالثة .
٤- المعادلة (9.53) من الرتبه الثانيه والدرجة الاولى .

(٩-٦) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١)

إذا كانت التكلفة الجدية لصيانة أحد الالات $'C(t)$ دالة فى عمر الالة t ، تأخذ الصيغة التالية :

$$'C(t) = 50 + 4t^2$$

١- أوجد تكلفة الصيانة الحدية (معدل تكلفة الصيانة) بعد 3 سنوات من شراء الالة وعلق على الناتج .

٢- أوجد دالة تكلفة الصيانة ثم قدر قيمة تكلفة الصيانة بعد 4 سنوات من تاريخ الشراء.

الحل

١-

$$'C(3)=50+4t^2 = 50+4(3)2=50+36$$

= 86 جنيه سنويا =

٢- بما أن

$$'C(t) = 50 + 4t^2 \rightarrow$$

دالة التكلفة $C(t)$ حيث :

$$\begin{aligned} C(t) &= \int 'C(t)dt \\ &= \int (50+4t)^2 dx \\ &= 50t + \frac{4}{3}t^3 + a \end{aligned}$$

حيث a مقدار ثابت .

٢- تكلفة الصيانة بعد 4 سنوات .

$$\begin{aligned} \int_0^4 'C(t)dt &= \int_0^4 (50+4t^2)dt \\ &= [50t + \frac{4}{3}t^3]_0^4 \end{aligned}$$

$$= [50(4)+\frac{4}{3}(4)^3]-[50(0)+\frac{4}{3}(0)^3]$$
$$= (200+\frac{256}{3})-0$$
$$= \frac{856}{3} = 385.33 \text{ جنية}$$

تطبيق (٢)

اذا كان معدل تكلفة صيانة الالات $R(x)$ بأحدى المصانع دالة فى عدد ساعات تشغيل هذه الالات على الصورة :

$$R(x) = 60+0.040x^2$$

حيث x هى عدد ساعات التشغيل للالات .

والمطلوب

١- حدد معدل تكلفة الصيانة بعد 1000 ساعة تشغيل .

٢- أوجد دالة تكلفة الصيانة اذا كانت تكلفة الصيانة تساوى صفر عندما تكون ساعات التشغيل تساوى صفر .

الحل

-١

$$R(x=1000)=60+0.040(1000)^2$$
$$= 60+0.04(1000000)$$
$$=60+40000$$
$$= 40060 \text{ جنية}$$

٢- دالة التكلفة

$$C(x)=\int R(x)dx$$
$$=\int(60+0.04x^2)dx$$
$$=60x+0.04\frac{x^3}{3}+C$$
$$= 60x+0.013x^3 + C$$

وبما أن $C(x=0)=0$ فأن :

$C(x=0)=0=60(0)+0.013(0)^3+C$

$\rightarrow$

$C = 0 \rightarrow$
$C(x) = 60x+0.013\ x^3$

تطبيق (٣)
اذا كان الطلب على استهلاك البترول فى احدى الدول يتزايد بصورة اسية بمعدل 10% سنويا . فاذا كان كمية البترول المستهلك فى هذه الدولة سنة ١٩٩٠ تساوى 8 مليون برميل فاذا كان المعدل السنوى لاستهلاك البترول دالة فى الزمن $R(t)$ تأخذ الصورة التالية :

$R(t) = 8e^{0.1t}$

والمطلوب
١- أوجد دالة الاستهلاك للبترول .
٢- قدر كمية البترول المستهلك سنة ١٩٩٥.
٣- قدر كمية البترول المستهلك من سنة ١٩٩٠ الى سنة ٢٠٠٠ .

الحل
١- اذا فرضنا أن دالة استهلاك البترول لهذه الدولة هى $C(t)$ فأن :

$$C(t) = \int R(t)dt$$
$$= \int 8e^{0.1t}\,dt$$
$$= \frac{8}{0.1}[e^{0.1t}] + C$$
$$= 80\ e^{0.1t} + C$$

اذا فرضنا أن سنة ١٩٩٠ هى سنة الاساس فأن $t=0$ ، وبما أن

$C(t=0) = 8 \rightarrow$
$C(t=0)=8=80e^{0.1(0)}+C$
$i = 80 + C \rightarrow$
$C = 8-80 = -72$

$\rightarrow$

$C(t) = 80\ e^{0.1t} = 72$

٢- وبما أن سنة ١٩٩٥ فأن t=5 اذن الكمية المستهلك سنة ١٩٩٥ هى :

$C(t=5) = 80\ e^{0.1(5)} - 72$
$= 80\ e^{0.5} - 72$
$= 80(1.35) - 72 = 108 - 72$
$= 36$ مليون برميل

٣- الكمية البترول المستهلكة من ١٩٩٠-٢٠٠٠ هى :

$$\int_{0}^{10} R(t)dt = [80e^{0.1t}]_0^{10}$$

$= 80e^{0.1(0)} - 80\ e^{0.1(0)}$
$= 80e - 80(1)$
$= 80(2.718) - 80$
$= 217.440 - 80$
$= 137.440$ مليون برميل

(٩-٧) تمرينات — Exercises

(١) أوجد مايلى :

1. $f11dx$
2. $\int \sqrt{20}dx$
3. $\int \frac{dx}{9}$
4. $\int \frac{3}{8}xdx$
5. $f dx$
6. $\int \left(\frac{x}{3}\right)^3 dx$
7. $\int 10\sqrt[4]{x}dx$
8. $\int \frac{dx}{x^5}$
9. $\int \sqrt[k]{x}dx$
10. $\int \frac{a}{\sqrt[b]{x}}dx$
11. $f(2x^2+3x-10)dx$
12. $(11-4x)^2dx$
13. $\int \left(\frac{-2}{\sqrt{x^3}}+\frac{x}{x^3}-10\right)dx$
14. $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$

(٢) أوجد مايلى :

1. $f(9x^3-2x^2)^8(27x^2-4x)dx$
2. $\int \frac{5x^9-4}{x^{10}-8x}dx$
3. $\int \frac{5x^9-4}{x^{10}-8x}dx$
4. $\int \frac{dx}{3x+5}$
5. $\int e^x dx$
6. $\int (e^x+4)dx$
7. $\int (e^{-x}-2e^{x^2}+30x)dx$
8. $\int x^4e^{x^5}dx$
9. $\int \frac{10x^2}{\sqrt{x^3-15}}dx$
10. $\int \frac{-8x^{-9}+30x^5}{(x^{-8}+5x^6)}dx$
11. $\int \left(xe^{5x^2}-3e^{x+1}\right)dx$
12. $\int (x-5)e^{x^2-10x}dx$

13. $\int \frac{x^6 - 1}{x^7 - 7x} dx$

(٣) أوجد قيم التكاملات التالية :

1. $\int_{-1}^{5} dx$
2. $\int_{0}^{3} (x-7)dx$
3. $\int_{1}^{3} 2x^3 dx$
4. $\int_{0}^{7} (5x^4 - 3x^2)dx$
5. $\int_{-3}^{1} (3x^2)e^{x^3} dx$
6. $\int_{4}^{5} \frac{3}{x} dx$
7. $\int_{-1}^{1} -x^2 dx$
8. $\int_{8}^{27} \sqrt[3]{x}$
9. $\int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 + x)dx + \int_{2}^{3} (x^3 - 2x^2 + x)dx$
10. $\int_{1-}^{0} (x-1)dx + \int_{0}^{5} (x-1)dx$
11. $\int_{3}^{5} (x^2 - 4)dx + \int_{5}^{3} (-x^2 + 4)dx$

(٤) أوجد بأستخدام أسلوب التجزئ التكاملات التالية :

1. $\int xe^{-2x} dx$
2. $\int 3xe^{x} dx$
3. $\int \sqrt{x}\ \sqrt[3]{x+1} dx$
4. $f(x+1)\ln x\ dx$
5. $fx2 \ln x3\ dx$
6. $fx(x-5)3dx$

7. $\int \frac{2x}{\sqrt{x-2}}dx$
8. $\int \frac{10x}{(x-2)^2}dx$
9. $\int (3x+5)\sqrt{x+2}dx$
10. $\int x\sqrt{x+2}dx$

(٥) أوجد بأستخدام اسلوب الكسور الجزئية التكاملات التالية :

1. $\int \frac{10-x}{x^2+5x-6}dx$
2. $\int \frac{5-2x}{x^2-7x+6}dx$
3. $\int \frac{x-4}{x^4+3x^2}dx$
4. $\int \frac{5x-9}{x^2-8x+16}dx$
5. $\int \frac{8x^2-4x-12}{x^4-x^2}dx$
6. $\int \frac{3x^2-x+10}{x^4-9x^2}dx$
7. $\int \frac{36-9x-5x^2}{x^3-9x}dx$

(٦) أوجد التكاملات التالية بأستخدام جداول التكامل بملحق (٤) صفحة ( ).

1. $f x^3 \ln 5x dx$
2. $\int \frac{2x}{e^{3x}}dx$
3. $\int \frac{dx}{2+10e^{3x}}$
4. $f(\ln x)^3 dx$
5. $\int \frac{\ln 2x}{x^2}dx$

$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

(٧) حدد رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية التالية :

1. $\frac{dy}{dx}-x^4+2x^3+10=0$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-2x+7=0$

3. $\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7x-20=0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3x=0$

5. $6\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)+3x_1-4x_2+3=0$

6. $10\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^3-\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2-5x_1+x_2-8=0$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8. $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}=e^{2x_1}\;+e^{3x_2}$

9. $\frac{dy}{dx}=10x^2-3x+20$

10. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\left(\frac{dy}{dx}\right)=10$

(٨) أوجد الحل العام والحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية عند الشرود المبدئية الموجودة

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)-x+3=0$, $f(0)=+3$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)-3x^2+2x=5$, $f(0)=5$

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-2x=30$, $'f(1)=10,\ f(2)=-5$

4. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3x = 50$, 'f(0)=10,f(1)=15

5. $\left(\dfrac{d^2y}{\partial x^2}\right) - e^{2x} = 25$, 'f(1)=30, f(0)=25

ملحق (١)
أشارة المجموع Σ وخصائصها

اذا كان x متغير يأخذ عدد n من القيم ، فانه يرمز لقيم المتغير بالرمز $x_1,x_2,x_3,..,x_n$ أو x_j حيث $j=1,2,3,..,n$.

فاذا كانت S هى عبارة عن مجموع القيم $x_1,x_2,..,x_n$ حيث :

$$S = x_1+x_2+...+x_n \qquad (1)$$

فأنه يمكن كتابة هذا المجموع بطريقة مختصرة بأستخدام الاشارة Σ على النحو :

$$S = x_1+x_2+...+x_n$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (2)$$

حيث تشير $\sum_{j=1}^{n}$ الى أجراء عملية الجمع بالنسبة للحدود x_j ابداء من $j=1$ الى $j=n$ فى صورة متتالية أى $j=1, j=2, j=3, ...$ الى $j=n$.

خصائص اشارة المجموع

١- اذا كان a مقدار ثابت فأن

$$\sum_{j=1}^{n} a = \underbrace{a+a+...+a}_{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a = na \qquad (3)$$

مثال

$$\sum_{j=1}^{n} 5 = \underbrace{5+5+5+5+5+5}_{6}$$
$$= 6(5) = 30$$

٢- اذا كان a مقدار ثابت ، x_j متغير فان :

$$\sum_{j=1}^{n} ax_j = ax_1 + ax_2 + ... + ax_n$$

$$= a(x1+x2+...+xn)$$

$$= a(\sum_{j=1}^{n} x_j) \qquad (4)$$

وبالتالى فأن

$$\sum_{j=1}^{n} ax_j = a\sum_{j=1}^{n} x_j$$

مثال

$$\sum_{j=1}^{n} 3y_j = 3\sum_{j=1}^{5} y_j$$

٣- اذا كان xj, yj متغيران فان :

$$\sum_{j=1}^{n} (x_n \pm y_j) = (x_j \pm y_1) + (x_2 \pm y_2) + ... (x_n \pm y_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n) \pm (y_1 + y_2 + ... + y_n)$$

فأن :

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j \pm y_j) = (\sum_{j=1}^{n} x_j) \pm (\sum_{j=1}^{n} y_j) \qquad (A.5)$$

مثال

$$\sum_{j=1}^{10} (2y_j - 3z_j) = \sum_{j=1}^{10} 2y_j - \sum_{j=1}^{10} 3z_j$$

$$= 2\sum_{j=1}^{10} y_j - 3\sum_{j=1}^{10} z_j$$

٤- اذا كان x_j, y_j متغيران فان :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 x_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

فان

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \neq (\sum_{j=1}^{n} x_j)(\sum_{j=1}^{n} y_j)$$

مثال

أوجد مفكوك المجاميع التالية :

1. $\sum_{i=1}^{4} (y_i - 3)^2$
2. $\sum_{j=1}^{10} (x_j - a)$

الحل

1. $$\sum_{i=1}^{4} (y_i - 3)^2 = (y_1 - 3)^2 + (y_2 - 3)^2 + (y_3 - 3)^2 + (y_4 - 3)^2$$

$$= (y_1^2 - 6y_1 + 9) + (y_2^2 - 6y_2 + 9) + (y_3^2 - 6y_3 + 9) + (y_4^2 - 6y_4 + 9)$$

$$= (y_1^2 + y_2^2 + y_2^2 + y_4^2) - 6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (9 + 9 + 9 + 9)$$

$$= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) - 6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 36$$

حل آخر

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{4} (y - 6y_i + 9)$$

وباستخدام الخاصية (١) ، (٢) ، (٣) ، نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i^2 - 6y_i + 9) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 - 6\sum_{i=1}^{4} y_i + \sum_{i=1}^{4} 9$$

$$= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) - 6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (4x9)$$

بالمثل

$$2)\quad \sum_{j=1}^{10} (x_j - a) = (x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots + (x_{10} - a)$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) - (a + a + \ldots + a)$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) - 10a$$

حل آخر

$$\sum_{j=1}^{10} (x_j - a) = \sum_{j=1}^{10} x_j - \sum_{j=1}^{10} a$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) - (10a)$$

مثال

استخدم أشارة المجموع للتعبير عن المجاميع التالية :

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{20}^2$
2. $k_1 x_1^3 + k_2 x_2^3 + \ldots + k_{30} x_{30}^3$

الحل

1. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{20}^2 = \sum_{j=1}^{20} x_j^2$
2. $k_1 x_1^3 + k_2 x_2^3 + \ldots + k_{30} x_{30}^3 = \sum_{j=1}^{30} k_j x_j^3$

تمرينات

١- أثبت أن :

$$\sum_{j=1}^{n} (5x_j + 10y_j - 8z_j) = 5\sum_{j=1}^{n} x_j + 10\sum_{j=1}^{n} y_j - 8\sum_{j=1}^{n} z_j$$

٢- اذا كان :

$$\sum_{j=1}^{7} x_j = -4 \quad , \quad \sum_{j=1}^{7} x_j^2 = 10$$

أوجد مايلى :

i. $\sum_{j=1}^{7} (5x_j + 3)$

ii. $\sum_{j=1}^{7} x_j(x_j - 2)$

iii. $\sum_{j=1}^{7} (x_j - 8)^2$

٣- أستخدم اشارة المجموع للتعبير عن المجاميع التالية :

1. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2$
2. $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_5+y_5)$
3. $a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_{10}c_{10}$
4. $x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + \ldots + x_ny_nz_n$

٤- أوجد مفكوك مايلى :

a. $\sum_{i=1}^{10} a$

b. $\sum_{j=1}^{5} z_j x_j$

c. $\sum_{j=1}^{6} x_j$

d. $\sum_{j=1}^{10} (x_j - 3y_j + 8)$

ملحق (٢)
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين
Permutation, Combinations and Binomial Theory

(أولا): التباديل Permutations

اذا كان لدينا ثلاثة أماكن مختلفة ولتكن A,B,C ولدينا ثلاثة أفراد 1,2,3 يراد تسكينهم فى هذه الامكان الثلاثة . فبكم طريقة يمكن تسكين الافراد الثلاثة فى الاماكن A,B,C والشكل التالى يوضح الطرق المختلفة التى يتم بها شغل الاماكن .

A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1

شكل (١)

ومن الشكل يتضح أن عدد الطرق التى يتم بها شغل الاماكن الثلاثة بالافراد هو :

$(3)(2)(1) =$ 6 طريقة

ويرمز لعدد الطرق الممكنه لشغل n من الاماكن المختلفة بـ n من الاشياء المختلفة بالرمز $_nP_n$ وبالتالى فأن:

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)...(2)(1) = n! \qquad (1)$$

مثال (١)

$$_4P_4 = 4! = 4(3)(2)(1)$$
$= 24$ طريقة

اذا كان لدينا الاماكن A,B,C ويراد تسكين شخصين 1,2 فى مكانيين منهم فممكن أن يتم ذلك بعدد 6 طرق كما هو موضح بالشكل التالى :

A B C 1 2	A B C 1 2	A B C 2 1	A B C 1 2
A B C 2 1	A B C 2 1		

شكل (٢)

حيث عدد الطرق يساوى 3(2)
وبصفة عامة فأن عدد الطرق التى يمكن بها أختيار j من الاشياء من **n** مع مراعات الترتيب ويرمز لذلك بالرمز ${}_nP_j$ حيث :

$$
\begin{aligned}
{}_nP_j &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1) \\
&= \frac{n!}{(n-j)!} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

مثال (٢)

$$
\begin{aligned}
{}_{10}P_7 &= \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} \\
&= \frac{10(9)(8)\ldots.(20)(1)}{3(2)(1)} \\
&= 10(9)(8)(7)(6)(5)(4) \\
&= 604800 \text{ طريقة}
\end{aligned}
$$

(ثانيا): التوافيق **Combinations**

اذا كان لدينا 4 أشخاص A,B,C,d يراد أختيار أثنين منهم بدون مراعاة الترتيب بمعنى أختيار (A,B) هو نفسه أختيار (B,A). فيكون لدينا عدد الطرق البديلة التالية للاختيار .

(A,B), (A,C), (A,d), (B,C), (B,d), (C,d)

أى يمكن أختيار أثنين من 4 بعدد طرق يساوى 6 طرق حيث :

$$\frac{4!}{2!(4.2)!}=\frac{4x3x2x1}{2x1x2x1}=6 \text{ طرق}$$

وبصفة عامة اذا كان المطلوب عدد طرق أختيار j مفردة من n من المفردات بدون مراعاة الترتيب فأنه يرمز لذلك بالرمز C_j^n حيث :

$$C_j^n=\frac{n!}{j!(n-j)!} \qquad (3)$$

مثال (٣)

$$C_3^5=\frac{5!}{3!(2!)}=\frac{5x4x3x2x1}{3x2x1x2x1}=10 \text{ طرق}$$

ملحوظة

الفرق بين C_j^n ، ${}_nP_j$ هو أن حساب ${}_nP_j$ يأخذ فى الاعتبار الترتيب أما حساب C_j^n لايأخذ فى الاعتبار الترتيب .

(ثالثا): نظرية ذات الحدين **Binomial Theory**

اذا كان لدينا المتغيران x,y فأن :

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=x^2+2xy+y^2\\ &=C_0^2y^0x^2+C_1^2yx+C_2^2y^2x^0\\ &=\sum_{j=0}^{2}C_j^2y^jx^{2-j} \qquad (1)\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\ &=C_0^3y^0x^3+C_1^3yx^2+C_2^3y^2x+C_3^3y^3x^0\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{3} C_j^3 y^j x^{n-j} \qquad (2)$$

وفى الحالة العامة اذا كان n عدد صحيح موجب فأن :

$$(x+y)^n = C_0^n y^0 x^n + C_1^n y x^{n-1} + \ldots + C_n^n y^n x^0$$
$$= \sum_{j=0}^{n} C_j^n y^j x^{n-j} \qquad (3)$$

مثال (٤)

أوجد بأستخدام نظرية ذات الحدين من مايلى :

1. $(101)^3$
2. $(99)^4$

الحل

1) $(101)^3=(100+1)^3$

$$= C_0^3(1)^0(100)^3 + C_1^3(1)(100)^2 + C_2^3(1)^2(100)$$
$$+ C_3^3(1)^3(100)^0$$
$$=(100)^3+3(100)^2+3(100)+(1)$$
$$= 1000000 + 30000 + 300 + 1$$
$$= 1030301$$

2) $(99)^4=(100-1)^4$

$$= C_0^4(-1)^0(100)^4 + C_1^4(-1)(100)^3 + C_2^4(-1)^2(100)^2$$
$$+ C_0^4(-1)^3(100) + C_4^4(-1)^4(100)^0$$
$$= (100)^4-4(100)^3+6(100)^2-4(100)+1$$
$$= (100000000) - 4000000 + 60000 - 400 +1$$
$$= 96000000 + 59600 + 1$$
$$= 96059601$$

ملحق (٣)
رسم المتباينات الخطية
Graphics of Linear Inequalities

فيمة يلى سوف نوضح كيفية رسم المتباينات الخطية من خلال الامثلة التالية:

مثال (١)

اذا كان لدينا المتباينة الخطية

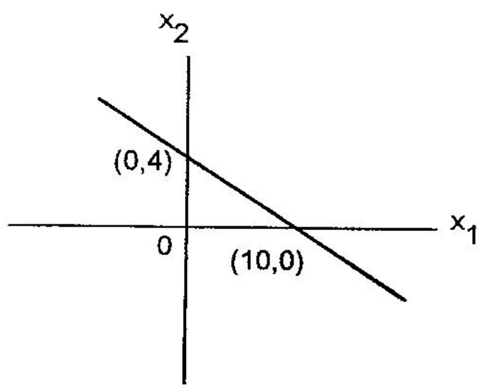
$$2x_1+5x_1 \le 20 \qquad (1)$$

وتمثل المتباينة الخطية (١) بيانيا بمساحة يمكن تحديدها على النحو التالى :

١- نحول المتباينة الى متساوية على النحو :

$$2x_1+5x_2 = 20 \qquad (2)$$

٢- تمثل المعادلة (2) بيانيا بخط مستقيم على النحو الموضح بالشكل التالى :



شكل (١)

ومن الرسم يتضح أن الخط

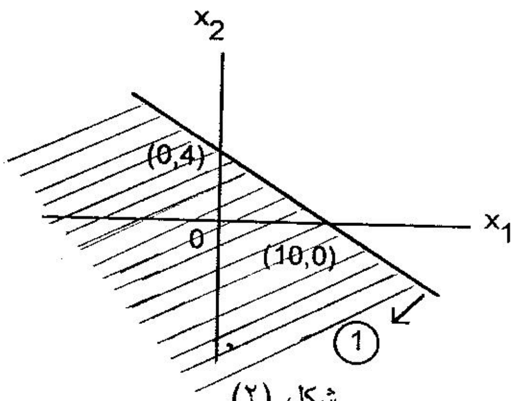
$$2x_1+5x_2 = 20$$

يقسم المستوى الى جزئين ، جزء يمين الخط وجزء يسار الخط . ويمثل المتباينة (١) مساحة أحد الجزئين .

٣- يتم تحديد المساحة التى تمثل المتباينة على النحو التالى بما أن نقطة الاصل (0,0) تقع فى المنطقة يسار الخط $2x_1+5x_2 = 20$ نعوض بنقطة الاصل فى الطرف الايسر للمتباينة (١) على النحو :

$$2(0) + 5(0) = 0 < 20$$

وبالتالى فأن النقطة (0,0) تحقق المتباينة أى تقع النقطة (0,0) فى المنطقة التى تمثل المتباينة . وبالتالى فأن المنطقة التى تحقق المتباينة المنطقة يسار الخط $2x_1+5x_2$ $=20$ ، كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢)

مثال (٢)

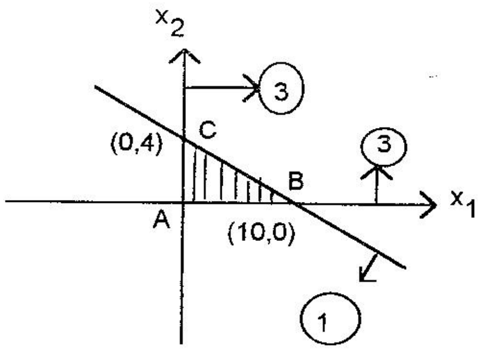
فى المثال السابق اذا فرضنا أن

$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0 \qquad (3)$$

فالمنطقة التى تحقق المتباينات (3) هى الربع الاول . وبالتالى المنطقة التى تمثل المتباينات .

$2x_1+5x_2 \leq 20$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

هـى المنطقـة ABC كمـا هـو موضـح بالشـكل التـالى وتسـمى المنطقـة ABC بمنطقـة الحلـول الممكنة أى المنطقة التى كل نقطـة فيها تحقق المتباينات (3) ,(1) فـى نفس الوقت .



شكل (٣)

مثال (٣)

أوجد منطقة الحلو الممكنة للمتباينات التالية :

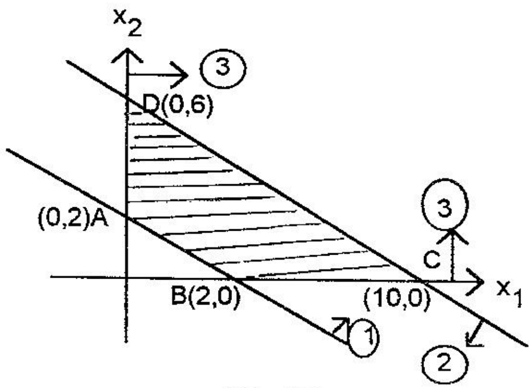
(1) $x_1 + x_2 \geq 2$

(2) $3x_1 + 5x_2 \leq 30$

(3) $x_1, x_2 \geq 0$

الحل

الشكل التالى يوضح المنطقة A,B,C,D التى تمثل منطقة الحلول الممكنـة للمتباينـات (1)-(3) .



شكل (٤)

ملحق (٤)
جداول التكاملات
Tables of Integrals

1. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C^*$
2. $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$
3. $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$
4. $\int x^n \ln(ax) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(ax) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \quad , \quad n \neq -1$
5. $\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
6. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx + C \quad , \quad n \neq -1$
7. $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$
8. $\int x^n \ln x dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C \quad , \quad n \neq -1$
9. $\int e^{-x} dx = e^{-x} + C$
10. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$
11. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$
12. $\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$
13. $\int \frac{dx}{a+be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap}\ln(a+be^{px}) + C$

* حيث C ثابت التكامل .

14. $\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2}(ax - b\ln|ax+b|) + C$

15. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{ax+b} + \ln|ax+b|\right) + C)$

16. $\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{(ad-bc)}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C$, ad-bc≠0

17. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{(ad-bc)}\left[-\frac{b}{a}\ln|ax+b| + \frac{d}{c}\ln|cx+d|\right] + C$

, ad-bc≠0

18. $\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{(ad-bc)}\left[-\frac{1}{(ax+b)} - \frac{c}{(ad-bc)}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right] + C$

, ad-bc≠0

19. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

21. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

23. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} + C$

24. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

ملحق (٥)
جداول حساب الفائدة المركبة

Amount of 1 at Compound Interest

$$S = (1+r)^n$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{8}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1.0025	1.0033	1.0041	1.0051	1.0058	1.0066	1
2	1.0050	1.0066	1.003	1.0100	1.011	1.0133	2
3	1.0075	1.0100	1.0125	1.0150	1.0176	1.0201	3
4	1.0100	1.0134	1.0167	1.0201	1.0235	1.0269	4
5	1.0125	1.0167	1.0210	1.0252	1.0295	1.0337	5
6	1.0150	1.0201	1.0252	1.0303	1.0355	1.0406	6
7	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	1.0415	1.0476	7
8	1.0201	10269	1.0338	1.0407	1.0476	1.0545	8
9	1.0227	1.0304	1.0381	1.0459	1.0537	1.0616	9
10	1.0252	1.0338	1.0424	1.0511	1.0598	1.0687	10
11	1.0278	1.0372	1.0468	1.0563	1.0660	1.0758	11
12	1.0304	1.0407	1.0511	1.0616	1.0722	1.0829	12
13	1.0329	1.0442	1.0555	1.0669	1.0785	1.0902	13
14	1.0355	1.0476	1.0599	1.0723	1.0848	10974	14
15	10381	1.0511	1.0643	1.0776	1.0911	1.1048	15
16	1.0407	1.0546	1.0687	1.0830	1.0975	1.1121	16
17	1.0433	1.0582	1.0732	1.0884	1.1039	1.1195	17
18	1.0459	1.0617	1.0777	1.0939	1.1103	1.1270	18
19	1.0485	1.0652	1.822	1.0993	1.1168	1.1345	19
20	1.0512	1.0688	1.0867	1.1048	1.1233	1.1421	20

21	1.0538	1.0723	1.0912	1.1104	1.1299	1.1497	21
22	1.0564	1.0759	1.0957	1.1159	1.1365	1.1574	22
23	1.0591	1.0795	1.1003	1.1215	1.1431	1.1651	23
24	1.0617	1.0831	1.1049	1.1271	1.1498	1.1728	24
25	1.0644	1.0867	1.1095	1.1327	1.1565	1.1807	25
26	1.0670	1.0903	1.1141	1.1384	1.1632	1.1885	26
27	1.0697	1.0940	1.1188	1.1441	1.1700	1.1965	27
28	1.0724	1.0976	1.1234	1.1498	1.768	1.2044	28
29	1.0750	1.1013	1.1281	1.1556	1.1837	1.2125	29
30	1.0777	1.1049	1.1328	1.1614	1.1906	1.2205	30
31	1.080	1.1086	1.1375	1.1672	1.1975	1.2287	31
32	1.0831	1.1123	1.1423	1.1730	1.2045	1.2369	32
33	1.0858	1.1160	1.1470	1.1789	1.2115	1.2451	33
34	1.0886	1.1197	1.1518	1.1848	1.2186	1.2534	34
35	1.913	1.1235	1.1566	1.1907	1.2257	1.2618	35
36	1.0940	1.1272	1.1614	1.1966	1.2329	1.2702	36
37	1.0967	1.1310	1.1663	1.2026	1.2401	1.2787	37
38	1.0995	1.1347	1.1711	1.2086	1.2473	1.2872	38
39	1.1022	1.1385	1.1760	1.2147	1.2546	1.2958	39
40	1.1050	1.1423	1.1809	1.2207	1.2619	1.3044	40
41	1.1077	1.1461	1.1858	1.2268	1.2693	1.3131	41
42	1.1105	1.1500	1.1908	1.2330	1.2767	1.3219	42
43	1.1199	1.1538	1.1957	1.2391	1.2841	1.3307	43
44	1.1161	1.1576	1.2007	1.2453	1.2916	1.3395	44
45	1.1187	1.1615	1.2057	1.2516	1.2991	1.3485	45
46	1.1217	1.1654	1.2107	1.2578	1.3067	1.3575	46
47	1.1245	1.1693	1.2158	1.2641	1.3143	1.3665	47
48	1.1273	1.1731	1.2208	1.2704	1.3220	1.3756	48

49	1.1301	1.1771	1.2259	1.2768	1.3297	1.3848	49
50	1.1329	1.1810	1.2310	1.2832	1.3375	1.3940	50
51	1.1358	1.1849	1.2362	1.2896	1.3453	1.4033	51
52	1.1386	1.1889	1.2413	1.2960	1.3531	1.4127	52
53	1.1414	1.1928	1.2465	1.3025	1.3610	1.4221	53
54	1.1443	1.1968	1.2517	1.3090	1.3690	1.4316	54
55	1.1472	1.2008	1.2569	1.3156	1.3769	1.4411	55
56	1.1500	1.2048	1.2621	1.3222	1.3850	1.4507	56
57	1.1529	1.2088	1.2674	1.3288	1.3931	1.4604	57
58	1.1558	1.2128	1.2727	1.3354	1.4012	1.4701	58
59	1.1587	1.2169	1.2780	1.3421	1.4094	1.4799	59
60	1.1616	1.2209	1.2833	1.3488	1.4176	1.4898	60
61	1.1645	1.2250	1.2887	1.3555	1.4258	1.4997	61
62	1.1674	1.2291	1.2940	1.3623	1.4342	1.5097	62
63	1.703	1.2332	1.2994	1.3691	1.4425	1.5198	63
64	1.1732	1.2373	1.3048	1.3760	1.4509	1.5299	64
65	1.1762	1.2414	1.3103	1.3829	1.4594	1.5401	65
66	1.1791	1.2456	1.3157	1.3898	1.4679	1.5504	66
67	1.1820	1.2497	1.3212	1.3967	1.4765	1.5607	67
68	1.1850	1.2539	1.3267	1.4037	1.4851	1.5711	68
69	1.1880	1.2581	1.3322	1.4107	1.4938	1.5816	69
70	1.1909	1.2623	1.3378	1.4178	1.5025	1.5922	70
71	1.1939	1.2665	1.3434	1.4249	1.5112	1.6028	71
72	1.1969	1.2707	1.3490	1.4320	1.5201	1.6135	72
73	1.1999	1.2749	1.3546	1.4392	1.5289	1.6242	73
74	1.2029	1.2792	1.3602	1.4464	1.5378	1.6350	74
75	1.2059	1.2834	1.3659	1.4536	1.5468	1.6459	75

76	1.2089	1.2877	1.3716	1.4609	1.5558	1.6569	76
77	1.2119	1.2920	1.3773	1.4682	1.5649	1.6680	77
78	1.2150	1.2963	1.3830	1.4755	1.5740	1.6791	78
79	1.2180	1.3006	1.3888	1.4829	1.5832	1.6903	79
80	1.2210	1.3050	1.3946	1.4903	1.5925	1.7015	80
81	1.2281	1.3093	1.4004	1.4977	1.6017	1.7129	81
82	1.2272	1.3137	1.4062	1.5052	1.6111	1.7243	82
83	1.2302	1.3181	1.4121	1.5128	1.6205	1.7358	83
84	1.2333	1.3225	1.4180	1.5203	1.6299	1.7474	84
85	1.2364	1.3269	1.4239	1.5279	1.6395	1.7590	85
86	1.2395	1.3313	1.4298	1.5356	1.6490	1.7707	86
87	1.2426	1.3357	1.4358	1.5432	1.6586	1.7826	87
88	1.2457	1.3402	1.4418	1.5510	1.6683	1.7944	88
89	1.2488	1.3447	1.4478	1.5587	1.6780	1.8064	89
90	1.2519	1.3491	1.4538	1.5665	1.6878	1.8184	90
91	1.2551	1.3536	1.4599	1.5743	1.6977	1.8306	91
92	1.2582	1.3581	1.4659	1.5822	1.7076	1.8428	92
93	1.2613	1.3627	1.4721	1.5901	1.7175	1.8551	93
94	1.2645	1.3672	1.4782	1.5981	1.7276	1.8674	94
95	1.2676	1.3718	1.4844	1.6061	1.7376	1.8799	95
96	1.2708	1.3763	1.4905	1.6141	1.7478	1.8924	96
97	1.2740	1.3809	1.4967	1.6222	1.7580	1.9050	97
98	1.2772	1.3855	1.5030	1.6303	1.7682	1.9177	98
99	1.2804	1.3902	1.5092	1.6384	1.7785	1.9305	99
100	1.2836	1.3948	1.5155	1.6466	1.7889	1.9434	100
101	1.2868	1.3994	1.5218	1.6549	1.7994	1.9563	101
102	1.2900	1.4041	1.5282	1.6631	1.8098	1.9694	102
103	1.2932	1.4088	1.5346	1.6714	1.8204	1.9825	103

104	1.2965	1.4135	1.5410	1.6798	1.8310	1.9957	104
105	1.2997	1.4182	1.5474	1.6882	1.8417	2.0091	105
106	1.3030	1.4229	1.5538	1.6966	1.8525	2.0224	106
107	1.3062	1.4277	1.5603	1.7051	1.8633	2.0359	107
108	1.3095	1.4324	1.5668	1.7136	1.8741	2.0495	108
109	1.3127	1.4372	1.5733	1.7222	1.8851	2.0631	109
110	1.3160	1.4420	1.5799	1.7308	1.8961	2.0769	110
111	1.3193	1.4468	1.5865	1.7395	1.9071	2.0907	111
112	1.3226	1.4516	1.5931	1.7482	1.9182	2.1047	112
113	1.3259	1.4565	1.5997	1.7569	1.9294	2.1187	113
114	1.3292	1.4613	1.6064	1.7657	1.9407	2.1328	114
115	1.3326	1.4662	1.6131	1.7745	1.9520	2.1471	115
116	1.3359	1.4711	1.6198	1.7834	1.9634	2.1614	116
117	1.3392	1.4760	1.6265	1.7923	1.9748	2.1758	117
118	1.3426	1.4809	1.6333	1.8013	1.9864	2.1903	118
119	1.3459	1.4858	1.6401	1.8103	1.9980	2.2049	119
120	1.3493	1.4908	1.6470	1.8193	2.0096	2.2196	120
121	1.3527	1.4958	1.6538	1.8284	2.0213	2.2344	121
122	1.3561	1.5007	1.6607	1.8376	2.0331	2.2493	122
123	1.3594	1.5057	1.6676	1.8468	2.0450	2.2643	123
124	1.3628	1.5108	1.6746	1.8560	2.0569	2.2794	124
125	1.3663	1.5158	1.6816	1.8653	2.0689	2.2946	125
126	1.3697	1.5208	1.6886	1.8746	2.0810	2.3099	126
127	1.3731	1.5259	1.6956	1.8840	2.0931	2.3253	127
128	1.3765	1.5310	1.7027	1.8934	2.1053	2.3408	128
129	1.3800	1.5361	1.7098	1.9029	2.1176	2.3564	129
130	1.3834	1.5412	1.7169	1.9124	2.1300	2.3721	130

131	1.3869	1.5464	1.7240	1.9220	2.1424	2.3879	131
132	1.3903	1.5515	1.7312	1.9316	2.1549	2.4038	132
133	1.3938	1.5567	1.7384	1.9412	2.1675	2.4198	133
134	1.3973	1.5619	1.7457	1.9509	2.1801	2.4360	134
135	1.4008	1.5671	1.7530	1.9607	2.1928	2.4522	135
136	1.4043	1.5723	1.7603	1.9705	2.2056	2.4686	136
137	1.4078	1.5776	1.7676	1.9803	2.2185	2.4850	137
138	1.4113	1.5828	1.7750	1.9902	2.2314	2.5016	138
139	1.4149	15881	1.7824	1.0002	2.2444	2.5183	139
140	1.4184	1.5934	1.7898	2.0102	2.2575	2.5351	140
141	1.4219	1.5987	1.7972	2.0202	2.2707	2.5520	141
142	1.4255	1.6040	1.8047	2.0303	2.2839	2.5690	142
143	1.4291	1.6094	1.8122	2.0405	2.2973	2.5861	143
144	1.4326	1.6147	1.8198	2.0507	2.3107	2.6033	144
145	1.4362	1.6201	1.8274	2.0610	2.3241	2.6207	145
146	1.4398	1.6255	1.8350	2.0713	2.3377	2.6382	146
147	1.4434	1.6309	1.8426	2.0816	2.3513	2.6558	147
148	1.4470	1.6364	1.8503	2.0920	2.3651	2.6735	148
149	1.4506	1.6418	1.8580	2.1025	2.3789	2.6913	149
150	1.4543	1.6473	1.8658	2.1130	2.3927	2.7092	150

Amount of 1 at Compound Interest

$$S=(1+r)^n$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	1.0075	1.0100	1.0125	1.0150	1.0175	1.0200	1
2	1.0150	1.0201	1.0251	1.0302	1.0353	1.0404	2
3	1.0226	1.0303	1.0379	1.0456	1.0534	1.0612	3
4	1.0303	1.0406	1.0509	1.0613	1.0718	1.0824	4
5	1.0380	1.0510	1.0640	1.0772	1.0906	1.1040	5
6	1.0458	1.0615	1.0773	1.0934	1.1097	1.1261	6
7	1.0536	1.0721	1.0908	1.1098	1.1291	1.1486	7
8	1.0615	1.0828	1.1044	1.1264	1.1488	1.1716	8
9	1.0695	1.0936	1.1182	1.1433	1.1689	1.1950	9
10	1.0775	1.1046	1.1322	1.1605	1.1894	1.2189	10
11	1.0856	1.1156	1.1464	1.1779	1.2102	1.2433	11
12	1.0938	1.1268	1.1607	1.1956	1.2314	1.2682	12
13	1.1020	1.1380	1.1752	1.2135	1.2529	1.2936	13
14	1.1102	1.1494	1.1899	1.2317	1.2749	1.3194	14
15	1.1186	1.1609	1.2048	1.2502	1.2972	1.3458	15
16	1.1269	1.1725	1.2198	1.2689	1.3199	1.3727	16
17	1.1354	1.1843	1.2351	1.2880	1.3430	1.4002	17
18	1.1439	1.1961	1.2505	1.3073	1.3665	1.4282	18
19	1.1525	1.2081	1.2662	1.3269	1.3904	1.4568	19
20	1.1611	1.2201	1.2820	1.3468	1.4147	1.4859	20
21	1.1698	1.2323	1.2980	1.3670	1.4395	1.5156	21
22	1.1786	1.2447	1.3142	1.3875	1.4647	1.5459	22
23	1.1875	1.2571	1.3307	1.4083	1.4903	1.5768	23
24	1.1964	1.2697	1.3473	1.4295	1.5164	1.6084	24
25	1.2053	1.2824	1.3641	1.4509	1.5429	1.6406	25

26	1.2144	1.2952	1.3812	1.4727	1.5699	1.6734	26
27	1.2235	1.3082	1.3985	1.4948	1.5984	1.7068	27
28	1.1327	1.3212	1.4159	1.5172	1.6254	1.7410	28
29	1.2419	1.3345	1.4336	1.5399	1.6538	1.7758	29
30	1.2512	1.3478	1.4516	1.5630	1.6828	1.8113	30
31	1.2606	1.3613	1.4697	1.5865	1.7122	1.8475	31
32	1.2701	1.3749	1.4881	1.6103	1.7422	1.8845	32
33	1.2796	1.3886	1.5067	1.6344	1.7727	1.9222	33
34	1.2892	1.4025	1.5255	1.6589	1.8037	1.9606	34
35	1.2989	1.4166	1.5446	1.6838	1.8352	1.9998	35
36	1.3086	1.4307	1.5639	1.7091	1.8674	2.0398	36
37	1.3184	1.4450	1.5834	1.7347	1.9000	2.0806	37
38	1.3283	1.4595	1.6032	1.7607	1.9333	2.1222	38
39	1.3383	1.4741	1.6233	1.7872	1.9671	2.1647	39
40	1.3483	1.4888	1.6436	1.8140	2.0015	2.2080	40
41	1.3584	1.5037	1.6641	1.8412	2.0366	2.2522	41
42	1.3686	1.5187	1.6849	1.8688	2.0722	2.2972	42
43	1.3789	1.5339	1.7060	1.8968	2.1085	2.3431	43
44	1.3892	1.5493	1.7273	1.9253	2.1454	2.3900	44
45	1.3996	1.5648	1.7489	1.9542	2.1829	2.4378	45
46	1.4101	1.5804	1.7708	1.9835	2.2211	2.4866	46
47	1.4207	1.5962	1.7929	2.0132	2.2600	2.5363	47
48	1.4314	1.6122	1.8153	2.0434	2.2995	2.5870	48
49	1.4421	1.6283	1.8380	2.0741	2.3398	2.6388	49
50	1.4529	1.6446	1.8610	2.1052	2.3807	2.6915	50
51	1.4638	1.6610	1.8842	2.1368	2.4224	2.7454	51
52	1.4748	1.6776	1.9078	2.1688	2.4648	2.8003	52
53	1.4858	1.6944	1.9316	2.2014	2.5079	2.8563	53

54	1.4970	1.7114	1.9558	2.2344	2.5518	2.9134	54
55	1.5082	1.7285	1.9802	2.2679	2.5965	2.9717	55
56	1.5195	1.7458	2.0050	2.3019	2.6419	3.0311	56
57	1.5309	1.7632	2.0300	2.3364	2.6882	3.0917	57
58	1.5424	1.7809	2.0554	2.3715	2.7352	3.1536	58
59	1.5540	1.7987	2.0811	2.4071	2.7831	3.2166	59
60	1.5656	1.8166	2.1071	2.4432	2.8318	3.2810	60
61	1.5774	1.8348	2.1335	2.4798	2.8813	3.3466	61
62	1.5892	1.8532	2.1601	2.5170	2.9317	3.4135	62
63	1.6011	1.8717	2.1871	2.5548	2.9831	3.4818	63
64	1.6131	1.8904	2.2145	2.5931	3.0343	3.5514	64
65	1.6252	1.9093	2.2422	2.6320	3.0884	3.6225	65
66	1.6374	1.9284	2.2702	2.6715	3.1424	3.6949	66
67	1.6497	1.9477	2.2986	2.7115	3.1974	3.7688	67
68	1.6621	1.9672	2.3273	2.7522	3.2534	3.8442	68
69	1.6745	1.9868	2.3564	2.7935	3.3103	3.9211	69
70	1.6871	2.0067	2.3858	2.8354	3.3682	3.9995	70
71	1.6998	2.0268	2.4157	2.8779	3.4272	4.0795	71
72	1.7125	2.0470	2.4459	2.9211	3.4872	4.1661	72
73	1.7253	2.0675	2.4764	2.9649	3.5482	4.2443	73
74	1.7383	2.0882	2.5074	3.0094	3.6103	4.3292	74
75	1.7513	2.1091	2.5387	3.0545	3.6735	4.4158	75
76	1.7645	2.1302	2.5705	3.1004	3.7377	4.5041	76
77	1.7777	2.1515	2.6026	3.1469	3.8032	4.5942	77
78	1.7910	2.1730	2.6351	3.1941	3.8697	4.6861	78
79	1.8045	2.1947	2.6681	3.2420	3.9374	4.7798	79
80	1.8180	2.2167	2.7014	3.2906	4.0063	4.8754	80

81	1.8316	2.2388	2.7352	3.3400	4.0765	4.9729	81
82	1.8454	2.2612	2.7694	3.3901	4.1478	5.0724	82
83	1.8592	2.2838	2.8040	3.4409	4.2204	5.1738	83
84	1.8732	2.3067	2.8391	3.4925	4.2942	5.2773	84
85	1.8872	2.3297	2.8746	3.5449	4.3694	5.3828	85
86	1.9014	2.3530	2.9105	3.5981	4.4459	5.4905	86
87	1.9156	2.3766	2.9469	3.6521	4.5237	5.6003	87
88	1.9300	2.4003	2.9837	3.7069	4.6028	5.7123	88
89	1.9445	2.4243	3.0210	3.7625	4.6834	5.8266	89
90	1.9590	2.4486	3.0588	3.8189	4.7653	5.9431	90
91	1.9737	2.4731	3.0970	3.8762	4.8487	6.0619	91
92	1.9885	2.4978	3.1357	3.9343	4.9336	6.1832	92
93	2.0035	2.5228	3.1749	3.9933	5.0199	6.3069	93
94	2.0185	2.5480	3.2146	4.0532	5.1078	6.4330	94
95	2.0336	2.5735	3.2548	4.1140	5.1972	6.5616	95
96	2.0489	2.5992	3.2955	4.1758	5.2881	6.6929	96
97	2.0642	2.6252	3.3367	4.2384	5.3806	6.8267	97
98	2.0797	2.6515	3.3784	4.3020	5.4748	6.9633	98
99	2.0953	2.6780	3.4206	4.3665	5.5706	7.1025	99
100	2.1110	2.7048	3.4634	4.4320	5.6681	7.2446	100

Amount of 1 at Compound Interest

$$S = (1+r)^n$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	1.0250	1.0300	1.0350	1.0400	1.0450	1.0500	1
2	1.0506	1.0609	1.0712	1.0816	1.0920	1.1025	2
3	1.0768	1.0927	1.1087	1.1248	1.1411	1.1576	3
4	1.1038	1.1255	1.1475	1.1698	1.1925	1.2155	4
5	1.1314	1.1592	1.1876	1.2166	1.2461	1.2762	5
6	1.1596	1.1940	1.2292	1.2653	1.3022	1.3400	6
7	1.1886	1.2298	1.2722	1.3159	1.3608	1.4071	7
8	1.2184	1.2667	1.3168	1.3685	1.4221	1.4774	8
9	1.2488	1.3047	1.3628	1.4233	1.4860	1.5513	9
10	1.2800	1.3439	1.4105	1.4802	1.5529	1.6288	10
11	1.3120	1.3842	1.4599	1.5394	1.6228	1.7103	11
12	1.3448	1.4257	1.5110	1.6010	1.6958	1.7958	12
13	1.3785	1.4685	1.5639	1.6650	1.7721	1.8856	13
14	1.4129	1.5125	1.6186	1.7316	1.8519	1.9799	14
15	1.4482	1.5579	1.6753	1.8009	1.9352	2.0789	15
16	1.4845	1.6047	1.7339	1.8729	2.0223	2.1828	16
17	1.5216	1.6528	1.7946	1.9479	2.1133	2.2920	17
18	1.5596	1.7024	1.8574	2.0258	2.2084	2.4066	18
19	1.5986	1.7535	1.9225	2.1068	2.3078	2.5269	19
20	1.6386	1.8061	1.9897	2.1991	2.4117	2.6532	20
21	1.6795	1.8602	2.0594	2.2787	2.5202	2.7859	21
22	1.7215	1.9161	2.1315	2.3699	2.6336	2.9252	22
23	1.7646	1.9735	2.2061	2.4647	2.7521	3.0715	23
24	1.8087	2.0327	2.2833	2.5633	2.8760	3.2250	24
25	1.8539	2.0937	2.3632	2.6658	3.0054	3.3863	25

26	1.9002	2.1565	2.4459	2.7724	3.1406	3.5556	26
27	1.9478	2.2212	2.5315	2.8833	3.2820	3.7334	27
28	1.9964	2.2879	2.6201	2.9987	3.4296	3.9201	28
29	2.0464	2.3565	2.7118	3.1186	3.5840	4.1161	29
30	2.0975	2.4272	2.8067	3.2433	3.7453	4.3219	30
31	2.1500	2.5000	2.9050	3.3731	3.9138	4.5380	31
32	2.2037	2.5750	3.0067	3.5080	4.0899	4.7649	32
33	2.2588	2.6523	3.1119	3.6483	4.2740	5.0031	33
34	2.3153	2.7319	3.2208	3.7943	4.4663	5.2533	34
35	2.3732	2.8138	3.3335	3.9460	4.6673	5.5160	35
36	2.4325	2.8982	3.4502	4.1039	4.8773	5.7918	36
37	2.4933	2.9852	3.5710	4.2680	5.0968	6.0814	37
38	2.5556	3.0747	3.6960	4.4388	5.3262	6.3854	38
39	2.6195	3.1670	3.8253	4.6163	5.5658	6.7047	39
40	2.6850	3.2620	3.9592	4.8010	5.8163	7.0399	40
41	2.7521	3.3598	4.0978	4.9930	6.0781	7.3919	41
42	2.8209	3.4606	4.2412	5.1927	6.3516	7.7615	42
43	2.8915	3.5645	4.3897	5.4004	6.6374	8.1496	43
44	2.9638	3.6714	4.5433	5.6165	6.9361	8.5571	44
45	3.0379	3.7815	4.7023	5.8411	7.2482	8.9850	45
46	3.1138	3.8950	4.8669	6.0748	7.5744	9.4342	46
47	3.1916	4.0118	5.0372	6.3178	7.9152	9.9059	47
48	3.2714	4.1322	5.2135	6.5705	8.2714	10.4012	48
49	3.3532	4.2562	5.3960	6.8333	8.6436	10.9213	49
50	3.4371	4.3839	5.5849	7.1066	9.0326	11.4673	50
51	3.5230	4.5154	5.7803	7.3909	9.4391	12.0407	51
52	3.6111	4.6508	5.9827	7.6865	9.8638	12.6428	52
53	3.7013	4.7904	6.1921	7.9940	10.3077	13.2749	53

54	3.7939	4.9341	6.4088	8.3138	10.7715	13.9386	54
55	3.8887	5.0821	6.6331	8.6463	11.2563	14.6356	55
56	3.9859	5.2346	6.8653	8.9922	11.7628	15.3674	56
57	4.0856	5.3916	7.1055	9.3519	12.2921	16.1357	57
58	4.1877	5.5534	7.3542	9.7259	12.8453	16.9425	58
59	4.2924	5.7200	7.6116	10.1150	13.4233	17.7897	59
60	4.3997	5.8916	7.8780	10.5196	14.0274	18.6791	60
61	4.5097	6.0683	8.1538	10.9404	14.6586	19.6131	61
62	4.6225	6.2504	8.4392	11.3780	15.3182	20.5938	62
63	4.7380	6.4379	8.7345	11.8331	16.0076	21.6234	63
64	4.8565	6.6310	9.0402	12.3064	16.7279	22.7046	64
65	4.9779	6.8299	9.3567	12.7987	17.4807	23.8399	65
66	5.1024	7.0348	9.6841	13.3106	18.2673	25.0318	66
67	5.2299	7.2459	10.0231	13.8431	19.0893	26.2834	67
68	5.3607	7.4633	10.3739	14.3968	19.9483	27.5976	68
69	5.4947	7.6872	10.7370	14.9727	20.8460	28.9775	69
70	5.6321	7.9178	11.1128	15.5716	21.7841	30.4264	70
71	5.7729	8.1553	11.5017	16.1944	22.7644	31.9477	71
72	5.9172	8.4000	11.9043	16.8422	23.7888	33.5451	72
73	6.0651	8.6520	12.3209	17.5159	24.8593	35.2223	73
74	6.2167	8.9115	12.7522	18.2165	25.9779	36.9835	74
75	6.3722	9.1789	13.1985	18.9452	27.1469	38.8326	75
76	6.5315	9.4542	13.6604	19.7030	28.3686	40.7743	76
77	6.6948	9.7379	14.1386	20.4911	29.6451	42.8130	77
78	6.8621	10.0300	14.6334	21.3108	30.9792	44.9536	78
79	7.0337	10.3309	15.1456	22.1632	32.3732	47.2013	79
80	7.2095	10.6408	15.757	23.0497	33.8300	49.5614	80

81	7.3898	10.9601	16.2243	23.9717	35.3524	52.0395	81
82	7.5745	11.2889	16.7922	24.9306	36.9433	54.6414	82
83	7.7639	11.6275	17.3799	25.9278	38.6057	57.3735	83
84	7.9580	11.9764	17.9882	26.9650	40.3430	60.2422	84
85	8.1569	12.3357	18.6178	28.0436	42.1584	63.2543	85
86	8.3608	12.7057	19.2694	29.1653	44.0555	66.4170	86
87	8.5699	13.0869	19.9439	30.3317	46.0380	69.7379	87
88	8.7841	13.4795	20.6419	31.5452	48.1098	73.2248	88
89	9.0037	13.8839	21.3644	32.8070	50.2747	76.8860	89
90	9.2288	14.3004	22.1121	34.1193	52.5371	80.7303	90
91	9.4595	14.7294	22.8861	35.4841	54.9012	84.7668	91
92	9.6960	15.1713	23.6871	36.9034	57.3718	89.0052	92
93	9.9384	15.6265	24.5161	38.3796	59.9535	93.4554	93
94	10.1869	16.0953	25.3742	39.9147	62.6514	98.1282	94
95	10.4416	16.5781	26.2623	41.5113	65.4707	103.0346	95
96	10.7026	17.0755	27.1815	43.1718	68.4169	108.1864	96
97	10.9702	17.5877	28.1328	44.8987	71.4957	113.5957	97
98	11.2444	18.1154	29.1175	46.6946	74.7130	119.2755	98
99	11.5255	18.6588	30.1366	48.5624	78.0751	125.2392	99
100	11.8137	19.2186	31.1914	50.5049	81.5885	131.5012	100

Amount of 1 at Compound Interest

$$S = (1+r)^n$$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1	1.0550	1.0600	1.0650	1.0700	1.0750	1.0800	1
2	1.1130	1.1236	1.1342	1.1449	1.1556	1.1664	2
3	1.1742	1.1910	1.2079	1.2250	1.2422	1.2597	3
4	1.2388	1.2624	1.2864	1.3107	1.3354	1.3604	4
5	1.3069	1.3382	1.3700	1.4025	1.4356	1.4693	5
6	1.3788	1.4185	1.4591	1.5007	1.5433	1.5868	6
7	1.4546	1.5036	1.5539	1.6057	1.6590	1.7138	7
8	1.5346	1.5938	1.6549	1.7181	1.7834	1.8509	8
9	1.6190	1.6894	1.7625	1.8384	1.9172	1.9990	9
10	1.7081	1.7908	1.8771	1.9671	2.0610	2.1589	10
11	1.8020	1.8982	1.9991	2.1048	2.2156	2.3316	11
12	1.9012	2.0121	2.1290	1.2521	2.3817	2.5181	12
13	2.0057	2.1329	2.2674	2.4098	2.5604	2.7196	13
14	2.1160	2.2609	2.4148	2.5785	2.7524	2.9387	14
15	2.2324	2.3965	2.5718	2.7590	2.9588	3.1721	15
16	2.3552	2.5403	2.7390	2.9521	3.1807	3.4259	16
17	2.4848	2.6927	2.9170	3.1588	3.4193	3.7000	17
18	2.6214	2.8543	3.1066	3.3799	3.6758	3.9960	18
19	2.9656	3.0255	3.3085	3.6165	3.9514	3.4157	19
20	2.9177	3.2071	3.5236	3.8696	4.2478	4.6609	20
21	3.0782	3.3995	3.7526	4.1405	4.5664	5.0338	21
22	3.2475	3.6035	3.9966	4.4304	4.9089	5.4365	22
23	3.4261	3.8197	4.2563	4.7405	5.2770	5.8714	23
24	3.6145	4.0489	4.5330	5.0723	5.6728	6.3411	24
25	3.8133	4.2918	4.8276	5.4274	6.0983	6.8484	25

26	2.0231	4.5493	5.1414	5.8073	6.5557	7.3963	26
27	4.2444	4.8223	5.4756	6.2138	7.0473	7.9880	27
28	4.4778	5.1116	5.8316	6.6488	7.5759	8.6271	28
29	4.7241	5.4183	6.2106	7.1142	8.1441	9.3172	29
30	4.9839	5.7434	6.6143	7.6122	8.7549	10.0626	30
31	5.2580	6.0881	7.0442	8.1451	9.4115	10.8676	31
32	5.5472	6.4533	7.5021	8.7152	10.1174	11.7370	32
33	5.8523	6.8405	7.9898	9.3253	10.8762	12.6760	33
34	6.1742	7.2510	8.5091	9.9781	11.6919	13.6901	34
35	6.5138	7.6860	9.0622	10.6765	12.5688	14.7853	35
36	6.8720	8.1472	9.6513	11.4239	13.5115	15.9681	36
37	7.2500	8.6360	10.2786	12.2236	14.5249	17.2456	37
38	7.6488	9.1542	10.9467	13.0792	15.6142	18.6252	38
39	8.0694	9.7035	11.6582	13.9948	16.7853	20.1152	39
40	8.5133	10.2857	12.4160	14.9744	18.0442	21.7245	40
41	8.9815	10.9028	13.2231	16.0226	19.3975	24.4624	41
42	9.4755	11.5570	14.0826	17.1442	20.8523	25.3394	42
43	9.9966	12.2504	14.9979	18.3443	22.4163	27.3666	43
44	10.5464	12.9854	15.9728	19.6284	24.0975	29.5559	44
45	11.1265	13.7646	17.0110	21.0024	25.9048	31.9204	45
46	11.7385	14.5904	18.1168	22.4726	27.8477	34.4740	46
47	12.3841	15.4659	19.3944	24.0457	29.9362	37.2320	47
48	13.0652	16.3938	20.5485	25.7289	32.1815	40.2105	48
49	13.7838	17.3775	21.8842	27.5299	34.5951	43.4274	49
50	14.5419	18.4201	23.3066	29.4570	37.1897	46.9016	50

ملحق (٦)
جداول القيمة الحالية

Present Value of 1 at Compound Interest

$$a = v^n = (1+r)^{-n}$$

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	0.9975	0.9966	0.9958	0.9950	0.9942	0.9933	1
2	0.9950	0.993	0.9917	0.9900	0.9884	0.9867	2
3	0.9925	0.9900	0.9876	0.9851	0.9827	0.9802	3
4	0.9900	0.9867	0.9835	0.9802	0.9770	0.9737	4
5	0.9875	0.9834	0.9794	0.9753	0.9713	0.9673	5
6	0.9851	0.9802	0.9753	0.9705	0.9657	0.9609	6
7	0.9826	0.9769	0.9713	0.9656	0.9601	0.9545	7
8	0.9802	0.9737	0.9672	0.908	0.9545	0.9482	8
9	0.9777	0.9704	0.9632	0.9561	0.9489	0.9419	9
10	0.9753	0.9672	0.9592	0.9513	0.9434	0.9357	10
11	0.9729	0.0640	0.9552	0.9466	0.9380	0.9295	11
12	0.9704	0.9608	0.9513	0.9419	0.9325	0.9233	12
13	0.9680	0.9576	0.9473	0.9372	0.9271	0.9172	13
14	0.9656	0.9544	0.9434	0.9325	0.9217	0.9111	14
15	0.9632	0.9513	0.9395	0.9279	0.9164	0.9051	15
16	0.9608	0.9481	0.9356	0.9233	0.9111	0.8991	16
17	0.9584	0.9449	0.9317	0.9187	0.9058	0.8931	17
18	0.9560	0.9418	0.9278	0.9141	0.9005	0.8872	18
19	0.9536	0.9387	0.9240	0.9095	0.8953	0.8813	19
20	0.9512	0.9356	0.9202	0.9050	0.8901	0.8755	20

21	0.9489	0.9325	0.9163	0.9005	0.8850	0.8697	21
22	0.9465	0.9294	0.9125	0.8960	0.8798	0.8640	22
23	0.9441	0.9263	0.9087	0.8916	0.8747	0.8582	23
24	0.9418	0.9232	0.9050	0.8871	0.8697	0.8525	24
25	0.9394	0.9201	0.9012	0.8827	0.8646	0.8469	25
26	0.9371	0.9171	0.8975	0.8783	0.8596	0.8413	26
27	0.9348	0.9140	0.8938	0.8740	0.8546	0.8357	27
28	0.9324	0.9110	0.8900	0.8696	0.8497	0.8302	28
29	0.9301	0.9080	0.8864	0.8653	0.8447	0.8247	29
30	0.9278	0.9049	0.8827	0.8610	0.8398	0.8192	30
31	0.9255	0.9019	0.8790	0.8567	0.8350	0.8138	31
32	0.9232	0.8989	0.8754	0.8524	0.8301	0.8084	32
33	0.9209	0.8959	0.8717	0.8482	0.8253	0.8031	33
34	0.9186	0.8930	0.8681	0.8440	0.8205	0.7977	34
35	0.9163	0.8900	0.8645	0.8398	0.8158	0.7925	35
36	0.9140	0.8870	0.8609	0.8356	0.8110	0.7872	36
37	0.9117	0.8841	0.8574	0.8314	0.8063	0.7820	37
38	0.9094	0.8812	0.8538	0.8273	0.8016	0.7768	38
39	0.9072	0.8782	0.8503	0.8232	0.7970	0.7717	39
40	0.9049	0.8753	0.8467	0.8191	0.7924	0.7666	40
41	0.9026	0.8724	0.8432	0.8150	0.7878	0.7615	41
42	0.9004	0.8695	0.8397	0.8110	0.7832	0.7564	42
43	0.8981	0.8666	0.8362	0.8069	0.7787	0.7514	43
44	0.8959	0.8637	0.8328	0.8029	0.7742	0.7464	44
45	0.8937	0.8609	0.8293	0.7989	0.7697	0.7415	45
46	0.8914	0.8580	0.8259	0.7949	0.7652	0.7366	46
47	0.8892	0.8552	0.8224	0.710	0.7608	0.7317	47
48	0.8870	0.8523	0.8190	0.7870	0.7563	0.7269	48

49	0.8848	0.8495	0.8156	0.7831	0.7520	0.7221	49
50	0.8826	0.8467	0.8122	0.7792	0.7476	0.7173	50
51	0.8804	0.8439	0.8089	0.7754	0.7433	0.7125	51
52	0.8782	0.8410	0.8055	0.7715	0.7390	0.7078	52
53	0.8760	0.8383	0.8022	0.7677	0.7347	0.7031	53
54	0.8738	0.8355	0.7988	0.7638	0.7304	0.6985	54
55	0.8716	0.8327	0.7955	0.7600	0.7262	0.6938	55
56	0.8695	0.8299	0.7922	0.7563	0.7220	0.6892	56
57	0.8673	0.8272	0.7889	0.7525	0.7278	0.6847	57
58	0.8651	0.8244	0.7857	0.7488	0.7136	0.6801	58
59	0.8630	0.8217	0.782	0.7450	0.7095	0.6756	59
60	0.8608	0.8190	0.7792	0.7413	0.7054	0.6712	60
61	0.8587	0.8162	0.7759	0.7376	0.7013	0.6667	61
62	0.8565	0.8135	0.7727	0.7340	0.6972	0.6623	62
63	0.8544	0.8108	0.7695	0.7303	0.6932	0.5679	63
64	0.8523	0.8081	0.7663	0.7267	0.6891	0.6536	64
65	0.8501	0.8054	0.7631	0.7231	0.6851	0.6492	65
66	0.8480	0.8028	0.7600	0.7195	0.6812	0.6449	66
67	0.8459	0.8001	0.7568	0.7159	0.6772	0.6407	67
68	0.8438	0.7974	0.7537	0.7123	0.6733	0.6364	68
69	0.8417	0.7948	0.7505	0.7088	0.6694	0.6322	69
70	0.8396	0.7921	0.7474	0.7053	0.6655	0.6280	70
71	0.8375	0.7895	0.7443	0.7017	0.6616	0.6239	71
72	0.8354	0.7869	0.7412	0.6983	0.6578	0.6197	72
73	0.8333	0.7843	0.7382	0.6948	0.6540	0.6156	73
74	0.8312	0.7817	0.7351	0.6913	0.6502	0.6115	74
75	0.8292	0.7791	0.7320	0.6879	0.6464	0.6075	75

76	0.8271	0.7765`	0.7290	0.6845	0.6427	0.6035	76
77	0.8250	0.7739	0.260	0.6811	0.6389	0.5995	77
78	0.8230	0.7713	0.7230	0.6777	0.6352	0.5955	78
79	0.8209	0.7688	0.7200	0.6743	0.6316	0.5916	79
80	0.8189	0.7662	0.7170	0.6709	0.6279	0.5876	80
81	0.8168	0.7637	0.7140	0.6676	0.6242	0.5837	81
82	0.8148	0.7611	0.7110	0.6643	0.6206	0.5977	82
83	0.8128	0.7586	0.7081	0.6610	0.6170	0.5760	83
84	0.8107	0.7561	0.7052	0.6577	0.6134	0.5722	84
85	0.8087	0.7536	0.7022	0.6544	0.6099	0.5684	85
86	0.8067	0.7511	0.6993	0.6512	0.6064	0.5647	86
87	0.8047	0.7486	0.6964	0.6479	0.6028	0.5609	87
88	0.8027	0.7461	0.6935	0.6447	0.5993	0.5572	88
89	0.8007	0.7436	0.6906	0.6415	0.5959	0.5535	89
90	0.7987	0.7411	0.6878	0.6383	0.5924	0.5499	90
91	0.7967	0.7387	0.6849	0.6351	0.5890	0.5462	91
92	0.7947	0.7362	0.6821	0.6320	0.5856	0.5426	92
93	0.7927	0.7338	0.6792	0.6288	0.5822	0.5390	93
94	0.7908	0.7313	0.6764	0.6257	0.5788	0.5354	94
95	0.7888	0.7289	0.6736	0.6226	0.5754	0.5319	95
96	0.7868	0.7265	0.6708	0.6195	0.5721	0.5284	96
97	0.7849	0.7241	0.6680	0.6164	0.5688	0.5249	97
98	0.7829	0.7217	0.6653	0.6133	0.5655	0.5214	98
99	0.7809	0.7193	0.6625	0.6103	0.5622	0.5179	99
100	0.7790	0.7169	0.6598	0.6072	0.5589	0.5145	100
101	0.7771	0.7145	0.6570	0.6042	0.5557	0.5111	101
102	0.7751	0.7121	0.6543	0.6012	0.5525	0.5077	102
103	0.7732	0.7098	0.6516	0.5982	0.5493	0.5043	103

104	0.7713	0.7074	0.6489	0.5952	0.5461	0.5010	104
105	0.7693	0.7050	0.6462	0.5923	0.5429	0.4977	105
106	0.7674	0.7027	0.6435	0.5893	0.5398	0.4944	106
107	0.7655	0.7004	0.6408	0.5864	0.5366	0.4911	107
108	0.7636	0.6980	0.6382	0.5835	0.5335	0.4879	108
109	0.7617	0.6957	0.6355	0.5806	0.5304	0.4846	109
110	0.7598	0.6934	0.6329	0.5777	0.5273	0.4814	110
111	0.7579	0.6911	0.6303	0.5748	0.5243	0.4782	111
112	0.7560	0.6888	0.6276	0.5720	0.5212	0.4751	112
113	0.7541	0.6865	0.6250	0.5691	0.5182	0.4719	113
114	0.7522	0.6842	0.6224	0.5663	0.5152	0.4688	114
115	0.7504	0.6820	0.6199	0.5635	0.5122	0.4657	115
116	0.7485	0.6797	0.6173	0.5607	0.5093	0.4626	116
117	0.7466	0.6774	0.6147	0.5579	0.5063	0.4595	117
118	0.7448	0.6752	0.6122	0.5551	0.5034	0.4565	118
119	0.7429	0.6730	0.6096	0.5523	0.5004	0.4535	119
120	0.7410	0.6707	0.6071	0.5496	0.4975	0.4505	120
121	0.7392	0.6685	0.6046	0.5468	0.4947	0.4475	121
122	0.7374	0.6663	0.6021	0.5441	0.4918	0.4445	122
123	0.7355	0.6641	0.5996	0.5414	0.4889	0.4416	123
124	0.7337	0.6618	0.5971	0.5387	0.4861	0.4387	124
125	0.7319	0.6596	0.5946	0.5360	0.4833	0.4356	125
126	0.7300	0.6575	0.5922	0.5334	0.4805	0.4329	126
127	0.7282	0.6553	0.5897	0.5307	0.4777	0.4300	127
128	0.7264	0.6531	0.5872	0.5281	0.4749	0.4272	128
129	0.7246	0.6509	0.5848	0.5255	0.4722	0.4243	129
130	0.7228	0.6488	0.5824	0.5228	0.4698	0.4215	130

131	0.7210	0.6466	0.5800	0.5202	0.4667	0.4187	131
132	0.7192	0.6445	0.5776	0.5177	0.4640	0.4159	132
133	0.7174	0.6423	0.5752	0.5151	0.4613	0.4132	133
134	0.7156	0.6402	0.5728	0.5125	0.4586	0.4105	134
135	0.7138	0.6381	0.5704	0.5100	0.4560	0.4077	135
136	0.7120	0.6359	0.5680	0.5074	0.4533	0.4050	136
137	0.7102	0.6338	0.5657	0.5049	0.4507	0.4024	137
138	0.7085	0.6317	0.5633	0.5024	0.4481	0.3997	138
139	0.7067	0.6296	0.5610	0.4999	0.4455	0.3970	139
140	0.7049	0.6275	0.5587	0.4974	0.4429	0.3944	140
141	0.7032	0.6254	0.5563	0.4949	0.4403	0.3918	141
142	0.7014	0.6234	0.5540	0.4925	0.4378	0.3892	142
143	0.6997	0.6213	0.5517	0.4900	0.4352	0.3866	143
144	0.6979	0.6192	0.5494	0.4876	0.4327	0.3841	144
145	0.6962	0.6172	0.5472	0.4852	0.4302	0.3815	145
146	0.6945	0.6151	0.5449	0.4827	0.4277	0.3790	146
147	0.6927	0.6131	0.5426	0.4803	0.4252	0.3765	147
148	0.6910	0.6110	0.5404	0.4779	0.4228	0.3740	148
149	0.6893	0.6090	0.5381	0.4756	0.4203	0.3715	149
150	0.6876	0.6070	0.5359	0.4732	0.4179	0.3691	150

Present Value of 1 at Compound Interest

$$a = v^{n} = (1+r)^{-n}$$

n	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%	n
1	0.9925	0.9900	0.9876	0.9852	0.9824	0.9803	1
2	0.9851	0.9802	0.9754	0.9706	0.9658	0.9611	2
3	0.9778	0.9705	0.9634	0.9563	0.9492	0.9423	3
4	0.9705	0.9609	0.9515	0.9421	0.9329	0.9238	4
5	0.9633	0.9514	0.9397	0.9282	0.9169	0.9057	5
6	0.9561	0.9420	0.9281	0.9145	0.9011	0.8879	6
7	0.9490	0.9327	0.9167	0.9010	0.8856	0.8705	7
8	0.9419	0.9234	0.9053	0.8877	0.8704	0.8534	8
9	0.9349	0.9143	0.8942	0.8745	0.8554	0.8367	9
10	0.9280	0.9052	0.8831	0.8616	0.8407	0.8203	10
11	0.9210	0.8963	0.8722	0.8489	0.8262	0.8042	11
12	0.9142	0.8874	0.8615	0.8363	0.8120	0.7884	12
13	0.9074	0.8786	0.8508	0.8240	0.7980	0.7730	13
14	0.9006	0.8699	0.8403	0.8118	0.7843	0.7578	14
15	0.8939	0.8613	0.8299	0.7998	0.7708	0.7430	15
16	0.8873	0.8528	0.8197	0.7880	0.7576	0.7284	16
17	0.8807	0.8443	0.8096	0.7763	0.7445	0.7141	17
18	0.8741	0.8360	0.7996	0.7649	0.7317	0.7001	18
19	0.8676	0.8277	0.7897	0.7536	0.7191	0.6864	19
20	0.8611	0.8195	0.7800	0.7424	0.7068	0.6729	20
21	0.8547	0.8114	0.7703	0.7314	0.6946	0.6597	21
22	0.8484	0.8033	0.7608	0.7206	0.6827	0.6468	22
23	0.8421	0.7954	0.7514	0.7100	0.6709	0.6341	23
24	0.8358	0.7875	0.7421	0.6995	0.6594	0.6217	24
25	0.8296	0.7797	0.7330	0.6892	0.6480	0.6095	25

26	0.8234	0.7720	0.7239	0.6790	0.6369	0.5975	26
27	0.8173	0.7644	0.7150	0.6689	0.6259	0.5859	27
28	0.8112	0.7568	0.7062	0.6590	0.6152	0.5743	28
29	0.8051	0.7493	0.6974	0.6493	0.6046	0.5631	29
30	0.7991	0.7419	0.6888	0.6397	0.5942	0.5520	30
31	0.7932	0.7345	0.6803	0.6303	0.5840	0.5412	31
32	0.7873	0.7273	0.6719	0.6209	0.5739	0.5306	32
33	0.7814	0.7201	0.6636	0.6118	0.5641	0.5202	33
34	0.7756	0.7129	0.5664	0.6027	0.5544	0.5100	34
35	0.7698	0.7059	0.6474	0.5938	0.5448	0.5000	35
36	0.7641	0.6989	0.6394	0.5850	0.5355	0.4902	36
37	0.7584	0.6920	0.6315	0.5764	0.5262	0.4806	37
38	0.7528	0.6851	0.6237	0.5670	0.5172	0.4711	38
39	0.7472	0.6783	0.6160	0.5595	0.5083	0.4619	39
40	0.7416	0.6716	0.6084	0.5512	0.4996	0.4528	40
41	0.7361	0.6650	0.6009	0.5431	0.4910	0.4440	41
42	0.7306	0.6584	0.5934	0.5350	0.4825	0.4353	42
43	0.7252	0.6518	0.5861	0.5271	0.4742	0.4267	43
44	0.7198	0.6454	0.5789	0.5193	0.4661	0.4184	44
45	0.7144	0.6390	0.5717	0.5117	0.4580	0.4101	45
46	0.7091	0.6327	0.5647	0.5041	0.4502	0.4021	46
47	0.7038	0.6264	0.5577	0.4967	0.4424	0.3942	47
48	0.6986	0.6202	0.5508	0.4893	0.4348	0.3865	48
49	0.6934	0.6141	0.5440	0.4821	0.4273	0.3789	49
50	0.6882	0.6080	0.5373	0.4750	0.4200	0.3715	50
51	0.6831	0.6020	0.5307	0.4679	0.4128	0.3642	51
52	0.6780	0.5960	0.5241	0.4610	0.4057	0.3571	52

53	0.6729	0.5901	0.5176	0.4542	0.3987	0.3500	53
54	0.6679	0.5843	0.5112	0.4475	0.3918	0.3432	54
55	0.6630	0.5785	0.5049	0.4409	0.3851	0.3365	55
56	0.6580	0.5728	0.4987	0.4344	0.3785	0.3299	56
67	0.6531	0.5671	0.4925	0.4279	0.3719	0.3234	57
58	0.6483	0.5625	0.4865	0.4216	0.3655	0.3170	58
59	0.6434	0.5559	0.4904	0.4154	0.3593	0.3108	59
60	0.6386	0.5504	0.4745	0.4092	0.3531	0.3047	60
61	0.6339	0.5449	0.4687	0.4032	0.3470	0.2988	61
62	0.6292	0.5396	0.4629	0.3972	0.3410	0.2929	62
63	0.6245	0.5342	0.4572	0.3914	0.3352	0.2872	63
64	0.6198	0.5289	0.4515	0.3856	0.3294	0.2815	64
65	0.6152	0.5237	0.4459	0.3799	0.3237	0.2760	65
66	0.6106	0.5185	0.4404	0.3743	0.3182	0.2706	66
67	0.6061	0.5134	0.4350	0.3687	0.3127	0.2653	67
68	0.6016	0.5083	0.4296	0.3633	0.3073	0.2601	68
69	0.5971	0.5032	0.4243	0.3579	0.3020	0.2550	69
70	0.5927	0.4983	0.4191	0.3526	0.2968	0.2500	70
71	0.5883	0.4933	0.4139	0.3474	0.2917	0.2451	71
72	0.5839	0.4884	0.4088	0.3423	0.2867	0.2403	72
73	0.5795	0.4836	0.4037	0.3372	0.2818	0.2356	73
74	0.5752	0.4788	0.3988	0.3322	0.2769	0.2309	74
75	0.5709	0.4741	0.3938	0.3273	0.2722	0.2264	75
76	0.5667	0.4694	0.3890	0.3225	0.2675	0.2220	76
77	0.5625	0.4647	0.3842	0.3177	0.2629	0.2176	77
78	0.5583	0.4601	0.3794	0.3130	0.2584	0.2133	78
79	0.5541	0.4556	0.3747	0.3084	0.2539	0.2092	79
80	0.5500	0.4511	0.3701	0.3038	0.2496	0.2051	80

81	0.5459	0.4466	0.3655	0.2993	0.2453	0.2010	81
82	0.5418	0.4422	0.3610	0.2949	0.2410	0.1971	82
83	0.5378	0.4378	0.3566	0.2906	0.2369	0.1932	83
84	0.5338	0.4335	0.3522	0.2863	0.2328	0.1894	84
85	0.5298	0.4292	0.3478	0.2820	0.2288	0.1857	85
86	0.5259	0.4249	0.3435	0.2779	0.2249	0.1821	86
87	0.5220	0.4207	0.3393	0.2738	0.2210	0.1785	87
88	0.5181	0.4165	0.3351	0.2697	0.2172	0.1750	88
89	0.5142	0.4124	0.3310	0.2657	0.2135	0.1716	89
90	0.5104	0.4083	0.3269	0.2618	0.2098	0.1682	90
91	0.5066	0.4043	0.3228	0.2579	0.2062	0.1649	91
92	0.5028	0.4003	0.3189	0.2541	0.2026	0.1617	82
93	0.4991	0.3963	0.3149	0.2504	0.1992	0.1585	93
94	0.4954	0.3924	0.3110	0.2467	0.1957	0.1554	94
95	0.4917	0.3885	0.3072	0.2430	0.1924	0.1523	95
96	0.4880	0.3847	0.3038	0.2394	0.1891	0.1494	96
97	0.4844	0.3809	0.2996	0.2359	0.1858	0.1464	97
98	0.4808	0.3771	0.2959	0.2324	0.1826	0.1436	98
99	0.4772	0.3734	0.923	0.2290	0.1795	0.1407	99
100	0.4736	0.3697	0.2887	0.2256	0.1764	0.1380	100

Present Value of 1 at Compound Interest

$$a = v^n = (1+r)^{-n}$$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	n
1	0.9756	0.9708	0.9661	0.9615	0.9569	0.9523	1
2	0.9518	0.9426	0.9335	0.9245	0.9157	0.9070	2
3	0.9285	0.9151	0.9019	0.8889	0.8762	0.8638	3
4	0.9059	0.8884	0.8714	0.8548	0.8385	0.8227	4
5	0.8838	0.8626	0.8419	0.8219	0.8024	0.7835	5
6	0.8622	0.8374	0.8135	0.7903	0.7678	0.7462	6
7	0.8412	0.8130	0.7859	0.7599	0.7348	0.7106	7
8	0.8207	0.7894	0.7594	0.7306	0.7031	0.6768	8
9	0.8007	0.7664	0.7337	0.7025	0.6729	0.6446	9
10	0.7811	0.7440	0.7089	0.6755	0.6439	0.6139	10
11	0.7621	0.7224	0.6849	0.6495	0.6161	0.5846	11
12	0.7435	0.7013	0.6617	0.6245	0.5986	0.5568	12
13	0.7254	0.6809	0.6394	0.6005	0.5642	0.5303	13
14	0.7077	0.6611	0.6177	0.5774	0.5399	0.5050	14
15	0.6904	0.6418	0.5968	0.5552	0.5167	0.4810	15
16	0.6736	0.6231	0.5767	0.5339	0.4944	0.4581	16
17	0.6571	0.6050	0.5572	0.5133	0.4731	0.4362	17
18	0.6411	0.5873	0.5383	0.4936	0.4528	0.4155	18
19	0.6255	0.5702	0.5201	0.4746	0.4333	0.3957	19
20	0.6102	0.5536	0.5025	0.4563	04146	0.3768	20
21	0.5953	0.5375	0.4855	0.4388	0.3967	0.3589	21
22	0.5808	0.5218	0.4691	0.4219	0.3797	0.3418	22
23	0.5666	0.5066	0.4532	0.4057	0.3633	0.3255	23
24	0.5528	0.4919	0.4379	0.3901	0.3477	0.3100	24
25	0.5393	0.4776	0.4231	0.3751	0.3327	0.2953	25

26	0.5263	0.4636	0.4088	0.3606	0.3184	0.2812	26
27	0.5133	0.4501	0.3950	0.3468	0.3046	0.2678	27
28	0.5008	0.4370	0.3816	0.3334	0.2915	0.2550	28
29	0.4886	0.4243	0.3687	0.3206	0.2790	0.2429	29
30	0.4767	0.4119	0.3562	0.3083	0.2670	0.2313	30
31	0.4651	0.3999	0.3442	0.2964	0.2555	0.2203	31
32	0.4537	0.3883	0.3325	0.2850	0.2444	0.2098	32
33	0.4427	0.3770	0.3213	0.2740	0.2339	0.1998	33
34	0.4319	0.3660	0.3104	0.2635	0.2238	0.1903	34
35	0.4213	0.3553	0.2999	0.2534	0.2142	0.1812	35
36	0.4110	0.3450	0.2898	0.2436	0.2050	0.1726	36
37	0.4010	0.3349	0.2800	0.2342	0.1961	0.1644	37
38	0.3912	0.3252	0.2705	0.2252	0.1877	0.1566	38
39	0.3817	0.3157	0.2614	0.2166	0.1796	0.1491	39
40	0.3724	0.3065	0.2525	0.2082	0.1719	0.1420	40
41	0.3633	0.2976	0.2440	0.2002	0.1645	0.1352	41
42	0.3544	0.2889	0.2357	0.1925	0.1574	0.1288	42
43	0.3458	0.2805	0.2278	0.1851	0.1506	0.1227	43
44	0.3374	0.2723	0.2201	0.1780	0.1441	0.1168	44
45	0.3291	0.2644	0.2126	0.1711	0.1379	0.1112	45
46	0.3211	0.2567	0.2054	0.1646	0.1320	0.1050	46
47	0.3133	0.2492	0.1985	0.1582	0.1263	0.1009	47
48	0.3056	0.2419	0.1918	0.1521	0.1208	0.0961	48
49	0.2982	0.2349	0.1853	0.1463	0.1165	0.0915	49
50	0.2909	0.2281	0.1790	0.1407	0.1107	0.0872	50
51	0.2838	0.2214	0.1729	0.1353	0.1059	0.0830	51
52	0.2769	0.2150	0.1671	0.1300	0.1013	0.0790	52
53	0.2701	0.2087	0.1614	0.1250	0.0970	0.0753	53

54	0.2635	0.2026	0.1560	0.1202	0.0928	0.0717	54
55	0.2571	0.1967	0.1507	0.1156	0.0888	0.0683	55
56	0.2508	0.1910	0.1456	0.1112	0.0850	0.0650	56
57	0.2447	0.1854	0.1407	0.1069	0.0813	0.0619	57
58	0.2347	0.1800	0.1359	0.1028	0.0778	0.0590	58
59	0.2329	0.1748	0.1313	0.0988	0.0744	0.0562	59
60	0.2272	0.1697	0.1269	0.0950	0.0712	0.535	60
61	0.2217	0.1647	0.1226	0.0914	0.0682	0.0509	61
62	0.2163	0.1599	0.1184	0.0878	0.0652	0.0485	62
63	0.2110	0.1553	0.1144	0.0845	0.0624	0.0462	63
64	0.2059	0.1508	0.1106	0.0812	0.0597	0.0440	64
65	0.2008	0.1464	0.1068	0.0781	0.0572	0.0419	65
66	0.1959	0.1421	0.1032	0.0751	0.0547	0.0399	66
67	0.1912	0.1380	0.0997	0.0722	0.0523	0.0380	67
68	0.1865	0.1339	0.0963	0.0694	0.0501	0.0362	68
69	0.1819	0.1300	0.0931	0.0667	0.0479	0.0345	69
70	0.1775	0.1262	0.0899	0.0642	0.0459	0.0328	70
71	0.1732	0.1226	0.0869	0.0617	0.0439	0.0313	71
72	0.1689	0.1190	0.0840	0.0593	0.0420	0.0298	72
73	0.1648	0.1155	0.0811	0.0570	0.0402	0.0283	73
74	0.1608	0.1122	0.0784	0.0548	0.0384	0.0270	74
75	0.1569	0.1089	0.0757	0.0527	0.0368	0.0257	75
76	0.1531	0.1057	0.0732	0.0507	0.0352	0.0245	76
77	0.1493	0.1026	0.0707	0.0488	0.0337	0.0233	77
78	0.1457	0.0997	0.0683	0.0469	0.0322	0.0222	78
79	0.1421	0.0967	0.0660	0.0451	0.0308	0.0211	79
80	0.1387	0.0939	0.0637	0.0433	0.0295	0.0201	80

81	0.1353	0.0912	0.0616	0.0417	0.0282	0.0192	81
82	0.1320	0.0885	0.0595	0.0401	0.0270	0.0183	82
83	0.1288	0.0860	0.0575	0.0385	0.0259	0.0174	83
84	0.1256	0.0834	0.0555	0.0370	0.0247	0.0165	84
85	0.1225	0.0810	0.0537	0.0356	0.0237	0.0158	85
86	0.1196	0.0787	0.0518	0.0342	0.0226	0.0150	86
87	0.1166	0.0764	0.0501	0.0329	0.0217	0.0143	87
88	0.1138	0.0741	0.0484	0.0317	0.0207	00136	88
89	0.1110	0.0720	0.0468	0.0304	0.0198	0.0130	89
90	0.1083	0.0699	0.0452	0.0293	0.0190	0.0123	90
91	0.1057	0.0678	0.0436	0.0281	0.0182	0.0117	91
92	0.1031	0.0659	0.0422	0.0270	0.0174	0.0112	92
93	0.1006	0.0639	0.0407	0.0260	0.0166	0.0107	93
94	0.0981	0.0621	0.0394	0.0250	0.0159	0.0101	94
95	0.0957	0.0603	0.0380	0.0240	0.0152	0.0097	95
96	0.0934	0.0585	0.0367	0.0231	0.0146	0.0092	96
97	0.0911	0.0568	0.0355	0.0222	0.0139	0.0088	97
98	0.0889	0.0552	0.0343	0.0214	0.0133	0.0093	98
99	0.0867	0.0535	0.0331	0.0205	0.0128	0.0079	99
100	0.0846	0.0520	0.0320	0.0198	0.0122	0.0076	100

Present Value of 1 at Compound Interest

$$a = v^n = (1+r)^{-n}$$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	n
1.	0.9478	0.9433	0.9389	0.9345	0.9302	0.9259	1
2	0.8984	0.8899	0.8816	0.8734	0.8653	0.8573	2
3	0.8516	0.8396	0.8278	0.8162	0.8049	0.7938	3
4	0.8072	0.7920	0.7773	0.7628	0.7488	0.7350	4
5	0.7651	0.7472	0.7298	0.7129	0.6965	0.6805	5
6	0.7252	0.7049	0.6853	0.6663	0.6479	0.6301	6
7	0.6874	0.6650	0.6435	0.6227	0.6027	0.5834	7
8	0.6515	0.6274	0.6042	0.5820	0.5607	0.5402	8
9	0.6176	0.5918	0.5673	0.5439	0.5215	0.5002	9
10	0.5854	0.5583	0.5327	0.5083	0.4851	0.4631	10
11	0.5549	0.5267	0.5002	0.4750	0.5413	0.4288	11
12	0.5259	0.4969	0.4696	0.4440	0.4198	0.3971	12
13	0.4985	0.4688	0.4410	0.4149	0.3905	0.3676	13
14	0.4725	0.4423	0.4141	0.3878	0.3633	0.3404	14
15	0.4479	0.4172	0.3888	0.3624	03379	0.3152	15
16	0.4245	0.3936	0.3650	0.3387	0.3143	0.2918	16
17	0.4024	0.3713	0.3428	0.3165	0.2924	0.2702	17
18	0.3814	0.3503	0.3218	0.2958	0.2720	0.2502	18
19	0.3615	0.3305	0.3022	0.2765	0.2530	0.2317	19
20	0.3427	0.3118	0.2837	0.2584	0.2354	0.2145	20
21	0.3248	0.2941	0.2664	0.2415	0.2189	0.1986	21
22	0.3079	0.2775	0.2502	0.2257	0.2037	0.1839	22
23	0.2918	0.2617	0.2349	0.2109	0.1894	0.1703	23
24	0.2766	0.2469	0.2206	0.1971	0.1762	0.1576	24
25	0.2622	0.2329	0.2071	0.1842	0.1639	0.1460	25

26	0.2485	0.2198	0.1944	0.1721	0.1525	0.1352	26
27	0.2356	0.2073	0.1826	0.1609	0.1418	0.1251	27
28	0.2233	0.1956	0.1714	0.1504	0.1319	0.1159	28
29	0.2116	0.1845	0.1610	0.1405	0.1227	0.1073	29
30	0.2006	0.1741	0.1511	0.1313	0.1142	0.0993	30
31	0.1901	0.1642	0.1419	0.1227	0.1062	0.920	31
32	0.1802	0.1549	0.1332	0.1147	0.0988	0.0852	32
33	0.1708	0.1461	0.1251	0.1072	0.0919	0.0788	33
34	0.1619	0.1379	0.1175	0.1002	0.0855	0.0730	34
35	0.1535	0.1301	0.1103	0.0936	0.0795	0.0676	35
36	0.1455	0.1227	0.1036	0.0875	0.0740	0.0626	36
37	0.1379	0.1157	0.0972	0.0818	0.0688	0.0579	37
38	0.1307	0.1092	0.0913	0.0764	0.0640	0.0536	38
39	0.1239	0.1030	0.0857	0.0714	0.0595	0.0497	39
40	0.1174	0.0972	0.0805	0.0667	0.0554	0.0460	40
41	0.1113	0.0917	0.0756	0.0624	0.0515	0.0426	41
42	0.1055	0.0865	0.0710	0.0583	0.0479	0.0394	42
43	0.1000	0.0816	0.0666	0.0545	0.0446	0.0365	43
44	0.0948	0.0770	0.0626	0.0509	0.0414	0.0338	44
45	0.0898	0.0726	0.0587	0.0476	0.0386	0.0313	45
46	0.0851	0.0685	0.0551	0.0444	0.0359	0.0390	46
47	0.0807	0.0646	0.0518	0.0415	0.0334	0.0268	47
48	0.0765	0.0609	0.0486	0.0388	0.0310	0.0248	48
49	0.0725	0.0575	0.0456	0.0363	0.0289	0.0230	49
50	0.0687	0.0542	0.0429	0.0339	0.0268	0.0213	50

المراجع
References

أولا: المراجع العربية

١- أ.د. سليمان راضى الكومى (١٩٩٠): "الرياضيات" - مكتبة عين شمس - القاهرة.

٢- أ.د. عبد الله الهلباوى (١٩٨٧): "الرياضة البحته للتجارين" - مكتبة عين شمس - القاهرة .

٣- أ.د. عفاف الدش (١٩٨٧): "بحوث العمليات وأتخاذ القرارات" - مكتبة عين شمس - القاهرة .

٤- أ.د. عفاف الدش - سليمان الكومى - عبد المنعم قنديل (١٩٨٩): "الرياضيات للمرحلة الجامعية الاولى" - مكتبة عين شمس - القاهرة.

٥- أ.د. عبد المنعم قنديل (١٩٩١): "التفاضل والتكامل - لطلبة المرحلة الجامعية الاولى".

٦- أ.د. هناء خير الدين (١٩٨٧): "الاقتصاد الرياضى" - مكتبة نهضه الشرق - جامعة القاهرة .

ثانيا: المراجع الاجنبية

7. Frank Ayres (1962): "Schaum's outline series theory and problems of Matrices". McGraw-Hill Book Company, New York.

8. Forray, M: (1978): "Calculus with Analytic Geometry". Macmillan publishing Co., Inc., New York.

9. Frank S. Budnick (1986): "Applied Mathematics for Business, Economics, and the Social Sciences", McGraw-Hill, New York.

10. Gradshteyv and Ryzhik (1965): "Tables of Integrals, Series, and Products", Academic press, New York.

11. Mizrahi, A. and Sullivan, M. (1988): "Mathematics for Business and Social Sciences-An Applied Approach", McGraw-Hill, New York.