بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الأساليب - التطبيق - استخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثالث

البرمجة الاحتمالية

Probabilistic Programming

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقا

كلية التجارة وإدارة الأعمال - جامعة حلوان

الطبعة الأولى

بحوث العمليات وأتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – أستخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثالث

البرمجة الأحتماليـة

Probabilistic Programming

الطبعة الأولي

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير بالدقي – القاهرة

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – أستخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثالث

البرمجة الأحتمالية

الطبعة الأولى

١٤٣٦هـ – ٢٠١٥م

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

الطبعة الأولى: سنة ١٤٣٦هـ/٢٠١٥م – الموزع – المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة.

رقم الإيداع:

الترقيم الدولي:

الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف"

الطبعة الأولي: سنة ١٤٣٤هـ/٢٠١٣م – الموزع – المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة.

رقم الإيداع: ٧٣٢٣ / ٢٠١٣

الترقيم الدولي: ٦-٠٥١٢-٩٠- ٩٧٧- ٨- ٩٧

الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف"

الطبعة الأولي: سنة١٩٨٧– الناشر – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني – القاهرة.

رقم الإيداع: ٨٨٨٧ / ١٩٨٧

الترقيم الدولي: ٠-٠١١٣-٠٧-٩٧٧

الطبعة الثانية:

رقم الإيداع: ٢٠١٢/٣٥٧٣

الترقيم الدولي:١-٥٥٠-٧١٦-٩٧٧-٩٧٨ – الموزع – المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة

بسم الله الرحمن الرحيم

{ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاء مَاء فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَداً رَّابِياً وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاء حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِّثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاء وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآيه ١٧)

الفهرس

الموضوع	الصفحة
(٢١-٥) تمرينات..	٢١٦
الباب الثاني والعشرون: نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات عشوائية ($\tilde{a}_{ij}$)..	٢١٩
(٢٢-١) مقدمة..	٢٢١
(٢٢-٢) نظريات..	٢٢٣
(٢٢-٣) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع المعتاد..	٢٣٦
(٢٢-٤) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع توزيع مربع كا ($\chi^2_{(n)}$)..	٢٤٧
(٢٢-٥) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع الأسى..	٢٦٣
(٢٢-٦) أمثلة تطبيقية..	٢٧٢
(٢٢-٧) تمرينات..	٢٨٨
الباب الثالث والعشرون: نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون دالة الهدف متغير عشوائي..	٢٩١
(٢٣-١) مقدمة..	٢٩٣
(٢٣-٢) معيار القيمة المتوقعة..	٢٩٥
(٢٣-٣) معيار تصغير التباين..	٣٠٠
(٢٣-٤) معيار تعظيم دالة الإمكان..	٣٠٥
(٢٣-٥) معيار الحدود المثلى..	٣٠٧

مقدمة

تعتبــر الحلول المثلى optimal solutions للمشاكل القرارية decision's problems في جميع القطاعات الأنتاجية والخدمية العمود الفقري للنمو والتقدم في هذه القطاعات.

وكثير من المشاكل القرارية يمكن صياغتها وحلها للحصول على الحلول المثلى بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية mathematical programming approaches المناسبة. وذلك في حالة إذا كانت بيئة صناعة القرار decision's environment بيئة غير عشوائية حيث تكون معلمات parameters نموذج البرمجة متغيرات غير عشوائية، ويسمى نموذج البرمجة في هذه الحالة بنموذج البرمجة اليقينية deterministic programming model. ولكن في كثير من الأحيان تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية stochastic environment متغيرة، في هذه الحالة تكون بعض أو كل معلمات نموذج البرمجة متغيرات عشوائية random variables (سواء معلومة أو غير معلومة التوزيعات الأحتمالية لهذه المتغيرات العشوائية).

ويسمى نموذج البرمجة في هذه الحالة بنموذج البرمجة العشوائية stochastic programming model. وعندما يكون التوزيع الأحتمالي probability distribution للمعلمة العشوائية معلوم فأنه يسمى نموذج برمجة أحتمالية probabilistic programming model وبالتالي فهو حالة خاصة من النموذج العشوائي. ويرتبط النموذج العشوائي بمستوى مخاطرة risk والحل الأمثل لنموذج البرمجة الأحتمالية يكون مشروط بمستوى للمخاطرة المسموح بها والتي ترجع لوجود العامل العشوائي.

وتوجد أساليب مختلفة لصياغة وحل نماذج البرمجة الأحتمالية مثل: أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً chance-constrained programming، وأسلوب البرمجة متعددة المراحل multi-stage programming، ..... الخ.

ويعتبر Tintner سنة ١٩٤١ أول من قدم دراسة للنماذج العشوائية وميز بين الأنواع المختلفة للمخاطرة المصحوبة بحل نماذج البرمجة العشوائية.

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الجزء من الكتاب على أساليب البرمجة الأحتمالية وبصفة خاصة أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً بالنسبة لنماذج البرمجة الخطية الأحتمالية probabilistic linear programming ونماذج برمجة الهدف الخطية الأحتمالية probabilistic linear goal programming.

ويعتبر أول من قدم أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً كل من Charnes and Cooper سنة ١٩٥٥ ثم توالت الأبحاث النظرية والتطبيقية لهذا الأسلوب نظراً لأهمية المشاكل التي يتم حلها بأستخدام هذا الأسلوب. وكذلك يعتبر Contini سنة ١٩٦٨ أول من قدم أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً chance-constrained goal programming ثم توالت الأبحاث النظرية والتطبيقية في القطاعات الأنتاجية والخدمية المختلفة، وفي الفصل (١٩-٥) سوف نقدم نبذة عن التطور التاريخي لأهم الدراسات التي قدمت بالنسبة لأسلوب البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً وأسلوب برمجة الهدف الخطية المقيدة أحتمالياً. مع ذكر أهم التطبيقات التي قدمت لهذه الأساليب في القطاعات المختلفة.

ونظراً لأهمية أساليب بحوث العمليات بصفة عامة والتطور المستمر في أساليبها المختلفة، وبصفة خاصة الأساليب المرتبطة ببيئة صناعة القرار المتغيرة وتطبيقاتها على نطاق واسع، بالإضافة إلى العجز الشديد في المكتبة العربية بالنسبة للكتب العلمية وبصفة خاصة بحوث العمليات لارتباطها الوثيق بالعلوم الأخرى. ومن العلوم الوثيقة الصلة ببحوث العمليات الأحصاء مما دفعني لكتابة الجزء الثالث من كتاب "بحوث العمليات وإتخاذ القرارات". حيث يتكون الكتاب من الأجزاء الثلاثة التالية:-

- الجزء الأول تحت عنوان: "البرمجة وحيدة الهدف"
- الجزء الثاني تحت عنوان: "البرمجة متعددة الأهداف"
- الجزء الثالث تحت عنوان: "البرمجة الاحتمالية"

والأجزاء الثلاثة تصاعدية بمعنى أن تناول الجزء الثالث يتطلب ضرورة الإلمام بالجزئيين الأول والثاني، كذلك تناول الجزء الثاني يتطلب ضرورة الإلمام بالجزء الأول.

والمستهدفون من هذا الجزء هم طلاب مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا في التخصصات المختلفة (الإحصاء – الإقتصاد – المحاسبة – الإدارة – ...... الخ)، كذلك متخذي القرارات في المجالات المختلفة. ويحتوى هذا الجزء على سبعة أبواب:

الباب التاسع عشر تحت عنوان: مشاكل البرمجة العشوائية

ويتناول هذا الباب تصنيف المشاكل القرارية، ثم عرض لأهم أساليب البرمجة الأحتمالية وبصفة خاصة أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً، ثم نقدم نبذة عن التطور التاريخي لأسلوب البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً وبرمجة الهدف الخطية المقيدة أحتمالياً. هذا بالإضافة إلى ذكر أهم المتطلبات الأساسية لتناول موضوعات هذا الجزء.

الباب العشرون تحت عنوان: متطلبات إحصائية

ويتناول هذا الباب بأختصار التعريف والنظريات والأساليب الإحصائية المختلفة بالإضافة إلى التوزيعات الأحتمالية المتقطعة والمتصلة المختلفة التي تعتبر ضرورية لتقديم وأستخدام أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً. بالإضافة إلى مجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الحادي والعشرون تحت عنوان: نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات عشوائية ($\tilde{b}_i$)

ويقدم هذا الباب كيفية تحويل نماذج البرمجة الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة بأستخدام أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون المعلمات العشوائية ($\tilde{b}_i$) تمثل متغيرات عشوائية ذات توزيعات مختلفة متقطعة أو متصلة. بالإضافة إلى تقديم أمثلة تطبيقية في هذه الحالة بالإضافة إلى مجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الثاني والعشرون تحت عنوان: نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات عشوائية ($\tilde{a}_{ij}$)

ويقدم هذا الباب أهم النظريات في التحويلات الخطية للمتغيرات العشوائية، ثم تقديم كيفية تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون المعلمات ($\tilde{a}_{ij}$) متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية مختلفة. بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة التطبيقية ومجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الثالث والعشرون تحت عنوان: نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون دالة الهدف متغير عشوائي

ويقدم هذا الباب كيفية تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية وفقاً لبعض القواعد القرارية مثل معيار القيمة المتوقعة أو معيار تصغير التباين أو معيار الحدود المثلي أو معيار تعظيم دالة الأمكان، كذلك يقدم أسلوب برمجة الصلاحية لقياس صلاحية الحل أو لقياس المخاطرة المترتبة على الحل. بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة التطبيقية ومجموعة من التمرينات.

الباب الرابع والعشرون تحت عنوان: برمجة الهدف الخطية

ويقدم هذا الباب أسلوب برمجة الهدف الخطية بالنسبة للنماذج اليقينية. حيث يقدم أهم المفاهيم الأساسية وكيفية صياغة المشاكل القرارية في صورة نماذج برمجة هدف خطية، كذلك تقديم أهم أساليب الحل البيانية والجبرية. ثم تقديم مجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الخامس والعشرون تحت عنوان: نماذج برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً

ويقدم هذا الباب فئة الأهداف goals الأحتمالية، ثم كيفية تحويل نموذج برمجة الهدف الأحتمالية إلى نموذج يقيني مناظر بأستخدام أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون المعلمات ($\tilde{b}_i$) أو ($\tilde{a}_{ij}$) متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة. ثم نقدم مجموعة متنوعة من الأمثلة التطبيقية بالإضافة إلى مجموعة من التمرينات المتنوعة.

كـذلك يتـضمن هـذا الجـزء عـشرة ملاحـق تتـضمن بعـض المتطلبـات الرئيـسية لتنـاول الموضوعات المقدمـة بالإضافة إلـى قائمـة بالمصطلحات باللغة العربيـة والإنجليزيـة وقائمـة متنوعة من المراجع العربية والأجنبية.

وأخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجعل هذا الجزء من كتاب بحوث العمليات وأتخاذ القرارات لبنه من لبنات البناء، عسى أن نجد من المتخصصين العرب من يقدم إسهاماته في هذه العلوم.

والله ولى التوفيق

المؤلفة

أ.د عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء

كلية التجارة – جامعة حلوان

الباب التاسع عشر

مشاكل البرمجة العشوائية

Stochastic Programming Problems

(١٩-١) مقدمة Introduction

في معظم القطاعات الإنتاجية أو الخدمية مثل القطاع الزراعي، أو قطاع النقل، أو السياحة، أو البنوك، ... الخ. يواجه متخذ القرار كثير من المشاكل التي تخضع لعنصر أو أكثر من العناصر المتغيرة، وفي هذه الحالة يقال أن بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية متغيرة، وتسمى هذه المشاكل بالمشاكل العشوائية **stochastic problems**. وعادة تصاغ هذه المشاكل في شكل نماذج تأخذ في الأعتبار العناصر العشوائية، وتسمى بالنماذج العشوائية **stochastic models** [133,149,51,53,42].

وفي معظم المشاكل الفعلية التي يمكن صياغتها في شكل نماذج برمجة (خطية أو غير خطية) غالباً يوجد معلمة **parameter** أو أكثر من معلمات نموذج البرمجة تمثل متغيرات عشوائية **random variables** تعكس البيئة المتغيرة وكذلك تعكس المخاطرة الناشئة عن القرار الذي يتم أتخاذه، وفي هذه الحالة يسمى النموذج نموذج برمجة عشوائية **stochastic programming model** [107,141].

وتوجد أساليب مختلفة لحل هذا النوع من النماذج. ولكن تشترك جميع الأساليب المختلفة لحل نماذج البرمجة العشوائية في الخصائص التالية:

١- تحويل النموذج العشوائي إلى نموذج يقينى (أو عدة نماذج يقينية متتالية) وفقاً لفئة من القواعد القرارية التي يتم على أساسها التحويل بحيث تتصف ببعض خصائص الأمثلية [141,135,136].

٢- نتيجة للأختلافات العشوائية لبعض المعلمات (أو كل المعلمات) فإن ذلك يؤدي إلى وجود مخاطرة **risk** مرتبطة بالحل الذي يتم الحصول عليه بعد تحويل النموذج العشوائي إلى نموذج يقيني. وتختلف الطرق في قياس هذه المخاطرة وفقاً للأسلوب المتبع في الحل [141,54,114].

٣- لا يوجد حل أمثل مطلق لنموذج البرمجة العشوائية ولكن توجد حلول مثلى مشروطة بأحتمالات معينة (ممكن أفتراض قيم هذه الأحتمالات أو إيجاد أفضل قيم

لهذه الأحتمالات بأستخدام أساليب برمجة الصلاحية reliability programming [134,54])

ويعتبر Tintner سنة ١٩٤١ أول من تناول نماذج البرمجة العشوائية حيث ميز بين نوعين من المخاطرة هما:

أ- <u>المخاطرة الذاتية subjective risk</u>

عندما يوجد توزيع أحتمالى معلوم للمعلمة التي تمثل متغير عشوائي فإنه يمكن قياس المخاطرة. وبأستخدام بعض أساليب البرمجة الأحتمالية يمكن تحديد التوزيع الأحتمالي للحل الأمثل (وفقاً لفئة القواعد القرارية المفترضة التى سبق تحديدها) [133,141,149].

ب- <u>عدم التأكد الذاتي subjective uncertainty</u>

حيث يفترض عدم معرفة التوزيعات الاحتمالية للمعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية، ولكن يفترض معرفة التوزيعات الأحتمالية القبلية لها priori probability distributions of the parameters [149,141].

وفي سنة ١٩٥٥ ميز Tintner أيضاً بين أسلوبين للبرمجة العشوائية هما الأسلوب الإيجابي والأسلوب السلبي active and positive approaches [149].

ثم تكونت العديد من المدارس العلمية التي قدمت أساليب مختلفة للبرمجة العشوائية والغالبية منها ميز بين نوعين من الأساليب:

(١) النوع الأول حيث تكون المعلمات العشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة (أو أمكانية تقدير هذه التوزيعات الأحتمالية [66,114,150]) وهي ما يمكن تسميتها بأساليب البرمجة الأحتمالية probabilistic programming. وهذا النوع هو ما سنتناوله بالتفصيل في الأبواب التالية.

(٢) أما النوع الثاني عندما تكون المعلمات العشوائية غير معلومة التوزيعات الأحتمالية [135,141,155].

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الكتاب على النوع الأول فقط. ويعتبر كل من Charnes and Cooper سنة ١٩٥٥ أول من قدما أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً Chance-Constrained Programming (CCP) لتحويل النماذج العشوائية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية معلومة. ويعتبر هذا الأسلوب من أهم الأساليب للبرمجة الأحتمالية، نظراً لبعض الخصائص التي يتميز بها، بالإضافة إلى مرونته في التطبيق والتحليل أيضاً كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الأبواب التالية. ثم قدما العديد من التطبيقات لهذا الأسلوب [35-44].

ولكن أعتبار من سنة ١٩٧٠ تم تطوير ونمو أسلوب (CCP) بأستخدام الدراسات التي قدمها Sengupta وآخرين حيث قدم العديد من طرق التحويل بأستخدام أسلوب CCP [133-141]. كذلك قدم العديد من الدراسات لأساليب البرمجة العشوائية الأخرى بالأشتراك مع Tintner وآخرين مثل Fox [133-142].

ونظراً للأهمية النظرية والتطبيقية لأسلوب CCP سوف نقدم نبذة تاريخية عن التطور التاريخي للأسلوب وعلاقته بأساليب البرمجة الأخرى كذلك أهم مجالات تطبيقه في الفصل (١٩-٥).

وفي هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل تصنيف المشاكل القرارية للبرمجة العشوائية في الفصل (١٩-٢)، ثم نقدم باختصار بعض أهم أساليب البرمجة الاحتمالية في الفصل (١٩-٣).

أما التعريف بأسلوب (CCP) وأهم خصائصه سوف يقدم في الفصل (١٩-٤) ثم نقدم نبذة تاريخية عن التطور التاريخي لأسلوب CCP وأرتباطه بأساليب البرمجة اليقينية مثل البرمجة الخطية وبرمجة الهدف وأهم التطبيقات في الفصل (١٩-٥). ثم نقدم أهم المتطلبات الأساسية لدراسة أساليب البرمجة العشوائية بصفة عامة وأسلوب (CCP) بصفة خاصة في الفصل (١٩-٦) ذلك بالإضافة إلى مجموعة من التمرينات المتنوعة في الفصل (١٩-٧).

(١٩-٢) تصنيف المشاكل القرارية
Classification Decision's Problems

في الجزئين الأول والثاني من هذا الكتاب [١٠،٨] ذكرنا أن القرار decision هو النتيجة النهائية لعملية conclusion of process تسمى عملية صناعة القرار decision making process، حيث يتم تحقيق هدف أو عدة أهداف معينة بعدد من البدائل الممكنة في ظل أمكانيات محددة limited possibilities. ويختار متخذ القرار أفضل بديل best alternative من هذه البدائل في ظل بيئة صناعة القرار environment decision making.

والمقصود هنا ببيئة صناعة القرار جميع العناصر والعلاقات المؤثرة في صناعة القرار والتي لا يتحكم فيها متخذ القرار وتعتبر معطيات له.

كذلك تناولنا بالتفصيل بعض أهم أساليب البرمجة الرياضية المختلفة مثل البرمجة الخطية وغير الخطية، برمجة الهدف، ....، الخ كأساليب هامة في حل كثير من المشاكل القرارية. ولكن جميع الأساليب التي تم تقديمها كانت تحت أفتراض أن بيئة صناعة القرار الممثلة في صياغة معلمات parameters النموذج (وتسمى أيضاً المعلمات بالمتغيرات التحكمية control variables) تأخذ غالباً قيم ثابته constants ولكن في معظم المشاكل الفعلية يكون هذا الفرض غير متحقق حيث تكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية random variables [132,134].

وبصفة عامة يمكن تقسيم المشاكل القرارية التي يمكن صياغتها وحلها بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية إلى قسمين على النحو التالي:

<u>القسم الأول</u>: المشاكل اليقينية deterministic problems حيث تكون بيئة صناعة القرار بيئة يقينية بمعنى أن معلمات النموذج الذي يمثل المشكلة تأخذ قيم ثابتة ويسمى النموذج في هذه الحالة نموذج يقينى deterministic model.

وإذا حدث تغير في القيم الثابته لبعض المعلمات إلى قيم ثابته أخرى ففي هذه الحالة يمكن أستخدام أسلوب تحليل الحساسية sensitivity analysis لتحديد التغيرات التي تطرأ على الحل الأمثل نتيجة التغيرات التي تحدث في المعلمات.

<u>القسم الثاني</u>: المشاكل العشوائية stochastic problems حيث تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية بمعنى أن معلمات النموذج الذي يمثل المشكلة تمثل متغيرات عشوائية random variables ويسمى النموذج في هذه الحالة نموذج عشوائي stochastic model.

وتوجد أساليب مختلفة للبرمجة العشوائية stochastic programming تتناول هذا النوع من المشاكل، وسوف نتناولها بالتفصيل في الفصول التالية.

وفي المثال التالي سوف نوضح الفرق بين المشكلة اليقينية والمشكلة العشوائية.

<u>مثال (١٩-١)</u>: يقوم أحد المصانع بإنتاج نوعين من المنتجات A,B حيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من النوع A ثلاثة وحدات من المادة الخام، والوحدة الواحدة من النوع B خمسة وحدات من المادة الخام، حيث أن المتاح من المادة الخام في الأسبوع 1500 وحدة. ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A,B في الإسبوع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن، حيث C_1, C_2 تشيران إلى ربح الوحدة من A,B على الترتيب في الحالات التالية:

١- إذا كانت $C_1 = 10, C_2 = 15$ ثم إذا حدث تغير في C_1, C_2 بحيث تصبح $C_1 = 11, C_2 = 13$

٢- إذا كان ربح الوحدة من A,B تكافئ $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ على الترتيب، حيث $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيرين عشوائيين بدالة كثافة الأحتمال $f_1(\tilde{C}_1), f_2(\tilde{C}_2)$ على الترتيب بحيث $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$.

<u>الحل</u>: إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A,B على الترتيب فأن:

١- عندما $C_1 = 10, C_2 = 15$ فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية على النحو التالي: أوجد X_1, X_2 التي تجعل:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{Max.Z = 10X_1 + 15X_2} \\ &\mathbf{S.T.\quad 3X_1 + 5X_2 \le 1500} \\ &\mathbf{X_1, X_2 \ge 0} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(1)}$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة خطية يقينى deterministic LP model وبحله بيانياً أو بأستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة:

$$\mathbf{X_1^* = 500 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad Z^* = 7500}$$

أما إذا تغيرات C_1, C_2 لتصبح $C_1 = 11, C_2 = 13$ فبأستخدام تحليل الحساسية نجد أن الحل الأمثل X_1^*, X_2^* لم يتغير، وقيمة Z^* هى التي تتغير فقط على النحو التالي:

$$\mathbf{X_1^* = 500 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad Z^* = 6500}$$

٢- أما عندما يكون ربح الوحدة الواحدة من A,B متغير عشوائي فيصبح النموذج على النحو التالي: أوجد X_1, X_2 التي تجعل:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{Max.\tilde{Z} = \tilde{C}_1X_1 + \tilde{C}_2X_2} \\ &\mathbf{S.T.\quad 3X_1 + 5X_2 \le 1500} \\ &\mathbf{X_1, X_2 \ge 0} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(2)}$$

والنموذج (2) نموذج برمجة خطية عشوائية stochastic LP model يمكن حله بأستخدام أساليب البرمجة العشوائية المختلفة التي سوف نتناولها في الفصول التالية.

وبصفة عامة يكون نموذج البرمجة العشوائية (خطية أو غيرخطية) على النحو التالي :[141]

$$\text{Max.(or Min.)}Z = f(X \mid C) \qquad (19.1)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X \mid \theta_i) \le b_i \quad , i = 1,2,...,m \qquad (19.2)$$

$$X = [X_1, \ \ ....., \ \ X_n]^{\backslash} \quad , \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & ... & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & ... & \theta_{2n} \\ : & : & : & : \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & ... & \theta_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = [b_1, \ \ b_2, \ \ ..., \ \ b_m] \quad , \quad C = [C_1, \ \ C_2, \ \ ..., \ \ C_n]$$

حيث X مبدول متجة المتغيرات القرارية وكل من المتجهات C, θ_i, b ، $i = 1,2,..,m$ تشير إلى متجهات المعلمات، وفي حالة وجود عنصر واحد على الأقل في فئة المعلمات (C,θ,b) يمثل متغير عشوائي في هذه الحالة يسمى النموذج (19.1),(19.2) نموذج برمجة عشوائية، ويكون النموذج برمجة خطية عشوائية عندما تكون الدوال f, g_i دوال خطية في المتغيرات القرارية، أما إذا كان على الأقل واحدة من الدوال f, g_i غير خطية يكون النموذج برمجة غير خطية عشوائية.

ويعتبر النموذج اليقيني حالة خاصة special case من النموذج العشوائي ففي الحالة اليقينية تكون فئة (فراغ space) المعلمات (C,θ,b) مكونة من عنصر واحد مركب حيث تمثل كل معلمة بقيمة واحدة، أما في الحالة العشوائية فإن فئة المعلمات (C,θ,b) تكون مكونة من أكثر من عنصر مركب تناظرها فئة أخرى مصاحبة لها تمثل فئة الأحتمالات حيث يناظر كل عنصر في فئة المعلمات عنصر مصاحب في فئة الأحتمالات [149,150].

وبالتالي فإن الحالة العشوائية هي حالة أعم من الحالة اليقينية وبصفة خاصة المشاكل القرارية التالية:

- المشاكل المرتبطة بالتخطيط على مراحل متتالية في فترات مستقبلية.

ومثال ذلك تحديد حجم وأسعار الكميات المعروضة من السلع الزراعية مثلاً في فترات مستقبلية [141]، كذلك حجم الأفواج السياحية في المواسم المختلفة، ... الخ.

- المشاكل المرتبطة بمعلومات غير متوفرة بشكل كامل لمتخذ القرار ولكن معلوم سلوكها الأحتمالي [102,٣] .

ومثال ذلك حجم الطلب والعرض في السوق الحر على سلعة معينة بالنسبة للشركات المتنافسة المنتجة لهذه السلعة وتحديد كل شركة لسعر الوحدة من هذه السلعة، فعادةً تكون المعلومات الخاصة بكل شركة من الشركات المتنافسة غير معلومة بشكل كامل للشركات الأخرى المتنافسة [٩]. وبالتالي تصبح مشكلة الشركة القرارية هي تحديد عدد الوحدات التي تقوم بإنتاجها وطرحها في السوق في ظل معلومات غير كاملة عن العرض والطلب في السوق – فهي مشكلة قرارية في حالة عدم التأكد، أو بعبارة أخرى مشكلة عشوائية.

وبصفة عامة يمكن تصنيف المشاكل القرارية العشوائية إلى نوعين على النحو التالي:

<u>النوع الأول</u>: عندما يكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة **known probability distributions** أو ممكن تقديرها (بأساليب التقدير الأحصائية المختلفة [٩،٥]) في هذه الحالة تسمى المشاكل مشاكل قرارية أحتمالية **probabilistic decision problems**. وهذا النوع من المشاكل يمكن صياغته وحله بأستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية **probabilistic programming techniques**

حيث تمكن أساليب البرمجة الأحتمالية من تقدير وقياس المخاطر **risk** المرتبطة بكل قرار يتخذه متخذ القرار في ظل قاعدة قرارية معينة للأمثلية. وأحياناً تسمى هذه المشاكل أيضاً بالمشاكل القرارية المعينة **certainty decision problems** أو المشاكل القرارية في ظل المخاطرة **decision problems under risk [88]**.

وكثير من هذا النوع من المشاكل يمكن صياغتها وحلها بأستخدام أسلوب أو أكثر من أساليب البرمجة الأحتمالية والتي سوف نتناولها بالتفصيل في الفصل التالي.

النوع الثاني: عندما تكون بعض أو كل المعلمات متغيرات عشوائية ولكن توزيعاتها الأحتمالية غير معلومة **unknown probability distributions**. وهذا النوع من المشاكل يسمى بالمشاكل القرارية غير المعينة **uncertainty decision problems**. وهذا النوع من المشاكل يمكن دراسته وحله بأستخدام أساليب أخرى غير البرمجة الأحتمالية مثل أساليب المحاكاة **simulation techniques**.

وفي بعض المشاكل التي تتوافر بيانات عن المعلمات التي تعتبر متغيرات عشوائية غير معلومة التوزيع الأحتمالي فإنه يمكن تقدير التوزيعات الأحتمالية **probability distributions [53,90,91,٦]** لهذه المعلمات، وبالتالي يمكن تطبيق أساليب البرمجة الأحتمالية في حلها. ويمكن توضيح هذا التصنيف (التقسيم) أعلاه في الشكل التالي.

وفي هذا الكتاب سوف نتناول بالتفصيل المشاكل الأحتمالية وأساليب حلها بأستخدام أسلوب (CCP) لما يتمتع به من خصائص هامه تجعله قابل للتطبيق كما نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل (١٩-٤).

شكل (١٩-١): تصنيف المشاكل القرارية وفقاً لطبيعة معلمات المشكلة

المشاكل القرارية

(١)
مشاكل يقينية deterministic problems
- جميع المعلمات قيم محددة
- يمكن صياغتها وحلها بأستخدام أساليب البرمجة اليقينية

(٢)
مشاكل عشوائية stochastic problems
حيث يوجد واحدة على الاقل من المعلمات تمثل متغير عشوائي

(٢-١)
مشاكل أحتمالية probabilistic problems
- حيث تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية معلومة أو يمكن تقديرها.
- يمكن حلها بأستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية مثل:
  - أسلوب (CCP)،
  - أسلوب البرمجة متعددة المراحل،
  - أسلوب البرمجة الانتقالية.

(٢-٢)
مشاكل في ظروف عدم التأكد problems under uncertainty
- حيث تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.
- يمكن دراستها وحلها بأستخدام أساليب المحاكاه أو أساليب عددية أخرى.
- وفي حالة توافر بيانات عن المعلمات العشوائية يمكن أستخدام التوزيعات التقديرية كتقدير للتوزيعات غير المعلومة وتحويلها إلى مشاكل أحتمالية، ثم أمكانية أستخدام أساليب البرمجة الأحتمالية

(١٩-٣) أساليب البرمجة الأحتمالية

Probabilistic Programming (PP) Techniques

البرمجة الأحتمالية هي عبارة عن النظريات theories والأساليب techniques المختلفة لدمج الأختلافات العشوائية stochastic variations للمعلمات في نموذج البرمجة الرياضية mathematical programming model والحصول على الحل الأمثل وفقاً للقاعدة القرارية المستخدمة المرتبطة بالتوزيعات الأحتمالية لهذه المعلمات [141,149,150]. وقد ترجع الأختلافات العشوائية في المعلمات إلى واحد على الأقل من البندين التاليين [134,141]:

١- طبيعة المشكلة محل الدراسة: ومثال ذلك عند صياغة المشاكل المرتبطة بحجم بعض المحاصيل الزراعية المطلوبة في فترة ما، حيث يأخذ الطقس كأحد معلمات المشكلة حيث يعتبر الطقس متغير عشوائي كذلك ظروف السوق والعمالة أيضاً [135].

٢- طبيعة القرارات المطلوب الوصول إليها: ومثال ذلك طبيعة القرارات التي تُأخذ في اللحظة أو في المدى القصير أو المدى المتوسط أو المدى الطويل، حيث أن البعد الزمني أو المكاني يمثل عامل هام في الأختلافات.

وتوجد تصنيفات مختلفة لأساليب حل مشاكل البرمجة الأحتمالية وفقاً لأسلوب دمج التغيرات العشوائية في النموذج أو وفقاً لطبيعة الحل الذي يتم الوصول إليه. ويمكن تصنيف الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الأحتمالية إلى ثلاث مجموعات A,B,C على النحو التالي [142,133,141]:

A) Risk Programming Approaches أساليب برمجة المخاطرة

ومن هذه الأساليب:

1- Chance-Constrained Programming (CCP) Approach

أسلوب البرمجة ذات القيود الأحتمالية

2- Nonparametric Programming Approach

أسلوب البرمجة اللا معلمية

3- Multi-Stage Programming Approach

أسلوب البرمجة متعددة المراحل

4- Transition Probability Programming Approach

أسلوب البرمجة الأحتمالية الانتقالية

B) Adaptive Programming Approach **أسلوب البرمجة التوائمية**

C) Probabilistic Sensitivity Analysis **أسلوب تحليل الحساسية الأحتمالي**

والجدير بالذكر أن جميع الأساليب المختلفة لحل مشاكل البرمجة الأحتمالية تشترك في بعض الخصائص أهمها [141,149,151]:

١- جميع المعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معروفة أو ممكن تقديرها بالأساليب الأحصائية المختلفة.

٢- التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية يتم دمجها في نموذج البرمجة الرياضية بطريقة أو أخرى ويتم تحويل النموذج الأحتمالي probabilistic model إلى نموذج يقيني deterministic model كما في حالة أستخدام أسلوب (CCP) (أو إلى عدة نماذج يقينية متتالية كما في حالة أستخدام أسلوب البرمجة متعددة المراحل) وذلك بأستخدام طرق مختلفة للدمج وفقاً للطبيعة العشوائية للمعلمات [51,141]. وقد يتم البدأ بنموذج يقينى مبدئي مناسب ثم دمج التوزيعات الأحتمالية للمعلمات للحصول على التوزيع الأحتمالي لدالة الهدف والمتغيرات القرارية معاً كما في حالة أستخدام أسلوب transition programming approach أو أستخدام أسلوب تحليل الحساسية الأحتمالي probabilistic sensitivity analysis أو الدمج ثم الحصول على نموذج يقينى مكافئ

بمستوى مخاطرة risk معينة كما في حالة أستخدام أسلوب (CCP) وهو الأسلوب محل الدراسة في هذا الكتاب والذي سوف يقدم بالتفصيل في الأبواب التالية.

٣- وبتحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقينى، أو تحويل النموذج اليقينى المبدئي إلى نماذج يقينية أخرى متتالية يتم وفقاً لتعريف فئة القواعد القرارية set of decision's rules التي يتم على أساسها التحويل حيث تتصف ببعض خصائص الأمثلية some optimality properties [47].

وفي الأبواب التالية سوف نوضح هذه الخواص بالتفصيل بالنسبة لأسلوب(CCP).

ومما سبق يتضح الأرتباط الوثيق بين أساليب حل مشاكل البرمجة الأحتمالية النظرية والأساليب الأحصائية وبصفة خاصة التوزيعات الأحتمالية (المتقطعة والمتصلة) والتحويلات الأحصائية statistical transformations. لذلك في الباب التالي سوف نقدم أهم التعريفات والنظريات الأحصائية والتحويلات التي تعتبر متطلبات أساسية في دراسة وحل مشاكل البرمجة الأحتمالية بأستخدام الأساليب السابق ذكرها أعلاه.

(١٩-٤) أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً Chance- Constrained Programming (CCP) Technique

في هذا الفصل سوف نتناول بأختصار تعريف القيد الأحتمالي chance-constraint الذي يرجع له تسمية هذا الأسلوب، ثم نقدم نبذة تاريخية عن الأسلوب وتطوره وأهم التطبيقات التي قدمت خلال السنوات السابقة في الفصل التالي (١٩-٥).

تعريف القيد الأحتمالي

إذا أعتبرنا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{19.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i \quad , \ i = 1,2,\ldots,t \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \ i = t+1, t+2,\ldots,m \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

$$X_j \ge 0 \quad , \ j = 1,2,\ldots,n \tag{19.5}$$

حيث X_j تشير إلى المتغيرات القرارية، b_i و C_j و a_{ij} تشير إلى المعلمات التي تمثل مقادير ثابتة، أما المعلمات $\tilde{b}_i$ ، $i=1,2,..,t$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معروفة وتسمى هذه القيود في هذه الحالة بالقيود العشوائية. فإذا كانت $f(\tilde{b}_i)$ ، $F(\tilde{b}_i)$ تشير إلى دالة كثافة الأحتمال density function ودالة التوزيع التراكمية cumulative distributed function للمتغير $\tilde{b}_i$ على الترتيب، فإنه يمكن إعادة كتابة القيود في (19.4) بعد دمج التوزيع الأحتمالي للمتغير (أو المتغيرات) ($\tilde{b}_i$) على النحو التالي:

$$P_r\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j < \tilde{b}_i\} = \gamma_i \quad , \ i = 1,2,...,t \qquad (19.6)$$

وتقرأ المعادلة (19.6) على النحو "أحتمال تحقق القيد رقم (i)، $i = 1,2,...,t$ في القيود (19.4) يساوي γ_i"، حيث $0 < \gamma_i < 1$، ويسمى γ_i بمقياس تحقق tolerance measure القيد (i) ويسمى أيضاً مستوى المأمونية للقيد (i). وبالتالي يصبح $(1-\gamma_i)$ هو أحتمال عدم تحقق violation measure القيد (i)، ويعتبر الأحتمال $(1-\gamma_i)$ هو مقياس للمخاطرة risk الناتج عن عدم تحقق القيد (i). وصياغة القيود (19.4) في شكل أحتمالي في (19.6) يمكننا بعد ذلك من التحويل إلى قيد يقينى مكافئ equivalent deterministic constraint على النحو التالي:

$$1 - F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) = \gamma_i \longrightarrow F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) = 1 - \gamma_i \qquad (19.7)$$

ومن تعريف الدالة التراكمية (كما سوف نوضح ذلك بالفصل (٢٠-٢)) نجد أن:

$$F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j) = P_r(\tilde{b}_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j)$$

وبما أن التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{b}_i$ معروف بالتالي فإن الصياغة الرياضية mathematical form للدالة F_i تكون معروفة أيضاً، وبالتالي يمكن تحويل القيد الأحتمالي (i) إلى قيد يقيني مكافئ كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فيما بعد.

وسوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل بالباب الحادي والعشرون. وبطرق مشابهة يمكن تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية عندما يكون واحد على الأقل من المعلمات a_{ij} متغير عشوائي معلوم التوزيع الأحتمالي له، وسوف نشير إلى a_{ij} التي تمثل متغير عشوائي بالرمز $\tilde{a}_{ij}$ وبالتالي يصبح المتغير $(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}X_j)$ متغير عشوائي أيضاً (سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل (٢٠-٧) بالباب العشرون). فإذا كان التوزيع الأحتمالي

للمتغير $\tilde{a}_{ij}$ معلوم فإن توزيع المتغير $(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j)$ يصبح معلوم أيضاً. وبالتالي إذا كانت H_i تمثل دالة التوزيع التراكمية للمتغير $(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j)$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}X_j \le b_i) = \gamma_i \longrightarrow \qquad (19.8)$$

$$H_i(b_i) = \gamma_i \qquad (19.9)$$

حيث تم تحويل القيد الأحتمالي في (19.8) إلى قيد يقينى مكافئ في (19.9). وسوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل بالباب الثاني والعشرون.

كذلك بالنسبة لمعلمات دالة الهدف C_j حيث $j = 1,2,..,n$ عندما تكون بعض أو كل هذه المعلمات متغيرات عشوائية سوف نشير لها بالرمز $\tilde{C}_j$ فإنه يمكن تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى قيد أحتمالي على النحو التالي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_jX_j \ge U^*) = \gamma \longrightarrow 1 - F(U^*) = \gamma \longrightarrow$$

$$F(U^*) = 1 - \gamma \qquad (19.10)$$

<u>ملحوظة</u>: الحد U^* تم تحديد قيمته بأستخدام متخذ القرار حيث $U^* \to \infty$ عندما تكون العملية تعظيم، كذلك $U^* \to 0$ عندما تكون العملية تصغير،

فإذا كان التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{C}_j$ معلوم فإن المتغير $(\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_jX_j)$ يكون توزيعة الأحتمالي معلوم أيضاً، فإذا فرضنا أن F هي دالة التوزيع التراكمية للمتغير $(\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_jX_j)$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالي في (19.10) إلى قيد يقينى على النحو:

$$1 - F\left(U^*\right) = \gamma \qquad (19.11)$$

وكما ذكر فإن U^* تشير إلى الحد الأدنى لقيمة دالة الهدف الممكن أن يقبل به متخذ القرار. وأفتراض قيم كل من γ ، U^* ، γ_i حيث $i = 1,2,..,m$ يرجع إلى متخذ القرار وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الأبواب التالية.

ووفقاً للقاعدة القرارية التي يقرها متخذ القرار يتم صياغة دالة الهدف لنموذج البرمجة المقيدة أحتمالياً، وسوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل بالباب الثالث والعشرون.

ومما سبق يتضح أن حجم النموذج الأحتمالي $(n \times m)$ حيث عدد المتغيرات القرارية يساوي n وعدد القيود يساوي m، وعند تحويله إلى نموذج مكافئ يقينى، فيكون حجم النموذج اليقينى عندما تكون بعض أو كل $\tilde{a}_{ij}$ ، $\tilde{b}_i$ ، $\tilde{C}_j$ متغيرات عشوائية فيظل عدد المتغيرات القرارية يساوى n وتصبح عدد القيود $(m+1)$ ويصبح حجم النموذج اليقيني $(n \times (m+1))$ وعندما تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف C_j مقادير ثابته يكون حجم النموذج $(n \times m)$، وبصفة عامة يعتبر حجم النموذج اليقينى المكافئ يساوي حجم النموذج الأحتمالي تقريباً. ويعتبر ذلك من مزايا أسلوب (CCP) بالنسبة لأساليب البرمجة الأحتمالية الأخرى حيث يتزايد حجم النموذج اليقينى عن الأحتمالي تزايد كبير كما في أسلوب برمجة تعدد المراحل [141,55].

ومما سبق يتضح بساطة أسلوب CCP في تناول العامل العشوائي عند تحويل نموذج البرمجة الأحتمالي إلى نماذج برمجة يقينية، كذلك في تطبيقه على بيانات فعليه بالإضافة إلى أنه أسلوب مرن بمعنى إمكانية أستخدامه في التحويل مع نماذج البرمجة الأحتمالية المختلفة مثل البرمجة الخطية الأحتمالية والبرمجة غير الخطية الأحتمالية وبرمجة الهدف الأحتمالية. وفي هذا الكتاب سوف نتناول أستخدام أسلوب CCP في تحويل نماذج البرمجة الخطية الأحتمالية ونماذج برمجة الهدف الأحتمالية إلى نماذج يقينية.

(١٩-٥) رؤية تاريخية A Historical Perspective

في الفصول السابقة ذكرنا أن أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً أسلوب مرن ممكن دمجه بأساليب البرمجة الأخرى مثل أسلوب البرمجة الخطية، وغير الخطية، وبرمجة الهدف، ... الخ. وفي هذا الفصل سوف نتناول بأختصار التطور التاريخي لأهم الدراسات لأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (CCP)، وأسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً (CCGP)، حيث أنهما موضع أهتمامنا في هذا الجزء من الكتاب.

ويرجع أسلوب (CCP) إلى كل من Charnes and Cooper فهما أول من قدما أسلوب (CCP) كأحد أهم أساليب البرمجة الأحتمالية من الجانبين النظري والتطبيقي. وفيما يلي سوف نقدم بأختصار بعض أهم الدراسات التي تم تقديمها:

في سنة (١٩٥٨) قدم كل من Charnes, Cooper and Symonds للمرة الأولى تحويل بعض القيود التى تحتوى على بعض المعلمات التي تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة إلى قيود يقينية مكافئة وتم تطبيق ذلك في مشكلة الحصول على التكاليف المثلى لنظام تسخين الزيوت [42].

وفي سنة (١٩٥٩) قدم كل من Charnes and Cooper للمرة الأولى أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً .chance-constrained prog كأسلوب من أساليب البرمجة الأحتمالية حيث قدموا أهم النظريات التي بُنى على أساسها هذا الأسلوب [39].

وفي سنة (١٩٦٣) قدما أيضاً بعض التحويلات لدوال الأهداف التي تحتوى على بعض المعلمات التي تمثل متغيرات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة إلى قيود أحتمالية chance-constraints ووضع قاعدة قرارية مناسبة التي على أساسها يتم تحويل المشكلة الأحتمالية إلى مشكلة يقينية من خلال تقديم P-model وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الباب الثالث والعشرون [38].

في سنة (١٩٦٦) قدم كل من Charnes and Kirly بعض القواعد القرارية المثلى optimal decision's rules لأسلوب (CCP) من خلال تقديم بعض النماذج مثل E-model [40].

في سنة (١٩٦٨) قدم Contini للمرة الأولى الدمج بين أسلوب (CCP) وأسلوب برمجة الهدف goal programming (GP) [١٠] ما أطلق على تسميته أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً (CCGP) في حالة وجود بعض المعلمات التي تمثل متغيرات عشوائية وتتبع التوزيع المعتاد [45] ثم قدم النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة.

في سنة (١٩٦٩) قدما Charnes and Cooper أستخدام أسلوب (CCP) في بناء وحل بعض النماذج الاقتصادية وتقدير المخاطر risk وأطلقوا على عملية تحويل النماذج الأحتمالية إلى يقينية بهدف تقدير المخاطر المثلى أسم برمجة المخاطر risk programming [39].

وأيضاً في سنة (١٩٦٩) أستخدم كل من Sengupta and Gruver أسلوب (CCP) في تقديم تحليل الصلاحية reliability analysis لبعض النماذج الأحتمالية عندما تكون بعض المعلمات متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي أو التوزيع الأسي مثلا [136].

في سنة (١٩٧٠) قدم Sengupta تعميم لبعض خصائص الحل وأسلوب الدمج من خلال بعض النظريات بالنسبة لنماذج البرمجة الخطية المقيدة أحتمالياً [137].

وفي سنة (١٩٧٢) قدم Sengupta أيضاً أسلوب (CCP) عندما تكون بعض المعلمات التي تمثل متغيرات عشوائية تتبع توزيع كا^{2} Chi-square dist. [140].

وفي خلال الفترة (١٩٧٧-١٩٨٠) قدم Keown مجموعة من التطبيقات لأسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً في القطاعات المالية والبنكية [93-97].

وفي سنة ١٩٨٤ قدمت **El-Dash** تعريف وتفسير للمتغيرات الأنحرافية الأحتمالية **probabilistic deviational variables** بالنسبة لنماذج برمجة الهدف الأحتمالية، كذلك قدمت النظرية التي تربط بين المتغيرات الأنحرافية العشوائية والمتغيرات الأنحرافية اليقينية المناظرة لها [51]، في حالة وجود بعض المعلمات تمثل متغيرات عشوائية موجبة (مثل المتغيرات التي تتبع التوزيع الأسي أو توزيع χ^2). كذلك قدمت عدة تطبيقات لبرمجة الهدف الأحتمالية في النقل [51,61,١٣]، والزراعة [53]، والدفاع الجوى [63,64]، والتخزين للمنتجات محدودة الصلاحية [55]، وقطاعات أخرى [62,65].

وفي سنة (١٩٨٥) قدم كل من **Lee and Olson** خوارزم لحل مشاكل برمجة الهدف غير الخطية المقيدة أحتمالياً [103].

وفي نفس العام (١٩٨٥) قدم أيضاً كل من **Rakes and Reeves** دراسة لتحديد وأختبار مؤشرات المأمونية **tolerance measures** للقيود الأحتمالية [121].

في سنة (١٩٨٧) قدم كل من**Olson and Swenseth** تقريباً خطياً مناسباً للنماذج اليقينية المكافئة غير الخطية عندما تكون بعض المعلمات تتبع التوزيعات المعتادة **Normal distributions** [116].

في سنة (١٩٩٣) قدمت **Girgis** وآخرين تحليل معلمي لمشاكل برمجة الهدف الأحتمالية [73].

في سنة (٢٠٠٧) قدم **Yadavalli** وآخرين أسلوب للحصول على القيم المثلى لصلاحية بعض الأنظمة بأستخدام أسلوب (CCP) حيث أعتبر كل من الأنظمة ذات المراحل المتتالية والمتغيرات القرارية متغيرات صحيحة [157].

في سنة (٢٠٠٨) قدم كل من **Ahmed and Shapiro** بعض نماذج (CCP) ذات المتغيرات القرارية الصحيحة حيث أستخدام الأسلوب العددى المحاكاة وطريقة **Monte-Cario** للحصول على حلول عددية [16].

وفي سنة (٢٠٠٨) قدم أيضاً كل من Henriorn and Strugarek دراسة لنماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً في حالة القيود المحدبة [78].

ومنذ أن قدم Contini سنة (١٩٦٨) أسلوب (CCGP) وتوالت التطبيقات لهذا الأسلوب في قطاع التخطيط، والبنوك، وإعادة المخلفات الصلبة.

في سنة (٢٠٠٩) قدم Bhatta Charya نموذج برمجة هدف أحتمالي مقيد لحل مشاكل تخطيط الأعلام [28].

وفي سنة (٢٠١١) قدم Branda بعض القواعد القرارية ممثلة في دوال المخاطرة penalty functions حيث تم تحويلها إلى قيود أحتمالية ثم قام بدمجها في دالة الهدف، كذلك قدم النظريات المرتبطة بخصائص الحل للنماذج اليقينية المكافئة، ثم طبق ذلك في إدارة المخاطر المالية financial risk management [32].

في سنة (٢٠١٢) عرف Geleu وآخرون القيود الأحتمالية المشتركة joint chance-constraints حيث أعتبر أن بعض المعلمات العشوائية غير المستقلة تتبع توزيع جاوس .Gaussian dist كذلك بعض التوزيعات الأخرى، ثم قدم التحويل من نموذج أحتمالي إلى نموذج برمجة غير خطية يقينى مكافئ ثم طبق ذلك على إدارة أحتياطي محزون المياة [69,70].

(١٩–٦) متطلبات أساسية Basic Prerequisites

ترتبط البرمجة الأحتمالية أرتباط وثيق بالإحصاء والأحتمالات statistics and probabilities في عملية تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية أو تفسير وأختبار نتائج الحل (أو تقدير التوزيعات الأحتمالية أيضاً).

وفيما يلي سوف نقدم بأختصار بعض الموضوعات الهامة important topics في كل من الرياضيات والإحصاء وبحوث العمليات التي يجب الألمام الجيد بها عند تناول وتطبيق أساليب البرمجة الأحتمالية أو البرمجة العشوائية بصفة عامة.

أولاً: بعض الموضوعات في الرياضيات

- الدوال والدوال العكسية Functions and Inverse Functions،
- الفئات المحدبة Convex Sets،
- أساليب التقريب Approximate Techniques،
- النقط العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات Maximum and Minimum Points.

ثانياً: بعض الموضوعات الإحصائية

- المتغيرات العشوائية Random Variables،
- العملية العشوائية Stochastic Process،
- التوزيعات الأحتمالية المعلمية Parametric Probability Distributions،
- التوزيعات التقريبية Approximate Probability Distributions،

- التوزيعات الأحتمالية اللامعلمية Nonparametric Probability Distributions،
- العينات العشوائية Random Samples،
- التقدير الإحصائي Statistical Estimation،
- أختبارات الفروض Testing of Hypothesis،
- التحويلات الإحصائية Statistical Transformation.

ثالثاً: بعض الموضوعات في بحوث العمليات

- البرمجة الخطية Linear Programming (LP)،
- البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming (Non-LP)،
- البرمجة الهندسية Geometric Programming،
- برمجة تعدد الأهداف Multi-objective Programming،
- برمجة الهدف Goal Programming (GP).

رابعاً: حزم البرامج الجاهزة

- حزمة Maple،
- حزمة Tora،
- حزمة Mathematica،
- حزمة R.

(١٩-٧) تمرينات Exercises

(١٩-١) تكلم بأختصار عن:

١- بيئة صناعة القرار وعلاقتها بالمتغيرات التحكمية.

٢- البرمجة العشوائية والبرمجة اليقينية.

٣- البرمجة العشوائية والبرمجة الأحتمالية.

(١٩-٢) تكلم بأختصار عن الأساليب المختلفة للبرمجة الأحتمالية وما هي الخصائص المشتركة بينها.

(١٩-٣) عرف القيد الأحتمالى Chance-constraint.

(١٩-٤) تكلم بأختصار عن التطور التاريخي لأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (CCP).

(١٩-٥) أذكر بأختصار أهم الموضوعات المرتبطة بأسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً (CCP).

(١٩-٦) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:

١- يعتبر Sengupta أول من قدم أسلوب (CCP).

٢- بالنسبة للمشاكل العشوائية يجب أن تكون جميع المعلمات متغيرات عشوائية.

٣- لا يوجد أساليب لحل المشاكل العشوائية إلا أسلوب (CCP).

٤- بالنسبة للبرمجة العشوائية ممكن أن تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.

٥- بالنسبة للبرمجة الأحتمالية ممكن أن تكون التوزيعات الأحتمالية للمعلمات العشوائية غير معلومة.

٦- ممكن تقدير التوزيعات الأحتمالية للمعلمات غير معلومة التوزيعات الأحتمالية في حالة توافر البيانات ثم أستخدام أسلوب (CCP).

٧- يتطلب أسلوب (CCP) وجود الدالة العكسية للدالة التراكمية للمعلمة (أو المعلمات) التي تمثل متغيرات عشوائية.

٨- يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) الإلمام الجيد بالتوزيعات الأحتمالية.

٩- يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) الإلمام الجيد بالتحويلات الإحصائية.

١٠- يستخدم أسلوب (CCP) في حالة إذا كانت المتغيرات القرارية متغيرات عشوائية.

١١- يعتبر Contini سنة (١٩٦٨) أول من قدم أسلوب (CCP).

١٢- المشاكل الأحتمالية هي حالة خاصة من المشاكل العشوائية.

١٣- لا يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) معرفة التوزيع الأحتمالي للمعلمات العشوائية.

١٤- لا يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) معلومية الدالة العكسية للدالة التراكمية للمعلمة العشوائية.

١٥- توجد أساليب لحل المشاكل العشوائية غير أسلوب (CCP).

الباب العشرون

متطلبات إحصائية

Statistical Requirements

(٢٠-١) مقدمة Introduction

(٢٠-٢) تعريفات ونظريات Definitions and Theorems

(٢٠-٣) بعض التوزيعات الأحتمالية المتقطعة
Some Discrete Probability Distributions

(٢٠-٤) بعض التوزيعات الأحتمالية المتصلة
Some Continuous probability Distributions

(٢٠-٥) بعض التوزيعات التقريبية
Some Approximate Distributions

(٢٠-٦) بعض التوزيعات المشتركة Some Joint Distributions

(٢٠-٧) بعض التحويلات Some Transformations

(٢٠-٨) تمرينات Exercises

(٢٠-١) مقدمة　　　　Introduction

تتطلب دراسة البرمجة العشوائية بصفة عامة والبرمجة الإحتمالية بصفة خاصة المعرفة والإستخدام الجيد بالنظرية والأساليب الإحصائية.

لذلك فى هذا الباب سوف نقدم بأختصار أهم التعريفات والنظريات والمفاهيم الإحصائية الأساسية المرتبطة أرتباط مباشر بالأساليب المختلفة للبرمجة العشوائية بصفة عامة والبرمجة الإحتمالية بصفة خاصة.

لذلك سوف نتناول أولا أهم التعريفات الإحصائية فى الفصل التالى، ثم نتناول فى الفصول (٢٠-٣)-(٢٠-٧):

- بعض التوزيعات المتقطعة،
- بعض التوزيعات المتصلة،
- بعض أهم التوزيعات التقريبية،
- بعض أهم التوزيعات المشتركة.
- بعض أهم التحويلات الخطية.

حيث يتطلب تناول الأبواب التالية ضرورة المعرفة الجيدة بالتوزيعات الإحتمالية المذكورة أعلاه وأهم خصائصها.

كذلك يتطلب تناول الأبواب التالية ضرورة المعرفة والإستخدام للتحويلات الخطية لذلك سوف نقدم فى الفصل (٢٠-٧) بعض التحويلات الخطية التى تعتمد على التوزيعات المقدمة فى الفصول (٢٠-٣)-(٢٠-٦).

(٢٠-٢) تعريفات ونظريات Definitions and Theorems

فى هذا الفصل سوف نقدم بعض التعريفات الإحصائية والإحتمالية التى يجب الإلمام الجيد بها عند تناول البرمجة العشوائية وبصفة خاصة البرمجة الإحتمالية [٦,٩,٣,91,90]

<u>تعريف (٢٠-١)</u>: المجتمع الإحصائى Statistical population هو جميع العناصر elements(items) أو الوحـــدات units المطلـــوب أجـــراء دراســـة خصائـــصها characteristic والعلاقات relationships بين هذه الخصائص.

<u>تعريف (٢٠-٢)</u>: العينة Sample هى فئة جزئية subset من المجتمع وتختلف خصائص العينة وفقا لطريقة سحب مفرداتها من المجتمع.

<u>تعريف (٢٠-٣)</u>: المتغير Variable هو الشئ الذى يمكن أن يأخذ قيم مختلفة فى الظروف المختلفة (زمنية ، مكانية، سياسية، .....إلخ). والمتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة بين قيمتين يسمى متغير متصل continuous variable خلاف ذلك يسمى متغير متقطع discrete variable.

<u>تعريف(٢٠-٤)</u>: التجربة العشوائية Random experiment هى التجربة التى يعرف مقدماً جميع النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن أن يعرف مقدما ترتيب حدوث هذه النتائج، وتمثل نتائج outcomes التجربة العشوائية متغير يسمى بالمتغير العشوائى random variable، حيث أن الصدفة (الصدفة عبارة عن مجموعة من العوامل التى لا يمكن التحكم فيها) هى التى تحدد نتائج التجربة.

<u>تعريف (٢٠-٥)</u>: فراغ المعاينة sampling Space هى الفئة التى تتكون من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. حيث يمثل كل عنصر فى هذه الفئة نتيجة من نتائج التجربة العشوائية ، وأحيانا تسمى هذه الفئة بفراغ النتائج outcomes space أو فراغ الأحتمال probability space.

<u>تعريف(٢٠-٦)</u>: الحدث العشوائى **Random event** هو فئة جزئية **Subset** من فراغ المعاينة.

<u>تعريف (٢٠-٧)</u>: إذا كان لدينا فئتين A,B بحيث $x \in A , y \in B$ ويعتمد تحديد عناصر الفئة B على عناصر الفئة A ، أى يوجد علاقة **relationship** بين عناصر الفئة A وعناصر الفئة B ، وتأخذ هذه العلاقة صياغة رياضية يطلق عليها الدالة **function**. وبالتالي فإن الدالة هى قاعدة رياضية **mathematical Rule** بأستخدامها يتم تحديد لكل عنصر x عنصراً وحيدا مناظرا له y ويرمز لهذه القاعدة بالرمز (f) وتكتب على النحو التالى:

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B \qquad (20.1)$$

وتسمى الفئة A بنطاق **domain** الدالة f ، والفئة B بالنطاق المصاحب **Co-domain** أو المدى **range** للدالة، أو بعبارة أخرى يتم تحديد العناصر Y المناظرة للعناصر X بأستخدام الدالة f وتكتب أيضا على النحو

$$Y = f(X) \qquad (20.2)$$

حيث X متجه العناصرx،Y متجه العناصرy. ويقال أن المتغير التابع (Y) **dependent variable** دالة فى المتغير المستقل (X) **independent variable** [٧].

<u>تعريف (٢٠-٨)</u>: إذا كان المتغير y دالة فى المتغير x على النحو التالى :

$$y = f(x)$$

فبمعرفة الدالة f يمكن تحديد قيمة y عند قيمة محددة لـ x ولكن إذا كان المطلوب العكس أى تحديد قيمة x عند قيمة محددة لـy فإنه يتم ذلك بإستخدام دالة أخرى تسمى بالدالة العكسية للدالة $f(x)$ (أو معكوس الدالة $f(x)$) ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(y)$ حيث [٧، 144]

$$x = f^{-1}(y) \qquad (20.3)$$

فمثلا إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ على النحو:

$$y = f(x) = 100 - 2x \longrightarrow$$
$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(100 - y)$$

تعريف (٢٠-٩): إذا فرض أن (m) تشير إلى عدد مرات وقوع الحدث (A) فى عدد (n) من المحاولات (التجارب المتماثلة) وعرفنا الدالة $P_r(A)$ حيث $P_r(A)$ تشير إلى إحتمال وقوع الحدث (A) فأنه يمكن تعريف أحتمال وقوع الحدث A على النحو التالي:

$$P_r(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \qquad (20.4)$$

والمقصود بكلمة $\lim\limits_{n \to \infty}$ ليس المعنى الرياضى المعروف ولكن المقصود هو أن قيمة هذا الإحتمال سوف تقترب من الصحة إذا كان عدد المحاولات كبيرة جدا، ويسمى الإحتمال المعرف فى (20.4) بالاحتمال التجريبى Experimental Probability [113,٦].

كذلك إذا أجريت تجربة عشوائية وكان عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة يساوى n (حيث n عدد العناصر في فراغ المعاينة) بحيث يكون لكل نتيجة للتجربة نفس الفرصة في الظهور. فإذا كان عدد m $(m \le n)$ من هذه النتائج تؤدي إلى وقوع الحدث A، فإنه يمكن حساب أحتمال وقوع الحدث A على النحو التالي :

$$P_r(A) = \frac{m}{n} \qquad (20.5)$$

وبعبارة أخري فأن أحتمال وقوع الحدث A هو $P_r(A)$ حيث :

$$P_r(A) = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \qquad (20.6)$$

تعريف (٢٠-١٠): إذا كان المتغير X يشير إلى عدد (n) من النتائج الممكنة للتجربة، فإن X يسمي بالمتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) discrete random variable حيث:

$$X = x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

فإذا أشرنا للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} P_r(x_j) & \text{if } x = x_j \;,\; j = 1,2,\ldots,n \\ \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \qquad (20.7)$$

فأن الدالة $f(x)$ تسمي بدالة الأحتمال Probability function للمتغير X. وتسمي العلاقة (20.7) بالتوزيع الاحتمالي للمتغير X ، وبالتالي فالتوزيع الاحتمالي للمتغير X هو عبارة عن القيم المختلفة للمتغير X والاحتمالات المناظرة لها.

وإذا كان X متغير متصل معرف في الفترة [a ,b] ، وله دالة كثافة الأحتمال $f(x)$ فان أحتمال أن يقع X في الفترة $[x_1, x_2]$ على النحو:

$$P_r(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(X)\ dX \qquad (20.8)$$

وبالتالي يصبح التوزيع الأحتمالي للمتغير المتصل X على النحو التالي:

$$f(X) \quad , \quad a \le X \le b \qquad (20.9)$$

تعريف (٢٠-١١): يقال أن الدالة $F(x)$ دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function للمتغير X ، $a \le X \le b$ حيث:

$$F(x_i) = P_r(X \le x_i)$$

فإذا كان X متغير متقطع فإن:

$$F(x_i) = \sum_{x_j=a}^{x_i} P_r(X_j) \quad , \quad a \le X \le b \qquad (20.10)$$

كذلك إذا كان X متغير متصل فإن:

$$F(x_i) = \int_a^{x_i} f(X)\ dX \quad , \quad a \le X \le b \qquad (20.11)$$

حيث أن:

$$\left. \begin{array}{c} F(b) = \sum_{x_j=a}^{b} P_r(X_j) = 1 \\ \text{or} \\ F(b) = \int_a^b f(X)\ dX = 1 \end{array} \right\} \qquad (20.12)$$

<u>تعريف (٢٠-١٢)</u>: يعرف توقع المتغير العشوائى من الدرجة j بالعزم غير المركزي non-central moments من الدرجة j وسوف نرمز له بالرمز μ_j ويعرف على أنه توقع المتغير (X^j) على النحو التالى [113]:

$$\mu_j = E(X^j)$$

فإذا كان المتغير X متغير متقطع فإن:

$$\mu_j = E(X^j) = \sum_x X^j f(X) \qquad (20.13)$$

وإذا كان X متغير متصل فإن:

$$\mu_j = E(X^j) = \int_x X^j f(X)\ dX \qquad (20.14)$$

ملحوظة: عندما $j = 1$ فإن العزم من الدرجة الأولي يساوى القيمة المتوقعة Expectation للمتغير X حيث:

$$\mu = \mu_1 = E(X) \qquad (20.15)$$

تعريف (٢-١٣): يعرف العزم المركزى central moment من الدرجة j حول التوقع (μ) للمتغير X وسوف نرمز له بالرمز μ_j على النحو التالى:

$$\acute{\mu}_j = E(X-\mu)^j \quad , \quad j = 1,2,..,n \qquad (20.16)$$

فإذا كان X متغير متقطع فإن:

$$\acute{\mu}_j = E(X-\mu)^j = \sum_X (X-\mu)^j f(X) \qquad (20.17)$$

وإذا كان X متغير متصل فإن:

$$\acute{\mu}_j = E(X-\mu)^j = \int_X (X-\mu)^j f(X)\ dX \qquad (20.18)$$

ملحوظة: ١- عندما $j = 1$ فإن:

$$\mu_1 = \mu \ = 0 \qquad (20.19)$$

٢- العزم المركزى حول التوقع من الترتيب الثانى للمتغير X يمثل التباين variance للمتغير X وسوف نرمز له بالرمز $Var(X)$ أو σ^2 على النحو التالى فى (20.20).

$$\acute{\mu}_2 = E(X-\mu)^2 = Var(X) = \sigma^2 \qquad (20.20)$$

٣- يمكن الحصول على العزوم المركزية بإستخدام العزوم غير المركزية[90].

تعريف (٢٠-١٤): إذا كان x متغير عشوائى لـه دالـة الاحتمـال $f(x)$ (أو دالـة كثافـة الاحتمـال إذا كـان x متغيـر متـصل) فـإن توقـع المتغيـر e^{xt} ، $-h<t<h$ ، $h>0$ يسمى بالدالة المولدة للعزم moment generation function للمتغير X وسوف نشير لها بالرمز $m(t)$ حيث [90,113]:

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{xt}) \\ &= E\left\{1 + x\,t + \frac{1}{2!}(x\,t)^2 + \frac{1}{3!}(x\,t)^3 + ...\right\} \\ &= 1 + \mu_1\,t + \frac{1}{2!}\mu_2\,t^2 + \frac{1}{3!}\mu_3\,t^3 + ... \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\mu_j\,t^j \end{aligned} \qquad (20.21)$$

وتسمى الدالة $m(t)$ بالدالة المولدة للعزوم لأنـه يمكن بأستخدامها أشتقاق العزوم غير المركزية (ومنها بالتالي العزوم المركزية أيضاً). حيث يمكن الحصول على العزم μ_j من خلال إيجاد المشتقة من الترتيب j للدالـة $m(t)$ بالنسبة لـ t عندما $t \to 0$ أو بعبارة أخرى:

$$\left.\frac{d^j\,m(t)}{d\,t^j}\right|_{t=0} = E(x^j) = \mu_j \qquad (20.22)$$

نظريـة (٢٠-١): إذا كـان a,b مقادير ثابتـة، وكانـت $m_x(t)$ تشير إلـى الدالـة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي x فإن [109]:

$$\text{(i)}\quad m_{x+a}(t) = e^{at}m_x(t) \qquad (20.23)$$

$$\text{(ii)}\quad m_{ax}(t) = m_x(at) \qquad (20.24)$$

$$\text{(iii)}\quad m_{\frac{x+a}{b}}(t) = e^{at/b}m_x(t/b) \qquad (20.25)$$

الإثبات: بما أن:

$$i)\, m_{x+a}(t) = E(e^{t(x+a)}) = E(e^{tx}.e^{at})$$
$$= e^{at}\,E(e^{tx}) = e^{at} m_x(t)$$

كذلك:

$$ii)\, m_{ax}(t) = E(e^{t(ax)}) = E(e^{ta(x)})$$
$$= m_x(at)$$

كذلك:

$$iii)\, m_{\frac{x+a}{b}}(t) = E(e^{t(x+a/b)}) = E(e^{x(t/b)} - e^{at/b})$$
$$= e^{at/b}E(e^{x(t/b)}) = e^{at/b}m_x(t/b)$$

نظرية (٢٠-٢): إذا كان $x_1, x_2, ..., x_n$ عدد n من المتغيرات العشوائية. كذلك $E(x_i)$ تشير إلى توقع expectation المتغير x_i ، و $Var(x_i)$ تشير إلى تباين Variance المتغير x_i ، كذلك $Cov(x_i, x_j)$ تشير إلى تغاير المتغيران x_i, x_j ، $i \neq j$ فإن:

$$(i)\ E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) \qquad (20.26)$$

$$(ii)\ Var(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + 2\sum_{i}\sum_{\substack{j \\ i<j}} Cov(x_i, x_j) \qquad (20.27)$$

الإثبات:

$$(i) \because E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{x} (x_1 + x_2 + ... + x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$= \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} x_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots\ldots + $$

$$\sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} x_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_{x_1} x_1 \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots\ldots +$$

$$\sum_{x_n} x_n \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

<u>ملحوظــة</u>: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تــشير إلــى دالــة الأحتمــال المــشتركة للمتغيــرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$(ii) \because Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left[\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i (X_i - E(X_i))^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_i \sum_{\substack{j \\ i<j}} Cov(X_i, X_j)$$

نتيجة (١): إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات مستقلة فإن:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) \qquad (20.28)$$

حيث أن $Cov(x_i, x_j) = 0$ لجميع قيم i,j.

<u>نظريــة (٢٠-٣)</u>: إذا كـان لـدينا فئتـين مـن المتغيـرات العـشوائية همـا الفئـة الأولـى $x_1, x_2, ..., x_n$ والفئة الثانية $y_1, y_2, ..., y_m$ كذلك لدينا فئتين من المقـادير الثابتـة الفئة الأولى $a_1, a_2, ..., a_n$ والفئة الثانية $b_1, b_2, ..., b_m$ فإن:

$$Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i\ , \sum_{j=1}^{m} b_j\ y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\ b_j\ Cov(x_i, y_j) \qquad (20.29)$$

الإثبات: بنفس أسلوب الإثبات للنظرية السابقة.

نتيجة (٢): إذا كان $x_1, x_2, ..., x_n$ متغيرات عشوائية، $a_1, a_2, ..., a_n$ مقـادير ثابتـة فإن:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\ a_j\ Cov(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ Var(x_i) + \sum\ \sum_{i \neq j} a_i a_j\ Cov(x_i, x_j) \qquad (20.30)$$

نتيجة (٣): إذا كان x_1, x_2 متغيران عشوائيين فإن:

$$Vax(x_1 \pm x_2) = Vax(x_1) + Vax(x_2) \pm 2Cov(x_1, x_2) \qquad (20.31)$$

وفي حالة أستقلال x_1 عن x_2 فأن:

$$Vax(x_1 \pm x_2) = Vax(x_1) + Vax(x_2)$$

(٢٠-٣) بعض التوزيعات الأحتمالية المتقطعة

Some Discrete Probability Distributions

المقصود هنا بالتوزيعات هو التوزيعات الأحتمالية لبعض المتغيرات العشوائية المتقطعة ومن أهمها:

- التوزيع المتقطع المنتظم Discrete Uniform Distribution
- توزيع ذات الحدين Binomial Distribution
- توزيع بواسون Poisson Distribution
- التوزيع الهندسي Geometric Distribution

فإذا أعتبرنا أن X متغير عشوائي متقطع له دالة الأحتمال $f(X)$ فإننا سوف نتناول التوزيعات المذكورة أعلاه على النحو التالي.

<u>أولاً التوزيع المتقطع المنتظم:</u> إذا كان X متغير عشوائي له التوزيع المنتظم المتقطع فإن دالة أحتماله $f(X)$ على النحو التالي:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & X=1,2,\ldots,N\\[2ex] 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases} \qquad (20.32)$$

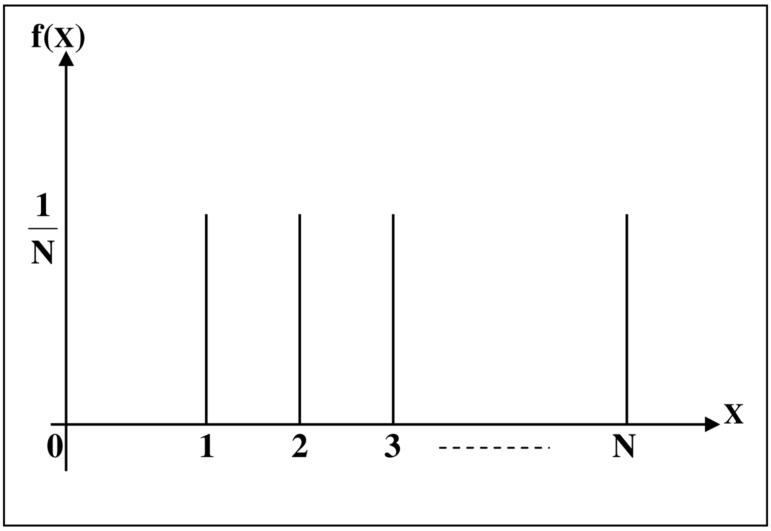
والشكل التالي يوضح بيانياً الدالة $f(X)$

<u>نظرية (٢٠-٤):</u> إذا كان X متغير عشوائى له التوزيع المنتظم المتقطع فى (20.32) فإن:

$$(i)E(X)=(\frac{N+1}{2}) \quad , \quad (ii)Var(X)=(\frac{N^2-1}{12})$$

$$(iii)F(X)=\frac{X}{N} \quad , \quad (iv)\, m_x(t)=E(e^{tx})=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{jt}$$

شكل (٢٠-١): يوضح التوزيع الأحتمالي المتقطع المنتظم



الإثبات:

$$\text{(i)}\ E(X)=\sum_{X=1}^{N} X\,f(X)=\sum_{X=1}^{N} X\frac{1}{N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N} X=\frac{1}{N}\Big[\frac{N}{2}(1+N)\Big]=\Big(\frac{N+1}{2}\Big) \qquad (20.33)$$

$$\text{(ii)}\ Var(X)=E(X)^2-(E(X))^2$$

$$=\sum_{X=1}^{N} X^2\frac{1}{N}-\Big(\frac{N+1}{2}\Big)^2$$

$$=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N}-\frac{(N+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(N+1)(N-1)}{12}=\frac{(N^2-1)}{12} \qquad (20.34)$$

$$(iii)\ F(X) = P_r(X \le x) = \sum_{j=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\{\underbrace{1+1+....+1}_{x}\}$$

$$= \frac{X}{N} \qquad (20.35)$$

$$(iv)\ m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{X}^{N} e^{tx}\, f(X)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x}^{N} e^{tx} \qquad (20.36)$$

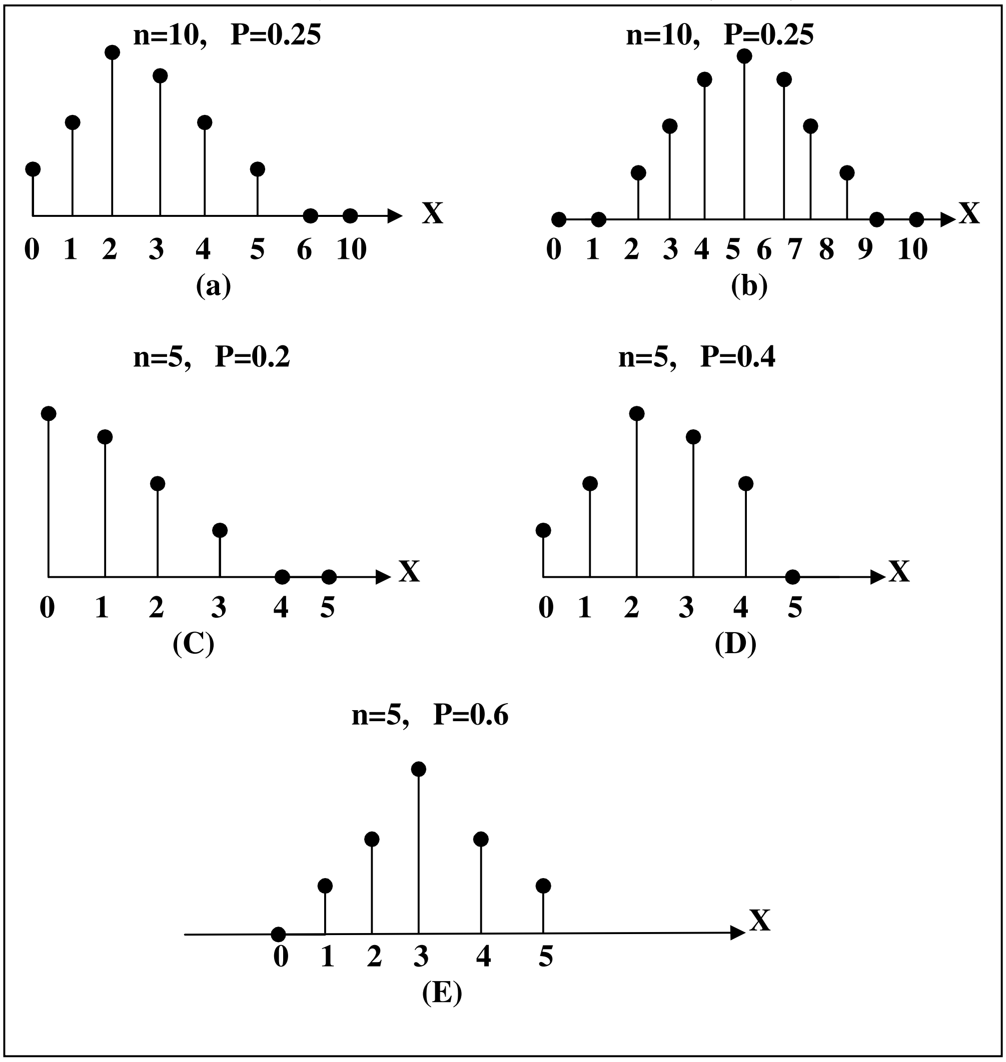
<u>ثانياً: توزيع ذات الحدين:</u> إذا X متغير عشوائى له توزيع ذات الحدين بدالة احتمال f(X) فإن:

$$f(X) = \begin{cases} C_x^n\, P^x (1-P)^{n-x} & ,X = 0,1,2,.....,n \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \qquad (20.37)$$

حيث تشير n إلى عدد المحاولات المستقلة المتماثلة ، P أحتمال النجاح فى المحاولة الواحدة (وبالتالى فإن (1-P) تشير إلى أحتمال الفشل فى المحاولة الواحدة) والشكل التالى يوضح f(X) عند القيم المختلفة لكل من n,P.

ومن الشكل يتضح أنه عند ثبات n فإنه عندما $P < 0.5$ فأن الدالة f(X) تكون ملتويه ناحية اليمين كما فى الشكل (a),(C),(D) ، كذلك عندما $P = 0.5$ تكون f(X) متماثلة كما في الشكل b وعندما $P > 0.5$ تأخذ الدالة f(X) فى الإلتواء ناحية اليسار.

شكل (٢٠-٢): يوضح توزيع ذات الحدين عند قيم مختلفة لـ n,p.



<u>**نظرية (٢٠-٥)**</u>: إذا كان X متغير عشوائى له توزيع ذات الحدين فى (20.37) فإن:

$$\text{(i)}\ E(X) = nP \qquad , \qquad \text{(ii)}\ Var(X) = nP(1-P)$$

$$\text{(iii)}\ F(X) = \sum_{j=0}^{X} C_j^n \ \ P^j(1-P)^{n-j}\ ,\ \text{(iv)}\ m_x(t) = [(1-P)+Pe^t]^n$$

الإثبات:

$$\text{(i)}\ E(X) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n\, P^x(1-P)^{n-x}$$

$$= (nP)\sum_{x=1}^{n-1} C_{x-1}^{n-1}\, P^{(x-1)}(1-P)^{n-x}$$

$$= (nP)\sum_{y=0}^{n-1} C_y^{n-1}\, P^y(1-P)^{(n-1-y)} = (nP) \qquad (30.38)$$

حيث $y = x - 1$ والمتغير العشوائى y يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $(n\text{-}1),P$ وله دالة الاحتمال $f(y)$ على النحو التالي:

$$f(y) = C_y^{n-1}(P)^y(1-P)^{n-1-y} \quad ,\ y = 0,1,2,\ldots,n-1$$

وبالتالى فإن

$$\sum_{y=0}^{n-1} C_y^{n-1}\, P^y(1-P)^{n-1-y} = 1$$

$$\text{(iii)}\ Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - n^2P^2 \qquad (30.39)$$

وبما أن

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n}\left[X(X-1)+X\right]C_x^n\, P^x(1-P)^{n-x}$$

$$= nP\sum_{x=2}^{n-2} C_{x-2}^{n}\, P^{x-1}(1-P)^{n-x} + nP$$

$$= nPP(n-1)\sum_{x=2}^{n-2} C_{x-2}^{n-2}\, P^{x-2}(1-P)^{n-X} + nP$$

$$= nP^2(n-1)(1) + nP = nP^2(n-1) + nP \qquad (20.40)$$

حيث أنه بأفترض أن $y = x - 2$ فإن

$$\sum_{x=2}^{n-2} C_{x-2}^{n-2} P^{x-2}(1-P)^{n-x} = \sum_{y=0}^{n-2} C_y^{n-2} P^y (1-P)^{n-2-y} = 1$$

بالتعويض بالطرف الأيمن فى المعادلة (20.40) فى الطرف الأيمن للمعادلة (20.39) على النحو التالى:

$$\begin{aligned} Var(X) &= nP^2(n-1) + nP - n^2P^2 \\ &= nP - nP^2 = nP(1-P) \end{aligned}$$

$$iii)\ F(X) = \sum_{j=0}^{X} C_j^n P^j (1-P)^{n-j} \qquad (20.41)$$

$$\begin{aligned} (iv)\ m_x(t) = E(e^{tx}) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n P^x (1-P)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} C_x^n (Pe^t)^x (1-P)^{n-x} \\ &= [(1-P) + Pe^t]^n \qquad (20.42) \end{aligned}$$

<u>إثبات آخر</u> : بما أن:

$$\begin{aligned} (iv)\ m_x(t) = E(e^{tx}) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n P^x (1-P)^{n-x} \\ &= [(1-P) + Pe^t]^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i)\ E(X) = \left.\frac{d\,m(t)}{d\,t}\right|_{t=0} &= n[(1-P) + Pe^t]^{n-1}(Pe^t) \\ &= n[(1-P) + P(1)]^{n-1}(P(1)) \\ &= n(1)(P) = nP \end{aligned}$$

$$(ii)Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (nP)^2 \qquad (20.43)$$

$$\because E(X^2) = \left.\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = n\{(n-1)[(1-P)+Pe^t]^{n-2}(Pe^t)(Pe^t)$$
$$+[(1-P)+Pe^t]^{n-1}(Pe^t)\}$$
$$= n\Big\{[(1-P)+Pe^t]^{n-1}(Pe^t) +$$
$$(Pe^t)(n-1)[(1-P)+Pe^t]^{n-2}(Pe^t)\Big\}$$
$$= n\{(1)(P)+(P)(n-1)(1)(P)\}$$
$$= n\{P+(n-1)P^2\} = nP + n^2P^2 - nP^2 \qquad (20.44)$$

بالتعويض فى الطرف الأيمن للمعادلة (20.43) بالطرف الأيمن للمعادلة (20.44) نجد أن:

$$Var(X) = nP + n^2P^2 - nP^2 - n^2P^2$$
$$= nP(1-P)$$

<u>ثالثاً : توزيع بواسون:</u> إذا كان المتغير X يتبع توزيع بواسون بدالة احتمال $f(X)$ فإن:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{\bar{e}^{\lambda}\ \lambda^X}{X!} & , \quad X = 0,1,2,...... \\ 0 & , \quad \text{فيماعدا ذلك} \end{cases} \qquad (20.45)$$

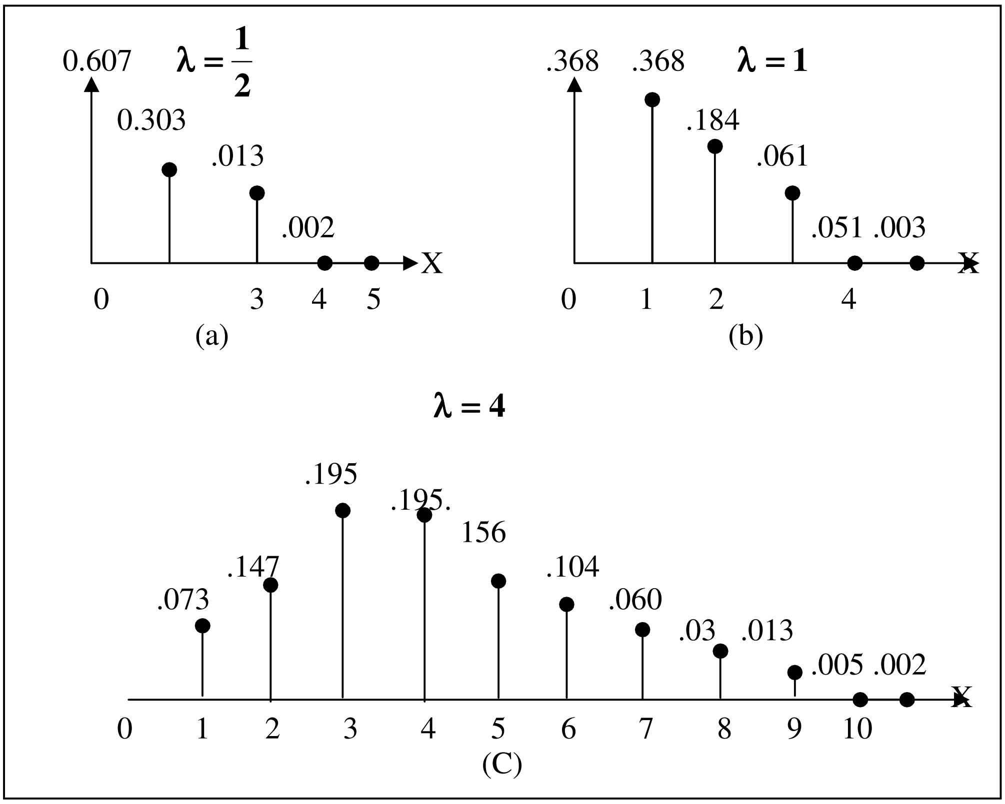
والشكل التالى يوضح الدالة $f(X)$ عند قيم مختلفة للمعلمة λ. ومن الشكل يتضح أن التوزيع يميل للتماثل كلما زادت قيمة المعلمة λ

<u>نظرية (٢٠-٥):</u> إذا كان X متغير يتبع توزيع بواسون فإن

$$(i)\ E(X) = \lambda \qquad , \qquad (ii)Var(X) = \lambda$$

$$(iii)\ F(X) = \sum_{j=0}^{X} \frac{\bar{e}^{\lambda}\ \lambda^j}{j!} \qquad , \qquad (iv)\ m_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

شكل (٢-٣): يوضح توزيع بواسون عند قيم مختلفة لـ λ.



الإثبات:

$$\text{(i) } E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} X \frac{\bar{e}^{\lambda} \; \lambda^{x}}{X!} = e^{-\lambda} \, \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(X-1)!}$$

$$= \lambda \, e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!} = \lambda \, e^{-\lambda} \, e^{\lambda} = \lambda \qquad (20.46)$$

$$\text{(ii) } Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - \lambda^2 \qquad (20.47)$$

وبما أن

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= E\left[\, X(X-1) + X \,\right] \\
&= E\left[\, X(X-1) + E(X)\right] = E\left[\, X(X-1)\right] + \lambda \\
&= \left\{ \sum_{X=0} X(X-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} \right\} + \lambda \\
&= \left\{ e^{-\lambda} (\lambda^2) \sum_{X=2} \frac{\lambda^{X-2}}{(X-2)!} \right\} + \lambda \\
&= \left\{ e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{y=0} \frac{\lambda^{Y}}{Y!} \right\} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda \qquad (20.48)
\end{aligned}
$$

بالتعويض بالطرف الأيمن فى (20.48) فى الطرف الأيمن لـ (20.47) نجد أن:

$$
Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad (20.49)
$$

$$
(iii)\, F(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^{i}}{i!} \qquad (20.50)
$$

$$
\begin{aligned}
(iv)\, m_x(t) = E(e^{xt}) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt}\, \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^{x}}{X!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{t})^{x}}{X!} \\
&= e^{-\lambda}\, e^{(\lambda e^{t})} = e^{\lambda(e^{t}-1)} \qquad (20.51)
\end{aligned}
$$

<u>أثبات آخر</u>: وبنفس الطريقة فى إثبات النظرية السابقة يمكن الحصول على التوقع والتباين بإستخدام الدالة المولدة للعزوم على النحو التالى.

$$(i)\ E(X) = \left.\frac{d\,m_x(t)}{d\,t}\right|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)}(\lambda e^t) = \lambda e^{\lambda(1-1)}(1) = \lambda$$

كذلك:

$$\begin{aligned}(ii)Var(X) &= E(X^2) - \lambda^2 \\ &= \left.\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2}\right|_{t=1} - \lambda^2 \\ &= \left[e^{\lambda(e^t-1)}(\lambda e^t) + (\lambda e^t)(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)})\right]_{t=0} - \lambda^2 \\ &= \left[(1)(\lambda) + (\lambda)(\lambda)(1)(1)\right] - \lambda^2 \\ &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

رابعا : التوزيع الهندسى : إذا كان X متغير عشوائى له التوزيع الهندسى بدالة احتمال $f(X)$ بحيث :

$$f(X) = \begin{cases} P(1-P)^X & , \quad 0 \le P \le 1 \quad , \quad X = 0,1,2,.. \\ 0 & , \quad \text{فيماعدا ذلك} \end{cases} \qquad (20.52)$$

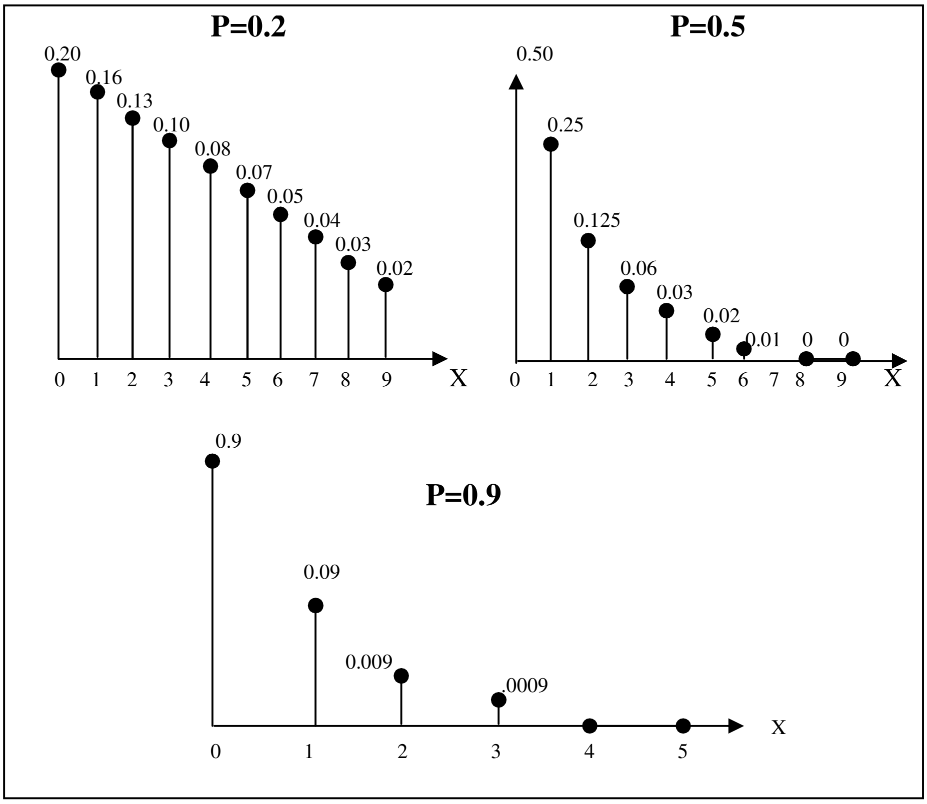
والشكل التالى يوضح الدالة $f(X)$ عند بعض القيم المختلفة للمعلمة P. ومن الشكل يتضح أنه كلما زادت قيمة P وأقتربت من القيمة (1) يزداد التواء التوزيع لليمين [76,97] .

نظرية (٢٠-٧): إذا كان X متغير يتبع التوزيع الهندسى فإن :

$$(i)F(X) = [1-(1-P)^{X+1}] \quad , \quad (ii)\, m_x(t) = P[1-(1-P)e^t]^{-1}$$

$$(iii)E(X) = (1-P)/P \quad , \quad (iv)Var(X) = (1-P)/P^2$$

شكل (٢٠-٤): يوضح التوزيع الهندسي عند قيم مختلفة لـ p.



الإثبات:

$$\text{(i)}F(X)=\sum_{j=0}^{X}P(1-P)^{j}$$
$$=P\left\{1+(1-P)+(1-P)^{2}+..+(1-P)^{X}\right\} \qquad (20.53)$$

فإذا فرضنا أن S بحيث: $S=\left\{1+(1-P)+(1-P)^{2}+..+(1-P)^{X}\right\}$

فإن S يمثل مجموع متوالية هندسية أساسها (1-P) وعدد حدودها يساوى (X+1) بالتالى فإن [٧]:

$$S=\frac{[(1-P)^{X+1}-1]}{[(1-P)-1]}=\frac{[1-(1-P)^{X+1}]}{P} \tag{20.54}$$

بالتعويض بالطرف الأيمن للعلاقة (20.54) فى الطرف الأيمن العلاقة (20.53) نجد أن:

$$F(X)=\frac{P[1-(1-P)^{X+1}]}{P}=[1-(1-P)^{X+1}]$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\ m_x(t)=E(e^{tx}) &= \sum_{x=0} e^{tx}P(1-P)^x \\
&= P\sum_{x=0}[e^t(1-P)]^x \\
&= P\left\{1+e^t(1-P)+e^{2t}(1-P)^2+\dots\right\} \\
&= P\left\{1/[1-e^t(1-P)]\right\}=P[1-(1-P)e^t]^{-1} \qquad (20.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)}\ E(X) &= \left.\frac{d\,m(t)}{d\,t}\right|_{t=0} \\
&= \left.\left\{P(-1)[1-(1-P)e^t]^{-2}[-(1-P)e^t]\right\}\right|_{t=0} \\
&= +P[1-(1-P)]^{-2}(1-P) \\
&= P\,(P)^{-2}(1-P)=(1-P)/P \qquad (20.56)
\end{aligned}$$

$$\text{(iv)}\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-[\,(1-P)^2/P^2\,] \tag{20.57}$$

$$\begin{aligned}
\because E(X^2)=\left.\frac{d^2m(t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= P(1-P)\left\{e^t(-2)[1-(1-P)e^t]^{-3}\right. \\
&\qquad \left.\left.[-(1-P)e^t]+[1-(1-P)e^t]^{-2}(e^t)\right\}\right|_{t=0} \\
&= (1-P)(2-P)/P^2 \qquad (20.58)
\end{aligned}$$

بالتعويض فى الطرف الأيمن فى المعادلة (20.57) بالطرف الأيمن فى (20.58) نجد أن:

$$Var(X) = (1-P)(2-P)/P^2 - (1-P)^2/P^2$$
$$= (1-P)/P^2 \qquad (20.59)$$

تمرين (١)

١- إذا كان X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين n=10,P=0.3

أ- أوجد الأحتمالات التالية:

$$(i) P_r(X < \mu - 2\sigma) \quad , \quad ii) P_r(3 < X \leq \mu)$$

حيث μ، σ^2توقع وتباين المتغير X على الترتيب.

٢- إذا كان X متغير يتبع التوزيع المنتظم فى الفترة (1,2) أوجد قيمة Z حيث

$$P_r(X > Z + \mu] = \frac{1}{4}$$

٣- بأفتراض أن X متغير يتبع توزيع بواسون وبأفتراض أن $P_r[X=0] = P_r[X=1]$ أوجد E(X).

٤- إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين n , P بحيث $E(X)=3$, $Var(X)=2.1$ أوجد كل من P, n .

٥- إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع بواسون بحيث $P_r[X=0] = \frac{1}{2}$ أوجد λ ثم أوجد الدالة المولدة للعزوم ومنها أوجد كل من العزم الأول والثانى.

٦- إذا فرضنا أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X على النحو التالى: $m_x(t) = \exp(e^t - 1)$ أوجد $E(X), Var(X)$

٧- أوجد كل من الوسيط والمنوال mode لكل متغير من المتغيرين الأول يتبع توزيع بواسون بمعلمية $\lambda = 5$ والآخر يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n = 10, P = .5$

٨- أوجد الدالة المولدة للعزوم لمتغير يتبع التوزيع الهندسى ومنها أشتق العزم الأول والثانى غير المركزى.

٩- أوجد الدالة $E(t^X)$ عندما X تتبع التوزيع المنتظم ، أو التوزيع ذات الحدين أو توزيع بواسون

ملحوظة الدالة $E(t^X)$ تسمى الدالة المولدة للاحتمالات Probability Generating function للمتغير X.

١٠- أثبت أن:

$$E(X^j) = \left.\frac{d^j m(t)}{dt^j}\right|_{t=0}$$

١١- أثبت أن:

$$i)\, m_{ax}(t) = m_x(at) \qquad ii)\; m_{\frac{x+a}{b}}(t) = e^{at/b}\, m_x(t/b)$$

١٢- إذا كان X متغير يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $P = 0.3$ أوجد:

i) $P_r(2 \le X \le 5)$, ii) $F(2)$

iii) $E(X)$, iv) $m_x(t)$

v) $E(t^x)$

(٢٠-٤) بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Some Continuous probability distributions

المقصود هنا بالتوزيعات هو التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة ومن أهمها:

- التوزيع المنتظم (أو المستطيل) **Uniform or Rectangular Distribution**
- التوزيع المعتاد (الطبيعى) **Normal Distribution**
- التوزيع المعتاد القياسي **Standard Normal Distribution**
- التوزيع الأسى السالب **Negative Exponential Distribution** وللأختصار يقال التوزيع الأسى.
- توزيع جاما **Gamma Distribution**
- توزيع بيتا **Beta Distribution**
- توزيع مربع كا **Chi-square Distribution**
- توزيع مربع كا غير المركزى **Non-Central chi-square Distribution**

<u>أولا : التوزيع المنتظم</u> إذا كان X ، $a \le X \le b$، فإنه يقال أن المتغير المتصل X يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال $f(X)$ حيث:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \quad a\le X\le b \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases} \qquad (20.60)$$

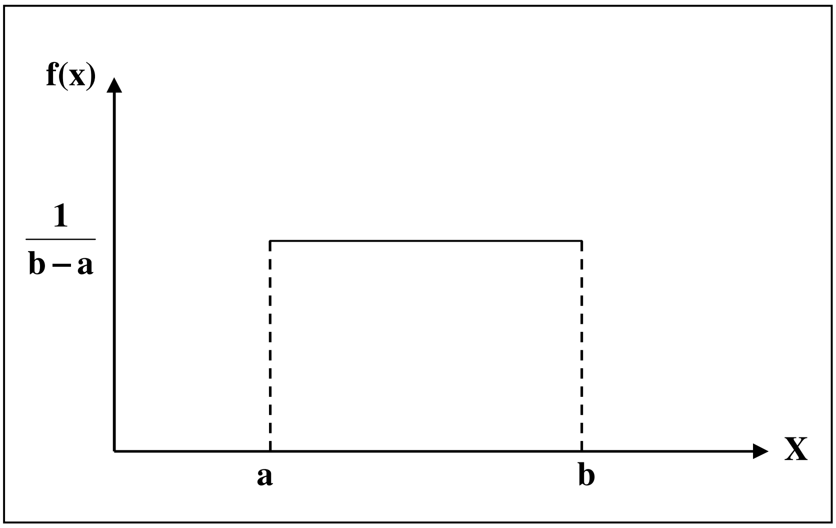
والشكل التالى يوضح الدالة $f(X)$.

<u>نظرية (٢٠-٨)</u> : إذا كان X متغير يتبع التوزيع المنتظم فإن :

$$\text{(i)}F(X)=\frac{X-a}{b-a} \quad , \quad \text{(iv)}\, m_x(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)\,t}$$

$$\text{(ii)}E(X)=\frac{a+b}{2} \quad , \quad \text{(iii)}Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

شكل (٢٠-٥): يوضح دالة كثافة الأحتمال للمتغير المنتظم



الإثبات:

$$\text{(i)}\ F(X)=\int_a^x f(X)\ dX=\int_a^x \left(\frac{1}{b-a}\right)\ dX$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[X\right]_a^x=\frac{X-a}{b-a} \tag{20.61}$$

$$\text{(ii)}\ E(X)=\int_a^b X\,f(X)\ dX=\int_a^b X\left(\frac{1}{b-a}\right)\ dX$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{X^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2} \tag{20.62}$$

$$\text{(iii)}\,Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X^2) = \int_a^b X^2 f(X)\ dX = \frac{1}{b-a}\left[\frac{X^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \longrightarrow$$

$$Var(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (20.63)$$

$$\text{(iv)}\, m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{(b-a)}\ dX$$

$$= \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)\,t} \qquad (20.64)$$

ثانيا : التوزيع المعتاد (الطبيعى)

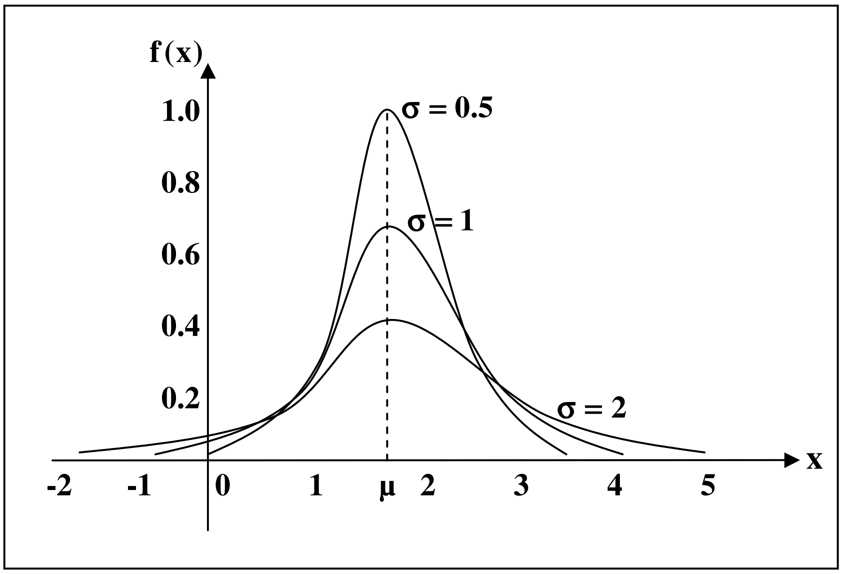
إذا كان X متغير متصل له دالة كثافة الاحتمال f(X) بحيث:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty \qquad (20.65)$$

فإنه يقال أن المتغير X متغير يتبع التوزيع المعتاد (او الطبيعى) بمعلمتين σ,μ. وعادةً يرمز لذلك بالرمز $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ وتقرأ "المتغير X يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين σ^2". والشكل التالى يوضح دالة كثافة الأحتمال f(X).

ومن الشكل يتضح أن منحنى الدالة f(X) للتوزيع الطبيعى متماثل حول المعلمة μ كذلك يوضح أنه كلما زادت قيمة المعلمة σ زاد تفرطح منحنى الدالة f(X).

شكل (٢٠-٦): يوضح شكل دالة كثافة الأحتمال لمتغير يتبع التوزيع المعتاد



<u>نظرية (٢٠-٩)</u>: إذا كان X متغير عشوائى له التوزيع المعتاد فإن:

$$\text{(i)}\ m_x(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \quad , \quad \text{(ii)}\ E(X) = \mu$$

$$\text{(iii)}\ Var(X) = \sigma^2$$

الإثبات:

$$\text{(i)}\ m_x(t) = E(e^{tx}) = e^{t\mu}\ E(e^{t(X-\mu)})$$

$$= e^{t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{t(X-\mu)}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}\ dX$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-1}{2\sigma^2})[(X-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(X-\mu)]}\ dX \qquad (20.66)$$

وبما أن

$$(X-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(X-\mu) = (X-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(X-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2$$
$$= (X-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2 \qquad (20.67)$$

وبالتعويض فى الطرف الأيمن للمعادلة (20.66) بالطرف الأيمن فى المعادلة (20.67) فنجد أن:

$$m_x(t) = e^{t\mu}\, e^{\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(X-\mu-\sigma^2 t)^2}\, dX$$

حيث أن قيمة التكامل أعلاه يساوى واحد لانه تكامل دالة كثافة احتمال لمتغير X بتوقع يساوى $(\mu+\sigma^2 t)$وتباين σ^2 وبالتالى فإن:

$$m_x(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \qquad (20.68)$$

$$\text{(ii)}E(X) = \left.\frac{d\, m_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = (\mu+\sigma^2 t)\, e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}\Big|_{t=0} = \mu$$

$$\text{(iii)}Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

وبما أن:

$$E(X^2) = \frac{d^2\, m(t)}{d\,t^2} = \left\{(\mu+\sigma^2 t)\,(\mu+\sigma^2 t)e^{\mu+\sigma^2 t^2/2} + e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}(\sigma^2)\right\}\Big|_{t=0}$$
$$= \mu^2 + \sigma^2 \longrightarrow$$
$$Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2 \qquad (20.69)$$

<u>ثالثا التوزيع المعتاد القياس</u>:إذا إعتبرنا المتغير Z يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 0$ وبتباين $\sigma = 1$ ودالة كثافة أحتماله $f(Z)$ على النحو التالى :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad , \quad -\infty < Z < \infty \qquad (20.70)$$

فإنــه يقـال أن المتغيـر Z يتبـع التوزيـع المعتـاد القياسـي وبـالتعويض فـى نظريـة (٢٠-٩) بـ $\sigma = 1\,,\ \mu = 0$ فإن:

$$m_z(t) = e^{t^2/2} \qquad (20.71)$$

$$E(X) = \mu = 0 \qquad (20.72)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = 1 \qquad (20.73)$$

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد جداول أحصائية بملحق (٢) تعطى المساحة أسفل منحنى المعتاد القياسي.

__رابعاً: التوزيـع الأسـى السـالب__: يقـال أن المتغيـر المتصـل X يتبـع التوزيـع الأسـى (أو الأسى السالب) بدالة كثافة احتمال $f(X)$ عندما:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad , \quad \lambda > 0 \ , \ X \geq 0 \qquad (20.74)$$

والشكل التالى (٢٠-٧) يوضح شكل الدالة $f(X)$.

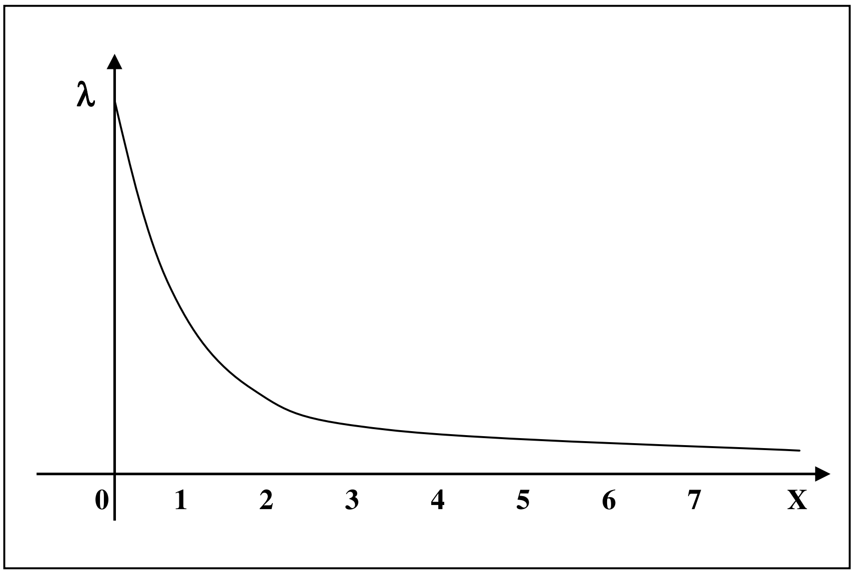
__تعريف (٢٠-١٥)__: يقال أن المتغير X يتبع التوزيع الأسى السالب بمعلمتين λ, α ودالة كثافة أحتمال $f(X)$ بحيث:

$$f(X) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(X-\alpha)} & , \ X \geq \alpha \ , \ \alpha \geq 0 \\ 0 & , \ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

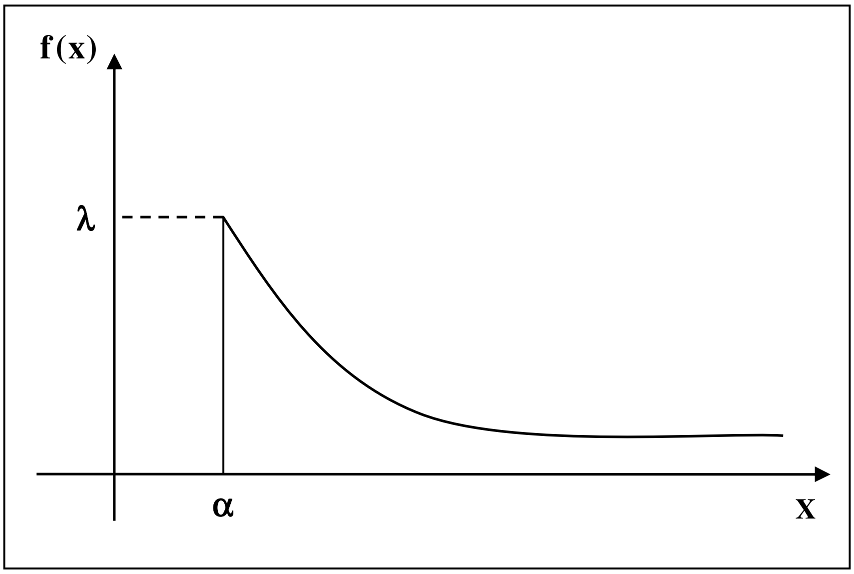
والشكل التالي (٢٠-٨) يوضح التوزيع أعلاه

ملحوظة: يعتبر المتغير الأسي حالة خاصة من الأسي بمعلمتين عندما $\alpha = 0$.

شكل (٢٠-٧): يوضح دالة كثافة أحتمال دالة المتغير الأسي السالب



شكل (٢٠-٨): يوضح التوزيع الأحتمالي للتوزيع الأسي بمعلمتين



نظرية (٢٠-١٠) إذا كان X متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين λ,α فإن:

$$(i)\, m_x(t)=\lambda(\lambda-t)^{-1}e^{\alpha t} \quad , \quad (ii)\, E(X)=\frac{1}{\lambda}+\alpha$$

$$(iii)\, Var(X)=(1/\lambda)^2 \quad , \quad (iv)\, F(X)=1-e^{-\lambda(x-\alpha)}$$

الإثبات:

$$(i)\, m_x(t)=E(e^{xt})=\int_{\alpha}^{\infty} e^{tx}\lambda\, e^{-\lambda(x-\alpha)}\, dX$$

$$=\int_{\alpha}^{\infty}\lambda\, e^{tx-\lambda x+\alpha\lambda}\, dX=e^{\alpha\lambda}\lambda\int_{\alpha}^{\infty}e^{x(t-\lambda)}\, dX$$

$$=\frac{\lambda}{(t-\lambda)}e^{\alpha\lambda}\int_{\alpha}^{\infty}(t-\lambda)\, e^{x(t-\lambda)}\, dX=\frac{\lambda\, e^{\alpha\lambda}}{(t-\lambda)}\left[e^{-x(t+\lambda)}\right]_{\alpha}^{\infty}$$

$$=\frac{\lambda}{(t-\lambda)}e^{\alpha\lambda}\left[0-e^{-\alpha(t+\lambda)}\right]=\frac{\lambda}{(\lambda-t)}e^{\alpha\lambda}\,(-e^{-\alpha(t+\lambda)})$$

$$=\frac{\lambda}{(\lambda-t)}e^{(\alpha/\lambda)-(x/\lambda)+\alpha t}=\frac{\lambda\, e^{\alpha t}}{(\lambda-t)}=\lambda(\lambda-t)^{-1}e^{\alpha t} \qquad (20.75)$$

$$(ii)\, E(X)=\left.\frac{\partial\, m_x(t)}{\partial\, t}\right|_{t=0}=\lambda\left\{(\lambda-t)^{-2}e^{\alpha t}+(\lambda-t)^{-1}(\alpha e^{\alpha t})\right\}\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\alpha \qquad (20.76)$$

$$(iii)\, E(X^2)=\left.\frac{\partial^2\, m_x(t)}{\partial\, t^2}\right|_{t=0}$$

$$=\lambda\left\{(\lambda)^{-2}(\alpha)+2(\lambda-t)^{-3}+\alpha^2(\lambda-t)+\alpha(\lambda-t)^{-2}\right\}\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{2\alpha}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}+\alpha^2 \longrightarrow$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2\alpha}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \alpha^2 - (1/\lambda + \alpha)^2 = (1/\lambda)^2 \qquad (20.77)$$

$$(iv)\ F(X) = \int_{\alpha}^{x} \lambda\, e^{-\lambda(X-\alpha)}\ dx = -\left[e^{-\lambda(X-\alpha)}\right]_{\alpha}^{x} = -\left[e^{-\lambda(X-\alpha)} - 1\right]$$
$$= 1 - e^{-\lambda(X-\alpha)} \qquad (20.78)$$

حالة خاصة: وعندما $\alpha = 0$ فإن:

$$(i) f(X) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad , \quad (ii)\ F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$(iii)\ E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad (iii) Var(X) = (1/\lambda)^2$$
$$(iv)\ m_x(t) = \lambda(\lambda - t)$$

<u>خامساً: توزيع جاما</u>: يقال أن المتغير العشوائى X يتبع توزيع جاما بدرجة حريه (r) وبدالة كثافة احتمال $f(X)$ إذا كان:

$$f(X) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda\, X)^{r-1}\ e^{-\lambda x} \quad , \ X \geq 0 \qquad (20.79)$$

حيث تشير $\Gamma(r)$ إلى دالة جاما ، ويمكن تعريف دالة جاما على النحو التالى:

$$\Gamma(r) = (r-1)! \qquad (20.80)$$

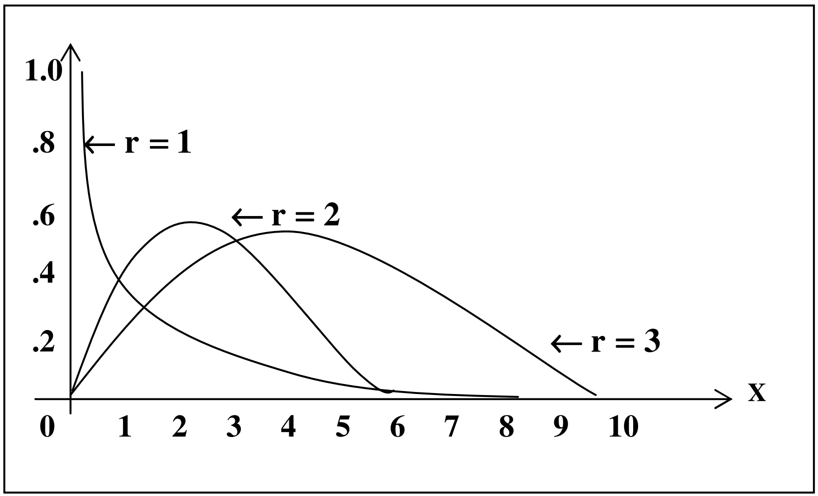
وعندما $r = 1$ نجد أن دالة كثافة الاحتمال $f(X)$ على النحو:

$$f(X) = \frac{\lambda}{\Gamma(1)} (\lambda X)^0\ e^{-\lambda X} = \lambda\, e^{-\lambda X}$$

والدالة $f(X)$ أعلاه هى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسى بمعلمة λ وبالتالى يصبح التوزيع الأسى بمعلمة واحدة حالة خاصة من توزيع جاما بدرجات حريه (١).

والشكل التالى يوضح شكل الدالة $f(X)$ عند بعض القيم لدرجات الحريه (r)

شكل (٢٠-٩): يوضح دالة كثافة أحتمال متغير جاما بدرجات حرية مختلفة



<u>نظرية (٢٠-١١)</u>: إذا كان X متغير يتبع جاما بدرجات حريه (r) فإن :

$$\text{(i)}\ m_x(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r \quad , \quad t < \lambda$$

$$\text{(ii)}\ E(X) = \frac{r}{\lambda} \qquad , \qquad \text{(iii)}\ Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

الإثبات:

$$\text{(i)}\ m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tX} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda X)^{r-1} e^{-\lambda X}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r \int_0^\infty \frac{(\lambda - t)}{\Gamma(r)} [(\lambda - t)X]^{r-1} e^{-(\lambda - t)X}\ dX$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r (1) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r = \lambda^r (\lambda - t)^{-r} \qquad (20.81)$$

حيث تمثل الدالة $\left\{\frac{(\lambda-t)}{\Gamma(r)}[(\lambda-t)X]^{r-1}e^{-(\lambda-t)}\right\}$ دالة كثافة احتمال لتوزيع جاما بدرجات حريه (r) ومعلمه $(\lambda-t)$.

$$\text{(ii) } E(X)=\frac{d\,m(t)}{d\,t}=\left[(\lambda)^r(-r)(\lambda-t)^{-(r+1)}(-1)\right]\Big|_{t=0}=\frac{r}{\lambda} \qquad (20.82)$$

$$\text{(iii)} Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$$

وبما أن:

$$E(X^2)=\frac{d^2m(t)}{dt^2}=\left\{-r\lambda^r(r+1)(\lambda-t)^{-(r+2)}(-1)\right\}\Big|_{t=0}$$

$$=r(r+1)\lambda^{-2} \longrightarrow$$

$$Var(X)=r(r+1)\lambda^{-2}-r^2\lambda^{-2}=\frac{r}{\lambda^2} \qquad (20.83)$$

نظرية (٢٠-١٢): إذا كان X متغير يتبع توزيع جاما لمعلمات λ, r حيث r عدد صحيح موجب فإن دالة التوزيع التراكمية $F(X)$ على النحو التالى:

$$F(X)=P_r(X\le X)=1-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{e^{-\lambda X}(\lambda X)^j}{j!}$$

الاثبات : أنظر مرجع [101, pag114]

سابعاً: توزيع بيتا: إذا كان X متغير متصل بدالة كثافة احتمال $f(X)$ فإنه يقال أن المتغير X يتبع توزيع بيتا إذا كان:

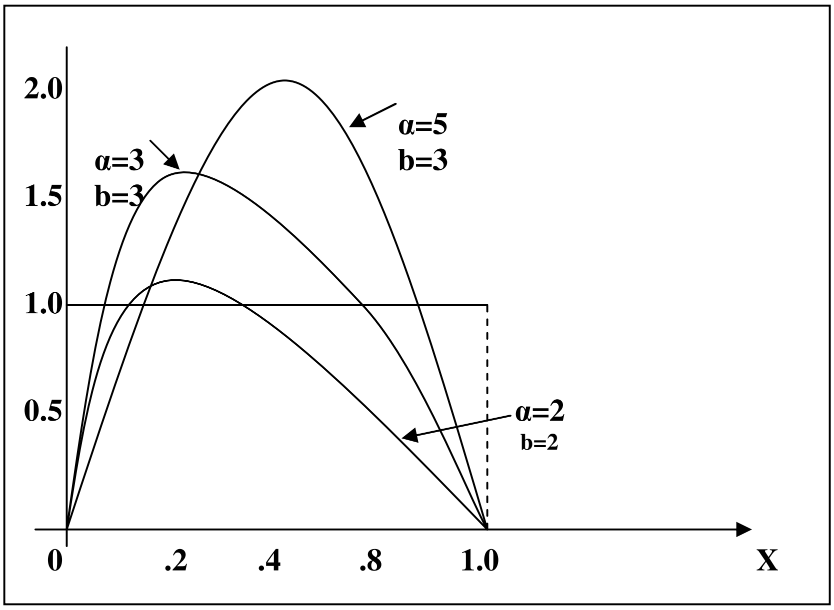
$$f(X)=\frac{1}{B(a,b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1} \quad , \quad 0\le X\le 1 \qquad (20.84)$$

حيث تعرف الدالة $B(a,b)$ على النحو التالى:

$$B(a,b)=\int_0^1 X^{a-1}(1-X)^{b-1}\,dX \quad , \quad a>0\ ,\ b>0 \qquad (20.85)$$

<u>ملحوظة</u>: عندما $a=b=1$ فى (20.84) فإن الدالة $f(X)$ تساوى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم المتصل فى (20.60). والشكل التالى يوضح الدالة $f(X)$ عند بعض قيم المعلمات a,b

شكل (٢٠-١٠): يوضح منحنى دالة كثافة أحتمال المتغير بيتا



<u>نظرية (٢٠-١٣)</u>: إذا كان X متغير عشوائى يتبع توزيع بيتا فإن:

$$\text{(i) } E(X)=\frac{a}{a+b} \qquad , \quad \text{(ii) } Var(X)=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

الإثبات: بما أن:

$$E(X^k) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 X^{k+a-1}(1-X)^{b-1}\,dX$$

$$= \frac{B(k+a,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(k+a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\;\Gamma(b)}$$

$$= \frac{\Gamma(k+a)\;\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\;\Gamma(k+a+b)} \qquad (20.86)$$

وبالتالى بالتعويض عند $k = 1,2$ نجد أن:

$$E(X) = \frac{\Gamma(1+a)\;\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\;\Gamma(1+a+b)} = \frac{a}{a+b} \qquad (20.87)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^z$$

$$= \frac{\Gamma(a+2)\;\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\;\Gamma(2+a+b)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

$$= \frac{a(a+1)}{(a+b+1)\,(a+b)} - \frac{az}{(a+b)}$$

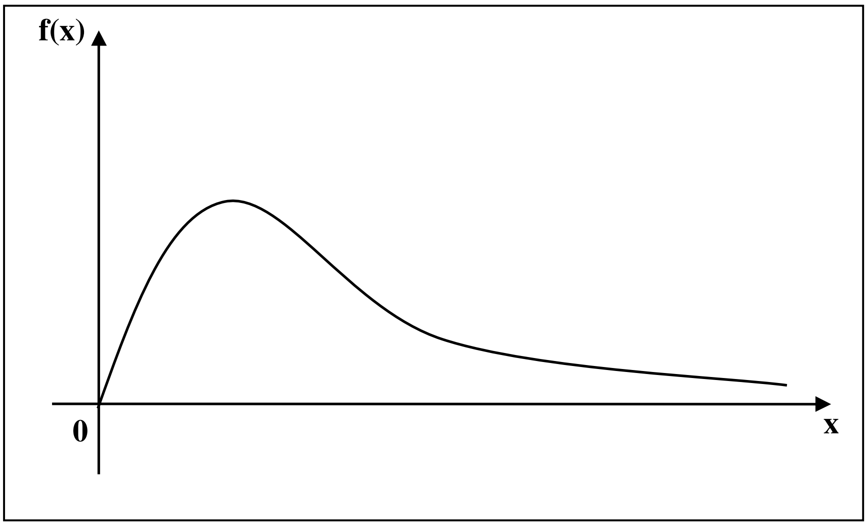
$$= \frac{ab}{(a+b+1)\,(a+b)^2} \qquad (20.88)$$

<u>ثامناً: توزيع مربع كا</u>: يقال أن المتغير العشوائي المتصل X متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(k)}$ Chi-Square distribution وتقرأ مربع كا بدرجات حرية degree of freedom k بدالة كثافة احتمال $f(X)$ بحيث:

$$f(X) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} X^{k/2-1}\, e^{-1/2X} \quad , \quad 0 \le X < \infty$$

حيث k عدد صحيح موجب، والشكل التالي يوضح منحنى الدالة $f(X)$

شكل (٢٠-١١): يوضح دالة كثافة الأحتمال لمتغير χ^2



<u>نظرية (٢٠-١٤)</u>: إذا كان المتغير X يتبع توزيع $\chi^2_{(k)}$ فإن:

$$(i) m_x(t) = [\frac{1}{1-2t}]^{k/2} \quad , \quad t < \frac{1}{2}$$

$$(ii) E(X) = k \quad , \quad (iii)\ var(X) = 2k$$

الإثبات:

$$(i) \because m_x(t) = E(e^{xt}) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k/2)} (\frac{1}{2})^{k/2} X^{k/2-1}\, e^{-1/2X}\, dX$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k/2)} (\frac{1}{2})^{k/2} X^{k/2-1}\, e^{-1/2[X(1-2t)]}\, dX$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{k/2}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(k/2)} (\frac{1}{2})^{k/2} \{X(1-2t)\}^{k/2-1}\, e^{-1/2[X(1-2t)]}\, dX$$

$$= [\frac{1}{1-2t}]^{k/2} \quad , \quad t < \frac{1}{2} \qquad (20.89)$$

حيث أن قيمة المقدار $\{\int_0^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k/2)}(\frac{1}{2})^{k/2}\{X(1-2t)\}^{k/2-1}\, e^{-1/2[X(1-2t)]}\, dX\}$

يساوى (1) لأنـه يمثل تكامل $\int_0^{\infty}$ دالة كثافة أحتمال للمتغير $\{X(1-2t)\}$.

$$(ii)E(X)=\left.\frac{\partial\, m_x(t)}{\partial\, t}\right|_{t=0}=-\frac{k}{2}(1-2t)^{-k/2-1}(-2)\Big|_{t=0}=k \qquad (20.90)$$

$$(iii)Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

وبما أن:

$$E(X^2)=\left.\frac{\partial^2\, m_x(t)}{\partial\, t^2}\right|_{t=0}=2k(k/2+1)\longrightarrow$$

$$Var(X)=k^2+2k-k^2=2k \qquad (20.91)$$

ومما هو جدير بالذكر أنـه توجد جداول أحصائية فيها حساب الأحتمـالات المختلفة للفترة $a<X<b$ حيث X متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(k)}$ ، كذلك جداول إحصائية لحساب قيم الدالـة التراكمية للمتغير $\chi^2_{(k)}$ عند قيم معينة لـ X. وفي ملحق رقم (٣) جزء من هذه الجداول.

<u>نظرية (٢٠-١٥)</u>: إذا كان $X_1,X_2,\ldots\ldots,X_k$ عدد k من المتغيرات العشوائية المستقلة كـل منهـا يتبـع التوزيـع المعتـاد القياسـي بتوقـع μ_i وتبـاين σ_i^2 ، $i=1,2,\ldots,k$ فـإن المتغير U بحيث:

$$U=\sum_{i=1}^{k}(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i})^2 \qquad (20.92)$$

فأن U متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(k)}$ بدرجات حرية k. أو بعبارة أخرى إذا كان:

$Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_k$ عدد k من المتغيرات المعتادة القياسية فإن المتغير U بحيث:

$$U=\sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(k)}$ بدرجات حرية **k**.

الإثبات: **[113, Page 242]**.

تاسعاً: توزيع χ^2 غير المركزى: إذا كان X متغير متصل بدالة كثافة f(X) فإنه يقال أن المتغير X يتبع توزيع كا٢ $\chi^2_{(V,\lambda)}$ غير المركزي بدرجات حرية V ومعلمة غير مركزية **Non-Central chi-Squared distribution with V degrees of freedom and noncentrality parameter** λ حيث [90,91]:

$$f(X)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(X+\lambda)}}{2^{\frac{1}{2}V}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^{\frac{1}{2}V+i-1}\,\lambda^{i}}{2^{2i}\,(i!)\,\Gamma((1/2)V+i)}\quad ,\ \lambda , X\ge 0\quad ,\ V>0 \qquad (20.93)$$

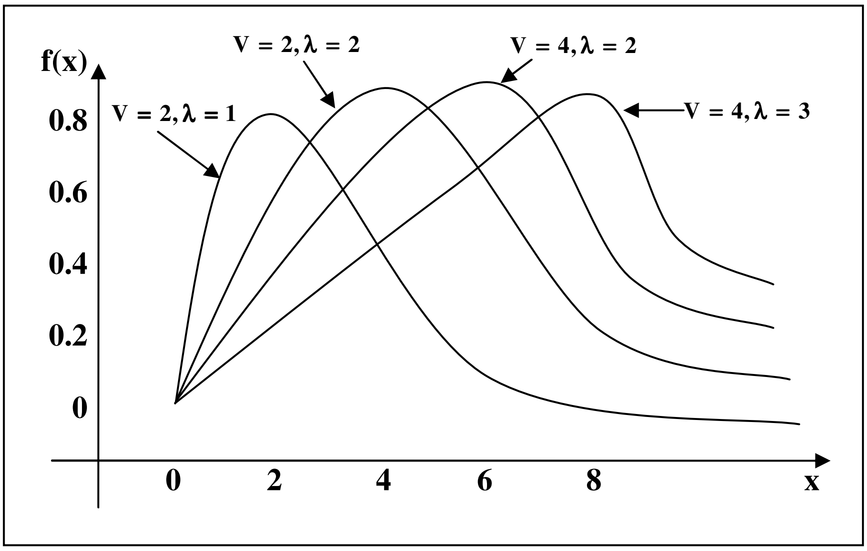
وعندما $\lambda=0$ فإن:

$$f(X)=\frac{1}{\Gamma_{(V/2)}}\frac{e^{-\frac{1}{2}X}}{2^{\frac{1}{2}V}}\,X^{(V/2)-1}\quad ,\qquad X>0 \qquad (20.94)$$

ونلاحظ من (20.93),(20.94) أن دالة كثافة الأحتمال لتوزيع $\chi^2_{(V)}$ المركزي هى حالة خاصة من دالة كثافة الاحتمال لتوزيع $\chi^2_{(V,\lambda)}$ غير المركزى أو بعبارة أخرى فإن توزيع $\chi^2_{(V,\lambda)}$ غير المركزى هى تعميم لتوزيع $\chi^2_{(V)}$ (المركزى) [86,48,100,118,119]. والشكل التالي يوضح منحنى $f(X)$ عند قيم مختلفة لكل من V,λ.

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد جداول أحتمالية لتوزيع $\chi^2_{(V,\lambda)}$ كذلك الدالة التراكمية عند قيم محددة لكل من V,λ قدمها كل من **David and Kendall** سنة ١٩٤٩ [118,119].

شكل (٢٠-١٢): يوضح دالة كثافة الأحتمال لتوزيع كا٢ غير المركزى



نظرية (٢٠-١٦): إذا كان X متغير عشوائي يتبع $\chi^2_{(V,\lambda)}$ فإن:

$$\text{(i)}\ E(X) = V + \lambda \qquad , \qquad \text{(ii)}\ Var(X) = 2\,(V + 2\,\lambda)$$

$$\text{(iii)}\ m_X(t) = (1-2\,t)^{-V/2} \exp.(\frac{\lambda\, t}{1-2\,t})$$

الإثبات: أنظر مرجع [86, page 224].

نظرية (٢٠-١٧): إذا فرضنا أن $X_1, X_2, ..., X_n$ عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ_i وتباين σ_i^2 ، $i = 1,2,.....,n$ فإن المتغير $\tilde{S}$ حيث:

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i}{\sigma_i})^2 \qquad (20.95)$$

فأن $\tilde{S}$ متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(n,\lambda)}$ حيث:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\mu_i}{\sigma_i})^2 \qquad (20.96)$$

الإثبات: أنظر مرجع [118].

كذلك إذا أشرنا إلى الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ بالرمز $\Phi(t)$ فإن:

$$\Phi(t) = \frac{e^{(\frac{it\lambda}{1-2it})}}{(1-2it)^{n/2}} \quad , \quad 2it < 1 \quad , \quad i = \sqrt{-1} \qquad (20.97)$$

<u>ملحوظة</u> : عندما $\lambda = 0$ فإن:

$$m_X(t) = (1-2t)^{-n/2} \longrightarrow$$

$$E(X) = n \quad , \quad Var(X) = 2n$$

$$\Phi(t) = (1-2it)^{-n/2}$$

<u>نظرية (٢٠-١٨)</u>: إذا فرضنا أن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد القياسي، كذلك $a_1, a_2, ..., a_n$ مقادير ثابتة، فإن المتغير χ^2 حيث:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j + a_j)^2 \qquad (20.98)$$

يسمى متغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزي بدرجات حرية تساوى n ، ومعلمة غير مركزي λ حيث:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \qquad (20.99)$$

ويعتبر Fisher سنة (١٩٢٨) أول من قدم دالة كثافة الأحتمال لتوزيع $\chi^2_{(n,\lambda)}$ في الدالة (20.93). حيث يعتبر توزيع $\chi^2_{(n,\lambda)}$ غير المركزى من التوزيعات الموجبة الهامة في كثير من التطبيقات ولكن نلاحظ أن دالة كثافة الأحتمال $f(\chi^2)$ دالة معقدة من الصعب لغير المتخصصين أستخدامها. لذلك في سنة (١٩٦٩) قدم كل من Johnson and Pears جداول أحصائية تعطي قيم المتغير χ^2 عند احتمالات معينة عند قيم محددة لدرجات الحرية n والمعلمة غير المركزية λ بملحق رقم (٩) جزء من هذه الجداول [86].

وترجع أهمية $\chi^2_{(V,\lambda)}$ إلى أستخدامه في تحويل بعض النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية في الباب الثاني والعشرون كما سوف نوضح ذلك في الفصلين (٢٢-٤)-(٢٢-٥).

<u>مثال (٢٠-١)</u>: بأستخدام الجداول الأحتمالية لتوزيع كا[٢] $\chi^2_{(n,\lambda)}$ غير المركزي بملحق (٤) حدد القيمة C في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1)\ \int_0^C f(\chi^2_{(n=3,\lambda=4)})\ d\chi^2 = 0.05 \longrightarrow C = 1.088$$

$$(2)\ \int_0^C f(\chi^2_{(n=20,\lambda=16)})\ d\chi^2 = 0.05 \longrightarrow C = 4.566$$

$$(3)\ \int_C^\infty f(\chi^2_{(n=1,\lambda=0.64)})\ d\chi^2 = 0.05 \longrightarrow C = 2.450$$

$$(4)\ \int_C^\infty f(\chi^2_{(n=3,\lambda=9)})\ d\chi^2 = 0.01 \longrightarrow C = 5.093$$

تمرين (٢)

١-إذا إفترضنا أن X متغير يتبع التوزيع الطبيعى بتوقع $\mu = 2$ وتباين $\sigma^2 = 1$ أوجد الاحتمالات التالية:

$$(i) P_r[X - 2 < 1] \quad , \quad (ii)\ P_r[|X - 2| < 1]$$

٢-إذا فرضنا أن X متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمه λ بحيث:

$$P_r[X \le 1] = P_r[X > 1]$$

أوجد $Var(X)$.

٣-إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع معتاد بتوقع $\mu > 0$ وتباين $\sigma^2 = \mu^2$.

أوجد $P_r[X < -\mu \mid X < \mu]$ بدلالة الدالة التراكمية للتوزيع المعتاد القياسى.

٤-بافتراض أن X متغير متصل يتبع التوزيع المعتاد وبتوقع $\mu = 2$ وتباين $\sigma^2 = 2$ أوجد $P_r[|X - 1| \le 2]$ بدلالة الدالة التراكمية للتوزيع المعتاد القياسى.

٥-إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع بيتا أوجد الوسيط والمنوال للمتغير X .

٦-إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع جاما أوجد الوسيط والمنوال للمتغير X .

٧-إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير X على النحو التالى:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^2} x \exp\left\{-\frac{1}{2}(x/\beta)^2\right\} \quad , \quad \beta > 0 \ , \ x > 0$$

أثبت أن كل من التوقع والتباين للمتغير X موجود exist.

٨-إذا فرضنا X متغير متصل أوجد الدالة $E(t^X)$ فى الحالات التالية:

أ- إذا كان X متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمة λ .

ب- التوزيع المعتاد بمعلمتين μ,σ^2.

ج- التوزيع بيتا بمعلمتين a,b.

د- توزيع جاما بمعلمة r.

ملحوظة: الداله $E(t^X)$ تسمى الدالة المولدة للاحتمالات **Probability Generating function**.

٩- إذا كان المتغير $\chi^2_{(n,\lambda)}$ متغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزي بدرجات حرية n، ومعلمة غير مركزية λ. أثبت أن المتغير χ^2_n حالة خاصة من $\chi^2_{(n,\lambda)}$.

١٠- إذا كان المتغير X يتبع $\chi^2_{(n,\lambda)}$ متغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزي بدرجات حرية n، ومعلمة غير مركزية λ. أوجد توقع وتباين المتغير X.

(٢٠-٥) بعض التوزيعات التقريبية

Some Approximate distributions

فى بعض الحالات يمكن تقريب دالة الأحتمال (أو دالة كثافة الأحتمال) لتوزيع ما إلى دالة أحتمال (أو دالة كثافة أحتمال) لتوزيع آخر تحت شروط معينة.

وفى هذا الفصل سوف نتناول: • تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع بواسون عندما تكون عدد المحاولات n عدد كبير أو بعبارة أخرى عندما $n \to \infty$.

- تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع المعتاد عندما $n \to \infty$ أيضاً.
- تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع المعتاد.

والتوزيعات التقريبية تعتبر ذات أهمية في أستخدام أسلوب (CCP) وبصفة خاصة عندما تكون بعض المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية فإن ذلك يؤدي إلى الحصول على توزيعات أحتمالية معقدة غير بسيطة في التطبيق ولكن في حالة توافر شروط التقارب فإنه يمكن تقريب هذه التوزيعات إلى توزيعات أخرى أبسط في التطبيق، وسوف نتناول ذلك بالتفصيل في البابين الثاني والعشرون، والثالث والعشرون.

<u>أولا: تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع بواسون</u>: إذا إعتبرنا توزيع ذات الحدين فى (20.37) فى حالة كبر عدد المحاولات n بمعنى أنه يمكن افتراض أن $n \to \infty$ كذلك $\lambda = nP$ فى هذه الحالة يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع بواسون على النحو التالى:

$$\lim_{n\to\infty} C_x^n P^x (1-P)^{n-x} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\lambda^x}{x!}\,\frac{n!}{n^x\,x!\,(n-x)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right\}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\{[\frac{n(n-1)...(n-(x-1)(n-x)!}{\underbrace{n(n)(n)...(n)}_{x}\ (n-x)!}](1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}\}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\{\lim_{n\to\infty}[\frac{n(n-1)...(n-(x-1)}{\underbrace{n(n)(n)...(n)}_{x}}]\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}\}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}(1)\lim_{n\to\infty}(1-(\lambda/n))^n(1)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (20.100)$$

حيث $\lim_{n\to\infty}(1-(\lambda/n))^{-x}=1$ والدالة فى (20.100) هى دالة الأحتمال لتوزيع بواسون فى (20-33).

ثانياً: تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع المعتاد: إذا اعتبرنا توزيع ذات الحدين فى التعريف (20-37) فى حالة كبير عدد المحاولات n أو بعبارة أخرى عندما $n\to\infty$. فإن توزيع ذات الحدين يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع (nP) وتباين $np(1-p)$.

نظرية (٢٠-١٩): إذا كان X متغير عشوائى يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين (n,P) فإن التوزيع الأحتمالى للمتغير Z ، حيث:

$$Z=\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}=\frac{X-nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \qquad (20.101)$$

يؤول إلى التوزيع المعتاد القياسى ومن ثم فإن توزيع X يؤول إلى التوزيع المعتاد.

الاثبات: من نظرية (٢٠-٥) نجد أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X حيث X يتبع توزيع ذات الحدين على النحو [99]:

$$m_x(t)=[(1-P)+Pe^t]^n=[1+P(e^t-1)]^n \qquad (1)$$

ومن نظرية (٢٠-١) بند (iii) نجد أن:

$$m_z(t) = m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = m_{x-\mu}(t/\sigma) = e^{-\mu t/\sigma} m_x(t/\sigma)$$

$$= e^{-\mu t/\sigma}[1 + P(e^{t/\sigma} - 1)]^n \qquad (2)$$

وبأخذ اللوغاريتمات الطبيعية (للأساس e) لطرفى المعادلة (2) نجد أن

$$\ln m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{-\mu t}{\sigma} + n\ln[1 + P(e^{t/\sigma} - 1)] = \frac{-\mu t}{\sigma} +$$

$$n\ln\left\{1 + P[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]\right\} \qquad (3)$$

وباستخدام مفكوك مكلورين للمقدار $\ln(1+K)$ عندما $|K| < 1$ على النحو التالى :[130]

$$\ln(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4} + ... \qquad (4)$$

فإن:

$$\ln\left\{1 + P[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]\right\} = P[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...] -$$

$$P[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]^2 \div 2 +$$

$$P[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]^3 \div 3 - .... \qquad (5)$$

وبالتعويض بالطرف الايمن لـ(5) فى الطرف الايمن للمعادلة (3) فإن:

$$\ln m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{-\mu t}{\sigma} + nP[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]$$

$$-\frac{nP^2}{2}[\frac{t}{\sigma} + \frac{(t/\sigma)^2}{2!} + \frac{(t/\sigma)^3}{3!} + ...]^2 + ... \qquad (6)$$

وبتجميع الحدود التى تتساوى فيها قوى t فى الطرف الايمن للمعادلة (5) نجد أن:

$$\ln m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = (-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{np}{\sigma})\,t + (\frac{np}{2\sigma^2} - \frac{np^2}{2\sigma^2})\,t^2 + (\frac{np}{6\sigma^3} - \frac{np^2}{2\sigma^3} + \frac{np^3}{3\sigma^3})\,t^3 + \dots\dots \qquad (7)$$

وحيث أن $\mu = np$ وبالتالى فإن $\frac{-\mu}{\sigma} + \frac{np}{\sigma} = 0$

$$\ln m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{np - np^2}{2})\,t^2 + \frac{n}{\sigma^3}(\frac{p - 3p^2 + 2p^3}{\sigma})\,t^3 + \dots \qquad (8)$$

وحيث أن $\sigma^2 = np(1-p) = np - np^2$ بالتعويض بقيمة σ^2 فى (8) نجد أن:

$$\ln m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{n}{\sigma^3}(\frac{p - 3p^2 + 2p^3}{\sigma})\,t^3 + \dots\dots \qquad (9)$$

وبما أن

$$\frac{n}{\sigma^3} = \frac{n}{np\,(1-p)\sqrt{np\,(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{n}\;P(1-p)\sqrt{p(1-p)}}$$

بالتالى فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sigma^3}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\;P(1-p)\sqrt{p(1-p)}} = 0 \qquad (10)$$

بالتعويض بالطرف الأيمن فى المعادلة (10) فى الطرف الايمن للمعادلة (9) نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\; m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{t^2}{2}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{t^2/2} \qquad (11)$$

والدالة $e^{t^2/2}$ هى الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المعتاد القياسى ووفقا لنظرية (٢٠- ٩)، بالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} m_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-(\mu)t/\sigma} \lim_{n\to\infty} m_x(t/\sigma) \qquad (12)$$

وبمساواة الطرف الأيمن فى المعادلتين(12) ,(11) نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} m_x(t/\sigma) = e^{\frac{t^2}{2}+\mu t/\sigma}$$

وبإفتراض أن $t^{\backslash} = \frac{t}{\sigma}$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} m_x(t^{\backslash}) = e^{\frac{\sigma^2 t^{\backslash 2}}{2}+\mu t^{\backslash}} \qquad (20.102)$$

والطرف الأيمن للمعادلة (20.102) هى الدالة المولدة للعزوم لمتغير يتبع التوزيع المعتاد (أنظر نظرية (٢٠-٩)) وعند إستخدام التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع ذات الحدين عندما $n \to \infty$ فيلاحظ أن كل عدد صحيح وغير سالب لـ X من النواتج الممكنة لقيم X يمثل بالفترة (X-0.5) إلى (X+0.5).

<u>مثال (٢٠-٢)</u>: إذا إعتبرنا فصل دراسى مكون من 65 طالب وبإفتراض أن المتغير X يشير إلى عدد الطلاب الناجحين فى نهاية أحد السنوات الدراسية وأحتمال نجاح الطالب P حيث P=0.7 . أوجد ما يلى:

١. أوجد توقع وتباين المتغير (X).

٢. أوجد أحتمال أن X=50.

٣. أستخدم التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع ذات الحدين وأحسب أحتمال أن X=50.

٤. قارن القيمة الفعلية بالقيمة التقريبية لأحتمال X=50.

الحـل: ١- المتغيـر X متغيـر يتبـع توزيـع ذات الحـدين بحيـث $n = 65 \;,\; P = 0.5$ بالتالى فإن:

$$E(X) = np = 65(0.7) = 45.5$$

$$Var(X) = np(1-p) = 65(0.7)(0.3) = 13.65 \longrightarrow \sigma(X) = 3.69$$

-٢

$$P_r(X = 50) = C_{50}^{65}(0.7)^{50}(0.3)^{15} = 0.0535 \qquad (1)$$

٣- وبأستخدام تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع المعتاد فإن:

$$\begin{aligned} P_r(X = 50) &= P_r\left((50-0.5) \le X \le (50+0.5)\right) \\ &= P_r(49.5 \le X \le 50.5) \\ &= P_r(+1.084 \le Z \le 1.356) \\ &= 0.4131 - 0.3599 = 0.0532 \qquad (2) \end{aligned}$$

<u>ملحوظـة</u>: Z متغير معتـاد قياسـي وتـم حسـاب الأحتمـال فـي (2) بأستخدام جدول التوزيـع المعتاد القياسي بملحق (٢).

٤- من (2),(1) نجد أن القيمة التقريبية (.0532) تقترب من القيمة الفعليـة (.0535) وأن الفرق بينهما (ε)على النحو التالى:

$$\varepsilon = .0532 - 0.0535 = -.0003$$

ثالثا : تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع المعتاد

إذا فرضنا X متغير يتبع توزيع بواسون فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير X على النحو التالى (أنظر نظرية (٢٠-٥)).

$$m_x(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \qquad (1)$$

وبما أن

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} \qquad (2)$$

بالتعويض فى الطرف الايمن لـ (1) بالطرف الأيمن فى (2) نجد أن :

$$m_x(t) = e^{\lambda\{t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+.....\}} = e^{\lambda t+\lambda\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\lambda\{\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+...\}} \qquad (3)$$

وبما أن المقدار $\{\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+....\}$ يؤول إلى الصفر عندما $t \to 0$ ، $n > 2$ وبالتالى فإن

$$m_x(t) \approx e^{\lambda t+\lambda t^2/2} \qquad (20.103)$$

وبما أن الدالة المولدة للعزوم فى (20.103) هى دالة مولدة للعزوم لمتغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = \lambda$ وتباين $\sigma^2 = \lambda$.

وعند أستخدام التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع بواسون فيلاحظ أن كل عدد صحيح وغير سالب لـ X يمثل بالفترة (X-0.5) إلى (X+0.5) أيضاً كما في تقريب ذات الحدين إلى المعتاد.

مثال (٢٠-٣): إذا إعتبرنا أن X متغير يمثل عدد حوادث السيارات فى طريق مصر أسكندرية الصحراوى خلال الشهر بحيث $\lambda = 5$

١. أوجد أحتمال أن $X = 10$.

٢. أوجد الأحتمال التقريبي عندما $X = 10$.

الحل :١-

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^X}{X!}$$

$$P_r(X = 10) = \frac{e^{-5}(5)^{10}}{10!} = 0.01813 \approx 0.02 \qquad (1)$$

٢- وعند تقريب X إلى متغير يتبع تقريبا التوزيع المعتاد بتوقع وتباين $\lambda = 5$ فإن:

$$P_r(X = 10) = P_r(9.5 \le X \le 10.5)$$

وبتحويل X إلى المعتاد القياسى فإن :

$$\begin{aligned} P_r(9.5 \le X \le 10.5) &= P_r\left(\frac{9.5-5}{\sqrt{5}} \le Z \le \frac{10.5-5}{\sqrt{5}}\right) \\ &= P_r(2.01 \le Z \le 2.46) = 0.4131 - 0.4772 \\ &= 0.0153 \approx 0.02 \qquad (2) \end{aligned}$$

من (1)،(2) نجد أن الأحتمال بأستخدام توزيع بواسون يساوى تقريبا الأحتمال بأستخدام تقريب التوزيع المعتاد.

تمرين (٣)

١. أعتبر X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n, p = \frac{1}{2}$. أوجد التوزيع الأحتمالى التقريبى لـ X عندما $n \to \infty$.

٢. أعتبر (1) أوجد الأحتمالات التالية:

$$P_r(X=5) \quad , \quad P_r(X \le 7) \quad , \quad P_r(X \ge 10)$$

٣. إذا كان X متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 2$ قرب التوزيع الأحتمالى للمتغير X للتوزيع المعتاد ثم أوجد الأحتمالات التالية :

$$P_r(X=3) \quad , \quad P_r(X=8)$$

٤. إذا كان X متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 5$ وتباين $\sigma^2 = 25$ قرب التوزيع المعتاد إلى معتاد قياسى مع ذكر أهم شروط التقريب.

٥. إذا كان X متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية $n = 5$ قرب التوزيع إلى المعتاد ثم أوجد توقع وتباين للمتغير التقريبى.

٦. قرب التوزيع ذات الحدين إلى التوزيع الهندسى مع ذكر أهم شروط التقريب.

٧. قرب التوزيع الهندسى إلى توزيع ذات الحدين مع ذكر أهم شروط التقريب.

٨. أعتبر X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $n = 100, p = 0.05$ أوجد الأحتمالات التالية:

$$i)\ P_r(X=20) \quad , \quad ii)\ P_r(12 \le X \le 15)$$

٩. أعتبر (٨) ثم أوجد الأحتمالات (ii ، (i بأستخدام:

أ- تقريب التوزيع إلى توزيع بواسون.

ب- تقريب التوزيع إلى التوزيع المعتاد.

ج- قارن الأحتمالات الفعلية في (٨) بالأحتمالات التقريبية في (٩).

(٢٠-٦) بعض التوزيعات المشتركة Some Joint Distributions

عندما تكون بعض المعلمات العشوائية $\tilde{C}_j, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ تمثل متغيرات عشوائية غير مستقلة، فإن أستخدام أسلوب (CCP) يتطلب معلومية التوزيعات الأحتمالية المشتركة لهذه المعلمات.

وفي هذا الفصل سوف نقدم بعض أهم التعريفات والنظريات المرتبطة بالتوزيعات الأحتمالية المشتركة joint probability distributions.

تعريف (٢٠-١٥): إذا كان $X_1, X_2, ..., X_k$ تشير إلى عدد k من المتغيرات العشوائية المتقطعة فإن دالة الأحتمال المشتركة $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ joint discrete probability function على النحو التالي:

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = P_r[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k] \qquad (20.104)$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}....\sum_{x_k} f(x_1, x_2, ..., x_k) = 1 \qquad (20.105)$$

كذلك تعرف دالة التوزيع التراكمية المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, ..., X_k$ joint cumulative distribution function على النحو التالي:

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = P_r[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_k \le x_k] \qquad (20.106)$$

تعريف (٢٠-١٦): إذا كان $X_1, X_2, ..., X_k$ تشير إلى k من المتغيرات العشوائية المتصلة فإن دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ joint continuous density function بحيث: $f(x_1, x_2, ..., x_k) \ge 0$

كذلك:

$$\int_{x_1}\int_{x_2}.....\int_{x_k} f(X_1, X_2,....., X_k)\ dX_1\, dX_2\ ....\ dX_k = 1 \qquad (20.107)$$

وتعرف دالة التوزيع التراكمية $F(x_1, x_2,....., x_k)$ على النحو التالي:

$$F(x_1, x_2,...., x_k) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ....\int_{-\infty}^{x_k} f(X_1, X_2,...., X_k)\ dX_1\, dX_2\ ...\, dX_k \qquad (20.108)$$

<u>**تعريف (٢٠-١٧)**</u>: إذا كان $X_1, X_2,......., X_k$ عدد k من المتغيرات العشوائية فإنه يقال أن المتغيرات $X_1, X_2,......., X_k$ مستقلة عشوائياً stochastically independent إذا وإذا فقط.

$$f(X_1, X_2,....., X_k) = \prod_{i=1}^{k} f(X_i) \qquad (20.109)$$

أو الدالة التراكمية المشتركة على النحو:

$$F(x_1, x_2,....., x_k) = \prod_{i=1}^{k} F(x_i) \qquad (20.110)$$

وبالتالي في حالة وجود متغيرين X, Y فإنه إذا كان X, Y مستقلين فإن:

$$f(X \mid Y) = f(X) \quad , \quad f(Y \mid X) = f(Y) \qquad (20.111)$$

<u>**مثال (٢٠-٤)**</u>: إذا كانت دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ X, Y على النحو:

(i) $f(X, Y) = (X + Y) \quad , \quad 0 < X < 1\ ,\ 0 < Y < 1$

(ii) $f(X, Y) = 4XY$

أختبر أستقلال X, Y في كل من الحالتين (i),(ii).

الحل:

$$(i) \because f(Y) = \int_0^1 (X+Y)\ dX = \left(Y + \frac{1}{2}\right)$$

وبما أن

$$f(X) = \int_0^1 (X+Y)\ dY = \left(X + \frac{1}{2}\right)$$

كذلك

$$f(X \mid y) = \frac{f(X,Y)}{f(Y)} = \frac{X+y}{y+0.5} \neq f(X)$$

$$f(Y \mid x) = \frac{f(X,Y)}{f(X)} = \frac{x+Y}{x+0.5} \neq f(Y)$$

إذن X, Y متغيران غير مستقلين.

$$(ii) \because f(X,Y) = 4XY$$

$$f(X) = \int_0^1 4XY\ dY = 2X$$

$$f(Y) = \int_0^1 4XY\ dX = 2Y$$

$$f(X,Y) = f(X)\,f(Y)$$

وبالتالي فإن X, Y متغيرين مستقلين.

<u>تعريف (٢٠-١٨)</u>: إذا كان $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ عدد k من المتغيرات العشوائية لها دالة أحتمال (أو دالة كثافة أحتمال) $f(X_1, X_2, \ldots., X_k)$ ، وإذا كانت $g(X_1, X_2, \ldots., X_k)$ دالة في المتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$ فإن:

$$E[g(X_1, X_2, \ldots., X_k)] = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_k} g(X_1, X_2, \ldots., X_k)\, f(X_1, X_2, \ldots., X_k) \tag{20.112}$$

إذا كانت المتغيرات متقطعة، أو

$$E[g(X_1, X_2, ..., X_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2, ..., X_k) \cdot$$

$$f(X_1, X_2, ..., X_k)\, dX_1 ... dX_k \quad (20.113)$$

إذا كانت المتغيرات متصلة.

<u>**نظرية (٢٠-٢٠)**</u>: إذا كان X, Y متغيرين مستقلين كذلك $g_1(X), g_2(Y)$ دالتين في كل من X, Y على الترتيب فإن:

$$E[g_1(X)\, g_2(Y)] = E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)] \qquad (20.114)$$

الإثبات: بما أن:

$$E[g_1(X)\, g_2(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(X)\, g_2(Y)\, f(X, Y)\; dX\; dY$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(Y)\, f(Y)\; [\int_{-\infty}^{\infty} g_1(X)\, f(X)\; dX]\; dY$$

$$= E[g_1(X)] \int_{-\infty}^{\infty} g_2(Y) f(Y)\; dY$$

$$= E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)]$$

<u>**التوزيع الثنائي**</u>: إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين فإن دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(X, Y)$ ودالة التوزيع التراكمية المشتركة $F(X, Y)$. وبأستخدام الدوال المشتركة يمكن الحصول على دوال كثافة الأحتمال الهامشية marginal probability density functions على النحو التالي:

$$\sum_{X} f(X,Y) = f(Y) \tag{20.115}$$

$$\sum_{Y} f(X,Y) = f(X) \tag{20.116}$$

إذا كان X,Y متغيران متقطعان، كذلك:

$$\int_{X} f(X,Y)\ dX = f(Y) \tag{20.117}$$

$$\int_{Y} f(X,Y)\ dY = f(X) \tag{20.118}$$

إذا كان X,Y متغيران متصلين. وبما أن:

$$f(X) = \frac{d\,F(x)}{d\,X} = \frac{d}{d\,X}\left[\int_{-\infty}^{x}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,Y)\,dY\Big)\,du\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(X,Y)\,dY \tag{20.119}$$

كذلك يمكن الحصول على دوال التوزيع التراكمية الهامشية marginal cumulative distribution functions على النحو:

$$F(X) = F(X,\infty) = \sum_{i}^{\infty} F(X, y_i) \tag{20.120}$$

إذا كان Y متغير متقطع. أو:

$$F(X) = F(X,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} F(X,Y)\ dY$$

إذا كان Y متغير متصل. بالمثل:

$$F(Y) = F(Y,\infty) = \sum_{i}^{\infty} F(X_i, Y) \tag{20.121}$$

إذا كان Y متغير متقطع. أو:

$$F(Y) = F(Y,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} F(X,Y)\ dX$$

إذا كان Y متغير متصل.

<u>تعريف (٢٠–١٩)</u>: إذا كان X,Y متغيرين عشوائيين بدالة أحتمال (أو كثافة أحتمال) مشتركة $f(X,Y)$ فإن دالة الأحتمال الشرطية **conditional probability (density) function** لـ Y بشرط $X = x$ نرمز لها بالرمز $f(Y|x)$ بحيث:

$$f(Y|x) = \frac{f(X,Y)}{f(X)} \quad , \quad f(x) > 0 \qquad (20.122)$$

بالمثل دالة الأحتمال الشرطية للمتغير X بشرط $Y = y$ على النحو التالي:

$$f(X|y) = \frac{f(X,Y)}{f(Y)} \quad , \quad f(y) > 0 \qquad (20.123)$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع التراكمية الشرطية **conditional cumulative function** لـ X بشرط y وسوف نرمز لها بالرمز $F(X|y)$ بحيث:

$$F(X|y) = \sum_{x_i \le x} f(X_i|y) \qquad (20.124)$$

أو:

$$F(X|y) = \int_{-\infty}^{x} f(X|y)\ dX \qquad (20.125)$$

بالمثل بالنسبة لدالة التوزيع التراكمية الشرطية لـ Y على النحو التالي:

$$f(Y|x) = \sum_{y_i \le y} f(Y_i|x) \qquad (20.126)$$

أو:

$$f(Y\,|\,x)=\int_{-\infty}^{y} f(Y\,|\,x)\ dY \qquad (20.127)$$

<u>مثال (٢٠-٥)</u>: إذا كان X,Y متغيران متصلين بحيث تكون دالة الأحتمال المشتركة $f(X,Y)$ على النحو التالي:

$$f(X,Y)=k(X+Y) \qquad ,\ 0<X,Y<2$$

حيث k مقدار ثابت، والمطلوب:

١- إيجاد قيمة المقدار الثابت k.

٢- أحسب $P_r(0<X<1\ ,\ 1<Y<2)$

٣- أوجد كل من $f(X)$، $f(Y)$ التي تمثل الدوال الهامشية لكل من X،Y على الترتيب

٤- أوجد الدوال التراكمية $F(X)$ ، $F(Y)$.

٥- أوجد دوال كثافة الاحتمال الشرطية التالية $f(Y\,|\,x)$, $f(X\,|\,y)$.

الحل: ١- بما ان $f(X,Y)$ دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ X، Y بالتالي فإن:

$$\int_0^2\int_0^2 k(X+Y)\ dX\ dY=1\longrightarrow k\int_0^2\Big[\int_0^2 (X+Y)\ dX\Big]\ dY=1\longrightarrow$$

$$k\int_0^2 2+2Y\ dY=1\longrightarrow k[4+4]=1\longrightarrow\ k=\frac{1}{8}$$

-٢

$$P_r(0<X<1\ ,\ 1<X<2)=\frac{1}{8}\int_0^1\Big[\int_1^2 (X+Y)\ dY\Big]\ dX$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(X+\frac{3}{2}\right)\ dX=\frac{1}{4}$$

-٣

$$f(X)=\int_{0}^{2} f(X,Y)\,dY=\int_{0}^{2}\frac{1}{8}(X+Y)\,dY$$

$$=\frac{1}{8}(2X+2)=\frac{1}{4}X+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(X+1)$$

$$f(Y)=\int_{0}^{2} f(X,Y)\,dX=\int_{0}^{2}\frac{1}{8}(X+Y)\,dX$$

$$=\frac{1}{4}(1+Y)$$

-٤

$$F(X)=\int_{0}^{x} f(X)\,dX=\int_{0}^{x}\frac{1}{4}(X+1)\,dX=\frac{X(X+1)}{8}$$

بالمثل:

$$F(Y)=\int_{0}^{y} f(Y)\,dY=\frac{y\,(y+1)}{8}$$

-٥

$$f(X\,|\,y)=\frac{f(X,Y)}{f(Y)}=\frac{1/8\left(X+y\right)}{1/4\left(1+y\right)}=\frac{\left(X+y\right)}{2\left(1+y\right)}\longrightarrow$$

$$f(X\,|\,y)=\int_{0}^{x} f(z\,|\,y)\;dz=\int_{0}^{x}\frac{(z+y)}{2(1+y)}\;dz=\frac{1}{4}\left(\frac{X^{2}+2Xy}{1+y}\right)$$

وفيما يلي سوف نقدم التوزيع المعتاد (الطبيعي) الثنائي، حيث أنه يعتبر من أهم التوزيعات الثنائية في كثير من التطبيقات كذلك من أهم التوزيعات التي يمكن التقرب لها.

التوزيع المعتاد الثنائي Bivariate Normal Distribution

إذا كان X,Y متغيرين عشوائيين بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X,Y)$ على النحو التالي:

$$f(X,Y)=(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2})^{-1}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x})^2-$$

$$2\rho\,(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x})(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y})+(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y})^2]\}\quad(20.128)$$

حيث μ_x,μ_y هما توقع X,Y كذلك σ_x,σ_y هما الأنحراف المعياري لـ X,Y على الترتيب، هي معامل الأرتباط بين X,Y. ويمكن إثبات ان:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(X,Y)\;dY\;dX=1$$

كذلك دالة التوزيع التراكمية المشتركة على النحو:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}(\int_{-\infty}^{x}f(X',Y')\;dX')\;dY'\qquad(20.129)$$

<u>**نظرية (٢٠-٢١)**</u> إذا اعتبرنا X,Y متغيرين لهما التوزيع المعتاد الثنائي فإن الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الثنائي $m_{x,y}(t_1,t_2)$ على النحو التالي:

$$m_{x,y}(t_1,t_2)=\exp[t_1\,\mu_x+t_2\,\mu_y+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)]$$

(20.130)

الإثبات:

$$m_{x,y}(t_1,t_2)=E(e^{t_1x+t_2y})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1x+t_2y}f(X,Y)\;dY\;dX=$$

$$e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1\sigma_x x+t_2\sigma_y y}.\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-[\frac{1}{2(1-\rho^2)}][X^2-2\rho XY+Y^2]}\;dX\,dY$$

(1)

وبالنسبة لأس e داخل التكامل يمكن تجميعه وكتابته على النحو التالي:

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[X^2-2\rho\, XY+Y^2-2(1-\rho^2)\,t_1\,\sigma_x X-2(1-\rho^2)\,t_1\,\sigma_y Y\right] \quad (2)$$

ثم أعادة كتابته في شكل مربع يحتوى على X ومربع يحتوى على Y على النحو التالي:

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{\left(X-\rho Y-(1-\rho^2)\,t_1\,\sigma_x\right)^2+(1-\rho^2)\left(Y-\rho\, t_1\,\sigma_x-t_2\,\sigma_y\right)^2$$
$$-(1-\rho^2)\left[t_1^2\,\sigma_x^2+2\rho\, t_1\,t_2\,\sigma_x\sigma_y+t_2^2\,\sigma_y^2\right]\Big\} \quad (3)$$

وبافتراض أن:

$$w=\frac{X-\rho Y-(1-\rho^2)\,t_1\,\sigma_x}{\sqrt{1-\rho^2}}\quad,\quad Z=Y-\rho\, t_1\,\sigma_x-t_2\,\sigma_y \qquad (4)$$

بالتعويض بـ (4) في (3) نجد أن المقدار في (3) يصبح على النحو:

$$-\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{2}\left(t_1^2\,\sigma_x^2+2\rho\, t_1\,t_2\,\sigma_x\,\sigma_y+t_2^2\,\sigma_y^2\right) \qquad (5)$$

وبالتعويض بـ (5) في الطرف الأيمن لـ (1) نجد أن:

$$m_{x,y}(t_1,t_2)=e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y}.\exp\left[\tfrac{1}{2}\left(t_1^2\,\sigma_x^2+2\rho\, t_1\,t_2\,\sigma_x\,\sigma_y+\right.\right.$$
$$\left.\left.t_2^2\,\sigma_y^2\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{w^2}{2}-\frac{z^2}{2}}\,dw\,dz \quad (6)$$

وبما أن: $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{w^2}{2}-\frac{z^2}{2}}\,dw\;dz=1$$

حيث أن الدالة داخل التكامل دالة كثافة أحتمال مشتركة لـ w,Z بـ

$$= 0 \quad , \quad \mu_w = \mu_z = 1$$

وبالتالي فإن:

$$m_{x,y}(t_1, t_2) = \exp[t_1\,\mu_x + t_2\,\mu_y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2 + \rho 2\ \ t_1 t_2 \sigma_x \sigma_y + t_2^2 \sigma_y^2)]$$

<u>نظرية (٢٠-٢٢)</u> إذا كان (X,y) متغيرين لهما التوزيع المعتاد الثنائي فإن:

$$E(X) = \mu_x \qquad , \qquad E(y) = \mu_y$$

$$Var(X) = \sigma_x^2 \qquad , \qquad Var(y) = \sigma_y^2$$

$$Cov(X,y) = \quad \sigma_x\,\sigma_y$$

الإثبات:

$$\because E(X) = \left.\frac{\partial\, m(t_1, t_2)}{\partial\, t_1}\right|_{t_1, t_2 = 0} = \mu_x$$

$$E(X^2) = \left.\frac{\partial^2\, m(t_1, t_2)}{\partial\, t_1^2}\right|_{t_1, t_2 = 0} = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

وبالتالي:

$$E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \sigma_x^2$$

وبنفس الأسلوب بالنسبة لـ y.

$$E(y) = \left.\frac{\partial\, m(t_1, t_2)}{\partial\, t_2}\right|_{t_1, t_2 = 0} = \mu_y$$

$$E(y^2) = \left.\frac{\partial^2\, m(t_1, t_2)}{\partial\, t_2^2}\right|_{t_1, t_2 = 0} = \mu_y^2 + \sigma_y^2$$

وبالتالي:

$$E(y-\mu_y)^2 = E(y^2)-\mu_y^2 = \sigma_y^2$$

كذلك:

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E[x\,y - x\,\mu_x - y\,\mu_y + \mu_x\,\mu_y)]$$

$$= E[\,x\,y\,] - \mu_x\,\mu_y = \left.\frac{\partial^2 m(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_{t_1,t_2=0} - \mu_x\,\mu_y$$

$$\rho \quad \sigma_x\,\sigma_y$$

<u>**نظريـــة (٢٠-٢٣)**</u>: إذا كـان (x,y) لهمـا التوزيـع المعتـاد الثنـائي فـإن التوزيعـات الأحتمالية لـ x,y كل منهما يتبع التوزيع المعتاد على النحو:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}.\exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho\,\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})]\;dv$$

حيث: $v = (y-\mu_y)$ كذلك بافتراض أن:

$$w = \frac{v-\rho\,(x-\mu_x)/\sigma_x}{\sqrt{1-\rho^2}} \longrightarrow \quad d\,w = \frac{d\,v}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2] \qquad (20.131)$$

بالمثل بالنسبة للمتغير y فإن:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2] \qquad (20.132)$$

تمرين (٤)

١ – إذا فرضنا أن X متغير عشوائي بدالة كثافة أحتمال $f(X)$ وتوقع وتباين μ, σ^2 على التريب. فإذا عرفنا المتغير y بحيث:

$$y = \alpha + \beta X \quad , \quad -\infty < \alpha < \infty \quad , \quad \beta > 0$$

أ- أوجد قيم α, β التي تجعل:

$$\mu_y = 0 \quad , \quad Var(Y) = 1$$

ب- أوجد معامل الأرتباط بين X,y.

ج- أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير y بدلالة α, β.

٢ – إذا فرضنا أن دالة كثافة الأحتمال (X,y) على النحو التالي:

$$f(X,y) = [1 - \alpha(1-2X)(1-2y)] \quad , \quad -1 \le \alpha \le 1, \; 0 \le X \le 1, \; 0 \le y \le 1$$

أثبت أن X,y متغيرين مستقلين.

٣ – بافتراض أن دالة كثافة الأحتمال للمتغيران X,y على النحو:

$$f(X,y) = k\,(X + y) \quad , \quad 0 \le X \le 1 \;\; , \;\; 0 \le y \le 1$$

أ- أوجد قيمة المقدار الثابت k.

ب- أوجد: $P_r[X + y < 0.5]$, $P_r[y \mid X = 0.2]$

ج- أوجد الدوال الهامشية $f(X), f(y)$.

د- أوجد $Cov(X,y)$, $\rho_{x,y}$.

٤ – إذا فرضنا أن X متغير متقطع بدالة أحتمال $f(X)$ بحيث:

$$f(x) = \frac{x}{3} \quad , \quad x = 1,2$$

كذلك الدالة الشرطية $f(y \mid x)$ دالة أحتمال ذات الحدين بمعلمة $\chi , \frac{1}{2}$ على النحو:

$$f(y \mid \chi) = \Pr(y \mid x = \chi) = C_y^x (\frac{1}{2})^{\chi} \quad ,y = 0,1,2,...,x \quad ,\chi = 1,2$$

أ- أوجد $E(x), Var(x)$.

ب- أوجد دالة أحتمال المتغير y التي سوف نشير لها بالرمز $f(y)$.

ج- أوجد $E(y), Var(y)$.

د- أوجد دالة الأحتمال المشتركة بين x,y.

٥- بافتراض أن x_1, x_2 متغيرين مستقلين كل منهما يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ_1, λ_2 على الترتيب.

أ- أوجد دالة الأحتمال المشتركة $f(x_1, x_2)$.

ب- أوجد الدوال الشرطية $f(x_1 \mid x_2), f(x_2 \mid x_1)$

٦- إذا كان x_1, x_2 متغيرين مستقلين كل منهما يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $(n_1, p_1), (n_2, p_2)$ على الترتيب.

أ- أوجد دالة الأحتمال المشتركة.

ب- أوجد الدوال الشرطية $f(x_1 \mid x_2), f(x_2 \mid x_1)$.

ج- أوجد $Cov(x_1, x_2)$.

(٢٠-٧) بعض التحويلات　Some Transformations

تتطلب دراسة البرمجة الأحتمالية عندما تكون بعض (أو كل) معاملات دالـة الهدف أو معاملات المتغيرات القرارية في القيود الهيكلية متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتماليـة معلومة، ضرورة الإلمام الجيد بالتحويلات الإحصائية. والمقصود هنا بـالتحويلات هو إيجـاد التوزيع الأحتمالي لمتغير عبارة عن دالة في متغير أو أكثر من المتغيرات العشوائية الأخرى أو بعبارة أخرى إيجاد التوزيع الأحتمالي للمتغير Y في حالتين هما:

<u>الحالة الأولي</u>: عندما تكون Y دالة في متغير واحد X أو بعبارة أخرى:

$$Y = g(X) \tag{20.133}$$

<u>الحالة الثانية</u>: عندما تكون Y دالـة فـي n من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ أو بعبارة أخرى:

$$Y = H(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \tag{20.134}$$

وفي هذا الفصل سوف نتنـاول الحـالتين أعلاه عنـدما تكون المتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ متغيرات متقطعة discrete variables أو متغيرات متصلة continuous variables على النحو التالي.

<u>الحالة الأولي: (١) المتغيرات المتقطعة</u>

إذا أعتبرنـا X متغيـر عـشوائي متقطـع يأخـذ القـيم $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ باحتمـالات $P_r(x_i)$ كذلك $g(X)$ دالة في المتغير X، فإذا فرضنا أن:

$$Y = g(X)$$

وبالتالي فإن قيم المتغير Y تصبح على النحو التالي:

$$y_1 = g(x_1)\,,\, y_2 = g(x_2)\,,\, \ldots\ldots,\, y_n = g(x_n)$$

وتصبح دالة الأحتمال للمتغير Y على النحو التالي:

$$P_r(Y = y_i) = P_r(X = x_i) \quad , \quad i = 1,2,...,n \qquad (20.135)$$

<u>مثـال (٢٠-٦)</u>: إذا فرضنا أن X متغير عشوائي لـه التوزيـع الأحتمـالي الموضـح فـي الجدول التالي.

جدول (٢٠-١)

X	1	2	3	4	5	6	Σ
Pr(x)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1	1.0

فإذا كانت الدالة Y بحيث:

$$Y = g(X) = X + 10$$

فإن المتغير Y يأخذ القيم التالية:

$$Y_1 = X_1 + 10 = 11 \longrightarrow P_r(Y = 11) = P_r(X = 1) = 0.1$$

$$Y_2 = X_2 + 10 = 12 \longrightarrow P_r(Y = 12) = P_r(X = 2) = 0.2$$

$$Y_3 = X_3 + 10 = 13 \longrightarrow P_r(Y = 13) = P_r(X = 3) = 0.2$$

$$Y_4 = X_4 + 10 = 14 \longrightarrow P_r(Y = 14) = P_r(X = 4) = 0.3$$

$$Y_5 = X_5 + 10 = 15 \longrightarrow P_r(Y = 15) = P_r(X = 5) = 0.1$$

$$Y_6 = X_6 + 10 = 16 \longrightarrow P_r(Y = 16) = P_r(X = 6) = 0.1$$

<u>مثـال (٢٠-٧)</u>: إذا فرضنا أن X متغير متقطع يأخذ القيم 0,1,2,3,4,5 بالأحتمـالات التالية:

$$P_r(X = 0) = 0.12 \ , \ P_r(X = 1) = 0.13 \ , \ P_r(X = 2) = 0.25$$
$$P_r(X = 3) = 0.20 \ , \ P_r(X = 4) = 0.20 \ , \ P_r(X = 5) = 0.10$$

فإذا كانت: $Y = (X-1)^2$

فإن المتغير Y يأخذ القيم التالية 0,1,4,9,16 كذلك:

$$P_r(Y=0) = P_r(X=1) = 0.13$$

$$P_r(Y=1) = P_r(X=0) + P_r(X=2) = 0.12 + 0.25 = 0.37$$

$$P_r(Y=4) = P_r(X=3) = 0.20$$

$$P_r(Y=9) = P_r(X=4) = 0.20$$

$$P_r(Y=16) = P_r(X=5) = 0.10$$

(٢) المتغيرات المتصلة

أما إذا كان X متغير عشوائي متصل بدالة كثافة أحتمال $f(X)$ كذلك $Y = g(X)$ فإنه يمكن الحصول على دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y باستخدام النظرية التالية.

نظرية (٢٠–٢٤): إذا كان X متغير عشوائي متصل بدالة كثافة أحتمال $f(X)$ كذلك Y دالة في X بحيث $Y = g(X)$ وبافتراض أن:

أ- العلاقة $Y = g(X)$ علاقة واحد – لواحد one-to-one.

ب- الدالة العكسية للدالة $g(X)$ هي $g^{-1}(Y)$ عند جميع قيم $g(X) = Y$.

فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y وسوف نشير لها بالرمز $f(Y)$

$$f(Y) = \left|\frac{d}{dY} g^{-1}(Y)\right| f\left(g^{-1}(Y)\right) \qquad (20.136)$$

الإثبات: أنظر مرجع [103 page 200].

مثال (٢٠-٨): إذا فرضنا أن X متغير عشوائي له دالة كثافة الأحتمال $f(X)$ بحيث:

$$f(X)=e^{-X} \qquad , \quad X>0$$

فإذا فرضنا أن: $Y=CX$ ، حيث C مقدار ثابت، $C>0$

أوجد دالة كثافة الأحتمال لـ Y.

الحل: بما أن $Y=CX$ بالتالي فإن $0<Y<\infty$

$$\because Y=g(X)=CX \longrightarrow g^{-1}(Y)=\frac{Y}{C} \longrightarrow$$

$$\frac{d\,g^{-1}(Y)}{dY}=\frac{1}{C} \quad , f(g^{-1}(Y))=e^{-(Y/C)}$$

وبتطبيق نظرية (٢٠-٢٤) حيث:

$$f(Y)=\left|\frac{d}{dY}g^{-1}(Y)\right| f(g^{-1}(Y))=\left(\frac{1}{C}\right)\left(e^{-(Y/C)}\right)$$

مثال (٢٠-٩): إذا فرضنا أن X متغير يتبع توزيع بيتا بمعلمتين (a,b) حيث:

$$f(X)=\frac{1}{B(a,b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1} \quad , \quad 0<X<1 \;\; , \;\; a,b>0$$

فإذا فرضنا أن $Y=-\ln(X)$. أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y.

الحل:

$$Y=g(X)=-\ln(X) \longrightarrow e^{-Y}=X \longrightarrow g^{-1}(Y)=e^{-Y}$$

$$\frac{d\,g^{-1}(Y)}{dY}=-e^{-Y} \quad , f(g^{-1}(Y))=\frac{1}{B(a,b)}\left(e^{-Y}\right)^{a-1}\left(1-e^{-Y}\right)^{b-1}$$

وبالتالي فإن:

$$f(Y) = \left|\frac{d}{dY} g^{-1}(Y)\right| f(g^{-1}(Y))$$

$$= \left|-e^{-Y}\right| \left\{ \frac{1}{B(a,b)} \left(e^{-Y}\right)^{a-1} \left(1-e^{-Y}\right)^{b-1} \right\}$$

$$= e^{-Y} \left\{ \frac{1}{B(a,b)} e^{-Ya+Y} \left(1-e^{-Y}\right)^{b-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} e^{-aY} \left(1-e^{-Y}\right)^{b-1} \qquad , \quad 0 < Y < \infty$$

<u>الحالة الثانية: (١) المتغيرات المتقطعة</u>

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ تمثل عدد n من المتغيرات العشوائية المتقطعة ودالة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ سوف نشير لها بالرمز $f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$. فإذا فرضنا وجود المتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ بحيث:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \qquad , \quad i = 1,2,\ldots,k$$

فإن دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ تكون على النحو:

$$P_r[Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots\ldots, Y_k = y_k] = f(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k)$$
$$= \sum f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \qquad (20.137)$$

وعملية المجموع Σ بالنسبة للقيم $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ المناظرة للقيم $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_k$ كما سوف نوضح ذلك في الأمثلة التالية.

<u>مثال (٢٠-١٠)</u>: إذا فرضنا أن (X_1, X_2, X_3) ثلاث متغيرات كل منهم يأخذ القيم 0,1 ودالة الاحتمال المشتركة $f(X_1, X_2, X_3)$ على النحو الموضح في الجدول التالي

جدول (٢٠-٢)

(x_1,x_2,x_3)	$f(x_1,x_2,x_3)$
(0,0,0)	1/12
(0,0,1)	1/12
(0,1,0)	1/12
(1,0,0)	3/12
(1,1,0)	3/12
(1,0,1)	1/12
(0,1,1)	1/12
(1,1,1)	1/12
$\sum$	$\frac{12}{12}=1$

أوجد دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرين Y_1,Y_2 حيث:

$$Y_1=g_1(X_1,X_2,X_3)=X_1+X_2+X_3$$

$$Y_2=g_2(X_1,X_2,X_3)=X_1\ X_2\ X_3$$

الحل: بما أن $Y_1=X_1+X_2+X_3$

كذلك $Y_1=0,1,2,3$

$$Y_2=0,1$$

وبالتالي فإن التوزيع الأحتمال المشترك لـ Y_1,Y_2 وسوف نشير له بالرمز $f_2(Y_1,Y_2)$ على النحو التالي:

جدول (٢٠-٣)

(y_1,y_2)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,1)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,0)
$f_2(y_1,y_2)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0

حيث:

$$f_2(Y_1=0\,,Y_2=0)=P_r(X_1=0\,,X_2=0\,,X_3=0)=\frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned}f_2(Y_1=1\,,Y_2=0)&=P_r(X_1=1\,,X_2=0\,,X_3=0)\\&+P_r(X_1=0\,,X_2=1\,,X_3=0)\\&+P_r(X_1=0\,,X_2=0\,,X_3=1)\\&=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(Y_1=2\,,Y_2=0)&=P_r(X_1=1\,,X_2=1\,,X_3=0)\\&+P_r(X_1=0\,,X_2=1\,,X_3=1)\\&+P_r(X_1=1\,,X_2=0\,,X_3=1)\\&=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$f_2(Y_1=3\,,Y_2=0)=P_r(\phi)=0\ ,\quad f_2(Y_1=0\,,Y_2=1)=P_r(\phi)=0$$

$$f_2(Y_1=1\,,Y_2=1)=P_r(\phi)=0\ ,\quad f_2(Y_1=2\,,Y_2=1)=P_r(\phi)=0$$

$$f_2(Y_1=3\,,Y_2=1)=P_r(X_1=1\,,X_2=1\,,X_3=1)=\frac{1}{12}$$

ملحوظة: ϕ تشير إلى الفئة الخالية empty set.

(٢) المتغيرات المتصلة

أمـا إذا كـان $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثـل عـدد n مـن المتغيـرات المتـصلة continuous variables معرفـة فـي n مـن المحـاور n-dimensions بدالـة كثافـة أحتمـال مـشتركة سـوف نـشير لهـا بـالرمز $f(X_1, X_2, ..., X_n)$. كـذلك إذا كـان $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ عدد k من المتغيرات العشوائية التي تمثل دوال في المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ على النحو:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, ..., X_n) \quad , \quad i = 1,2,...,k$$

حيث $1 \le k \le n$. وتتم عملية التحويل من عدد n من المحاور في X إلى عدد n من المحاور في Y. وعندما $k < n$ ففي هذه الحالة نفدم متغيرات إضافية للمتغيرات Y_i متمثلة في الدوال التالية:

$$Y_j = g_j(X_1, X_2, ..., X_n) \quad , \quad j = k+1, k+2, ..., n \qquad (20.138)$$

والحصول على دالة كثافة أحتمال مشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ ثم الحصول على دالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ من الدالة المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ فهـي تمثـل الدالـة الهامـشية marginal function للمتغيـرات $Y_1, Y_2, ..., Y_k$. ولتوضيح إجراء عملية التحويل سوف نبدأ أولاً بمتغيرين عشوائيين X_1, X_2 أو بعبارة أخرى $n = 2$ كذلك لدينا دالتين Y_1, Y_2 أو بعبارة أخرى $k = 2$ حيث:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) \quad , \quad Y_2 = g_2(X_1, X_2) \qquad (20.139)$$

حيث علاقة كل من Y_1, Y_2 بـ $g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2)$ علاقة واحد–لواحد one-to-one وبالتـالي فإنـه يمكـن الحـصول علـى الـدوال العكـسية للـدالتين $g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2)$ أو بعبارة أخرى الحصول على g_1^{-1}, g_2^{-1} على النحو التالي:

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2) \ , \quad X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2) \qquad (20.140)$$

<u>نظرية (٢٠-٢٥)</u>: إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين متصلين لهما دالة كثافة الأحتمال المشتركة $f(X_1, X_2)$ وبافتراض أن:

(i) Y_1, Y_2 دالتين بحيث العلاقة بين $Y_1 = g_1(X_1, X_2)\ ,\ Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ وكل من $g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2)$ علاقة واحد-لواحد.

(ii) المشتقات الجزئية الأولى **first partial derivatives** لكل من $X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2),\ X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2)$ دوال متصلة.

(iii) محدد **determinant** المشتقات الجزئية لـ X_1, X_2 بالنسبة لـ Y_1, Y_2 والمسمى بـ **Jacobian** وسوف نشير له بالرمز **J** لا يساوى صفر . حيث:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial Y_2} \\ \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (20.141)$$

فأن دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2 على النحو:

$$f(Y_1, Y_2) = |J|\ f[g_1^{-1}(Y_1, Y_2),\ g_2^{-1}(Y_1, Y_2)] \qquad (20.142)$$

الإثبات : أنظر مرجع [113, 95].

وسوف نوضح تطبيق النظرية من خلال الأمثلة التالية.

<u>مثال (٢٠-١١)</u>: إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2)$ بحيث:

$$f(X_1, X_2) = e^{-(X_1 + X_2)} \qquad 0 < X_1, X_2 < \infty$$

وبافتراض أن:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \quad , \quad 0 < Y_1 < \infty$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = 2X_1 \quad , \quad 1 < Y_2 < e$$

أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2 .

الحل:

$$1) \because Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = e^{X_2} \quad , \; 0 < Y_1 < \infty \, , \, 1 < Y_2 < e$$

$$\longrightarrow$$

$$X_1 = Y_1 - \ln(Y_2) \quad , \quad X_2 = \ln(Y_2)$$

$$2) \because J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial Y_2} \\ \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-1}{Y_2} \\ \\ 0 & \dfrac{1}{Y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{Y_2}$$

$$3) \;\; f(Y_1, Y_2) = |J| \; f[g_1^{-1}(Y_1, Y_2) , \; g_2^{-1}(Y_1, Y_2)]$$

$$= \left| \frac{1}{Y_2} \right| e^{-(Y_1 - \ln Y_2 + \ln Y_2)}$$

$$\therefore \; f(Y_1, Y_2) = (Y_2)^{-1} e^{-Y_1} \, , \quad 0 < Y_1 < \infty \;\; , \;\; 1 < Y_2 < e$$

وبالتالي فإن:

$$\therefore \; f(Y_1) = \int_1^e (Y_2)^{-1} e^{-Y_1} \;\; d\,Y_2$$

$$= e^{-Y_1} [\ln Y_2]_1^e$$

$$= e^{-Y_1} [\ln(e) - \ln(1)]$$

$$= e^{-Y_1} (1 - 0) = e^{-Y_1} \quad , \quad 0 < Y_1 < \infty$$

$$/ \quad f(Y_2) = \int_0^{\infty} (Y_2)^{-1} e^{-Y_1} \quad dY_1$$

$$= (Y_2)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-Y_1} \quad dY_1$$

$$= (Y_2)^{-1}(1) = \frac{1}{Y_2} \quad , \quad 1 < Y_2 < e$$

<u>**مثال (٢٠-١٢)**</u>**: إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المنتظم في الفترة (0,1) بدالة كثافة أحتمال $f(X_1, X_2)$ بحيث:**

$$f(X_1, X_2) = 1$$

وبافتراض أن: $\quad Y_2 = X_2 - X_1 \quad , \quad Y_1 = X_1 + X_2$

أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_2 وكذلك الدوال الهامشية لـ Y_1, Y_2.

الحل:

$$\because Y_1 = X_1 + X_2 \ , \ Y_2 = X_2 - X_1 \quad , \ 0 < Y_1 < 2 \ , \ -1 < Y_2 < 1$$

$$\longrightarrow$$

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2) \ , \ X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$$

$$\longrightarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\because f(Y_1, Y_2) = |J| \ f[g_1^{-1}(Y_1, Y_2), \ g_2^{-1}(Y_1, Y_2)] = \frac{1}{2}(1) \longrightarrow$$

$$/ \quad f(Y_1) = \int_{-1}^{1} f(Y_1, Y_2) \ \ dY_2 = \int_{-1}^{1} 1 \ \ dY_2 = 2$$

$$/ \quad f(Y_2) = \int_{0}^{1} 1 \ \ dY_1 = 1$$

<u>نظريـة (٢٠-٢٦)</u>: إذا فرضنا أن $X_1, X_2, ..., X_n$ عدد n من المتغيرات العشوائية المتصلة بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2, ..., X_n)$، وإذا فرضنا أن الفئة χ بحيث [113]:

$$\chi = \{(X_1, X_2, ..., X_n) : f(X_1, X_2, ..., X_n)\}$$

وبافتراض أن الفئة χ يمكن تجزئتها إلى n من الفئات الجزئية $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m$، وبافتراض أن الدوال Y_j بحيث:

$$Y_j = g_j(X_1, X_2, ..., X_n) \quad , \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (20.143)$$

والعلاقة بين Y_j، $g_j(X_1, X_2, ..., X_n)$ علاقة واحد لواحد. كذلك:

$$X_1 = g_{1i}^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n), ..., X_n = g_{ni}^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$

حيث تشير g_{ji}^{-1} إلى الدالة العكسية المناظرة لـ X_j على الفئة الجزئية χ_i كذلك يشير المحدد J_i بحيث:

$$J_i = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_2} & .... & \dfrac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial Y_n} \\ \dfrac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_2} & .... & \dfrac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_2} & ..... & \dfrac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i = 1,2,...,n \quad (20.144)$$

فإن دالة كثافة الأحتمال المشتركة للمتغيرات $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ تصبح على النحو التالي:

$$f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \sum_{i=1}^{n} |J_i| \; f[g_{1i}^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n),$$

$$g_{2i}^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n), ..., \; g_{ni}^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n)] \qquad (20.145)$$

<u>ملحوظة</u>: وفي الحالة الخاصة عندما $m = 1$ أو بعبارة أخرى الفئة χ فئة واحدة غير مجزئة، في هذه الحالة:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial Y_1} & .... & \dfrac{\partial g_1^{-1}}{\partial Y_{1n}} \\ : & : & : \\ : & : & : \\ \dfrac{\partial g_n^{-1}}{\partial Y_1} & .... & \dfrac{\partial g_n^{-1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} \qquad (20.146)$$

$$f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = |J| \; f[g_1^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n),$$

$$g_2^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n), ..., \; g_n^{-1}(Y_1, Y_2, ..., Y_n)] \qquad (20.147)$$

<u>مثال (٢٠-١٣)</u>: إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية متصلة مستقلة كل منها يتبع التوزيع الأسى بمعلمات $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2, X_3)$ حيث:

$$f(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} e^{-\left(\frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{X_2}{\lambda_2} + \frac{X_3}{\lambda_3}\right)} \quad , \quad 0 < X_1, X_2, X_3 < \infty$$

فإذا فرضنا أن:

$$Y_1 = X_1 \quad , Y_2 = (X_1 + X_2) \quad , Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3) \; ,$$

$$0 < Y_1, Y_2, Y_3 < \infty$$

وبافتراض أن $m = 1$. أوجد دالة كثافة الأحتمال المشتركة لكل من Y_1, Y_2, Y_3 ثم أوجد الدوال الهامشية لكل من Y_1, Y_2, Y_3.

الحل:

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3) = Y_1 \quad ,$$
$$X_2 = Y_2 - X_1 = Y_2 - Y_1 \quad , \; X_3 = Y_3 - Y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(Y_1, Y_2, Y_3) = |J| \; f[g_1^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3) \; , \; g_2^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3) \; , \; g_3^{-1}(Y_1, Y_2, Y_3)]$$

$$= 1\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right) e^{-\left(\frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{(Y_2 - Y_1)}{\lambda_2} + \frac{(Y_3 - Y_2)}{\lambda_3}\right)}$$

$$= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1} \exp - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2 + \lambda_3 Y_3\right\} \longrightarrow$$

/ $$f(Y_1) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(Y_1, Y_2, Y_3) \; dY_2 \; dY_3 = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1} \exp - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2 + \lambda_3 Y_3\right\} dY_3\right] dY_2$$

$$= \int_0^\infty (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \exp - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} Y_2\right\} \; dY_2$$

$$= \left(\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3\right)^{-1} \exp - \left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2} Y_1\right\} \qquad , \qquad 0 < Y_1 < \infty$$

بالمثل يمكن الحصول على $f(Y_2), \; f(Y_3)$.

مثال (٢٠-١٤): إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X_1, X_2)$ بحيث:

$$f(X_1,X_2)=[2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2_{X_1,X_2}}\,]^{-1}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2_{X_1,X_2})}[(\frac{X_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}})^2$$

$$-2\rho_{X_1,X_2}(\frac{X_1-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}})(\frac{X_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}})+(\frac{X_2-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}})^2]\} \qquad (1)$$

حيث ρ_{X_1,X_2} معامل الأرتباط بين X_1, X_2.

فإذا فرضنا أن: $Y_1 = (X_1 + X_2)$, $Y_2 = X_2$

أوجد دالة الأحتمال المشتركة بين Y_1, Y_2 ثم أوجد الدوال الهامشية لـ Y_1, Y_2.

الحل:

$$\because Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2 \longrightarrow$$

$$X_1 = g_1^{-1}(Y_1, Y_2) = Y_1 - Y_2 \quad , \quad X_2 = g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = Y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (2)$$

$$\because X_1 = Y_1 - Y_2 \longrightarrow \mu_{X_1} = \mu_{Y_1} - \mu_{Y_2} \qquad (3)$$

$$X_2 = Y_2 \longrightarrow \mu_{X_2} = \mu_{Y_2} \qquad (4)$$

كذلك:

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{(Y_1-Y_2)} = \sigma^2_{Y_1} + \sigma^2_{Y_2} + Cov(Y_1, Y_2) \longrightarrow \qquad (5)$$

$$\sigma_{X_1} = \sigma_{(Y_1-Y_2)} = \sqrt{\sigma^2_{Y_1} + \sigma^2_{Y_2} + Cov(Y_1, Y_2)} \qquad (6)$$

وبما أن:

$$\rho_{X_1,X_2}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}=\frac{E(Y_1Y_2)-\mu_{Y_1}\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}\sigma_{Y_2}}-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} \qquad (7)$$

ومن (7) فإنه يمكن إستنتاج أن:

$$\rho_{X_1,X_2}=\rho_{Y_1,Y_2}[\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}]-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}} \qquad (8)$$

بالتعويض بـ (8)–(2) في (1) نجد أن:

$$\begin{aligned}
f(Y_1,Y_2)&=|1|\,f(g_1^{-1}(Y_1,Y_2)\ ,\ g_2^{-1}(Y_1,Y_2))\\
&=\Big[2\pi\sigma_{Y_1-Y_2}\sigma_{Y_2}\sqrt{1-[\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}]}\Big]^{-1}\\
&\quad \exp\Big\{-\frac{1}{2}[1-[\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}]]\\
&\quad [(\frac{(Y_1-Y_2)-(\mu_{Y_1}-\mu_{Y_2})}{\sigma_{Y_1-Y_2}})-2\{\rho_{Y_1,Y_2}\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}-\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1-Y_2}}\}]\\
&\quad [(\frac{(Y_1-Y_2)-(\mu_{Y_1}-\mu_{Y_2})}{\sigma_{Y_1-Y_2}})(\frac{Y_2-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}})+(\frac{Y_2-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}})^2]\Big\} \qquad (9)
\end{aligned}$$

تمرين (٥)

١ – إذا فرضنا أن X متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ وتباين σ^2 كذلك $Y=kX$ حيث k مقدار ثابت.

أ– أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y.

ب– أثبت أن $E(Y)=k\mu\ ,\ Var(Y)=k^2\sigma^2$.

٢ – بــأفتراض أن X_1, X_2 متغيــرين غيــر مــرتبطين، أوجــد معامــل الارتبــاط بــين $(X_1 + X_2)$،$(X_1 - X_2)$ بدلالة $Vax(X_1), Vax(X_2)$.

٣ – بــافتراض أن X_1, X_2, X_3 متغيــرات عــشوائية غيــر مرتبطــة uncorrelated random variables ولكل منهم نفس التباين σ^2 [95].

أوجد معامل الارتباط بين Y_1, Y_2 بحيث:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2 + X_3$$

٤ – بأفتراض أن X_1, X_2 متغيران مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد القياسي.

١ – أوجد التوزيع المشترك للمتغيرات Y_1, Y_2 حيث:

$$Y_1 = \frac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{2}} \quad , \quad Y_2 = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$$

٢ – أثبت أن التوزيع الأحتمالي للمتغير Y_1 هو نفس التوزيع للمتغير Y_2 حيث:

$$Y_1 = 2X_1\, X_2 \quad , \quad Y_2 = X_2^2 - X_1^2$$

ملحوظة: $X_2^2 - X_1^2 = 2\dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\;\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$

٥ – إذا فرضنا أن المتغيرات X_i ، $i = 1,2,...,n$ متغيرات مستقلة وكل منها يتبع التوزيع الأسي بمعلمة λ_i. وبافتراض أن $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$،

أثبت أن المتغير Y يتبع توزيع جاما ثم أوجد عدد درجات الحرية.

٦ – بأفتراض أن X متغير عشوائي بدالة توزيع تراكمية:

$$F(X) = \exp\left[-e^{-(x-\alpha)/\beta}\right]$$

وبافتراض أن Y متغير بحيث:

$$Y = \exp[-(X-\alpha)/\beta]$$

أوجد التوزيع الأحتمالي للمتغير Y.

٧- إذا فرضنا أن X متغير عشوائي بدالة كثافة الأحتمال $f(X)$،

$$f(X) = \left(\frac{1}{B(a,b)}\right)\left(\frac{X^{a-1}}{(H\,X)^{a+b}}\right) \quad , \; a,b>0 \;\; , \;\; 0<X<\infty$$

أوجد دالة كثافة الأحتمال للمتغير Y حيث:

$$Y = \frac{1}{1+X}$$

٨- بأفتراض أن (X,Y) متغيرين لهما التوزيع المعتاد الثنائي.

أوجد: أ- دالة الأحتمال المشتركة للمتغيرين (cX,dY), (aX,bY)

بحيث تحقق المقادير الثابتة a,b,c,d العلاقة التالية:

$$ad - bc \neq 0$$

٩- إذا كان $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد بتوقع وتباين μ_i, σ_i^2، $i = 1,2,\ldots,n$.

بافتراض أن $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. أثبت أن المتغير Y يتبع التوزيع المعتاد أيضاً بتوقع يساوى مجموع توقعات المتغيرات. وتباين يساوى مجموع تباينات المتغيرات أيضاً.

(٢٠-٨) تمرينات Exercises

(٢٠-١) ١- أثبت أن كل دالة من الدوال التالية تمثل دالة كثافة أحتمال:

a) $f_1(X) = 3e^{-3X} \quad , \quad 0 < X < \infty$

b) $f_2(X) = 4e^{-4X} \quad , \quad 0 < X < \infty$

c) $f_3(X) = (\theta+1) f_1(X) - \theta f_2(X) \quad , 0 < \theta < 1 \ , \ 0 < X < \infty$

٢- أوجد الدالة التراكمية لكل دالة من دوال كثافات الأحتمال أعلاه.

٣- أوجد الدالة المولدة للعزوم لكل دالة من دوال كثافات الأحتمال أعلاه.

(٢٠-٢) ١- أثبت أن الدالة التالية دالة كثافة أحتمال للمتغير X:

$$f(X) = \frac{\alpha^2(\alpha+2X)}{X^2(\alpha+X)^2} + \frac{X(2\alpha+X)}{\alpha(\alpha+X)^2} \quad , \quad \alpha , X > 0$$

٢- أوجد الوسيط.　　　　٣- أوجد المنوال.

(٢٠-٣) إذا كانت k مقدار ثابت، بأفتراض أن $f(X)$ دالة كثافة أحتمال للمتغير X حيث:

$$f(X) = k\,X^2 \quad , \quad -k < X < k$$

١- أوجد الدالة التراكمية للمتغير X.

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X.

(٢٠-٤) إذا فرضنا أن $f(X)$ دالة كثافة أحتمال للمتغير X بحيث:

$$f(X) = k(1/\beta)\{1-[(X-\alpha)/\beta]\} \quad , \quad \alpha\text{-}\beta < X < \alpha+\text{-}\beta \ , \ \beta > 0$$

١- أوجد قيمة k ثم أوجد $E(|x-\alpha|)$.

٢- أوجد كل من المتوسط، الوسيط، التباين للمتغير X.

(٢٠-٥) إذا فرضنا أن دالة كثافة الأحتمال للمتغير X حيث:

$$f(X) = |1 - X| \qquad , \qquad 0 \le X \le 2$$

أوجد كل من $E(X)$, $var(X)$.

(٢٠-٦) إذا كانت $f(X)$ دالة كثافة أحتمال للمتغير X بحيث

$$f(X) = ke^{-\alpha X(1-e^{-\alpha x})} \qquad , \quad 0 < X < \infty$$

١- أوجد قيمة k.　　　　٢- أوجد الدالة التراكمية لـ X.

٣- أوجد توقع وتباين X.

(٢٠-٧) إذا كان X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بحيث:

$$n = 30 \qquad , \qquad p = 0.3$$

١- أوجد الأحتمالات التالية:

$$\text{i)}\ P_r(X < \mu - \sigma) \qquad\qquad \text{ii)}\ P_r(X < \mu - 3\sigma)$$

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X.

٣- من الدالة المولدة للعزوم للمتغير X أوجد التوقع والتباين لـ X.

(٢٠-٨) إذا كان X متغير يتبع توزيع بواسون بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$P_r(X = 0) = P_r(X = 1)$$

أوجد توقع X.

(٢٠-٩) إذا كان X متغير يتبع التوزيع المنتظم في الفترة (1,2) أوجد قيمة Z بحيث:

$$P_r(X > Z + \mu) = 0.30$$

(٢٠-١٠) إذا كان X متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 3$ وتباين $\sigma^2 = 4$.

١- أوجد $P_r(|X-3|<1)$.

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X ومنها أوجد توقع وتباين X.

(٢٠-١١) إذا كان X متغير يتبع توزيع بواسون بحيث:

$$P_r(X=0)=\frac{1}{2}$$

أوجد $E(X)$

(٢٠-١٢) إذا كان X يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين (n,p) فإذا كان $\sigma^2=9$, $\mu=6$

١- أوجد n ، p.

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X.

٣- قرب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع المعتاد.

٤- من (٣) أحسب $P_r(X=5)$.

(٢٠-١٣) إذا كان X متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمة λ

١- أوجد: $P_r(X<1|X\le 3)$

٢- قرب التوزيع الأسى إلى التوزيع المعتاد.

(٢٠-١٤) إذا كان X متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين n,p. حدد قيمة p التي تجعل تباين X أكبر ما يمكن بأفتراض أن n ثابت.

(٢٠-١٥) إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمة λ بحيث:

$$P_r(X\le 1)=P_r(X>1)$$

١- أوجد $var(X)$ ، ٢- أوجد الدالة التراكمية للمتغير X.

(٢٠-١٦) إذا كان X متغير عشوائي الدالة المولدة للعزوم $m_x(t)$ بحيث:

$$m_x(t) = Exp(e^t - 1)$$

١- أوجد $E(X)$ ، ٢- أوجد الوسيط.

(٢٠-١٧) أوجد المنوال والوسيط لكل من:

١- متغير يتبع توزيع بيتا.

٢- متغير يتبع توزيع جاما.

(٢٠-١٨) إذا كان X متغير يتبع التوزيع المنتظم بتوقع (1) وتباين $(4/3)$.

١- أوجد $P_r(X < 0)$.

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير X.

(٢٠-١٩) قرب كل من توزيع بواسون والتوزيع الأسى وتوزيع جاما إلى التوزيع المعتاد، ثم أوجد التوقع والتباين للمتغير الذي يتبع التوزيع التقريبي.

(٢٠-٢٠) إذا كانت دالة كثافة الأحتمال المشتركة لـ X,Y على النحو التالي:

$$f(X,Y) = ke^{-(X+Y)} \quad , \quad 0 < X < 2, \quad 0 < Y < 3$$

المطلوب: ١- أوجد قيمة المقدار الثابت k.

٢- أوجد الدوال والاحتمالات التالية:

(i) $f(X) \quad , \quad f(Y)$

(ii) $P_r(X > 1) \quad , \quad P_r(Y < 2)$

(iii) $P_r(X < Y \mid X < 2Y)$

(iv) $P_r(1 < X + Y < 2)$

٣- أوجد التوقعات التالية:

(i) $E(Y \mid X = 7)$

(ii) $E(X \mid Y = y)$

(iii) $E(X + Y)$

(٢٠-٢١) إذا كان X,Y متغيرين عشوائيين بدالة كثافة أحتمال مشتركة $f(X,Y)$ بحيث:

$$f(X,Y) = 0 \quad , \quad 0 < X < Y \ , \quad 0 < Y < 1$$

المطلوب : ١- أوجد $E(X)$, $E(Y)$, $Cov(X,Y)$.

٢- أوجد التوزيع الشرطي لـ Y عندما $X = x$.

(٢٠-٢٢) أثبت أن:

$$F(X) + F(Y) - 1 \le F(X,Y) \le \sqrt{F(X)\,F(Y)}$$

لجميع قيم X , Y.

(٢٠-٢٣) إذا فرضنا أن X متغير عشوائي له التوزيع المنتظم في الفترة (0,1) بدالة كثافة أحتمال $f(X) = 1$. وبافتراض أن التوزيع الشرطي للمتغير Y بشرط $X = \lambda$ يتبع توزيع ذات الدين بالمعلمتين n,p على النحو:

$$P_r[Y = y \mid X = \chi] = C_y^n\, \chi^y (1-\chi)^{n-y} \quad , \quad Y = 0,1,\ldots,n$$

(٢٠-٢٤) إذا كانت دالة كثافة الأحتمال المشترك للمتغيرين X,Y على النحو التالي:

$$f(X,Y) = e^{-(x+y)} \quad , \quad 0 < X < \infty , \quad 0 < Y < \infty$$

أوجد ما يلي:

(i) $P_r(1 < (X + Y) < 3)$

(ii) $P_r(X > 2)$

(iii) $P_r(0 < X < 1 \mid Y = 2)$

(iv) $Cov(X, Y)$

(٢٠-٢٥) إذا فرضنا أن X_1, X_2 متغيرين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد القياسي. فإذا فرضنا أن:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad , \quad Y_2 = X_1^2 + X_2^2$$

المطلوب: ١- أثبت أن الدالة المولدة للعزوم المشتركة لـ Y_1, Y_2 على النحو التالي:

$$\frac{\exp[t_1^2/(1-2t_2)]}{(1-2t_2)} \quad , \quad -\infty < t_1 < \infty \ , \ -\infty < t_2 < \frac{1}{2}$$

٢- أوجد معامل الأرتباط بين Y_1, Y_2.

(٢٠-٢٦) أعتبر تمرين (٢٠-٢٤) أوجد ما يلي:

$$i)\, m_{x,y}(t_1, t_2) \quad , \quad ii)\, E(XY) \quad , \quad iii)\, P_r(X + Y > 3)$$

$$iv)\, E(X \mid Y) \quad , \quad v)\, E(Y \mid X) \quad , \quad vi)\, Cov(X, Y)$$

الباب الحادي والعشرون

نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات عشوائية $(\tilde{b}_i)$

(CCP) Models with Random Parameters $(\tilde{b}_i)$

(٢١-١) مقدمة Introduction

في هذا الباب سوف نتناول بشيء من التفصيل نماذج البرمجة الأحتمالية probabilistic programming models عندما تكون بعض (أو كل) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة وأستخدام أسلوب (CCP) لتحويلها إلى نماذج برمجة يقينية مكافئة equivalent deterministic programming models، ثم حل النموذج اليقينى بأحد أساليب البرمجة الرياضية المعروفة [135,46].

ويتطلب أستخدام أسلوب (CCP) كما ذكرنا في الفصل (١٩-٤) أن تكون دالة التوزيع التراكمية F_i للمتغير $\tilde{b}_i$ كذلك الدالة العكسية لها F_i^{-1} معروفه بالنسبة للمعلمات التي تمثل متغيرات عشوائية [141,٧].

وفي هذا الباب سوف نتناول كيفية تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة في ثلاث حالات على النحو التالي:

<u>الحالة الأولى</u>: عندما تكون بعض (أو كل) المتغيرات ($\tilde{b}_i$) بحيث $i = 1,2,...,m$ متغيرات عشوائية متصلة. ومن أمثلة هذه المتغيرات المتغير المنتظم المتصل، المتغير الأسي السالب، المتغير المعتاد، المتغير المعتاد القياسي، متغير مربع كا، .... الخ.

<u>الحالة الثانية</u>: عندما تكون بعض (أو كل) المتغيرات ($\tilde{b}_i$) بحيث $i = 1,2,...,m$ متغيرات عشوائية متقطعة. ومن أمثلة هذه المتغيرات المتغير المنتظم المتقطع، ومتغير ذات الحدين، ومتغير بواسون، والمتغير الهندسي، .....الخ.

<u>الحالة الثالثة</u>: عندما تكون بعض (أو كل) المتغيرات ($\tilde{b}_i$) متغيرات عشوائية متصلة أو متقطعة ولكن غير معلوم التوزيع الأحتمالي لها، ولكن إمكانية تقريب التوزيع الأحتمالي ($\tilde{b}_i$) إلى توزيع أحتمالي آخر معلوم الدالة العكسية للدالة التراكمية ولتكن $\widehat{F}_i^{-1}$. وذلك مثل تقريب توزيع ذات الحدين أو بواسون إلى التوزيع المعتاد القياسي (أنظر الفصل (٢٠-٥))

لذلك سوف نتناول في الفصل التالي (٢١-٢) الحالة الأولى، ثم نتناول في الفصل (٢١-٣) الحالة الثانية، أما الحالة الثالثة فإنه في حالة توافر شروط التقريب فإنه يمكن تقريب التوزيع للمتغير $\tilde{b}_i$ إلى توزيع آخر معلوم ثم أتباع نفس الأسلوب المتبع في الحالتين الأولى أو الثانية. ثم نقدم مجموعة من الأمثلة التطبيقية في الفصل (٢١-٤) بالإضافة إلى مجموعة من التمارين المتنوعة في الفصل (٢١-٥).

فإذا أعتبرنا نموذج البرمجة الخطية الأحتمالي على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (21.1)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,....,I \qquad (21.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i \quad , \quad i = I+1, I+2, ...,m \qquad (21.3)$$

$$X_j \ge 0 \qquad (13.4)$$

ويلاحظ أن حجم النموذج $(n \times m)$ حيث n تشير إلى عدد المتغيرات القرارية، m تشير إلى عدد القيود الهيكلية، حيث X_j المتغيرات القرارية والمعلمات C_j, a_{ij}, b_i مقادير ثابتة $j = 1,2,...,n$ ، $i = 1,2,...,I$ كذلك المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة حيث $i = I+1, I+2, ...,m$.

وفيما يلي سوف نوضح كيفية تحويل القيد الأحتمالي في (21.3) إلى قيد يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية (أحتمال تحقق القيد) tolerance measure معين γ_i على النحو التالي:

يمكن إعادة صياغة القيد رقم (i) في مجموعة القيود (21.3) على النحو:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i \longrightarrow F_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\Big) = 1 - \gamma_i \longrightarrow (21.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F_i^{-1}(1-\gamma_i) \qquad (21.6)$$

ويعتبر القيد (21.6) قيد يقيني. كذلك يمكن إفتراض أن القيد الأحتمالي على النحو:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j < \tilde{b}_i\Big) \geq \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \leq F_i^{-1}(1-\gamma_i) \quad (21.7)$$

بالمثل

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j < \tilde{b}_i\Big) \leq \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \geq F_i^{-1}(1-\gamma_i) \quad (21.8)$$

وفيما يلي سوف نتناول عملية تحويل القيود الأحتمالية $i = I+1\,, I+2\,,....,m$ إلى قيود يقينية بالنسبة للمتغيرات $\tilde{b}_i$ التي تتبع توزيعات أحتمالية معينة.

وبالنسبة للنموذج الأحتمالي بعد تحويله إلى نموذج يقيني مكافئ في هذه الحالة يلاحظ ما يلي:

١- حجم النموذج اليقيني $(n \times m)$ وهو نفسه حجم النموذج الاحتمالي ولم يؤدي التحويل إلى تزايد حجم النموذج كما هو في حالة أستخدام أسلوب تعدد المراحل [141,155,156,109] وهذا يعتبر من مزايا أسلوب (CCP).

٢- إذا كان النموذج الاحتمالي نموذج خطي فإن النموذج اليقيني المكافئ يكون نموذج خطي أيضاً ويمكن حله بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية. وإذا كان النموذج الأحتمالي غير خطي فإن النموذج اليقيني المكافئ يكون غير خطي أيضاً ويمكن حله بأستخدام أساليب البرمجة غير الخطية [112,124,128].

٣- أستخدام أسلوب (CCP) يتطلب وجود دالة عكسية لدالة التوزيع التراكمية للمتغير $(\tilde{b}_i)$، أي وجود $F_i^{-1}(\tilde{b}_i)$ ومعلومة الصياغة الرياضية لها، أو حساب قيمها من جداول أحصائية كما في الجداول بالملاحق من (6)-(1).

أما إذا كان النموذج الاحتمالي نموذج غير خطي **probabilistic non-linear programming model** حيث واحد على الأقل من الدوال $f(X,C)$ أو $g_i(X,\theta)$ تكون دالة غير خطية بحيث:

$$\text{Max.}Z = f(X,C) \qquad (21.9)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X,\theta) \le b_i \quad , \quad i = 1,2,....,I \qquad (21.10)$$

$$g_i(X,\theta) < \tilde{b}_i \quad , \quad i = I+1, I+2,....,m \qquad (21.11)$$

X متجه المتغيرات القرارية، ومتجه المعلمات C ، b كذلك المصفوفة θ عناصر مقادير ثابتة، أما المتجه $(\tilde{b})$ عناصره تمثل متغيرات عشوائية. وباستخدام نفس الأسلوب المتبع بالنسبة للنموذج الاحتمالي الخطي يصبح النموذج اليقيني المكافئ عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = f(X,C)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X,\theta) \le b_i \quad , \quad i = 1,2,....,I$$

$$g_i(X,\theta) = F_i^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad i = I+1, I+2,....,m$$

حيث $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ هي معكوس دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $(\tilde{b}_i)$. كذلك ممكن أن تكون بعض القيود i ، $i = I+1, I+2,....,m$ على النحو التالي:

$$g_i(X,\theta) \le F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

أو

$$g_i(X,\theta) \ge F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

وفقاً لطبيعة القيد الأحتمالي المناظر، كما سبق توضيح ذلك في نماذج البرمجة الأحتمالية الخطية.

(٢١-٢) $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية متصلة

Continuous Random Variables ($\tilde{b}_i$)

يهدف هذا الباب إلى دراسة كيفية تحويل نموذج البرمجة الأحتمالي probabilistic programming model إلى نموذج برمجة يقيني مكافئ equivalent deterministic programming model عند مستويات مأمونية معينة، عندما تكون بعض أو كل المعلمات ($\tilde{b}_i$) متغيرات عشوائية متصلة مثل المتغيرات التي تتبع التوزيعات المنتظمة أو التوزيعات الأسية أو التوزيعات المعتادة ، .... الخ [٦،90].

ويتطلب أستخدام أسلوب (CCP) تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ بمعلومية الدالة التراكمية للمتغير ($\tilde{b}_i$) والمشار إليها بالرمز $F_i(\tilde{b}_i)$ بدلالة الطرف الأيسر للقيد رقم (i) كذلك معلومية الدالة العكسية للدالة التراكمية $F_i^{-1}(\tilde{b}_i)$ [٧] عند مستويات معينة من مستويات المأمونية γ_i ، $i = 1,2,...,m$ [121].

وسوف نتناول المعلمات ($\tilde{b}_i$) التي تتبع التوزيع المنتظم، التوزيع الأسي، التوزيع المعتاد، ... الخ على النحو التالي.

(٢١-٢-١) $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع منتظم $\tilde{b}_i$ ~ Uniform Distribution

في الفصل (٢٠-٤) تناولنا بالتفصيل المتغير المتصل المنتظم. فإذا أعتبرنا $\tilde{b}_i$ متغير منتظم يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة أحتمال $f_i(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \frac{1}{(b-a)} \qquad , \qquad a \le \tilde{b}_i \le b$$

من نظرية (٢٠-٨) نجد أن الدالة التراكمية للمتغير $\tilde{b}_i$ على النحو التالي:

$$F_i(\tilde{b}_i) = \frac{(\tilde{b}_i - a)}{(b - a)} \qquad (21.12)$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i$$

فإنه يمكن إعادة صياغته على النحو التالي عند مستوى المأمونية γ_i

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i$$

أو بعبارة أخرى

$$1 - F_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\Big) = \gamma_i \longrightarrow F_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\Big) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \qquad (21.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F_i^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (21.14)$$

بالتعويض بالطرف الأيمن للدالة التراكمية في (21.12) في الطرف الأيسر للقيد (21.13) نجد أن:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = (1 - \gamma_i)(b - a) + a \qquad (21.15)$$

والقيد (21.14) قيد يقيني عند مستوى المأمونية γ_i.

ملحوظة: (١) من (21.14) ، (21.15) نجد أن:

$$F_i^{-1}(1 - \gamma_i) = (1 - \gamma_i)(b - a) + a$$

(٢) ممكن أن يأخذ القيد الأحتمالي شكل متباينة أيضاً على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

أو

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge F_i^{-1}(1-\gamma_i)$$

<u>مثال (٢١-١)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 2X_1 + 5X_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T.}\quad 2X_1 + X_2 \le 10 \quad (2)$$

$$3X_1 + 5X_2 \le 30 \quad (3)$$

$$-X_1 + X_2 \le \tilde{b} \quad (4)$$

$$X_1,\ X_2 \ge 0$$

حيث $\tilde{b}$ متغير منتظم بمعلمتين $a=1,\ b=9$.

المطلوب: ١- أوجد $E(\tilde{b})$ ثم أعتبر الطرف الأيمن في القيد (4) يساوي $E(\tilde{b})$، ثم حل النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة.

٢- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma = 0.6$ - حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج مكافئ يقيني ثم أوجد الحل الأمثل.

٣- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma = 0.9$ - حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

٤- قارن بين نتائج النماذج اليقينية في الحالات الثلاثة أعلاه.

الحل: ١- من نظرية (٢٠-٨) نجد أن:

$$E(\tilde{b}) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

ويصبح القيد اليقيني المكافئ للقيد الأحتمالي رقم (4) على النحو التالي:

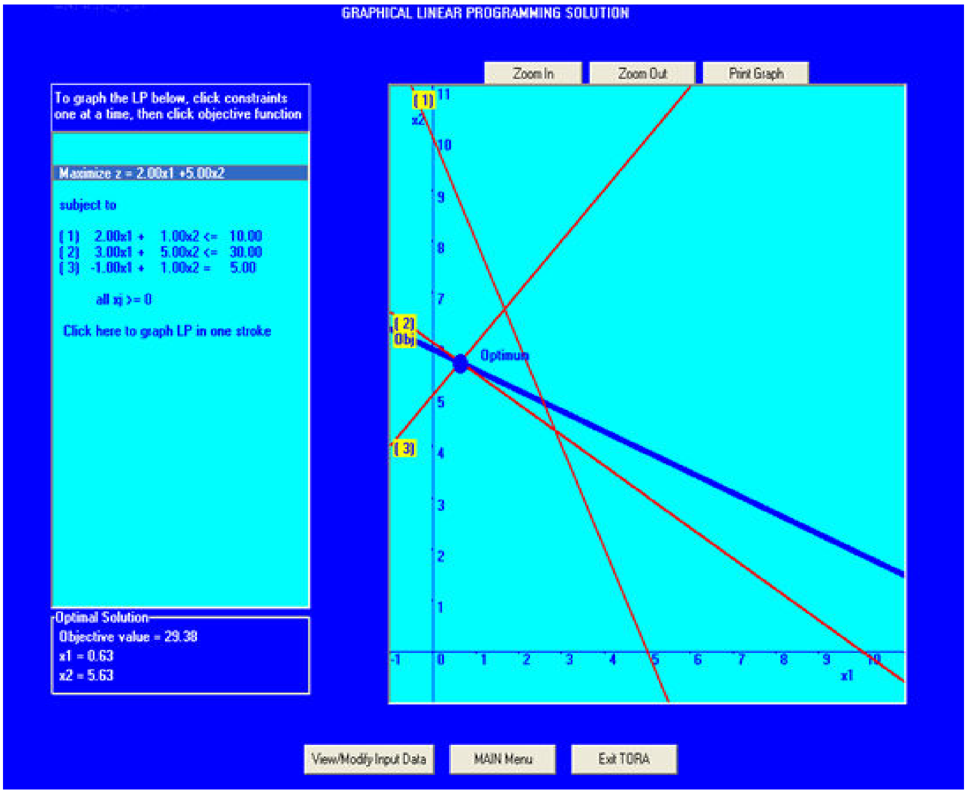
$$-X_1 + X_2 \leq 5 \qquad (5)$$

وبأستبدال القيد (4) بالقيد رقم (5) في النموذج الأحتمالي أعلاه ثم حله نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 29.38 \quad , X_1^* = 0.63 \quad , X_2^* = 5.63 \qquad (6)$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١)



٢- إذا فرضنا أن $\gamma = 0.6$ فإنه يمكن وضع القيد الأحتمالي رقم (4) على النحو التالي:

$$P_r(-X_1 + X_2 \le \tilde{b}) = 0.6 \qquad (7)$$

وبتحويل القيد الأحتمالي (7) إلى قيد يقيني مكافئ بأستخدام العلاقة (21.15) فإن:

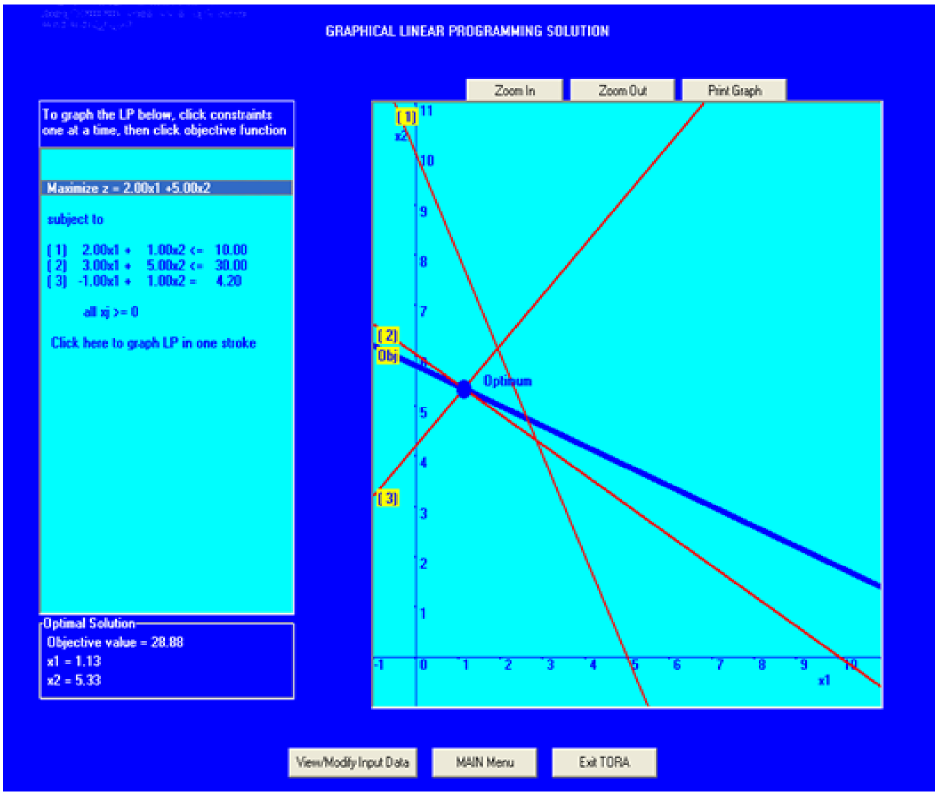
$$-X_1 + X_2 = (1-0.6)(9-1)+1 = 4.2 \qquad (8)$$

وبأستبدال القيد الأحتمالي رقم (4) بالقيد اليقيني المكافئ رقم (8) في النموذج (1)-(4) وبحل النموذج اليقيني يكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 28.88 \quad , \; X_1^* = 1.13 \quad , \; X_2^* = 5.33 \qquad (9)$$

والشكل التالي يوضح بيانياً الحل الأمثل في هذه الحالة.

شكل (٢١-٢)



٣- وعندما $\gamma = 0.9$ فإنه يمكن تحويل القيد الأحتمالي على النحو التالي:

$$P_r(-X_1 + X_2 \le \tilde{b}) = 0.9 \longrightarrow$$

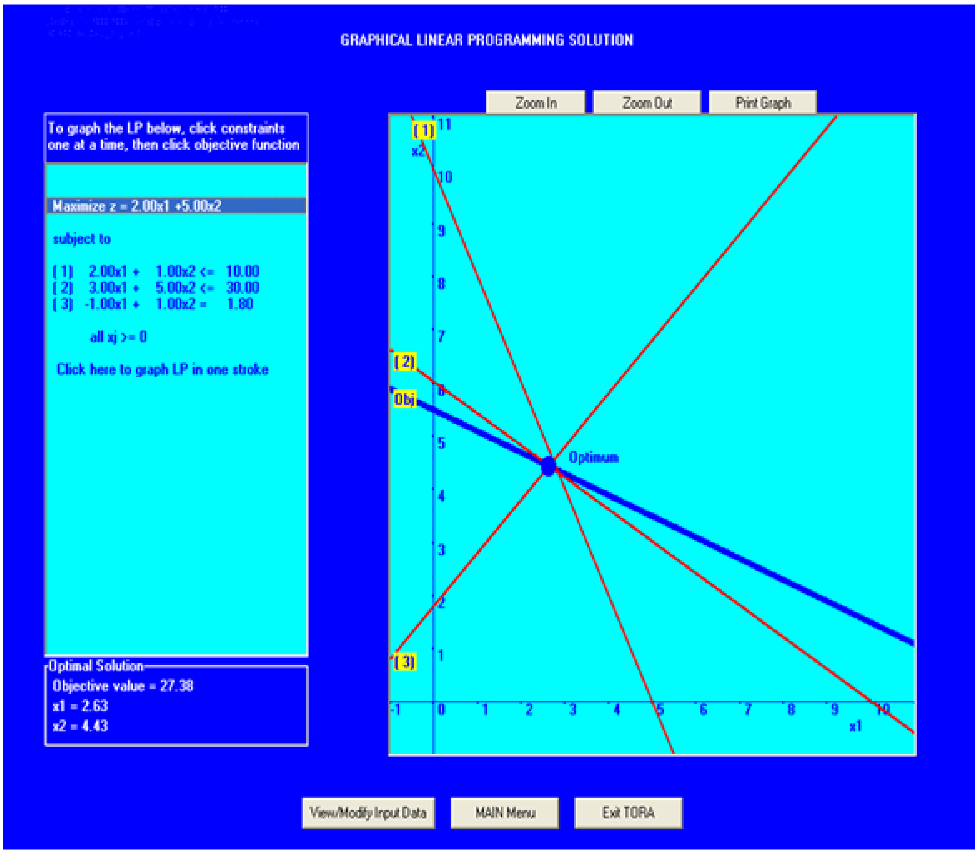
$$-X_1 + X_2 = 1.8 \qquad (10)$$

وبأستبدال القيد الأحتمالي رقم (4) بالقيد اليقيني رقم (10) في النموذج (4)-(1) وبحل النموذج اليقيني في هذه الحالة يكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 27.38 \quad , \ X_1^* = 2.63 \quad , \ X_2^* = 4.43 \qquad (11)$$

والشكل التالي يوضح الحل البياني في هذه الحالة.

شكل (٢١-٣)



٤- الجدول التالي يلخص النتائج في الحالات الثلاثة السابقة

جدول (٢١-١)

رقم الحل	γ	الحل
(6)	0.50	$Z^* = 29.38 \quad , X_1^* = 0.63 \quad , X_2^* = 5.63$
(9)	0.60	$Z^* = 28.88 \quad , X_1^* = 1.13 \quad , X_2^* = 5.33$
(11)	0.90	$Z^* = 27.38 \quad , X_1^* = 2.63 \quad , X_2^* = 4.43$

ومن الجدول يتضح أن القيمة المثلي لـ Z^* تتناقص (الهدف تعظيم) كلما زاد مستوى المأمونية أو بعبارة أخرى يتراجع الحل الأمثل كلما زادت قيمة مستوى المأمونية γ (حيث أن الدالة العكسية F^{-1} للمتغير الأحتمالي في هذه الحالة دالة متناقصة في مستوى المأمونية γ).

(٢١-٢-٢) $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الأسى $\tilde{b}_i \sim$ Exponential Distribution

إذا فرضنا أن المعلمة $\tilde{b}_i$ متغير متصل يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين λ_i, α_i بدالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ حيث [134,51]:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \operatorname{Exp}[-\lambda_i(\tilde{b}_i - \alpha_i)] \quad , \lambda_i > 0 \quad , \quad \tilde{b}_i \ge \alpha_i \quad , \quad \alpha_i \ge 0$$

وفي الحالة الخاصة عندما يتبع المتغير $(\tilde{b}_i)$ التوزيع الأسي بمعلمة واحدة λ_i أو بعبارة أخرى عندما $\alpha_i = 0$ فإن:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \operatorname{Exp}[-\lambda_i \, \tilde{b}_i]$$

ومن نظرية (٢٠-١٠) نجد أن دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{b}_i$ المشار إليها بالرمز $F(b_i)$ حيث:

$$F(b_i) = 1 - Exp[-\lambda_i(b_i - \alpha_i)] \qquad (21.16)$$

وبالتالي يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالي التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i$$

عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < \tilde{b}_i) = \gamma_i \longrightarrow 1 - F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$F_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \qquad (21.17)$$

ومن تعريف الدالة التراكمية في (12.16) والتعويض في الطرف الأيسر في القيد (21.17) نجد أن:

$$1 - Exp\left[-\lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \alpha_i)\right] = 1 - \gamma_i$$

وبأخذ ln للطرفين في المعادلة أعلاه نجد أن:

$$\ln Exp\left[-\lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \alpha_i)\right] = \ln \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i \qquad (21.18)$$

ملحوظة: ١- من تعريف الدالة التراكمية عند المستوى $(1-\gamma_i)$ في (21.16) نجد أن الدالة العكسية هو الطرف الأيمن في (21.18) أو بعبارة أخرى:

$$F_i^{-1}(1 - \gamma_i) = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i \qquad (21.19)$$

٢- الدالة $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ دالة متناقصة في γ_i.

٣- في الحالة الخاصة عندما $\alpha = 0$ فإن:

$$F(b_i) = 1 - \operatorname{Exp}[-\lambda_i b_i] \longrightarrow F_i^{-1}(1-\gamma_i) = \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} \qquad (21.20)$$

٤- وعند مستوى مأمونية لا يقل عن γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow 1 - F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) \ge \gamma_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le F_i^{-1}(1-\gamma_i) \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i$$

بالمثل عند مستوى مأمونية لا يزيد عن γ_i فإن:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge \frac{-\ln \gamma_i}{\lambda_i} + \alpha_i$$

<u>مثال (٢١-٢)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Min.} Z = 7X_1 + 4X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 \ge 6 \qquad (2)$$

$$-X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1 \qquad (3)$$

$$5X_1 - 2X_2 \le \tilde{b}_2 \qquad (4)$$

$$X_1,\ X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $\lambda_1 = 2,\ \alpha_1 = 5$، والمتغير $\tilde{b}_2$ يتبع التوزيع الأسي بمعلمة $\lambda_2 = 0.2$

المطلوب: ١-أوجد $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ ثم أستبدل الطرف الأيمن في (3),(4) بـ $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج البقيني في هذه الحالة.

٢- أعتبر مستوى المأمونية لتحقيق كل قيد من القيدين (3),(4) هما $\gamma_1 = 0.6, \gamma_2 = 0.7$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة.

٣- أعتبر مستوى المأمونية لتحقيق كل قيد من القيدين (3),(4) هما $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.9$ وأوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

٤- قارن بين نتائج النموذج المكافئ في الحالات الثلاثة أعلاه.

الحل: ١- من نظرية (٢٠-١٠) نجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \frac{1}{\lambda_1} + \alpha_1 = 5.5 \qquad , \qquad E(\tilde{b}_2) = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{0.2} = 5 \qquad (6)$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن للقيدين (3),(4) بـ $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ يصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

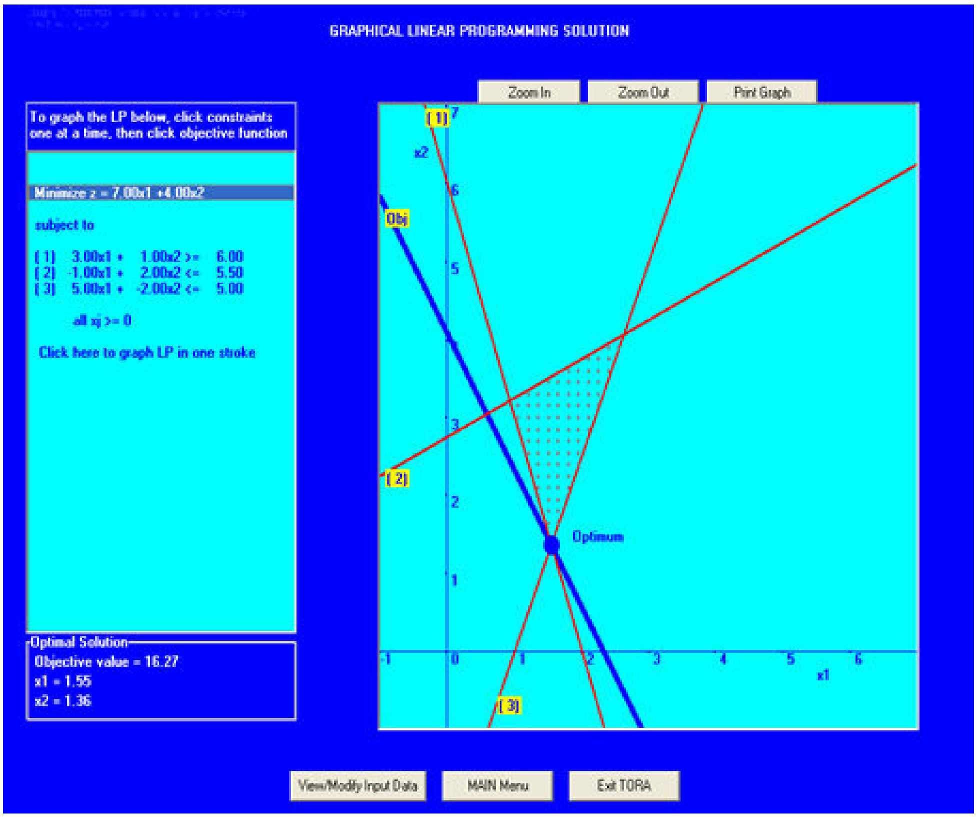
$$\begin{aligned} \text{Min.} Z &= 7X_1 + 4X_2 \\ \text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 &\geq 6 \\ -X_1 + 2X_2 &\leq 5.5 \\ 5X_1 - 2X_2 &\leq 5 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 16.27 \quad , X_1^* = 1.55 \quad , X_2^* = 1.36 \qquad (7)$$

والشكل (٢١-٤) التالي يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢١-٤)



٢- عند $\gamma_1 = 0.6 , \gamma_2 = 0.7$ فإن:

$$P_r(-X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.6 \longrightarrow$$

وبأستخدام العلاقة (21.18):

$$-X_1 + 2X_2 = \frac{-\ln(0.6)}{2} + 5 = 5.26 \qquad (8)$$

بالمثل بالنسبة للقيد (4)

$$P_r(5X_1 - 2X_2 \le \tilde{b}_2) = 0.7 \longrightarrow 5X_1 - 2X_2 = \frac{-\ln(0.7)}{0.2} = 1.78 \quad (9)$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن للقيدين (3),(4) بالقيدين (9),(8) على الترتيب يصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

$$\text{Min.} Z = 7X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 \geq 6$$

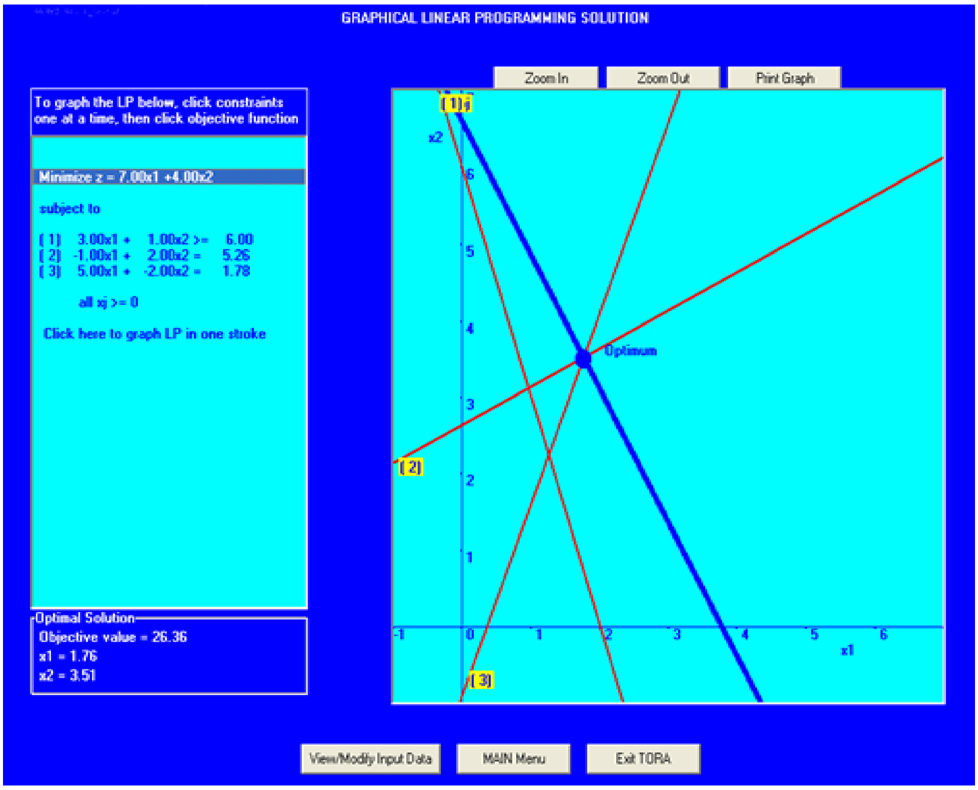
$$-X_1 + 2X_2 = 5.26$$

$$5X_1 - 2X_2 = 1.78$$

$$X_1 , \ X_2 \geq 0$$

والشكل (٢١-٥) التالي يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢١-٥)



وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 26.36 \quad , \; X_1^* = 1.76 \quad , \; X_2^* = 3.51 \qquad (10)$$

٣- وبالمثل عندما $\gamma_1 = 0.8 , \gamma_2 = 0.9$ فإن:

$$P_r(-X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.8 \longrightarrow$$

$$-X_1 + 2X_2 = \frac{-\ln(0.8)}{2} + 5 = 5.11 \qquad (11)$$

$$P_r(5X_1 - 2X_2 \le \tilde{b}_2) = 0.9 \longrightarrow$$

$$5X_1 - 2X_2 = \frac{-\ln(0.9)}{0.2} = 1.12 \qquad (12)$$

ويصبح الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 24.88 \quad , \; X_1^* = 1.60 \quad , \; X_2^* = 3.43 \qquad (13)$$

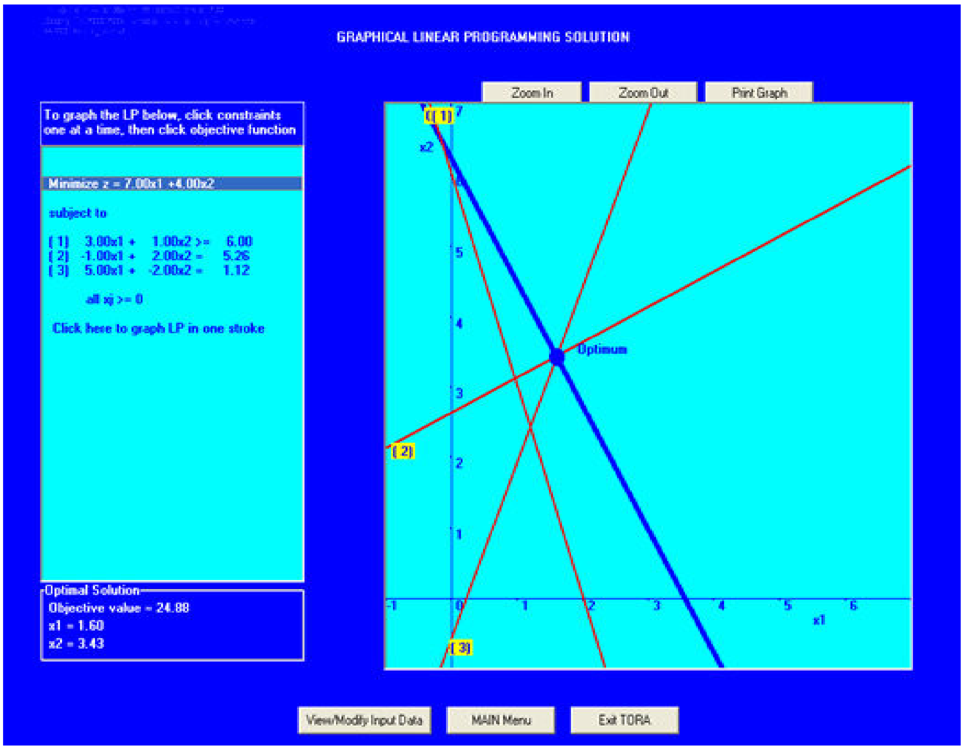
والشكل (٢١-٦) التالي يوضح الحل بيانياً.

٤- والجدول التالي يوضح الفرق بين الحلول المثلى للنماذج اليقينية السابقة.

جدول (٢١-٢)

رقم الحل	مستويات المأمونية	الحل الأمثل
(7)	$\gamma_1 = 0.632 , \gamma_2 = 0.632$	$Z^* = 16.27 , \; X_1^* = 1.55 , \; X_2^* = 1.36$
(10)	$\gamma_1 = 0.6 , \gamma_2 = 0.7$	$Z^* = 26.36 , \; X_1^* = 1.76 , \; X_2^* = 3.51$
(13)	$\gamma_1 = 0.8 , \gamma_2 = 0.9$	$Z^* = 24.88 , \; X_1^* = 1.60 , \; X_2^* = 3.43$

شكل (٢١-٦)



مثال (٢١-٣): أعتبر المثال السابق (٢١-٢)، إذا فرضنا أن $\gamma_1 \ge 0.6 , \gamma_2 \le 0.7$. أوجد النموذج اليقيني المكافئ، ثم قارن الحل في هذه الحالة بالحل في المثال السابق.

الحل: في هذه الحالة يصبح النموذج اليقيني بعد التحويل الأحتمالي على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = 7\,X_1 + 4\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 3\,X_1 + X_2 \ge 6$$

$$-X_1 + 2\,X_2 \le 5.26$$

$$5\,X_1 - 2\,X_2 \ge 1.78$$

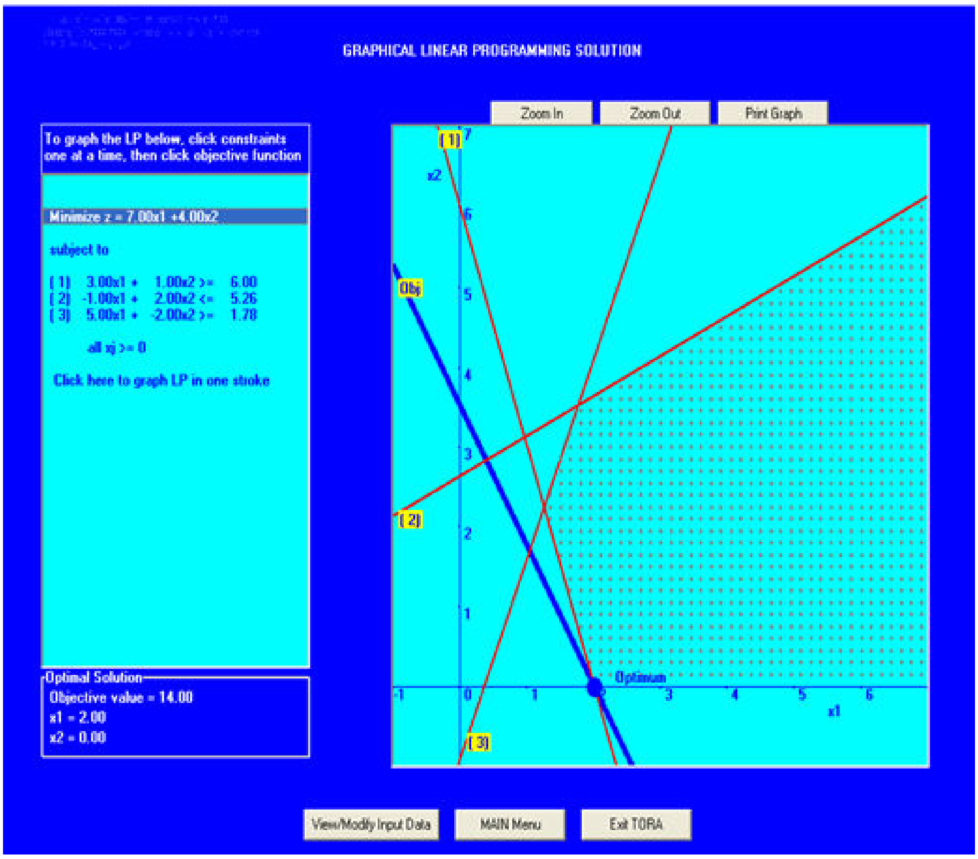
$$X_1 \,,\; X_2 \ge 0$$

وبحل النموذج نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 14 \quad , X_1^* = 2.0 \quad , X_2^* = 0$$

والشكل (٢١-٧) التالي يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢١-٧)



وبمقارنة الحل في هذه الحالة بالحل في المثال السابق نجد أن دالة الهدف تحسنت من $Z^* = 26.36$ إلى $Z^* = 14$ ويرجع ذلك زيادة قيم مقياس المأمونية γ_1 أدى إلى تحسن قيمة دالة الهدف Z^*.

(٢١-٢-٣) $\tilde{b}_i$ يتبع التوزيع المعتاد $\tilde{b}_i \sim$ Normal Distribution

إذا أعتبرنا $\tilde{b}_i$ متغير يتبع التوزيع المعتاد (الطبيعي) بتوقع μ وتباين σ^2، ودالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2} \quad , \qquad -\infty < X < \infty$$

ويعتمد تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني على تحويل المتغير المعتاد $\tilde{b}_i$ إلى معتاد قياسي Z، ويرجع ذلك إلى توافر القيم المختلفة لـ F_i ، F_i^{-1} للمتغير المعتاد القياسي Z عند مستويات المأمونية γ_i في جداول إحصائية كما هو موضح بملحق رقم (٢).

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i$$

وبأفتراض مستوى المأمونية γ_i فإن:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \tilde{b}_i) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$P_r\{(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \mu) \div \sigma \le Z\} = \gamma_i \qquad (21.21)$$

Z متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسي، حيث تم تحويل المتغير المعتاد $(\tilde{b}_i)$ إلى معتاد قياسي (Z). ويمكن إعادة كتابة المعادلة (21.21) على النحو التالي:

$$1 - F(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j) = \gamma_i \longrightarrow F(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j) = 1 - \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-1}(1 - \gamma_i) \qquad (21.22)$$

وكما ذكرنا سابقاً فإن قيمة الدالة العكسية للدالة التراكمية $F^{-1}(1-\gamma_i)$ للمتغير المعتاد القياسي (Z) عند القيم المختلفة $(1-\gamma_i)$ محسوبة في الجدول الإحصائي بملحق (٢). وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٢١-٤): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 7X_1 + 5X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 8X_1 + 5X_2 \le 40 \qquad (2)$$

$$-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1 \qquad (3)$$

$$X_1 \, , \; X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير معتاد بتوقع $\mu = 10$، وأنحراف معياري $\sigma = 2$، حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية:

١- $\gamma = 0.5$ ٢- $\gamma = 0.7$ ٣- $\gamma = 0.9$

الحل: ١- إذا أعتبرنا القيد الأحتمالي:

$$P_r(-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.5 \longrightarrow$$

$$P_r\{(-5X_1 + 2X_2 - 10)/2 \le Z\} = 0.5 \longrightarrow$$

$$1 - F\{(-5X_1 + 2X_2 - 10)/2\} = 0.5 \longrightarrow \qquad (5)$$

$$F\{(-5X_1 + 2X_2 - 10)/2\} = 0.5 \longrightarrow$$

وبأستخدام جدول الدالة التراكمية للمتغير المعتاد القياسي بملحق (٢) نجد أن:

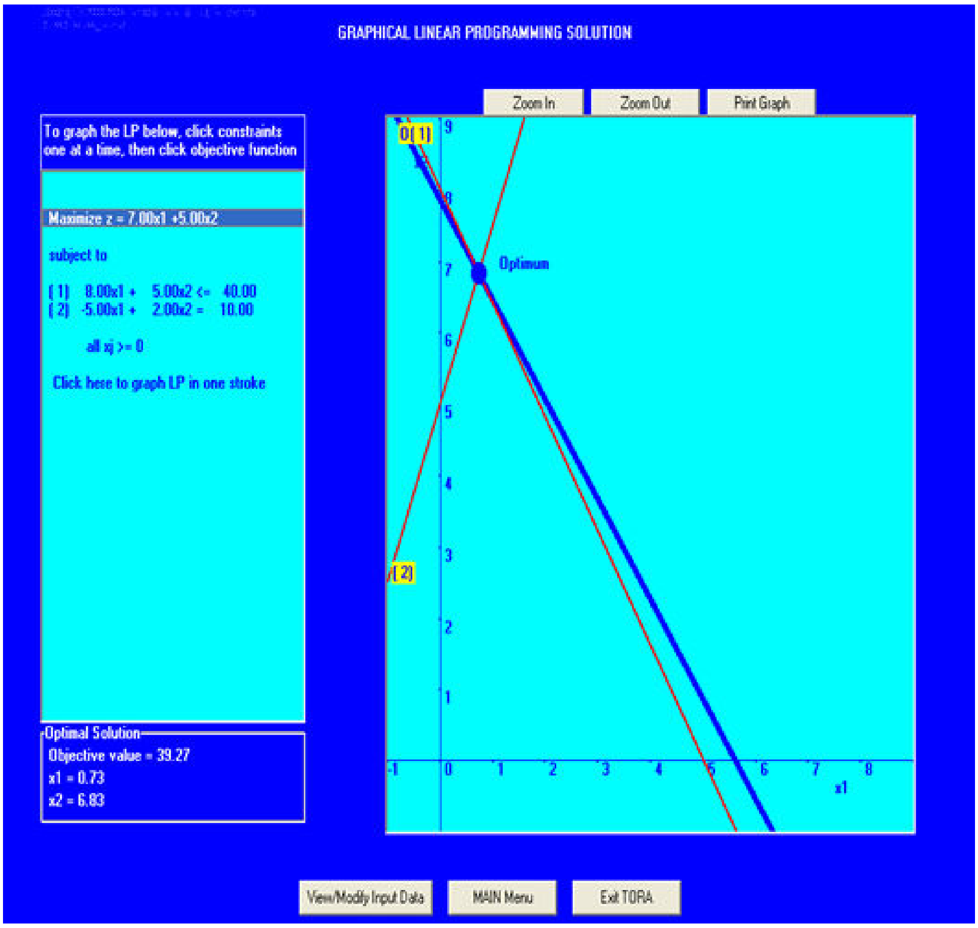
$$\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.5) = 0 \longrightarrow -5X_1 + 2X_2 = 10 \qquad (6)$$

وبأستبدال القيد (3) بالقيد (6) وبحل النموذج اليقيني نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 39.27 \quad , X_1^* = 0.73 \quad , X_2^* = 6.83 \qquad (7)$$

والشكل (٢١-٨) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً في هذه الحالة.

شكل (٢١-٨)



٢- وعندما $\gamma = 0.7$ فإن:

$$P_r(-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.7 \longrightarrow$$

$$P_r\big((-5X_1 + 2X_2 - 10)/2 \le Z\big) = 0.7 \longrightarrow$$

$$F\big((-5X_1 + 2X_2 - 10)/2\big) = 0.3 \longrightarrow$$

وبأستخدام ملحق (٢) فإن:

$$\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.3) = -0.52 \longrightarrow$$

$$-5X_1 + 2X_2 = -1.04 + 10 = 8.96 \qquad (8)$$

وبأستبدال القيد (3) بالقيد اليقيني (8) نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$Z^* = 39.14 \quad , X_1^* = 0.85 \quad , X_2^* = 6.63 \qquad (9)$$

والشكل (٢١-٩) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

٣- وعندما $\gamma = 0.9$ فإن:

$$P_r(-5X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\big((-5X_1 + 2X_2 - 10)/2 \le Z\big) = 0.9 \longrightarrow$$

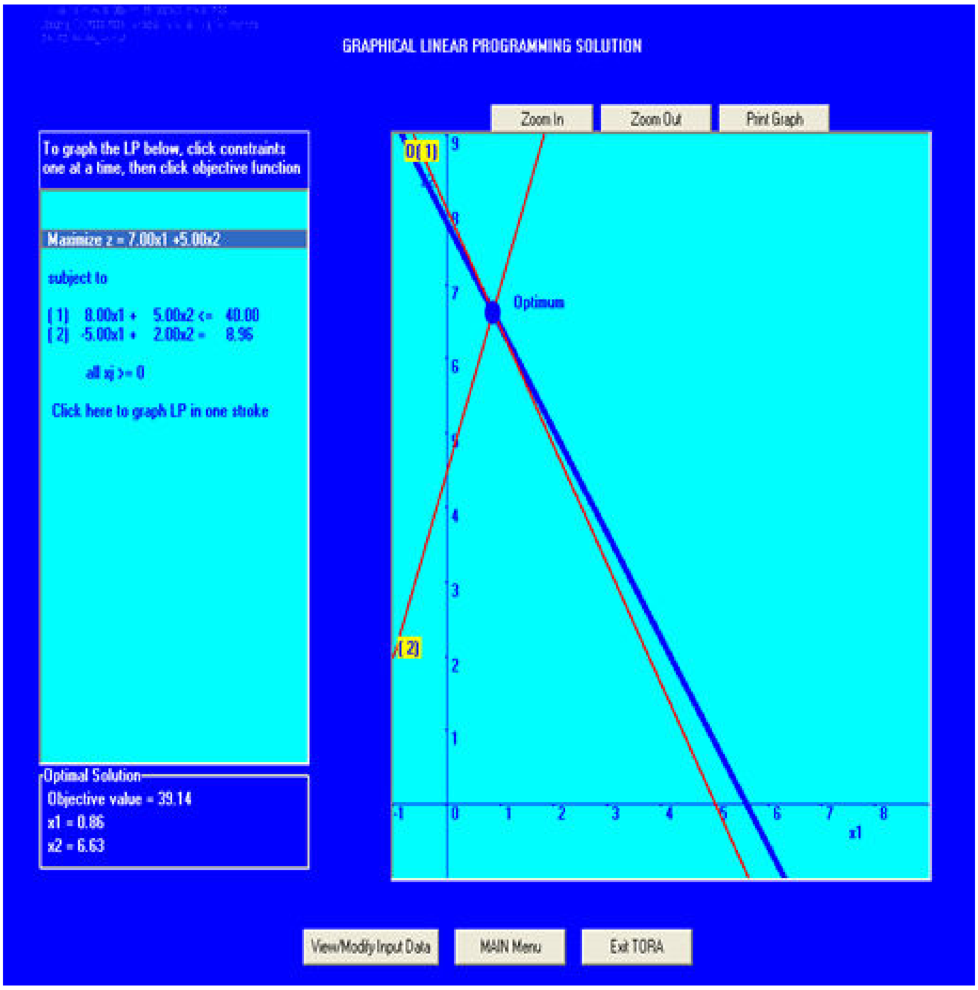
$$F\big((-5X_1 + 2X_2 - 10)/2\big) = 0.1 \longrightarrow$$

وبأستخدام ملحق (٢) فإن:

$$\frac{-5X_1 + 2X_2 - 10}{2} = F^{-1}(0.1) = -1.28 \longrightarrow$$

$$-5X_1 + 2X_2 = -2.56 + 10 = 7.44 \qquad (10)$$

شكل (٢١-٩)

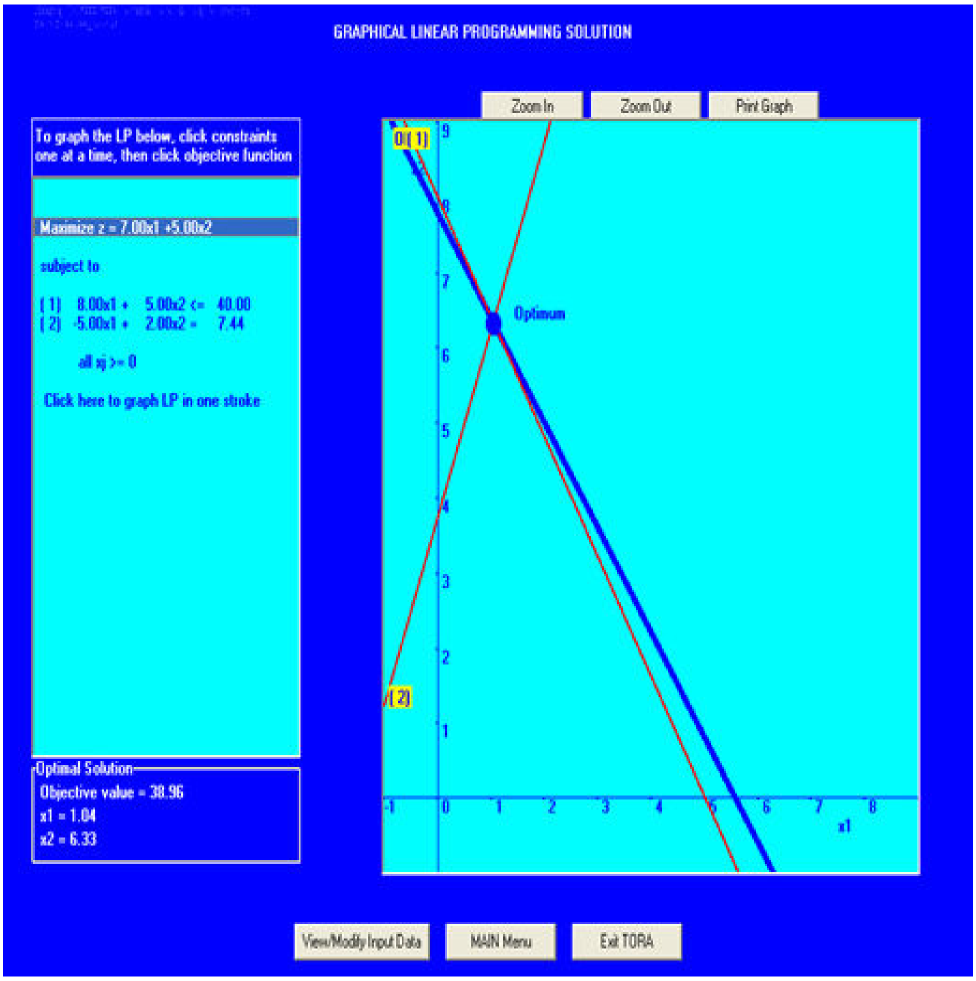


وبأستبدال القيد (3) بالقيد اليقيني (10) نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$Z^* = 38.96 \quad , \; X_1^* = 1.04 \quad , \; X_2^* = 6.33 \qquad (11)$$

والشكل (٢١-١٠) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٠)



<u>مثال (٢١-٥)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Main.}Z = 5X_1 + 4X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \qquad (2)$$

$$X_1 + 2X_2 \leq \tilde{b}_1 \qquad (3)$$

$$X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2 \qquad (4)$$

$$X_1 \,,\; X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $E(\tilde{b}_1) = 5$ ، وتباين $Var(\tilde{b}_1) = 4$ ، $\tilde{b}_2$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين $\lambda_2 = 0.4 \,, \alpha_2 = 1$.

المطلوب: عند مستوى المأمونية $\gamma_1 \geq 0.8$ ، $\gamma_2 \geq 0.8$.

الحل: من العلاقة (21.21) يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالي:

$$P_r\{(X_1 + 2\,X_2 - 5)/2 \leq \tilde{b}_1\} \leq 0.8$$

ومن ملحق (٢) نجد أن:

$$1 - F\big((X_1 + 2\,X_2 - 5)/2\big) \leq 0.8 \longrightarrow X_1 + 2\,X_2 \geq 3.32 \qquad (6)$$

كذلك القيد (4) فإن:

$$P_r(\,X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2\,) \geq 0.8 \longrightarrow F\,(X_1 + X_2\,) \geq 0.8$$

ومن العلاقة (21.18) فإن:

$$1 - Exp\{-0.4(X_1 + X_2 - 1)\} \leq 0.8 \longrightarrow$$

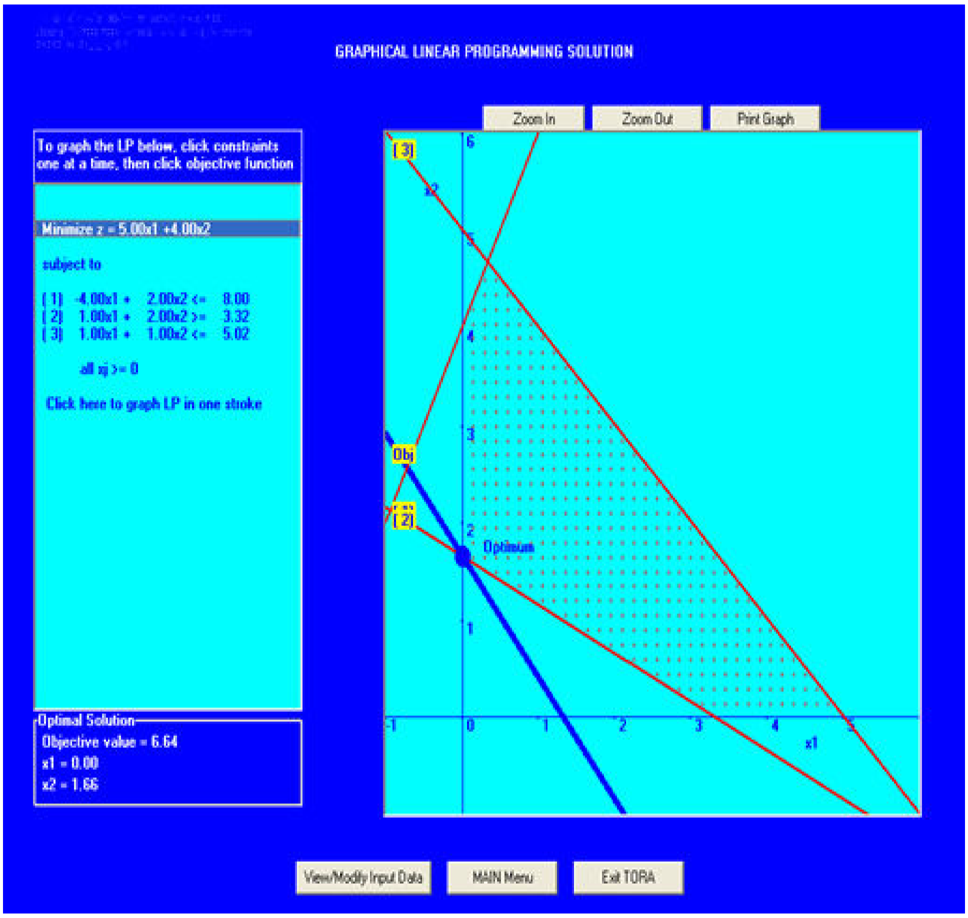
$$X_1 + X_2 \leq \frac{-\ln 0.2}{0.4} + 1 \longrightarrow X_1 + X_2 \leq 5.02 \qquad (7)$$

وبأستبدال القيدين (4),(3) بالقيدين (7),(6) وحل النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي يكون الحل الأمثل:

$$Z^* = 6.64 \quad , \; X_1^* = 0 \quad , \; X_2^* = 1.66$$

والشكل (٢١-١١) يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢١-١١)



(٢١-٢-٤) $\tilde{b}_i$ يتبع توزيع χ^2 $\tilde{b}_i \sim \chi^2$ Distribution

إذا أعتبرنا $(\tilde{b}_i)$ متغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية (k) ودالة كثافة أحتمال $f_i(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} (\tilde{b}_i)^{\frac{k}{2}-1} e^{-1/2\,\tilde{b}_i} \quad , \quad \tilde{b}_i \geq 0 \ , \ k = 1,2,\ldots$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i$$

وبأفتراض مستوى المأمونية γ_i فإن:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i \longrightarrow 1 - F\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\Big) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) \qquad (21.23)$$

ومن الجداول الإحصائية بملحق (٣) يمكن الحصول على قيمة $F^{-1}(1-\gamma_i)$ وبدرجات حرية k وبذلك يتم تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني. وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

<u>مثال (٢١-٦)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\text{Max.}Z = 10\,X_1 + 15\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 8\,X_1 + 5\,X_2 \le 40 \qquad (2)$$

$$-6\,X_1 + 5\,X_2 \le \tilde{b} \qquad (3)$$

$$X_1\,,\; X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $k = 30$.

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي في كل حالة من الحالات التالية:

١- أعتبر أن الطرف الأيمن في القيد الأحتمالي (3) يساوي $E(\tilde{b})$، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني في هذه الحالة.

٢- أعتبر $\gamma_i \le 0.5$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

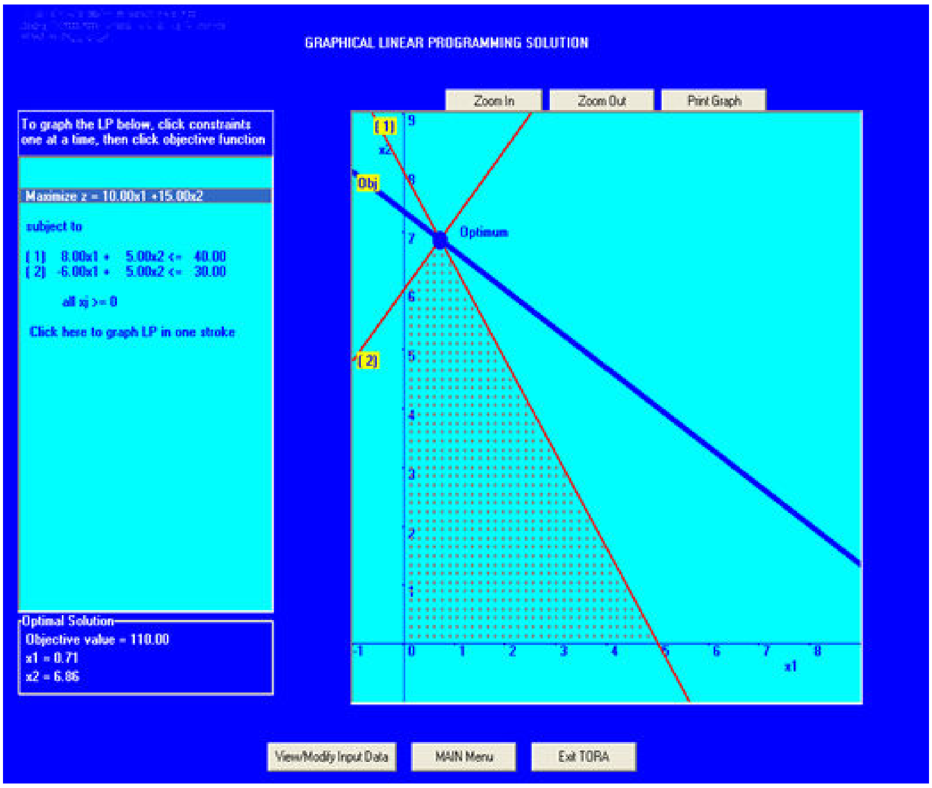
٣- أعتبر $\gamma_i = 0.95$ ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

الحل: ١- بما أن $E(\tilde{b}) = k = 30$ ويصبح النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max.} Z &= 10\,X_1 + 15\,X_2 \\ \text{S.T.} \quad 8\,X_1 + 5\,X_2 &\le 40 \\ -6\,X_1 + 5\,X_2 &\le 30 \\ X_1 \,,\; X_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٢)



وبحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 110 \quad , \; X_1^* = 0.71 \quad , \; X_2^* = 6.86$$

٢- وعندما $\gamma \le 0.5$ فإن:

$$P_r(-6X_1 + 5X_2 \le \tilde{b}) \le 0.5 \longrightarrow$$

$$-6X_1 + 5X_2 \le 29.3 \qquad (6)$$

حيث:

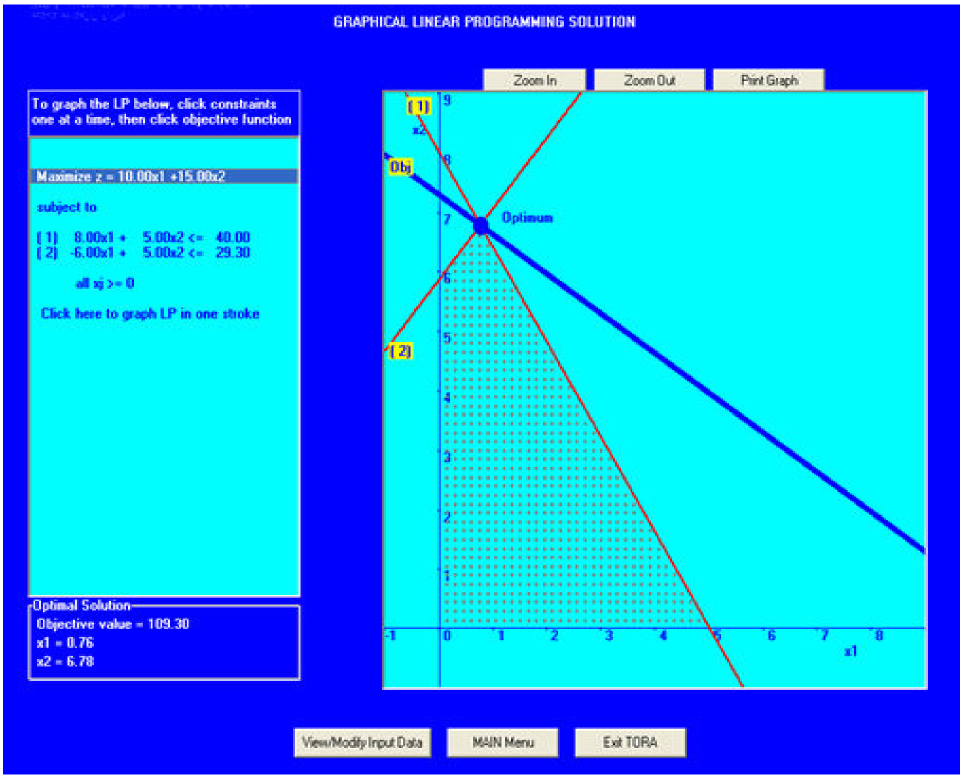
$$F^{-1}(1-\gamma) = F^{-1}(0.5) = 29.3$$

وبإحلال القيد (6) بدلاً من (5) في النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل للنموذج اليقيني في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 109.30 \quad , X_1^* = 0.76 \quad , X_2^* = 6.78$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٣)



٣- وبالمثل عندما $\gamma \ge 0.95$ فإن:

$$P_r(-6X_1 + 5X_2 \le \tilde{b}) = 0.95 \longrightarrow F(-6X_1 + 5X_2) = 0.05 \longrightarrow$$

ومن جداول التوزيع التراكمية لـ χ^2 نجد أن:

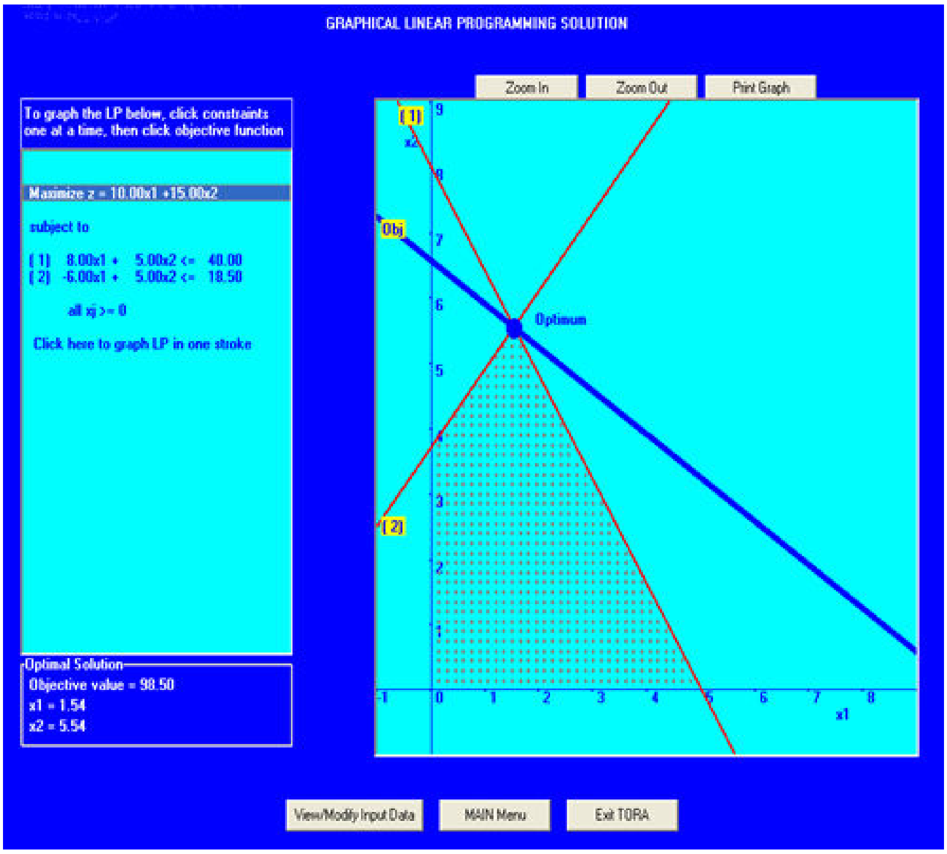
$$-6X_1 + 5X_2 \le 18.5 \qquad (7)$$

وبأستبدال القيد (5) في النموذج اليقيني أعلاه بالقيد (7) نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 98.50 \quad , \; X_1^* = 1.54 \quad , \; X_2^* = 5.54$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٤)



تمرين (١)

(١) أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 8X_1 + 3X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 3X_2 \geq \tilde{b}_1 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq \tilde{b}_2 \qquad (3)$$

$$X_1 \leq 5 \qquad (4)$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران مستقلين، $\tilde{b}_1 \sim N(6,1)$ ، $\tilde{b}_2 \sim N(40,2)$.

أ- بوضع القيم المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ في الطرف الأيمن للقيود (3),(2)- أوجد الحل الأمثل للنموذج بيانياً.

ب- حول النموذج الأحتمالي (5)-(1) إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma_1 > 0.90 , \gamma_2 > 0.9$ - ثم حل النموذج بيانياً.

ج- حول النموذج الأحتمالي (5)-(1) إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma_1 > 0.80 , \gamma_2 > 0.80$ - ثم حل النموذج بيانياً.

د- قارن بين النتائج في (أ)-(ج).

(٢) إذا فرضنا أن $\tilde{b}$ متغير عشوائي متصل بدالة كثافة أحتمال:

$$f(\tilde{b}) = 1/8 \qquad , \qquad 2 < \tilde{b} < 10$$

أ- أوجد الدالة التراكمية للمتغير $\tilde{b}$ ثم أوجد الدالة العكسية للدالة التراكمية.

ب- أعتبر القيد الأحتمالي التالي:

$$4X_1 - 3X_2 \leq \tilde{b} + 5$$

حول القيد الأحتمالي أعلاه إلى قيد يقيني مكافىء عند مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.9$.

(٣) أعتبر المتغيرين العشوائين المستقلين $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ بحيث

$$\tilde{b}_1 \sim \exp.(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 5) \ , \ \tilde{b}_2 \sim \exp.(\lambda_2 = 5, \alpha_2 = 10)$$

١- أوجد الدالة المولدة للعزوم لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$.

٢- من الدالة المولدة للعزوم أوجد التوقع والتباين لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$.

٣- أعتبر القيود الأحتمالية التالية:

$$3\,X_1 + 7\,X_2 - X_3 \geq \tilde{b}_1$$

$$5\,X_1 - X_2 + 4\,X_3 \leq \tilde{b}_2$$

حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى مأمونية $\gamma_1 > 0.90, \gamma_2 > 0.8$.

(٤) أعتبر النموذج السابق (٣)، أفترض أن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ أوجد:

١- أوجد الدالة المولدة للعزوم لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ ثم أوجد التوقع والتباين لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$.

٢- حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة في هذه الحالة.

(٥) أعتبر تمرين (٣) بحيث $\tilde{b}_1 \sim N(5,1) \ , \ \tilde{b}_2 \sim N(10,2)$ ثم حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ – وأوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني.

(٢١-٣) $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية متقطعة

Discrete Random Variables ($\tilde{b}_i$)

في الفصل السابق (٢١-٢) تناولنا بالتفصيل بعض أهم المعلمات $\tilde{b}_i$ التي تمثل متغيرات عشوائية متصلة. وفي هذا الفصل سوف نتناول بالتفصيل كيفية تحويل النموذج الاحتمالي بأستخدام أسلوب (CCP) إلى نموذج يقينى مكافئ في حالة عندما تكون بعض أو كل المعلمات ($\tilde{b}_i$) ، $i = I+1, I+2, ..., m$ متغيرات عشوائية متقطعة.

فإذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية الاحتمالي على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{21.24}$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \quad , \quad i = 1,2,....,I \tag{21.25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq \tilde{b}_i \quad , \quad i = I+1, I+2, ..., m \tag{21.26}$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n \tag{21.27}$$

يلاحظ أن حجم النموذج ($n \times m$) حيث n تشير إلى عدد المتغيرات القرارية، m تشير إلى عدد القيود الهيكلية، حيث X_j المتغيرات القرارية، والمعلمات C_j, a_{ij}, b_i مقادير ثابتة $j = 1,2,...,n$ ، $i = 1,2,...,I$ كذلك المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة حيث $i = I+1, I+2, ..., m$. وفيما يلي سوف نوضح كيفية تحويل القيود (21.26) إلى قيود يقينية مكافئة وفقاً لبعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتقطعة ($\tilde{b}_i$).

(٢١-٣-١) $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع منتظم　　$\tilde{b}_i \sim$ Uniform Distribution

إذا فرضنا أن ($\tilde{b}_i$) متغير يتبع التوزيع المنتظم المتقطع (أنظر الفصل (٢٠-٣)) بدالة احتمال ($f_i(\tilde{b}_i)$) على النحو:

$$f_i(\tilde{b}_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & , \quad \tilde{b}_i = 1,2,\ldots,N \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

وبافتراض مستوى مأمونية γ_i فإن القيد الاحتمالي (21.26) فإنه يمكن أعادة صياغته على النحو التالي:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j < \tilde{b}_i\right) = \gamma_i \qquad , \quad 0 < \gamma_i < 1$$

أو بعبارة أخرى (القيد المكمل)

$$P_r\left(\tilde{b}_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow$$

ومن نظرية (٢٠-٤) نجد أن:

$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1 = F_i^{-1}(1 - \gamma_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = N(1 - \gamma_i) + 1 \qquad (21.28)$$

ملحوظة: ١- القيد (21.28) قيد يقينى حيث $[N(1-\gamma_i)+1]$ مقدار ثابت لا يعتمد على X_j ، $j = 1,2,\ldots,n$.

٢- المقدار $[N(1-\gamma_i)+1]$ عبارة عن الدالة العكسية F_i^{-1} عند $(1-\gamma_i)$ للدالة التراكمية F_i للمتغير ($\tilde{b}_i$).

٣- القيد الاحتمالي الواحد يكافئه قيد يقيني واحد.

وبالتالي يكون النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الاحتمالي (21.24)-(21.27) على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,....,I$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = N(1-\gamma_i)+1 \quad , \quad i = I+1, I+2,....,m \quad (21.29)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n$$

<u>مثال (٢١-٧)</u>: تقوم أحدى الشركات بأنتاج نوعين من المنتجات A,B بحيث يتطلب أنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع ثلاثة أنواع من المواد الخام منهم مادتين يتم استيرادهما بحيث تمثل الكمية المتاحة من كل مادة متغير عشوائي منتظم بحيث:

$$f(\tilde{b}_1) = \frac{1000}{10{,}000} \quad , \quad \tilde{b}_1 = 1000,\ 2000, ..., 10000$$

$$f(\tilde{b}_2) = \frac{2000}{10{,}000} \quad , \quad \tilde{b}_1 = 2000,\ 4000,\ 6000,\ 8000, 10000$$

والجدول التالي يوضح قيم المعلمات الثابتة.

ويرغب متخذ القرار في تحديد الكميات التي يجب أنتاجها في كل حالة من الحالات التالية بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن:

١- أوجد القيمة المتوقعة للكميات المتاحة من المادة الخام II ، III. أعتبر الكميات المتاحة من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ هي الكميات المتوقعة، ثم أوجد النموذج اليقيني في هذه الحالة، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج.

٢- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma_1 = 0.7$, $\gamma_2 = 0.7$ أوجد النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

٣- أعتبر مستوى المأمونية $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.9$ أوجد النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة،ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقينى.

قارن بين القرارات المأخوذة في الحالات الثلاثة السابقة.

جدول (٢١-٣)

الكميات المتاحة	الكميات المطلوبة من مستلزمات الأنتاج لأنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج		مستلزمات الأنتاج
	B	A	
3000	0.6	0.5	I
$\tilde{b}_1$	1.4	0.5	II
$\tilde{b}_2$	0.7	1.4	III
	500	200	ربح الوحدة بالجنية

الحـــل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي الكميات التي يجب أنتاجها من A,B على الترتيب.

فإن النموذج الاحتمالي الذي يمثل المشكلة أعلاه على النحو:

$$\text{Max.}Z = 200\,X_1 + 500\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \le 3000$$

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 < \tilde{b}_1$$

$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 < \tilde{b}_2$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

١- وبأستخدام تعريف القيمة المتوقعة في العلاقة (20.13) نوجد القيمة المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ وسوف نشير لهما بالرمز $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ على الترتيب فنجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \sum_{\tilde{b}_1} f(\tilde{b}_1)\,\tilde{b}_1 = \sum_{\tilde{b}_1} (1/10)\,\tilde{b}_1 = \frac{1}{10}\{1000 + 2000 + \ldots.. + 10{,}000\}$$
$$= 5{,}500$$

$$E(\tilde{b}_2) = \sum_{\tilde{b}_2} f(\tilde{b}_2)\,\tilde{b}_2 = \sum_{\tilde{b}_2} (1/5)\,\tilde{b}_2 = \frac{1}{5}\{5000 + 6000 + \ldots.. + 9000\}$$
$$= 7{,}000$$

ويلاحظ أن:

$$P_r(\tilde{b}_1 \leq 5{,}500) = \frac{5}{10} = 0.5 \longrightarrow P_r(\tilde{b}_1 > 5500) = 0.5$$

كذلك

$$P_r(\tilde{b}_2 \leq 7{,}000) = \frac{2}{5} = 0.4 \longrightarrow P_r(\tilde{b}_2 > 7000) = 0.6$$

وبالتالي نجد أن النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الاحتمالي عندما تكون القيم المتوقعة لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ هي القيم الممكنة المتاحة لـ $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 200\,X_1 + 500\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \leq 3000$$

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \leq 5500$$

$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \leq 7000$$

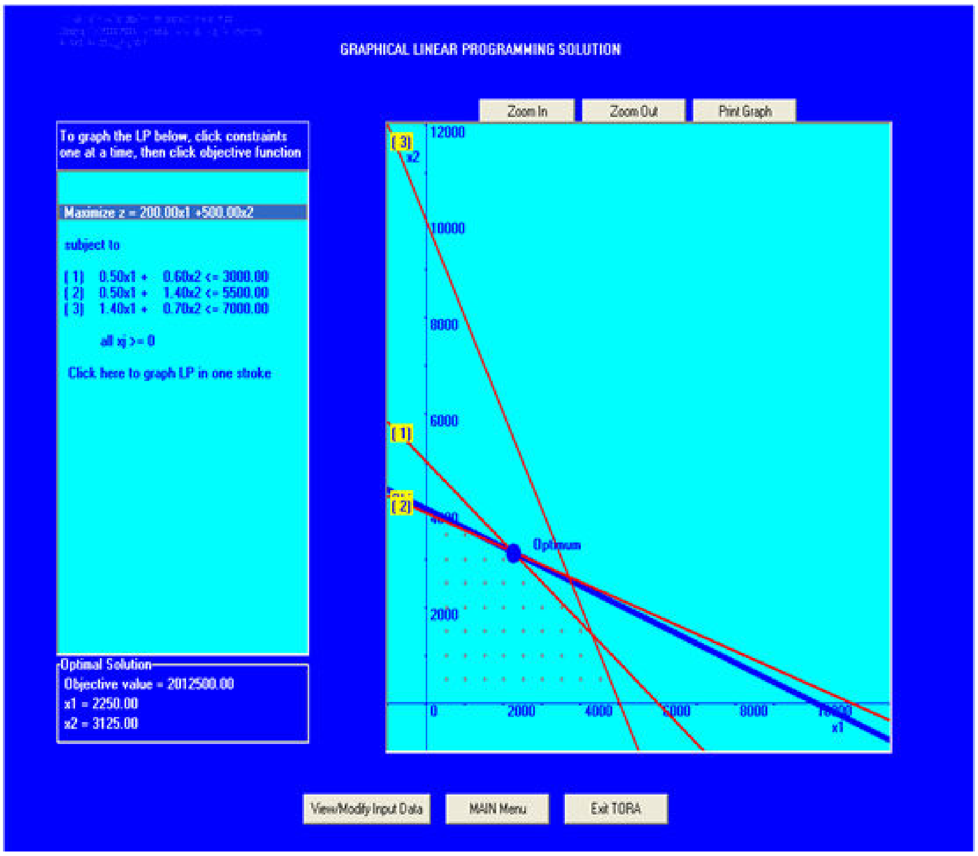
$$X_1 \,,\; X_2 \geq 0$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه بيانياً كما في الشكل التالي نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = 2{,}012{,}500 \quad , \quad X_1^* = 2{,}250 \quad , \quad X_2^* = 3{,}135 \qquad (1)$$

وذلك بمستوى مأمونية $(\gamma_1 = 0.5 \;,\; \gamma_2 = 0.6)$

شكل (٢١-١٥)



٢- عندما $\gamma_1 = 0.7 \;,\; \gamma_2 = 0.7$ في هذه الحالة نجد أن

$$P_r(0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.7$$

وبتطبيق العلاقة (21.28) نجد أن:

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 = (10{,}000)\,(0.3) + 1000 = 4000$$

بالمثل:

$$P_r(1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le \tilde{b}_2) = 0.70 \longrightarrow$$

$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 = (10{,}000)\,(0.3) + 2000 = 5000$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max.}Z &= 200\,X_1 + 500\,X_2 \\ \text{S.T.} \quad & 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \le 3000 \\ & 0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \le 4000 \\ & 1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le 5000 \\ & X_1\,,\; X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

كما هو موضح في الشكل (٢١-١٦) التالي.

وبحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 1{,}484{,}472.05 \quad , \quad X_1^* = 2608.7 \quad , \quad X_2^* = 1925.47 \qquad (2)$$

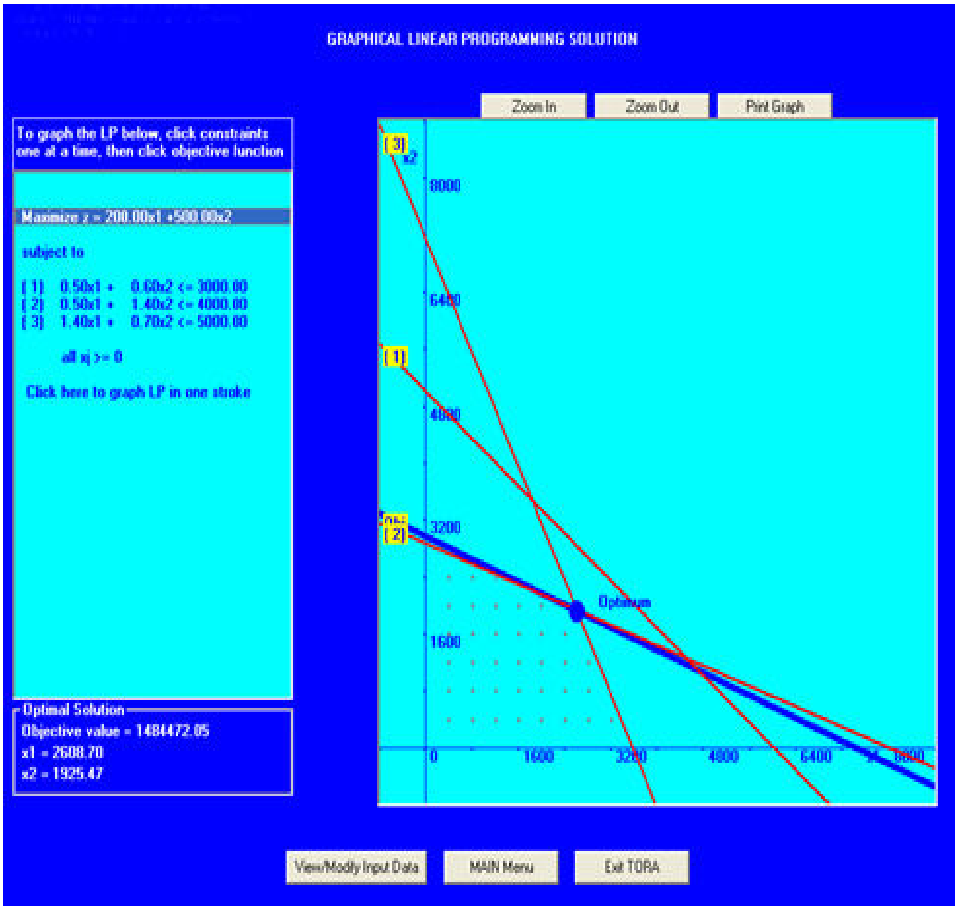
٣- وعند $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.9$ في هذه الحالة نجد أن:

$$P_r(0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \le \tilde{b}_1) = 0.9$$

وبتطبيق العلاقة (21.29) نجد أن:

$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 = (0.10)\,(10{,}000) + 1000 = 2000$$

شكل (٢١-١٦)



بالمثل:

$$P_r(1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le \tilde{b}_2) = 0.90 \longrightarrow$$

$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 = (0.10)\,(10{,}000) + 2000 = 3000$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

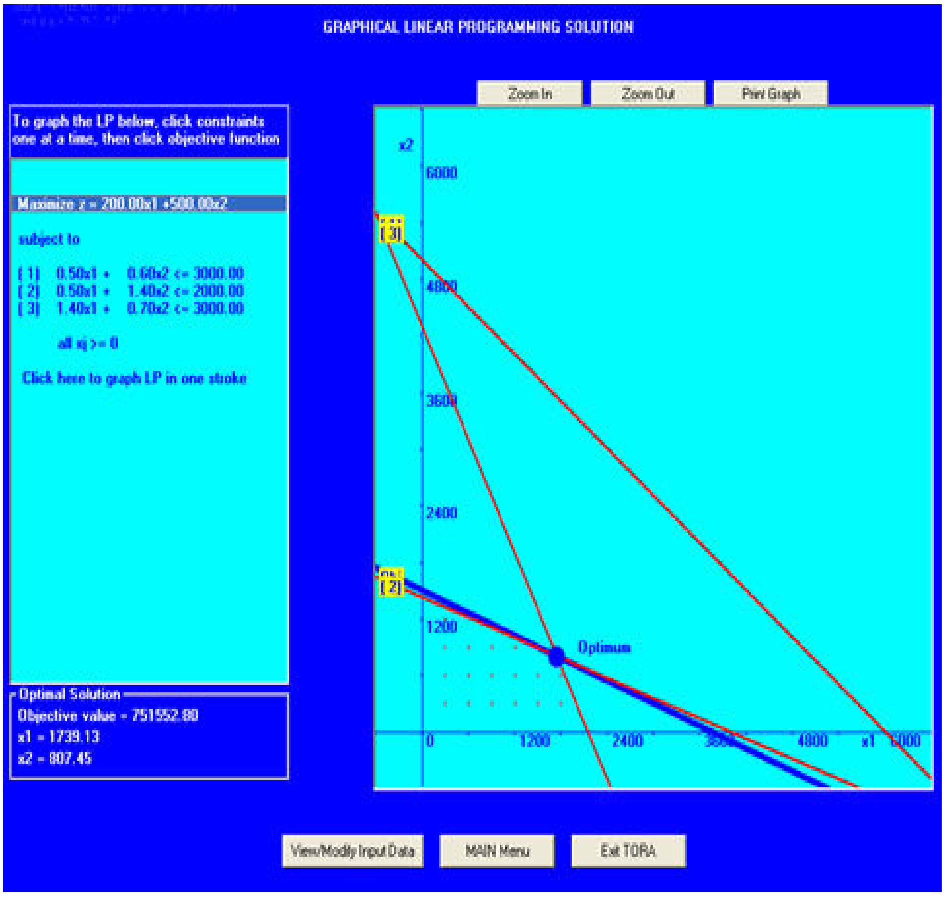
$$\text{Max.}Z = 200\,X_1 + 500\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 0.5\,X_1 + 0.6\,X_2 \le 3000$$
$$0.5\,X_1 + 1.4\,X_2 \le 2000$$
$$1.4\,X_1 + 0.7\,X_2 \le 3000$$
$$X_1\,,\; X_2 \ge 0$$

وبحل النموذج اليقيني نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 751{,}552.8 \quad , \quad X_1^* = 1739.13 \quad , \quad X_2^* = 807.45 \qquad (3)$$

شكل (٢١-١٧)



ويمكن تلخيص نتائج الحل في الحالات الثلاثة في (3)-(1) السابقة في الجدول التالي.

جدول (٢١-٤)

رقم الحالة	γ_i	الحل
(1)	(0.5 , 0.6)	$Z^* = 2{,}012{,}500\ ,\ X_1^* = 2{,}250\ ,\ X_2^* = 3{,}135$
(2)	(0.7 , 0.7)	$Z^* = 1{,}484{,}472.05\ , X_1^* = 2608.7, X_2^* = 1925.47$
(3)	(0.9 , 0.9)	$Z^* = 751{,}552.8\ , X_1^* = 1739.13,\ X_2^* = 807.45$

ومن الجدول يتضح أنه كلما زادت مستويات المأمونية أدى ذلك إلى تراجع الحل الأمثل حيث أن الدوال العكسية F_i^{-1} دوال متناقصة في γ_i.

وفي الباب ثلاثة وعشرون سوف نقدم مقاييس صلاحية الحل **reliability measures**. حيث يعطى مقياس الصلاحية للحل أحتمال تحقق جميع القيود في نفس الوقت.

(٢١-٣-٢) $\tilde{b}_i$ تتبع التوزيع الهندسي $\tilde{b}_i \sim$ Geometric Distribution

إذا فرضنا أن ($\tilde{b}_i$) متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي (أنظر الفصل (٢٠-٣) رابعاً) بدالة احتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = P(1-P)^{\tilde{b}_i} \quad , \quad 0 < P < 0 \quad , \quad \tilde{b}_i = 0,1,2,3,.......$$

وبالتالي فإن:

$$P_r(\tilde{b}_i < \grave{b}_i) = \sum_{\tilde{b}_i=0}^{\grave{b}_i - 1} P(1-P)^{\tilde{b}_i} = 1-(1-P)^{\grave{b}_i} \qquad (21.30)$$

وبأفتراض أن مستوى المأمونية γ_i وأعتبر أن القيد الاحتمالي:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) = \gamma_i$$

فإن هذا القيد مكافئ للقيد التالي:

$$P_r\left(\tilde{b}_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\right) = 1-\gamma_i \qquad (21.31)$$

بالتعويض في الطرف الأيسر للقيد الاحتمالي (21.31) بالطرف الأيمن في القيد (21.30) نجد أن:

$$1-(1-P)^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j} = (1-\gamma_i) \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = \frac{\ln \gamma_i}{\ln(1-P)} \qquad (21.32)$$

ملحوظة: (١) القيد (21.32) قيد يقيني حيث يمثل المقدار $\left\{\frac{\ln \gamma_i}{\ln(1-P)}\right\}$ مقدار ثابت.

(٢) عندما يكون القيد الأحتمالي

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$1-(1-P)^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j} \ge \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)} \qquad (21.32')$$

(٣) بالمثل إذا كان القيد على النحو:

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\right) \le \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq \frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)} \qquad (21.32^{\backslash\backslash})$$

حيث يمثل المقدار $\left\{\frac{\ln(1-\gamma_i)}{\ln(1-P)}\right\}$ مقدار ثابت أيضاً.

مثال (٢١–٨): أعتبر نموذج البرمجة الخطية الاحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 3X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + 5X_2 \geq 75 \qquad (2)$$

$$X_1 \leq 25 \qquad (3)$$

$$0.02X_1 + 0.01X_2 \leq \tilde{b} \qquad (4)$$

$$X_1 , \ X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{b}$ يمثل متغير عشوائي له التوزيع الهندسي بمعلمة $P = 0.4$.

المطلوب: ١- أوجد $E(\tilde{b})$، ثم حول النموذج الاحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ بأستبدال الطرف الأيمن في القيد (4) بالقيمة $E(\tilde{b})$ ثم أوجد الحل الأمثل للقيد اليقيني موضحاً مستوى المأمونية (γ) في هذه الحالة.

٢- بأفتراض أن مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.6$ حول النموذج الاحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني.

٣- بأفتراض أن مستوى المأمونية $\gamma \geq 0.7$ حول النموذج الاحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني، ثم قارن بين النتائج في (1)-(3).

الحل: ١- من نظرية (٢٠–٧) نجد أن:

$$E(\tilde{b}) = \frac{(1-P)}{P} = \frac{1-0.4}{0.4} = 1.5$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الاحتمالي (5)-(1) على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = 5\,X_1 + 3\,X_2$$

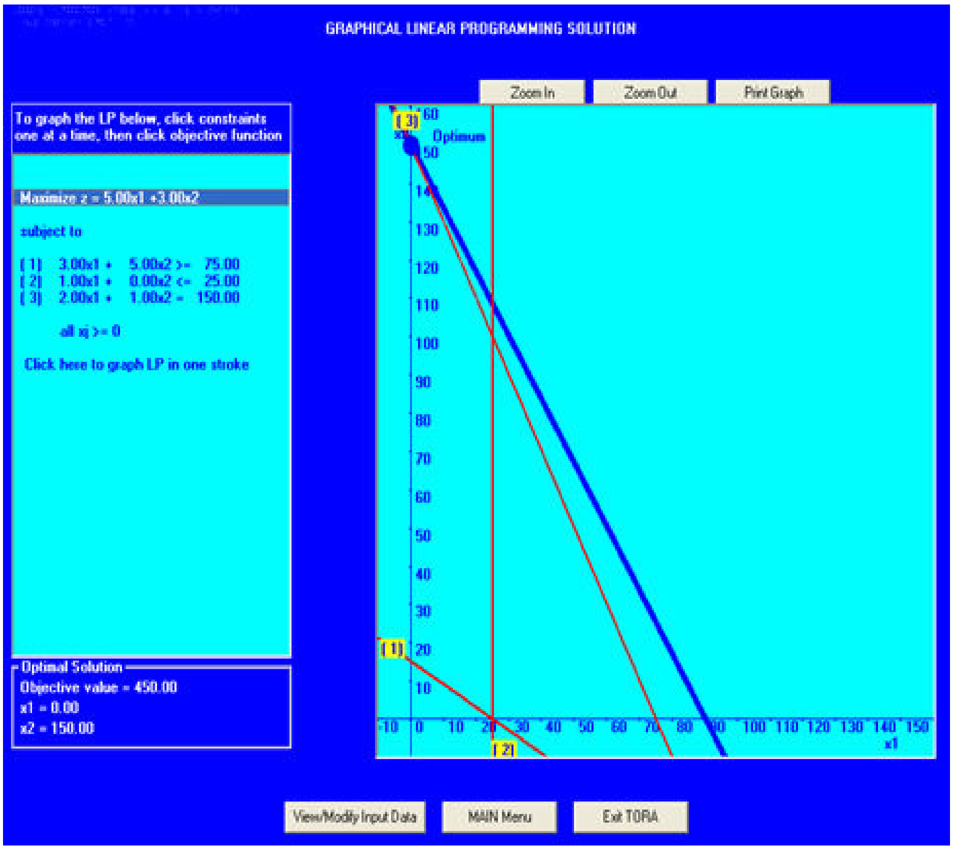
$$\text{S.T.} \quad 3\,X_1 + 5\,X_2 \geq 75 \quad , \quad X_1 \leq 25$$

$$0.02\,X_1 + 0.01\,X_2 = 1.5 \longrightarrow 2\,X_1 + X_2 = 150 \quad (6)$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

وشكل (٢١-١٨) يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٨)



وبحل النموذج أعلاه نجد أن:

$$Z^* = 450 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 150$$

٢- بافتراض أن $\gamma \geq 0.60$ فإن القيد (4) يمكن إعادة صياغته على النحو التالي:

$$P_r(0.02\,X_1 + 0.01\,X_2 \leq \tilde{b}_i) \geq 0.60 \qquad (7)$$

ومن المعادلة (21.32) نجد أن القيد اليقيني المكافئ للقيد الاحتمالي (4) على النحو التالي:

$$0.02\,X_1 + 0.01\,X_2 \leq \left\{\frac{\ln(1-0.6)}{\ln(1-0.4)}\right\} = 1.7937 \longrightarrow$$

$$2\,X_1 + X_2 \leq 179.37 \qquad (8)$$

وباستبدال القيد (6) في النموذج اليقيني أعلاه بالقيد (8) نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 538.11 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 179.37$$

والشكل (٢١-١٩) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

٣- بأفتراض أن $\gamma \geq 0.70$ يمكن تحويل القيد الاحتمالي (4) إلى قيد يقيني بأستخدام العلاقة (21.13) على النحو التالي:

$$0.02\,X_1 + 0.01\,X_2 \leq \left\{\frac{\ln(1-0.7)}{\ln(1-0.4)}\right\} = 2.3569 \longrightarrow$$

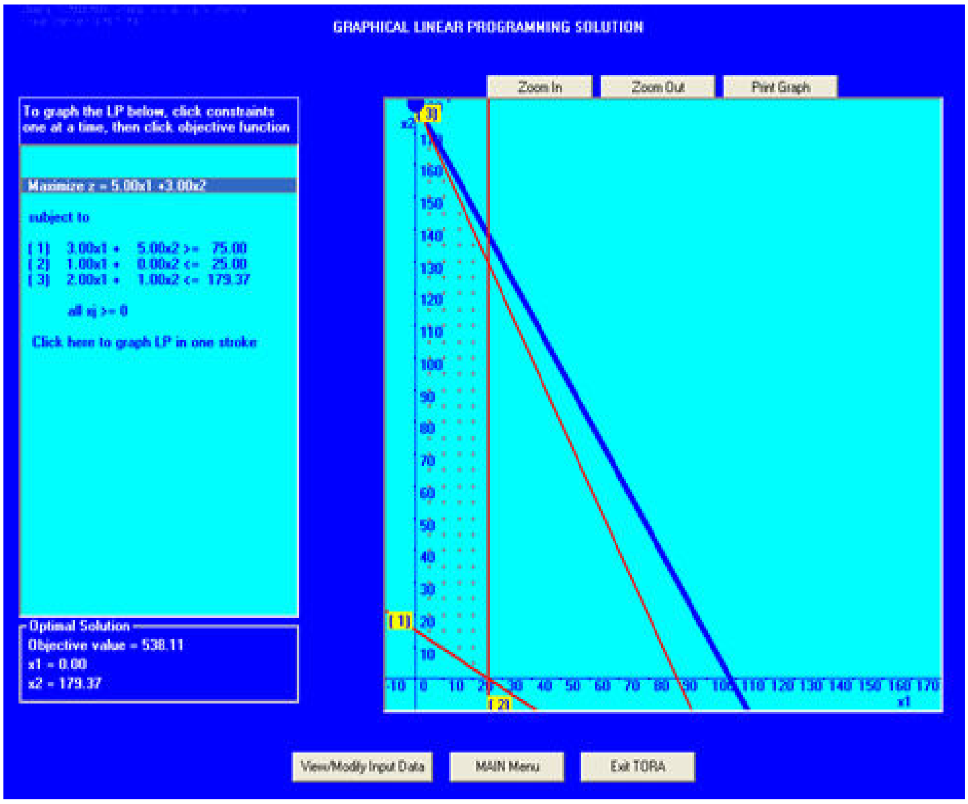
$$2\,X_1 + X_2 \leq 235.69 \qquad (9)$$

وباستبدال القيد (6) في النموذج اليقيني أعلاه بالقيد (9) نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 707.07 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 235.69$$

والشكل (٢١-٢٠) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-١٩)



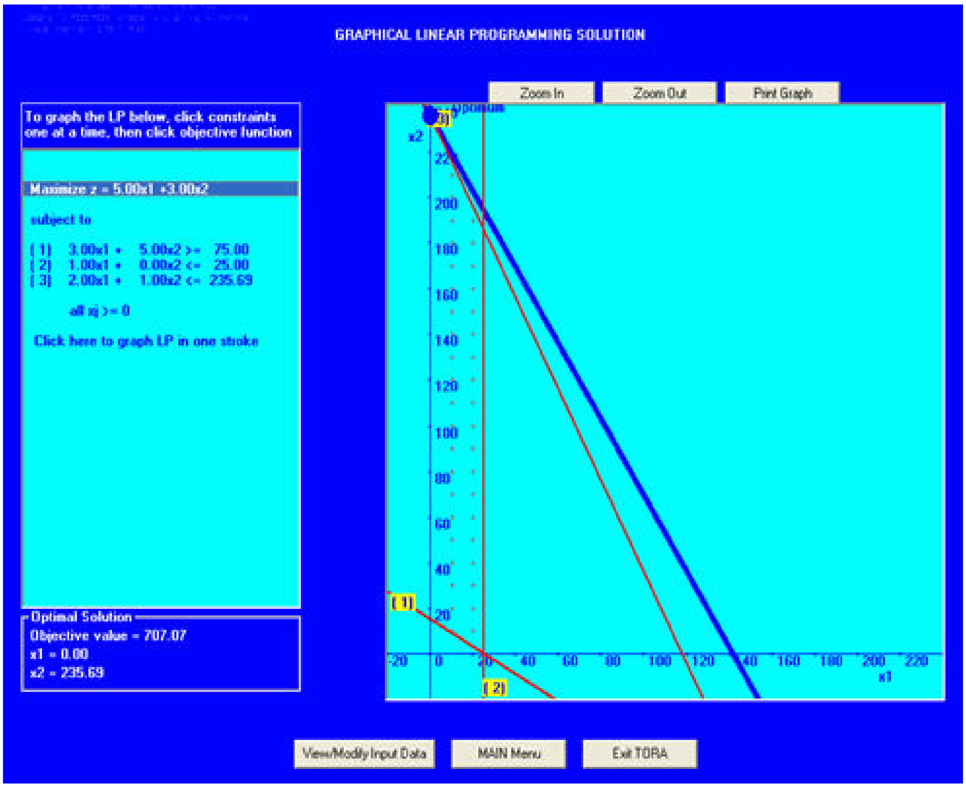
والجدول التالي يوضح الاختلاف في الحل في الحالات الثلاثة الراجعة إلى تغير مستوى المأمونية γ.

جدول (٢١-٥)

رقم الحالة	γ_i	الحل
(1)	$=0.36$	$Z^* = 450 \quad , \; X_1^* = 0 \quad , \; X_2^* = 150$
(2)	≥ 0.60	$Z^* = 538.11 \; , \; X_1^* = 0 \; , \; X_2^* = 179.37$
(3)	≥ 0.70	$Z^* = 707.07 \; , \; X_1^* = 0 \; , \; X_2^* = 235.69$

ومن الجدول يتضح أنه كلما زادت قيمة γ أدى ذلك إلى زيادة قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل ويرجع ذلك إلى أن الدالة العكسية F^{-1} للمتغير $\tilde{b}$ دالة متزايدة في مستوى المأمونية γ وبالتالي على فئة الحلول الممكنة. وكما ذكرنا في المثال السابق (مثال ٢١-٧) أننا سوف نقدم في الباب (٢٣) مقاييس الصلاحية للحل.

شكل (٢١-٢٠)



(٢١-٣-٣) $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع ذات الحدين $\tilde{b}_i \sim$ Binomial Distribution

في الفصل (٢٠-٣) تناولنا بالتفصيل المتغير المتقطع الذي يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين (n,p). فإذا أعتبرنا ($\tilde{b}_i$) متغير يتبع توزيع ذات الحدين بدالة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = C^n_{\tilde{b}_i}(P)^{\tilde{b}_i}(1-P)^{n-\tilde{b}_i} \quad , \quad \tilde{b}_i = 0,1,2,....,n \quad , \quad 0 < P < 1$$

ومن نظرية (٢٠-٥) نجد أن الدالة التراكمية للمتغير $(\tilde{b}_i)$ على النحو التالي:

$$F(\grave{b}_i) = P_r(\tilde{b}_i \le \grave{b}_i) = \sum_{j=0}^{\grave{b}} C^n_j (P)^j (1-P)^{n-j} \qquad (21.33)$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i$$

وعند مستوى المأمونية γ_i فإنه يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالي أعلاه على النحو:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i \longrightarrow F\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\Big) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(\gamma_i) \qquad (21.34)$$

والقيد أعلاه قيد يقيني حيث يمكن بسهولة الحصول على قيم F_i، F_i^{-1} عند القيم المختلفة لـ γ_i لمتغير ذات الحدين بأستخدام الجداول الإحصائية الموجودة جزء منها بملحق رقم (٤) بمعلومية (n,p). وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

ملاحظة: إذا كان القيد على النحو:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i$$

فإنه يمكن أعادة صياغته على النحو:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i \longrightarrow 1 - F\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\Big) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$F\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - 1\right) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) + 1 \quad (21.35)$$

<u>مثال (٢١-٩)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$Max.Z = 7X_1 + 9X_2 \quad (1)$$

$$S.T. \quad -3X_1 + 2X_2 \le 6 \quad (2)$$

$$2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \quad (3)$$

$$X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2 \quad (4)$$

$$X_1 ,\ X_2 \ge 0 \quad (5)$$

حيث $(\tilde{b}_1)$ متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $(n_1 = 10, P_1 = 0.5)$ كذلك يمثل $(\tilde{b}_2)$ متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين$(n_1 = 17, P_1 = 0.1)$

المطلوب: ١-أستبدال $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ في الطرف الأيمن في القيدين (3),(2) بـ$E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2)$ على الترتيب، ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

٢- عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \ge 0.62$, $\gamma_2 = 0.84$ حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل.

الحل: ١- من نظرية (٢٠-٥)

$$E(\tilde{b}_1) = n_1 P_1 = 10(0.5) = 5$$

$$E(\tilde{b}_2) = n_2 P_2 = 17(0.1) = 1.7$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي (5)-(1) في هذه الحالة على النحو:

$$Max.Z = 7X_1 + 9X_2$$

$$S.T. \quad -3X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$2X_1 + X_2 \le 5 \qquad (6)$$

$$X_1 + X_2 \ge 1.7 \qquad (7)$$

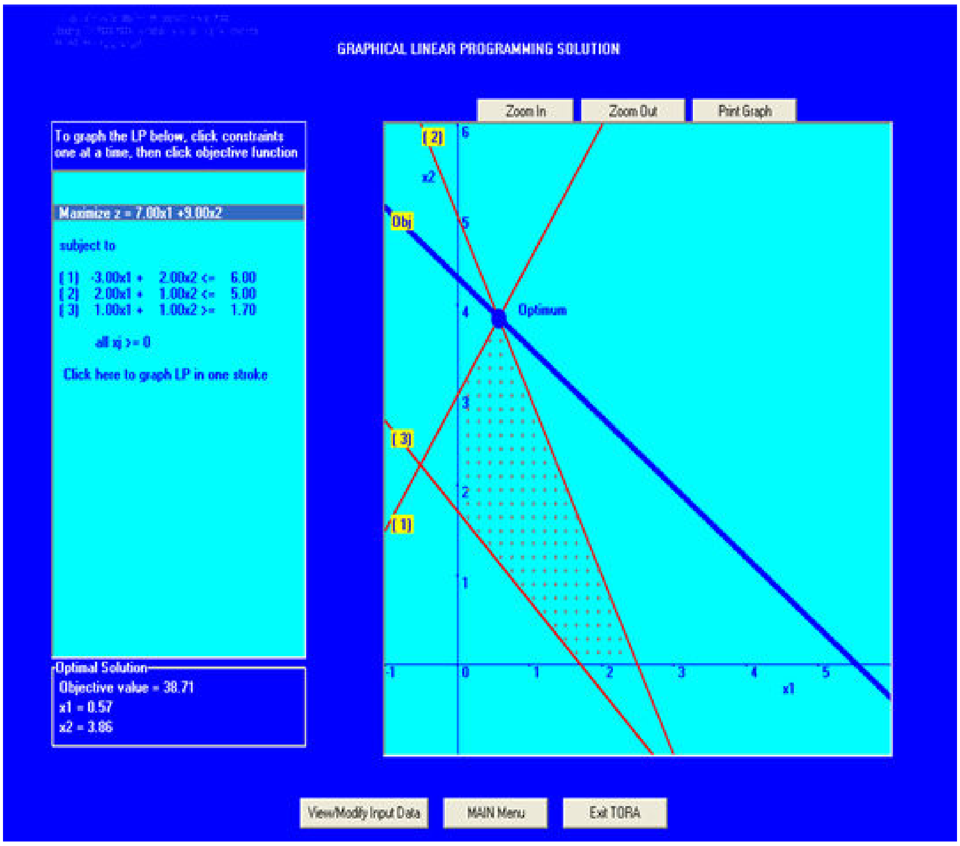
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

وبحل النموذج أعلاه نجد أن حل النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$Z^* = 38.71 \quad , X_1^* = 0.57 \quad , X_2^* = 3.86 \qquad (8)$$

والشكل (٢١-٢١) التالي يوضح الحل البياني للنموذج اليقيني في هذه الحالة.

شكل (٢١-٢١)



٢- إذا كان $\gamma_1 \geq 0.62$ ، فإن القيد الأحتمالي رقم (3) يمكن صياغته على النحو التالي:

$$P_r(2X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1) \geq 0.62 \longrightarrow$$

$$1 - F(2X_1 + X_2 - 1) \geq 0.62 \longrightarrow$$

$$F(2X_1 + X_2 - 1) \leq (1 - 0.62) = 0.38$$

ومن جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع ذات الحدين بملحق (٤) نجد أن:

$$2X_1 + X_2 - 1 \leq F^{-1}(0.38) = 4 \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5 \qquad (9)$$

بالمثل إذا فرضنا أن $\gamma_2 = 0.84$ فإن:

$$P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2) = 0.84 \longrightarrow F(X_1 + X_2) = 0.84 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 = F^{-1}(0.84) \longrightarrow X_1 + X_2 = 2 \qquad (10)$$

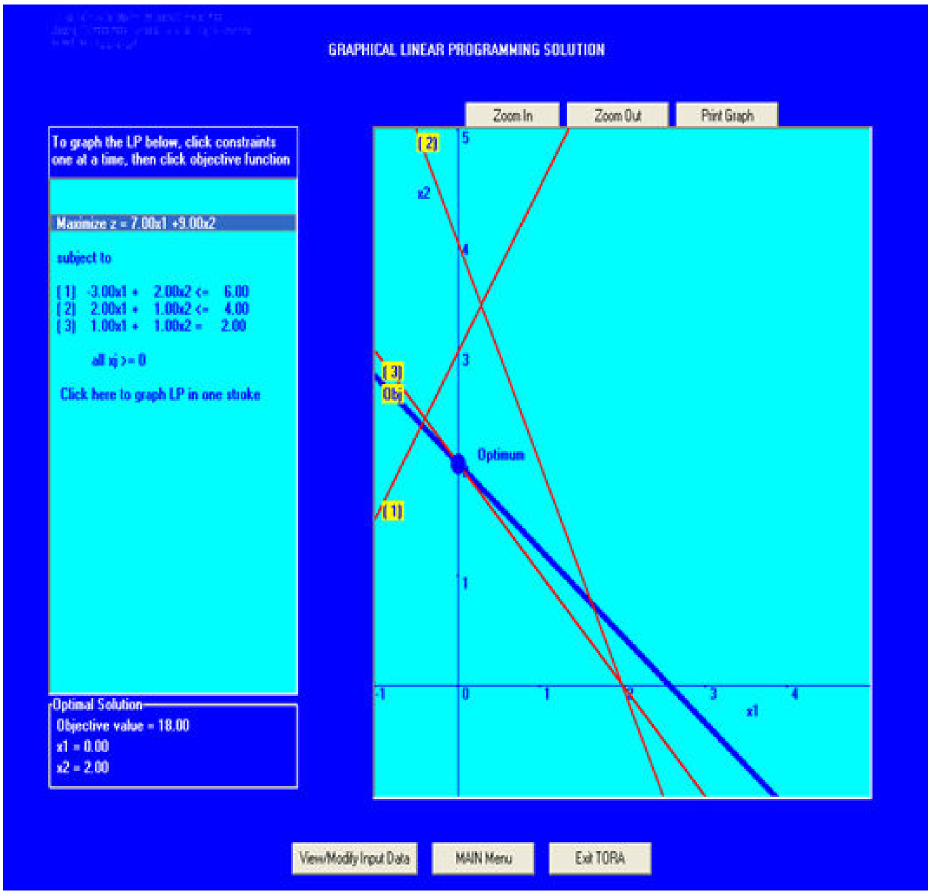
وبأستبدال القيدين (4),(3) بالقيدين (10),(9) على الترتيب في النموذج (5)-(1) يصبح الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ للنموذج (5)-(1) على النحو التالي:

$$Z^* = 18 \quad , X_1^* = 0 \quad , X_2^* = 2.0 \qquad (11)$$

والشكل (٢١-٢٢) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

<u>ملحوظة</u>: يمكن أستخدام توزيع بواسون أو التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع ذات الحدين في كثير من الحالات التي تتوافر فيها شروط التقريب (أنظر الفصل (٢٠-٥)) بالباب السابق.

شكل (٢١-٢٢)



(٢١-٣-٤) $\tilde{b}_i$ تتبع توزيع بواسون $\tilde{b}_i \sim$ Poisson Distribution

إذا أعتبرنا المتغير $(\tilde{b}_i)$ متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ ودالة كثافة أحتمال $f(\tilde{b}_i)$ بحيث:

$$f(\tilde{b}_i) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{\tilde{b}_i}}{\tilde{b}_i!} \qquad , \qquad \tilde{b}_i = 0,1,2,3,.......$$

ومن نظرية (٢٠-٦) نجد أن:

$$E(\tilde{b}_i) = \lambda \qquad , \qquad F_i(b) = \sum_{j=0}^{b} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^j}{j!}$$

كذلك يوجد بملحق رقم (٥) جزء من الجداول الإحصائية الخاصة بالدالة التراكمية للمتغير بواسون F_i كذلك الدالة العكسية لها F_i^{-1} عند المستويات المختلفة لمستوى المأمونية γ.

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i$$

وعند مستوى المأمونية γ_i فإنه يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالي على النحو التالي:

$$P_r\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i\Big) = \gamma_i \longrightarrow 1 - F_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\Big) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$F_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - 1\Big) = 1 - \gamma_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) + 1$$

والقيد أعلاه قيد يقيني حيث يمكن بأستخدام الجداول بملحق رقم (٥) الحصول على قيم $F_i^{-1}(1-\gamma_i)$ عند القيم المختلفة لـ γ_i، كما سوف نوضح ذلك في المثال التالي.

<u>مثال (٢١-١٠)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Min.}Z = 3X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad -6X_1 + 4X_2 \le 12 \qquad (2)$$

$$2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \qquad (3)$$

$$X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2 \qquad (4)$$

$$X_1\,,\; X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

فإذا كان المتغيرين $(\tilde{b}_1),(\tilde{b}_2)$ كل منهما يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda_1 = 6 , \lambda_2 = 2$ على الترتيب. وبأفتراض مستويات المأمونية $\gamma_1 \geq 0.5543 , \gamma_2 \geq 0.6767$ يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالي:

$$1 - F(2 X_1 + X_2 - 1) \geq 0.5543 \longrightarrow F(2 X_1 + X_2 - 1) \leq 0.4457 \longrightarrow$$

$$2 X_1 + X_2 \leq F^{-1}(0.4457) + 1 \qquad (6)$$

من جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع بواسون عند $\lambda = 6$. نجد أن:

$$F^{-1}(0.4457) = 5$$

بالتعويض في الطرف الأيمن للقيد (6) نجد أن:

$$2 X_1 + X_2 \leq 6$$

بالمثل بالنسبة لتحويل القيد (4) إلى قيد يقيني على النحو التالي:

$$P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2) \geq 0.6767 \longrightarrow F(X_1 + X_2) \geq 0.6767 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \geq F^{-1}(0.6767) \qquad (7)$$

ومن جدول الأحتمالات التراكمية لتوزيع بواسون عند $\lambda = 2$ نجد أن:

$$F^{-1}(0.6767) = 2$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن للقيد (7) بـ $F^{-1}(0.6767)$ نجد أن:

$$X_1 + X_2 \geq 2 \qquad (8)$$

وبالتالي يصبح النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي (5)-(1) على النحو التالي:

$$\text{Min.} Z = 3 X_1 + X_2$$

$$\text{S.T.} \quad -6 X_1 + 4 X_2 \leq 12$$

$$2X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

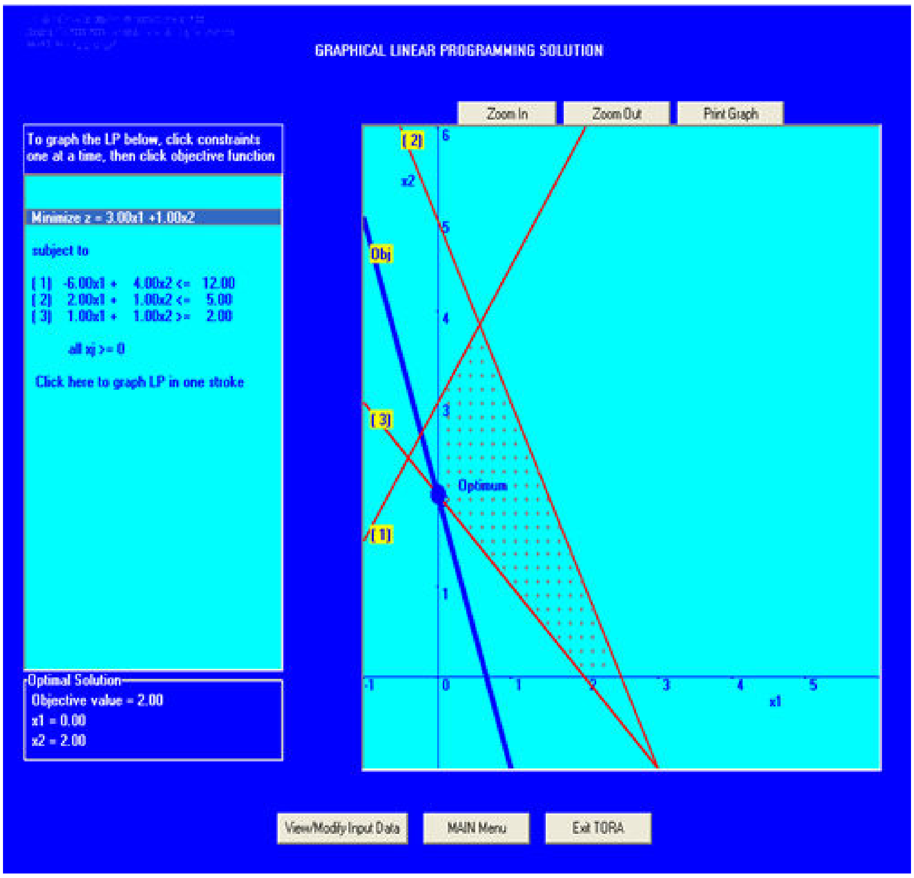
$$X_1 \,,\; X_2 \geq 0$$

وبحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 2.0 \quad , \; X_1^* = 0.0 \quad , \; X_2^* = 2.0$$

والشكل (٢١-٢٣) التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-٢٣)



ملحوظة: يمكن أستخدام التوزيع المعتاد كتقريب لتوزيع بواسون في كثير من الحالات التي تتوافر فيها شروط التقريب (أنظر الفصل (٢٠-٥)) بالباب السابق.

تمرين (٢)

(١) إذا فرضنا أن $\tilde{b}$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بمعلمة $P = 0.2$ ، أوجد:

أ- دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{b}$ ،

ب- أعتبر القيد الأحتمالي التالي:

$$5X_1 + 4X_2 - 6X_3 \le \tilde{b}$$

بأستخدام أسلوب (CCP) حول القيد الأحتمالي أعلاه إلى قيد يقيني مكافئ عند مستوى المأمونية $\gamma \ge 0.9$ ، $\gamma \ge 0.8$ ، $\gamma \ge 0.7$ ، $\gamma \ge 0.6$.

ج- أعتبر القيد الأحتمالي التالي:

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 \ge \tilde{b}$$

حول القيد الأحتمالي إلى آخر قيد يقيني مكافئ بمستوى مأمونية $\gamma \ge 0.5$.

(٢) أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 0.3X_1 + 1.2X_2 \le \tilde{b}_1$$

$$1.8X_1 + 0.9X_2 \le \tilde{b}_2$$

$$X_1 ,\ X_2 \ge 0$$

فإذا كان كل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين عشوائيين مستقلين كل منها يتبع التوزيع المنتظم بحيث:

$$f(\tilde{b}_1) = 1/10 \qquad , \qquad \tilde{b}_1 = 1,2,......,10$$

$$f(\tilde{b}_2) = 2/10 \qquad , \qquad \tilde{b}_2 = 2,4,6,8,10$$

حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج آخر يقينى مكافئ عند $\gamma_1 \geq 0.8 , \gamma_2 \geq 0.8$ ثم حل النموذج اليقينى.

(٣) أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}Z = 8\,X_1 + 5\,X_2$$

$$\text{S.T.} \quad -5\,X_1 + 3\,X_2 \leq 11$$

$$4\,X_1 + 2\,X_2 \leq \tilde{b}_1$$

$$2\,X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

حيث كل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيران مستقلين كل منها يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمات $(n_1 = 8 , P_1 = 0.6)$ ، $(n_2 = 10 , P_2 = 0.2)$ على الترتيب. أوجد:

١- الدالة التراكمية لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$.

٢- عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.5$, $\gamma_2 \geq 0.6$ حول النموذج الأحتمالي إلى آخر يقيني مكافئ.

(٤) إذا فرضنا أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda_1 = 5 , \lambda_2 = 3$.

أ- أوجد الدالة التراكمية لكل من $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ ثم أوجد الدالة التراكمية العكسية لكل متغير.

ب- أعتبر القيود الأحتمالية التالية:

$$5X_1 - 4X_2 + 7X_3 \le \tilde{b}_1$$

$$2X_1 + 5X_2 - X_3 \ge \tilde{b}_2$$

حول القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \ge 0.9 , \gamma_2 \ge 0.8$.

(٥) حول القيود الأحتمالية التالية إلى أخرى يقينية مكافئة عند مستوى المأمونية المناظر في الحالات التالية:

١- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.6$

$$P_r(3X_1 + 2X_2 + X_3 \ge 10) , \quad \gamma \ge 0.9$$

٢- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 5$

$$P_r(5X_1 + 3X_2 - X_3 \le 3) , \quad \gamma \ge 0.6$$

٣- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $P = 0.7$, $n = 8$

$$P_r(8X_1 + 12X_2 \ge \tilde{b}) , \quad \gamma \ge 0.7$$

(٢١-٤) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٢١-١): تقوم إحدى شركات إنتاج بعض المستحضرات الدوائية بإنتاج ثلاثة أنواع من أحد الأدوية البديلة A,B,C (حيث الوحدة الواحدة من المنتج 1000عبوة) وذلك من خلال خطى إنتاج I,II. والجدول التالي يوضح الزمن المطلوب لكل وحدة في كل خط بالساعات والوقت المتاح للعمل في كل خط بالساعات أيضاً كذلك ربح الوحدة الواحدة بالجنيه. فإذا كان الطلب المحلى والخارجي على كل بديل متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمات $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ على الترتيب.

جدول (٢١-٦)

زمن الإنتاج المتاح بالساعات	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة بالساعات			خطوط الإنتاج
	C	B	A	
600 561	2 5	3 4	5 3	I II
	$\lambda_3 = 20$	$\lambda_2 = 18$	$\lambda_1 = 15$	المعلمة λ
	1000	1500	2000	ربح الوحدة بالجنية

والمطلوب: ١- تحديد الطلب المتوقع من A,B,C.

٢- تحديد الكميات المثلى التي يجب إنتاجها من A,B,C بحيث يكون الربح الكلي أكبر ما يمكن في الحالات التالية:

أ- إذا كانت الكميات المنتجة أكبر من أو تساوى الطلب المتوقع.

ب- إذا كانت الكميات المنتجة أقل من الكميات المطلوبة بأحتمالات $\gamma_1 \geq 0.8752$ ، $\gamma_2 \geq 0.90$ ، $\gamma_3 \geq 0.98$ من المنتجات A، B، C على الترتيب.

٣- قارن بين الحل في (١) ، (٢).

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 تشير إلى الكميات التي يجب إنتاجها من A,B,C على الترتيب، كذلك أفتراض أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ تشير إلى الطلب على كل من A,B,C على الترتيب أيضاً. فإنه يمكن صياغة المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2, X_3 التي تجعل

$$\text{Max.} Z = 2000\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600 \qquad (2)$$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561 \qquad (3)$$

$$X_1 \ge \tilde{b}_1 \qquad (4)$$

$$X_2 \ge \tilde{b}_2 \qquad (5)$$

$$X_3 \ge \tilde{b}_3 \qquad (6)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (7)$$

١- من نظرية (٢٠-٦) نجد أن توقعات الطلبات على النحو التالي:

$$E(\tilde{b}_1) = \lambda_1 = 15 \quad , \quad E(\tilde{b}_2) = \lambda_2 = 18 \quad , \quad E(\tilde{b}_3) = \lambda_3 = 20 \qquad (8)$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن في القيود (6)-(4) بالقيم المتوقعة في (8) يتحول النموذج الأحتمالي (7)-(1) إلى نموذج آخر يقيني مكافئ له. ونظراً لأن النموذج اليقيني المكافئ نموذج برمجة خطية فإنه يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس (أسلوب المرحلتين) ويكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 77{,}000 \quad , \quad X_1^* = 15 \quad , \quad X_2^* = 18 \quad , \quad X_3^* = 20 \qquad (9)$$

<u>ملحوظة</u>: الحل التفصيلي بملحق رقم (٦).

٢- وعند مستويات المأمونية $\gamma_1 \geq 0.8752$, $\gamma_2 \geq 0.90$, $\gamma_3 \geq 0.98$ فإنه يمكن إعادة صياغة القيود الأحتمالية (6)-(4) على النحو التالي:

$$P_r(X_1 \geq \tilde{b}_1) \geq 0.8752 \longrightarrow F(X_1) \geq 0.8752 \longrightarrow$$

$$X_1 \geq F_1^{-1}(0.8752) \longrightarrow X_1 \geq 19 \qquad (10)$$

بالمثل:

$$P_r(X_2 \geq \tilde{b}_2) \geq 0.9 \longrightarrow X_2 \geq 24 \qquad (11)$$

$$P_r(X_3 \geq \tilde{b}_3) \geq 0.98 \longrightarrow X_3 \geq 29 \qquad (12)$$

وبأستبدال القيود الأحتمالية (6)-(4) بالقيود اليقينية (12)-(10) فيصبح الحل الأمثل للنموذج اليقيني في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 167,425 \ , \ X_1^* = 65.75 \ , \ X_2^* = 89.75 \ , \ X_3^* = 29 \qquad (13)$$

٣- في (١) تم التعبير عن المتغيرات الأحتمالية $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ بالقيم المتوقعة $E(\tilde{b}_1), E(\tilde{b}_2), E(\tilde{b}_3)$ ونجد أن أحتمالات تحقق القيود (6)-(4) في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\gamma_1^* \geq 0.5681 \ , \ \gamma_2^* \geq 0.5622 \ , \ \gamma_3^* \geq 0.5591 \qquad (14)$$

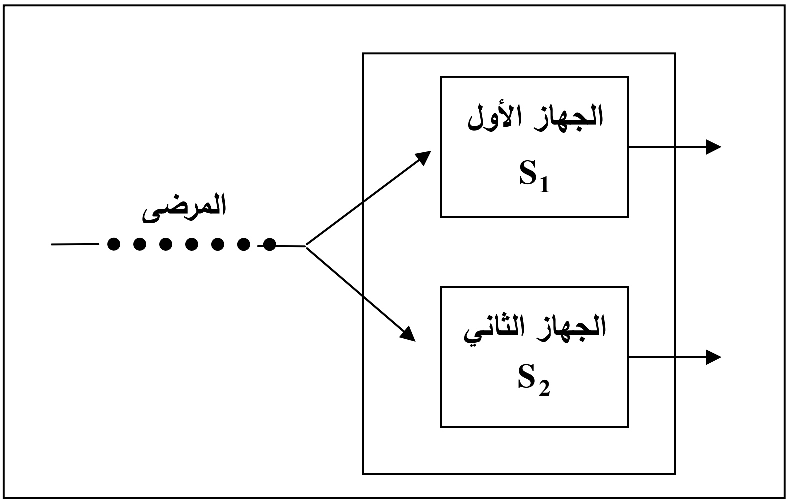
(أستخدام جداول الدالة التراكمية لتوزيع بواسون بملحق رقم (٥)). أدى ذلك إلى الحصول على الحل الأمثل للنموذج اليقيني كما هو موضح في (9). ولكن في المطلوب (٢) حيث زادت أحتمالات تحقق القيود (6)-(4) في هذه الحالة على النحو:

$$\gamma_1 \geq 0.8752 \ , \ \gamma_2 \geq 0.90 \ , \ \gamma_3 \geq 0.98 \qquad (15)$$

ويتضح من (15),(14) أن زيادة الحدود الدنيا لمستويات المأمونية أدى إلى زيادة قيم الدوال التراكمية العكسية المناظرة $F_1^{-1}, F_2^{-1}, F_3^{-1}$ مما أدى إلى زيادة قيمة دالة الهدف Z^* من $Z^* = 77,000$ إلى $Z^* = 167,425$.

<u>تطبيق (٢١-٢)</u>: يوجد جهازين مستقلين ومتماثلين ومتكافئين لعلاج مرض الأورام بالعلاج الأشعاعي في أحد المراكز الطبية، بحيث يعمل الجهازين على التوازي (أي يعمل الجهازين في نفس الوقت).

شكل (٢١-٢٤)



فإذا كان المرضى المترددين على المراكز للعلاج بالأشعاع المقيدين للعلاج يمثل متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين ($n = 50$, $P = 0.7$). فإذا كان زمن خدمة المريض الواحد يساوى 10دقائق. فإذا كان متخذ القرار يرغب في تحديد أقصى عدد من المرضى الذين يمكن أن يتم خدمتهم خلال يوم عمل (حيث يوم العمل ٧ساعات = ٤٢٠دقيقة). فإذا كان متخذ القرار يرغب في تحديد أقصى عدد من المرضى الذين يمكن أن يتم خدمتهم خلال يوم عمل (حيث يوم العمل ٧ساعات = ٤٢٠دقيقة).

المطلوب: ١- صياغة نموذج برمجة أحتمالية مناسب يمثل المشكلة بحيث تحقق هدف متخذ القرار.

٢- أستخدام القيمة المتوقعة لطلب العملاء على الخدمة لتحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ.

٣- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية $\gamma \le 0.9$.

٤- قارن بين الحل في (٢) ، (٣).

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 عدد المرضى الذين يتم خدمتهم في الجهازين الأول والثاني على الترتيب، كذلك $\tilde{b}$ هي عدد المرضى الذين يصلون إلى المركز خلال يوم العمل.

وبالتالي يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 10X_1 + 10X_2 \le 420 \qquad (2)$$

$$X_1 + X_2 > \tilde{b} \qquad (3)$$

$$X_1 - X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- بما أن $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع ذات الحدين بمعلمتين $(n = 50 \ , \ P = 0.7)$، من نظرية (٢٠-٥) نجد أن:

$$E(\tilde{b}) = nP = 50(0.7) = 35 \ \text{مريض}$$

ويصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

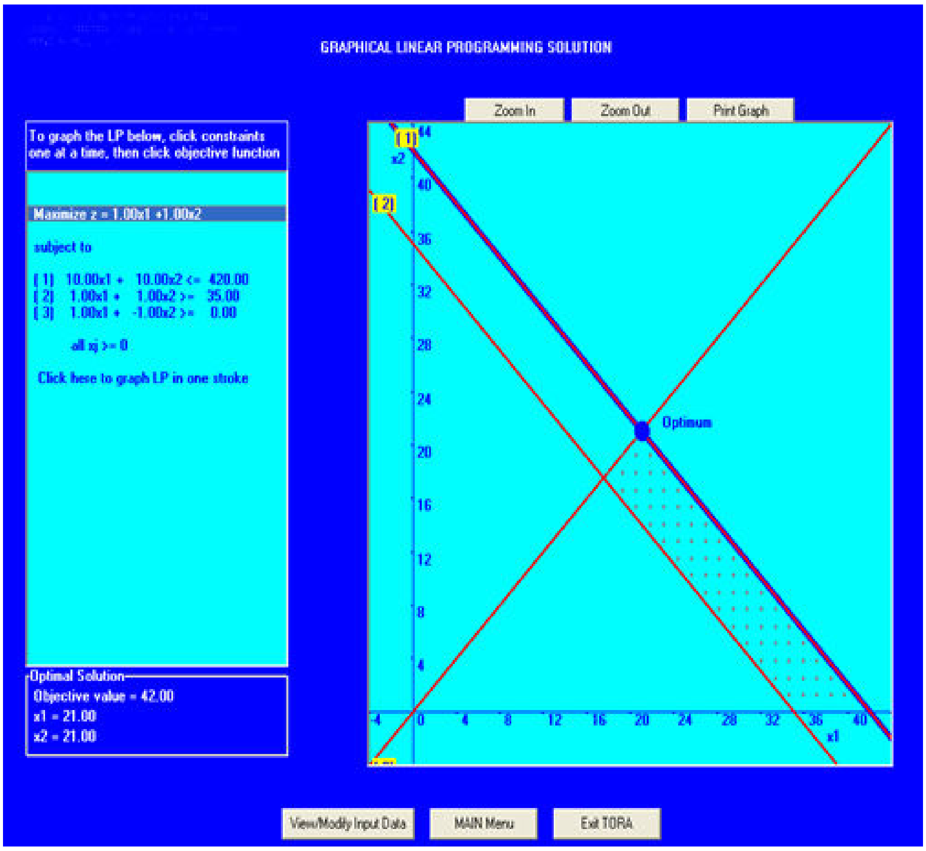
$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = X_1 + X_2 \\ &\text{S.T.} \quad 10X_1 + 10X_2 \le 420 \\ &\qquad X_1 + X_2 > 35 \qquad (5) \\ &\qquad X_1 - X_2 \ge 0 \\ &\qquad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

وبحل النموذج نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 42 \quad , \quad X_1^* = 21 \quad , \quad X_2^* = 21 \qquad (6)$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً.

شكل (٢١-٢٥)



٢- عند مستوى المأمونية γ بحيث $\gamma \le 0.9$ فإنه يمكن إعادة صياغة القيد (3) على النحو التالي:

$$P_r(X_1 + X_2 > \tilde{b}) \le 0.9 \longrightarrow 1 - F(X_1 + X_2) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$F(X_1 + X_2) \ge 0.1 \longrightarrow X_1 + X_2 \ge F^{-1}(0.1) \qquad (7)$$

ومن جدول الأحتمالات التراكمية بملحق رقم (٤) وعند $P = 0.7$, $n = 50$ نجد أن:

$$F^{-1}(0.1) \approx 10 \qquad (8)$$

وبأستبدال الطرف الأيمن في القيد (7) بالطرف الأيمن في (8) نجد أن:

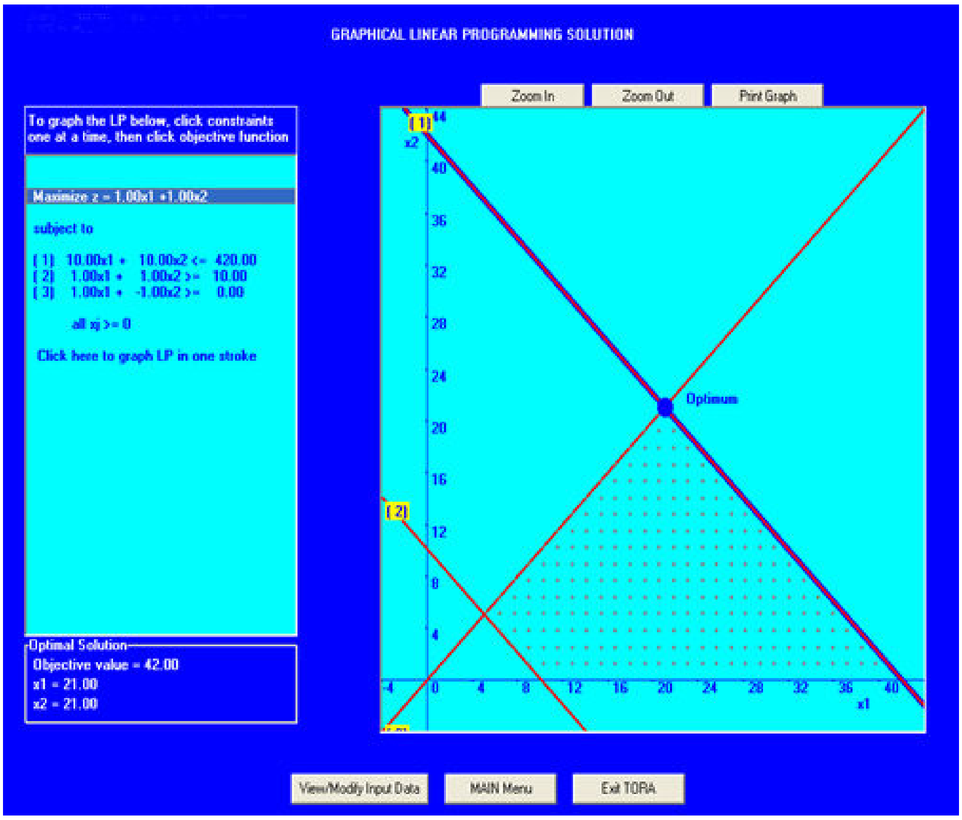
$$X_1 + X_2 > 10 \qquad (9)$$

وباستبدال القيد الأحتمالي في (3) بالقيد اليقيني في (9)، ثم حل النموذج اليقيني نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 42 \;\; , \;\; X_1^* = 21 \;\; , \;\; X_2^* = 21 \qquad (10)$$

والشكل التالي يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢١-٢٦)



تطبيق (٢١-٣): يقوم أحد المخابز بأحدى المحافظات بإنتاج ثلاثة أنواع A,B,C من المخبوزات من الدقيق من خلال خطى إنتاج I,II على التوالي. والجدول التالي يوضح ما تتطلبه إنتاج الوحدة الواحدة (الوحدة الواحدة تساوى 1000قطعة) من كل نوع في كل خط من خطى الإنتاج I,II. كذلك المتاح اليومي من الدقيق 1500 كيلوجرام بحيث تتطلب إنتاج الوحدة الواحدة 30 ,25 ,20 كيلوجرام من A, B, C على الترتيب.

جدول (٢١-٦)

المنتج / خطوط الإنتاج	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة بالدقائق			المتاح
	A	B	C	
I	30	40	50	18 ساعة
II	50	60	80	20 ساعة
ربح الوحدة الواحدة بالجنية	50	70	80	

فإذا كان الطلب على A,B معاً يمثل متغير عشوائي $\tilde{b}_1$ يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda_1 = 20$، كذلك أقل طلب على النوع C يمثل متغير عشوائي $\tilde{b}_2$ يتبع توزيع بواسون أيضاً بمعلمة $\lambda_2 = 6$.

ويرغب متخذ القرار في تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من A,B,C بحيث يكون ربح المخبز أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية.

٢- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني عند القيم المتوقعة للطلب الأحتمالي.

٣- بأستخدام أسلوب (CCP) حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستويات مأمونية $\gamma_1 \leq 0.8 \;\;,\;\; \gamma_2 \geq 0.9$.

٤- قارن بين الحل في (٢) ، (٣).

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A,B,C على الترتيب.

١- بالتالي يمكن صياغة المشكلة على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 التي تعظم دالة الهدف Z:

$$\text{Max.}Z = 50X_1 + 70X_2 + 80X_3 \qquad (1)$$

S.T.

$$20X_1 + 25X_2 + 30X_3 \le 1500 \quad \text{قيد الدقيق} \qquad (2)$$

قيود الوقت في خطوط الإنتاج

$$30X_1 + 40X_2 + 50X_3 \le 1080 \qquad (3)$$

$$50X_1 + 60X_2 + 80X_3 \le 1200 \qquad (4)$$

قيود الطلب

$$X_1 + X_2 < \tilde{b}_1 \qquad (5)$$

$$X_3 \ge \tilde{b}_2 \qquad (6)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (7)$$

٢- بما أن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ متغيرين كل منهما يتبع توزيع بواسون، ومن نظرية (٢٠-٦) نجد أن:

$$E(\tilde{b}_1) = \lambda_1 = 20 \quad , \quad E(\tilde{b}_2) = \lambda_2 = 6 \qquad (8)$$

وبالتالي يمكن إعادة صياغة القيدين (6),(5) على النحو:

$$X_1 + X_2 \le 20 \qquad (9)$$

$$X_3 \ge 6 \qquad (10)$$

وبأستبدال القيود الأحتمالية (6),(5) بـ (10),(9) في النموذج أعلاه، يصبح النموذج يقيني وبحله بأستخدام أسلوب السمبلكس يكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 1320 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 12 \quad , \quad X_3^* = 6 \qquad (11)$$

٣- إذا أعتبرنا $\gamma_1 \le 0.8$, $\gamma_2 \ge 0.9$ فإنه يمكن تحويل القيدين (6),(5) إلى قيود يقينية على النحو التالي:

$$P_r(X_1 + X_2 < \tilde{b}_1) > 0.8 \longrightarrow 1 - F(X_1 + X_2) \le 0.8 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \le F^{-1}(0.2) \longrightarrow$$

ومن ملحق رقم (٥) نجد أن:

$$X_1 + X_2 \le 15 \qquad (12)$$

بالمثل:

$$P_r(X_3 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.9 \longrightarrow F(X_3) \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$X_3 \ge F^{-1}(0.9) \longrightarrow X_3 \ge 9 \qquad (13)$$

وبأستبدال القيدين الأحتماليين (6) , (5) بالقيدين اليقينيين (13) , (12) في النموذج (7)-(1) نجد أن الحل الأمثل في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Z^* = 1280 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 8 \quad , \quad X_3^* = 9 \qquad (14)$$

والجدول التالي يوضح المقارنة بين الحلين المطلوبين في (٢) ، (٣).

جدول (٢١-٧)

الحالة	مستويات المأمونية	الحل
(٢)	$\gamma_1 \le 0.441, \gamma_2 \ge 0.606$	$Z^* = 1320,\ X_1^* = 0, X_2^* = 12, X_3^* = 6$
(٣)	$\gamma_1 \le 0.8, \gamma_2 \ge 0.9$	$Z^* = 1280, X_1^* = 0,\ X_2^* = 8, X_3^* = 9$

ومن الجدول يتضح أن زيادة الحد الأعلى لـ γ_1 كذلك الحد الأدنى لـ γ_2 أدى إلى تراجع القيمة المثلي لـ Z.

تطبيق (٢١-٤): تقوم إحدى المطاعم بإنتاج 4 أنواع من الوجبات السريعة A,B,C,D بحيث يدخل في كل وجبة ثلاثة أنواع من المكونات الرئيسية، البروتين، الخضروات، الدقيق I, II, III . والجدول التالي يوضح الكميات اليومية المتاحة بالكيلوجرام من كل مكون، والنسبة المئوية للمكون في الوحدة الواحدة من كل وجبه، كذلك سعر بيع الوحدة الواحدة بالجنيه، حيث أن وزن كل وجبة يساوى كيلوجرام واحد.

فإذا كان حجم الطلب على المنتجات A,B معاً يمثل متغير عشوائي $\tilde{b}_1$ يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 220$ وأنحراف معياري $\sigma_1 = 10$. كذلك يؤول الطلب على المنتجات C,D إلى التوزيع المعتاد $\tilde{b}_2$ بتوقع $\mu_2 = 250$ وأنحراف معياري $\sigma_2 = 15$.

جدول (٢١-٨)

الكميات اليومية بالكيلوجرام	النسبة المئوية (%) المطلوبة من كل مكون لإنتاج الوحدة الواحدة من كل وجبة (نسبة المكون)				المكونات
	D	C	B	A	
100	38	33	27	15	I بروتين
120	20	27	13	35	II خضروات
300	42	40	60	50	III دقيق
	120	100	90	70	سعر بيع الوحدة بالجنية

ويرغب متخذ القرار في المطعم تحديد عدد الوجبات التي يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون الإيرادات أكبر ما يمكن في الحالتين التاليتين:

١- عندما يكون الطلب على كل نوع يساوى الطلب المتوقع.

٢- أستخدام أسلوب CCP عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \leq 0.9$, $\gamma_2 \geq 0.5$

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3, X_4 هي عدد الوجبات التي يجب إنتاجها من A,B,C,D على الترتيب في اليوم، حيث:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

ويصبح النموذج الأحتمالي في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 70\,X_1 + 90\,X_2 + 100\,X_3 + 120\,X_4 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 0.15\,X_1 + 0.27\,X_2 + 0.33\,X_3 + 0.38\,X_4 \leq 100 \qquad (2)$$

$$0.35\,X_1 + 0.13\,X_2 + 0.27\,X_3 + 0.20\,X_4 \leq 120 \qquad (3)$$

$$0.55\,X_1 + 0.60\,X_2 + 0.40\,X_3 + 0.42\,X_4 \leq 300 \qquad (4)$$

$$X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1 \qquad (5)$$

$$X_3 + X_4 \leq \tilde{b}_2 \qquad (6)$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \qquad (7)$$

١- بما أن:

$$E(\tilde{b}_1) = 220 \;\; , \;\; Var(\tilde{b}_1) = 100 \quad , \quad E(\tilde{b}_2) = 250 \;\; , \;\; Var(\tilde{b}_2) = 225$$

وبالتالي يمكن أستبدال القيدين الأحتماليين (6),(5) بالقيدين اليقينيين التاليين:

$$X_1 + X_2 \leq 220 \qquad (8)$$

$$X_3 + X_4 \leq 250 \qquad (9)$$

وبحل النموذج اليقيني بأحد طرق البرمجة الصحيحة integer programming [134] وبأستخدام حزمة Tora [11]:

$$Z^* = 36540 \quad , \quad X_1^* = 219 \quad , \quad X_2^* = 1 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad X_4^* = 176$$

٢- يمكن إعادة صياغة القيد (5) وتحويله إلى قيد يقيني على النحو التالي:

$$P_r(X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\big((X_1 + X_2 - 220)/10 \le Z\big) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$1 - F\big((X_1 + X_2 - 220)/10\big) \le 0.9 \longrightarrow$$

$$F\big((X_1 + X_2 - 220)/10\big) \ge 0.1 \longrightarrow \frac{X_1 + X_2 - 220}{10} \ge F^{-1}(0.1)$$

وباستخدام ملحق رقم (٢) نجد أن:

$$F^{-1}(0.1) = -1.28 \longrightarrow X_1 + X_2 \ge 207.2 \qquad (10)$$

بالمثل لتحويل القيد (6)

$$P_r(X_3 + X_4 \le \tilde{b}_2) \ge 0.5 \longrightarrow P_r\big(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15} \le Z\big) \ge 0.5 \longrightarrow$$

$$1 - F\big(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\big) \ge 0.5 \longrightarrow F\big(\frac{X_3 + X_4 - 250}{15}\big) \le 0.5 \longrightarrow$$

$$\frac{X_3 + X_4 - 250}{15} \ge F^{-1}(0.5)$$

وباستخدام ملحق رقم (٢) أيضاً نجد أن:

$$F^{-1}(0.5) = 0 \longrightarrow X_3 + X_4 \le 250 \qquad (11)$$

وبأحلال القيدين اليقينيين (11),(10) بدلاً من القيدين الأحتماليين (6),(5) في النموذج (7)-(1) وبأستخدام أسلوب البرمجة الصحيحة أيضاً نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 38,490 \quad , \; X_1^* = 258 \quad , \; X_2^* = 227 \quad , \; X_3^* = 0 \quad , \; X_4^* = 0$$

(٢١-٥) تمرينات Exercises

(٢١-١): أعتبر نماذج البرمجة الأحتمالية التالية – حول convert كل منهم إلى نموذج يقيني مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية γ_i المناظرة للقيد الأحتمالي، ثم حل النموذج اليقيني بأستخدام الأسلوب المناسب.

$$
\begin{aligned}
1)\ & \text{Max.} Z = 5X_1 + 2X_2 \\
\text{S.T.}\quad & 5X_1 + 7X_2 \le \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9 \\
& 8X_1 + 4X_2 \ge 32 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 32$ وأنحراف معياري $\sigma = 3$.

$$
\begin{aligned}
2)\ & \text{Max.} Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 \\
\text{S.T.}\quad & 4X_1 + X_2 + 3X_3 \le 20 \\
& X_1 + 3X_2 \le \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 > 0.8 \\
& 2X_2 + X_3 \le \tilde{b}_2 \quad , \quad \gamma_2 < 0.9 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع الأسى بمعلمة $\lambda = 15$، كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 20$ وأنحراف معياري $\sigma = 5$.

$$
\begin{aligned}
3)\ & \text{Max.} Z = 6X_1 + 3X_2 - 4X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2 \\
\text{S.T.}\quad & X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.9 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 4 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

حيث $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 1$.

أ- أثبت أن دالة الهدف دالة شديدة التقعر strictly concave [٨ صفحة ٤٨٥].

ب- حل النموذج اليقيني المكافئ بأحد أساليب البرمجة غير الخطية.

(٢١-٢): تقوم أحدى شركات إنتاج تجميع مكونات إنتاج منتج معين بإنتاج منتج نهائي واحد (ولتكن الغسالة الأتوماتيك 20برنامج) من خلال تجميع الوحدات المكونة للغسالة (ماتور، جسم الغسالة، المكونات الكهربائية) حيث تتكون الوحدة الواحدة من هذا المنتج (الغسالة) من 3 أجزاء المختلفة السابقة. وتقوم الشركة من خلال خط تجميع واحد بتجميع 3 وحدات من المكونات المختلفة لتكوين وحدة واحدة من المنتج النهائي.

والجدول التالي يوضح عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً في كل قسم من أقسام الإنتاج كذلك عدد الساعات المطلوبة لتجميع الأجزاء الثلاثة في كل خط.

جدول (٢١-٩)

القسم	عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من كل مكون في الساعة (معدلات الإنتاج)			عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً
	مكون A الماتور	مكون B جسم الغسالة	مكون C المكون الكهربائي	
I	6	9	4	100
II	8	5	10	120

وتهدف الشركة إلى تحديد عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم من أقسام الإنتاج بحيث تكون عدد الوحدات المنتجة من المنتج النهائي أكبر ما يمكن. أو بعبارة أخرى أن تكون عدد الوحدات غير المجمعة نتيجة وجود عجز في جزء أو أكثر أقل ما يمكن.

علماً بأن الطلب على المنتج النهائي يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 20$ [٨ صفحة ٥٣].

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية مناسب.

٢- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستويات المأمونية $\gamma = 0.95$ ، $\gamma \geq 0.9$ ، $\gamma \geq 0.8$.

٣- حل النماذج اليقينية المكافئة – ثم عقب على الحل.

(٢١-٣): ١- حول النموذج الأحتمالي التالي إلى نموذج يقيني مكافئ إذا كان $\tilde{b}_1$ متغير يتبع توزيع جاما بدرجات حرية 2 كذلك $\tilde{b}_2$ متغير يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 5$، وأنحراف معياري $\sigma = 1$.

$$\text{Max.}Z = X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$P_r(2X_1 + X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1) \ge 0.86$$

$$P_r(3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \le \tilde{b}_2) \ge 0.75$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

٢- حل النموذج اليقيني المكافئ.

(٢١-٤): أعتبر النموذج الأحتمالي في تمرين (٢١-٣)، وبأفتراض أن $\tilde{b}_1$ تتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 = 2$ وتباين $\sigma_1^2 = 1$ عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \ge 0.9$، $\gamma_2 \ge 0.8$ - حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقينى مكافئ ثم أوجد الحل الأمثل.

(٢١-٥): حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية عند مستوى المأمونية المناظر في الحالات التالية:

١- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع الهندسى بمعلمة $P = 0.7$

$$5X_1 + 2X_2 - X_3 \le \tilde{b} \longrightarrow \gamma \ge 0.9$$

٢- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = 5$

$$3X_1 + 4X_2 \le \tilde{b} \longrightarrow \gamma \ge 0.8$$

٣- إذا كان $\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد بـ $\mu = 10\ ,\ \sigma = 2$

$$2X_1 - X_2 \le \tilde{b} \longrightarrow \gamma \ge 0.6$$

الباب الثاني والعشرون

نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً بمعلمات عشوائية $(\tilde{a}_{ij})$

(CCP)Models with Random Parameter $(\tilde{a}_{ij})$

(٢٢-١) مقدمة **Introduction**

(٢٢-٢) نظريات **Theorems**

(٢٢-٣) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع المعتاد **$\tilde{a}_{ij} \sim$ Normal Distribution**

(٢٢-٤) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع توزيع مربع كا $(\chi^2_{(n)})$
$\tilde{a}_{ij} \sim$ Chi-square Distribution

(٢٢-٥) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع الأسى
$\tilde{a}_{ij} \sim$ Exponential Distribution

(٢٢-٦) أمثلة تطبيقية **Applied Examples**

(٢٢-٧) تمرينات **Exercises**

(٢٢-١) مقدمة Introduction

في هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل كيفية تحويل نموذج البرمجة الأحتمالية إلى نموذج برمجة يقيني مكافئ بأستخدام أسلوب البرمجة المقيدة أحتمالياً(CCP) عندما تكون بعض أو كل معاملات المتغيرات القرارية في الطرف الأيسر للقيود $\tilde{a}_{ij}$ ، $i = 1,2,...,m$ ، $j = i,2,...,n$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة.

وفي هذا الباب سوف تقتصر دراستنا على بعض المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ التي لها التوزيعات الأحتمالية التالية:

١- عندما $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع المعتاد (الطبيعي) بمعلمتين $(\mu_{ij}, \sigma^2_{ij})$ وبالتالي المعتاد القياسي كحالة خاصة من التوزيع المعتاد.

٢- عندما $\tilde{a}_{ij}$ تتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية (n_{ij}).

٣- عندما $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $(\lambda_{ij}, \alpha_{ij})$ والحالة الخاصة بمعلمة واحدة (λ_{ij}).

وذلك يرجع إلى أن كثير من التطبيقات العملية تكون معاملات المتغيرات القرارية $(\tilde{a}_{ij})$ تتبع التوزيعات المذكورة أعلاه أو تؤول إليها في كثير من الحالات [51,131].

ومما هو جدير بالذكر، أنه في حالة نموذج البرمجة الأحتمالي الخطي في حالة وجود معامل أو أكثر من معاملات المتغيرات القرارية $\tilde{a}_{ij}$ ، $i = 1,2,....,m ; j = 1,2,...,n$ يمثل متغير عشوائي له توزيع أحتمالي معلوم، فإن نموذج البرمجة اليقيني المكافئ يكون نموذج برمجة غير خطي في معظم الحالات، وذلك خلاف الحالة عندما يكون الطرف الأيمن من القيد الأحتمالي $\tilde{b}_i$ متغير عشوائي فإن نموذج البرمجة الأحتمالي الخطي بعد التحويل يصبح النموذج اليقيني المكافئ له نموذج برمجة خطية أيضاً، كما تناولنا ذلك بالتفصيل في الباب السابق [51].

ويتطلب تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ الإلمام الجيد بالتوزيع الأحتمالي لبعض المتغيرات الأحتمالية التي تمثل دوال خطية في المتغيرات الأحتمالية محل الأهتمام مثل:

$$\text{(i)}\ \tilde{Y}_{ij} = \tilde{a}_{ij} X_j \qquad , \qquad \text{(ii)}\ \tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} X_j$$

لذلك سوف نقدم في الفصل التالي (٢٢-٢) بعض النظريات الخاصة بالتوزيعات الأحتمالية للمتغيرات $\tilde{Y}_{ij}$ أو $\tilde{S}_i$ في حالة التوزيعات المذكورة أعلاه.

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكن أستخدام أسلوب (CCP) في حالة القيود الأحتمالية غير الخطية في المتغيرات القرارية فإنه يمكن أستخدام نفس أسلوب التحويل في إيجاد التوزيع الأحتمالي للمتغيرات $\tilde{Y}_{ij}, \tilde{S}_i$:

$$\tilde{Y}_{ij} = \tilde{a}_{ij}\, f(X_j) \qquad \text{أو} \qquad \tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, f(X_j)$$

حيث $f(X_j)$ دالة غير خطية في المتغيرات القرارية X_j ، $j = 1,2,...,n$

(٢٢-٢) نظريات Theorems

في هذا الفصل سوف نقدم أهم النظريات لإيجاد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{Y}_{ij} = \tilde{a}_{ij}\, X_j$ ، أو المتغير $\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, X_j$ حيث تعامل المتغيرات القرارية (X_j) ، $j = 1,2,...,n$ في إيجاد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{Y}_{ij}$ أو المتغير $\tilde{S}_i$ كمقادير ثابته.

نظرية (٢٢-١): إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد بتوقع μ_i وتباين σ_i^2، كذلك X_i مقدار ثابت بحيث $i = 1,2,...,n$ فإن كل من المتغيرين $\tilde{Y}_i$ ، $\tilde{S}_i$ متغيران عشوائيين أيضاً كل منهما يتبع التوزيع المعتاد بحيث:

$$\text{(i)} \quad \tilde{Y}_i = \tilde{a}_i\, X_i \sim N(\mu_i\, X_i\, , X_i^2\, \sigma_i^2) \tag{22.1}$$

$$\text{(ii)} \quad \tilde{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i\, X_i \sim N\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\, X_i\, , \sum_{i=1}^{n} X_i^2\, \sigma_i^2\Big) \tag{22.2}$$

الإثبات: من نظرية (٢٠-٩) نجد أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{a}_i$ على النحو:

$$\text{(i)} \quad m_{\tilde{a}_i}(t) = E\,(e^{\tilde{a}_i\, X_i}) = e^{\mu_i\, X_i + \sigma_i^2\, X_i^2/2} \longrightarrow$$

$$m_{\tilde{y}_i}(t) = E\,(e^{\tilde{Y}_i\, t}) = E\,(e^{\tilde{a}_i\, X_i}) = e^{(\mu_i\, X_i\, t + \sigma_i^2\, X_i^2\, t^2/2)} \tag{22.3}$$

ومن الطرف الأيمن للعلاقة (22.3) نجد أن المتغير $\tilde{Y}_i$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $(\mu_i\, X_i)$ وتباين $(X_i^2\, \sigma_i^2)$. بالمثل المتغير $\tilde{S}$ حيث:

$$\text{(ii)} \quad m_{\tilde{S}}(t) = E\,(e^{\tilde{S}\, t}) = E\,(e^{\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\, t})$$

وبما أن $\tilde{a}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة، بالتالي:

$$m_{\tilde{S}}(t) = E\left(e^{(\tilde{Y}_1+\tilde{Y}_2+...+\tilde{Y}_n)\,t}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{(\mu_i X_i t + \sigma_i^2 X_i^2 t^2/2)} = e^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i t + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 X_i^2 t^2/2} \qquad (22.4)$$

ومن الطرف الأيمن للدالة أعلاه، نجد أن المتغير $\tilde{S}$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i$ وتباين $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2$.

نتيجة (٢٢-١): وفي الحالة الخاصة، إذا فرضنا أن $\mu_i = 0$ ، $\sigma_i^2 = 1$ لجميع قيم $i = 1,2,....,n$ وذلك عندما $\tilde{a}_i$ تتبع التوزيع المعتاد القياسي فإن:

$$\tilde{Y}_i \sim N(0\ ,\ X_i^2)\quad ,\quad \tilde{S} \sim N\left(0\ ,\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \qquad (22.5)$$

<u>نظرية (٢٢-٢)</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع $\chi^2_{r_i}$ بدرجات حرية r_i حيث $i = 1,2,...,n$ فإن المتغير $\tilde{S}$ حيث $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i$ متغير يتبع توزيع χ^2 أيضاً بدرجات حرية $\sum_{i=1}^{n} r_i$

الإثبات: من نظرية (٢٠-١١) نجد أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{a}_i$ على النحو التالي:

$$m_{\tilde{a}_i}(t) = E\left(e^{\tilde{a}_i t}\right) = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{r_i}$$

وبما أن المتغيرات $\tilde{a}_i$ ، $i = 1,2,....,n$ متغيرات عشوائية مستقلة بالتالي فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{S}$ على النحو التالي:

$$m_{\tilde{S}}(t) = E\left(e^{\tilde{S}\,t}\right) = E\left(e^{\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i t}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1-2t}\right]^{r_i} = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i} \quad (22.6)$$

والدالة المولدة للعزوم في (22.6) هي الدالة لمتغير يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $\sum_{i=1}^{n} r_i$

وبتوقع $E(\tilde{S}) = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

<u>نظرية (٢٢-٣)</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية r_i ، $i = 1,2,...,n$ فإن المتغيرات $\tilde{Y}_i$ حيث $\tilde{Y}_i = \tilde{a}_i\, X_i$ تمثل متغيرات χ^2 المرجحة weighted Chi-square distributed random variables [157,145,51] بحيث:

١- دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{Y}_i$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{Y}_i) = \frac{1}{X_i}\left\{\frac{1}{\Gamma(r_i/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_i/2}\left(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}\right)^{(r_i/2)-1} e^{-(1/2)(\tilde{Y}_i/X_i)}\right\},\ X_i > 0,\ \tilde{Y}_i \ge 0$$

(22.7)

٢- توقع وتباين المتغير $\tilde{Y}_i$ على النحو التالي

$$E(\tilde{Y}_i) = r_i\, X_i \quad , \quad Var(\tilde{Y}_i) = 2X_i^2\, r_i \qquad (22.8)$$

٣- الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{Y}_i$ على النحو التالي:

$$m_{\tilde{Y}_i}(t) = \left[\frac{1}{1-2X_i t}\right]^{r_i/2} \quad , \quad 2X_i\, t < 1 \qquad (22.9)$$

الإثبات: ١- بما أن دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{a}_i$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{a}_i) = \frac{1}{\Gamma\frac{r_i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_i/2} (\tilde{a}_i)^{\frac{r_i}{2}-1} e^{-(1/2)\tilde{a}_i} \qquad 2t<1\ ,\ \tilde{a}_i > 0$$

كذلك:

$$\tilde{Y}_i = \tilde{a}_i\, X_i \longrightarrow \tilde{a}_i = \tilde{Y}_i / X_i \longrightarrow \frac{d\,\tilde{a}_i}{d\,\tilde{Y}_i} = \frac{1}{X_i}$$

وبتطبيق نظرية (٢٠-٢٤) نجد أن دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{Y}_i$ على النحو:

$$f(\tilde{Y}_i) = \left|\frac{d\,\tilde{a}_i}{d\,\tilde{Y}_i}\right| f\left(\tilde{Y}_i / X_i\right)$$

$$= \frac{1}{X_i}\left\{\frac{1}{\Gamma\frac{r_i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_i/2}\left(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}\right)^{(r_i/2)-1} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\tilde{Y}_i / X_i\right)}\right\} \quad , \tilde{Y}_i > 0,\ X_i > 0$$

٢- $E(\tilde{Y}_i) = E(\tilde{a}_i\, X_i) = X_i\, E(\tilde{a}_i) = r_i\, X_i$

$$Var(\tilde{Y}_i) = Var(\tilde{a}_i\, X_i) = X_i^2\, E(\tilde{a}_i) = 2r_i\, X_i^2$$

٣- بما أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{a}_i$ على النحو التالي:

$$m_{\tilde{a}_i}(t) = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{r_i/2}$$

بالتالي فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{Y}_i$ على النحو التالي:

$$m_{\tilde{Y}_i}(t) = E(e^{\tilde{Y}_i t}) =$$

$$\int_0^\infty e^{\tilde{Y}_i t}\,\frac{1}{\Gamma(r_i/2)}(\frac{1}{2})^{r_i/2}(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i})^{(r_i/2)-1}e^{-\frac{1}{2}(\tilde{Y}_i/X_i)}\;d(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i})$$

$$=[\frac{1}{1-2X_i t}]\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r_i/2)}(\frac{1}{2})^{r_i/2}(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}[1-2X_i t])^{(r_i/2)-1}e^{-\frac{1}{2}(\tilde{Y}_i/X_i)}(1-2X_i t)\;d(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i})$$

$$=[\frac{1}{1-2X_i t}]^{(r_i/2)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r_i/2)}(\frac{1}{2})^{r_i/2}(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}[1-2X_i t])^{(r_i/2)-1}e^{-\frac{1}{2}(\tilde{Y}_i/X_i)}\;d(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}(1-2X_i t))}_{1}$$

$$=[\frac{1}{1-2X_i t}]^{(r_i/2)} \qquad , \qquad 2X_i t<1$$

ملحوظة:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r_i/2)}(\frac{1}{2})^{r_i/2}(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}[1-2X_i t])^{(r_i/2)-1}e^{-\frac{1}{2}(\tilde{Y}_i/X_i)}\;d\Big(\frac{\tilde{Y}_i}{X_i}(1-2X_i t)\Big)=1$$

<u>نظرية (٢٢-٤)</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{a}_{ij}$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي السالب بمعلمتين $(\lambda_{ij},\alpha_{ij})$، فإذا كان المتغير $\tilde{Y}_{ij}$ بحيث $\tilde{Y}_{ij}=\tilde{a}_{ij}\,X_j$ فإن:

١- دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{Y}_{ij}$ على النحو:

$$f(\tilde{Y}_{ij})=(\frac{\lambda_{ij}}{X_j})\,e^{-\lambda_{ij}(\tilde{Y}_{ij}-\alpha_{ij}X_j)/X_j} \qquad ,\tilde{Y}_{ij}\ge\alpha_{ij}\,x_j\ ,\quad x_j>0 \qquad (22.10)$$

٢- توقع وتباين المتغير $\tilde{Y}_{ij}$ على النحو:

$$E(\tilde{Y}_{ij})=\frac{X_j}{\lambda_{ij}}+\alpha_{ij}\,X_j \quad , \quad Var(\tilde{Y}_{ij})=\Big(\frac{X_j}{\lambda_{ij}}\Big)^2 \qquad (22.11)$$

٣- الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{Y}_{ij}$ على النحو:

$$m_{\tilde{Y}_{ij}}(t) = \left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} - X_j t}\right) e^{\alpha_{ij} X_j t} \qquad (22.12)$$

الإثبات: بما أن $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع الأسي فإن دالة كثافة أحتماله

$$f(\tilde{a}_{ij}) = \lambda_{ij}\, e^{-\lambda_{ij}(\tilde{a}_{ij} - \alpha_{ij})} \quad , \ \tilde{a}_{ij} \ge \alpha_{ij} \quad , \quad \lambda_{ij} > 0$$

وبما أن:

$$\tilde{Y}_{ij} = \tilde{a}_{ij}\, X_j \longrightarrow \tilde{a}_{ij} = \tilde{Y}_{ij}/X_j \qquad , \quad X_j > 0$$

وبتطبيق نظرية (٢٠-٢٤) نجد أن:

$$f(\tilde{Y}_{ij}) = \left(\frac{1}{X_j}\right) \lambda_{ij}\, e^{-\lambda_{ij}(\tilde{Y}_{ij}/X_j - \alpha_{ij})}$$

$$= \left(\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\right) e^{-\lambda_{ij}(\tilde{Y}_{ij} - \alpha_{ij} X_j)/X_j} \qquad , \quad \tilde{Y}_{ij} \ge \alpha_{ij}\, X_j > 0$$

ويتضح أن $\tilde{Y}_{ij}$ متغير يتبع التوزيع الأسي أيضاً بمعلمتين $(\lambda_{ij}/X_j \ , \ \alpha_{ij} X_j)$.

٢- $$E(\tilde{Y}_{ij}) = E(\tilde{a}_{ij}\, X_j) = X_j\left(\frac{1}{\lambda_{ij}} + \alpha_{ij}\right)$$

$$Var(\tilde{Y}_{ij}) = Var(\tilde{a}_{ij}\, X_j) = \left(\frac{X_j}{\lambda_{ij}}\right)^2$$

٣- $$m_{\tilde{Y}_{ij}}(t) = E(e^{\tilde{Y}_{ij} t}) = \int_{\alpha_{ij} X_j}^{\infty} e^{\tilde{Y}_{ij} t} \left(\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\right) e^{-\lambda_{ij}(\tilde{Y}_{ij} - \alpha_{ij} X_j)/X_j}\, d\tilde{Y}_{ij}$$

$$= \left(\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\right) e^{\alpha_{ij} \lambda_{ij}} \left(\frac{X_j}{\lambda_{ij} - X_j t}\right) \int_{\alpha_{ij} X_j}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{ij} - X_j t}{x_j}\right) e^{-\tilde{Y}_{ij}\left(\frac{\lambda_{ij} - X_j t}{X_j}\right)}\, d\tilde{Y}_{ij}$$

$$=(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}-X_j t})\, e^{\alpha_{ij}\lambda_{ij}} \cdot e^{-\alpha_{ij}(\lambda_{ij}-X_j t)} = (\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}-X_j t})\, e^{\alpha_{ij} X_j t}$$

نتيجة (٢٢-٢): عندما يتبع المتغير $\tilde{a}_{ij}$ التوزيع الأسي بمعلمة واحدة λ_{ij} فإن $\alpha_{ij}=0$ وبالتالي فإن:

$$f(\tilde{Y}_{ij}) = (\frac{\lambda_{ij}}{X_j})\, e^{-\lambda_{ij}\tilde{Y}_{ij}/X_j} \quad , \quad \lambda_{ij}, X_j > 0 \;,\; \tilde{Y}_{ij} \ge 0 \qquad (22.13)$$

$$m_{\tilde{Y}_{ij}}(t) = (\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}-X_j t}) \quad , \quad \lambda_{ij} > X_j t \qquad (22.14)$$

<u>نظرية (٢٢-٥)</u>: إذا كان $\tilde{Y}_{ij}$ ، $j=1,2,...,n$ عدد n من المتغيرات العشوائية كل منها يتبع التوزيع الأسي السالب بمعلمتين $(\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\,,\,\alpha_{ij}X_j)$ فإن المتغير W_{ij} يتبع توزيع $\chi^2_{(2)}$ بدرجة حرية (2) حيث:

$$\tilde{W}_{ij} = 2\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\left(\tilde{Y}_{ij} - \alpha_{ij}X_j\right) \qquad (22.20)$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{Y}_{ij} = \frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n} 2[\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\left(\tilde{Y}_{ij}-\alpha_{ij}X_j\right)]\frac{X_j}{\lambda_{ij}}\} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_j$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{Y}_{ij} = \frac{1}{2}[\sum_{j=1}^{n}(X_j/\lambda_{ij})\tilde{W}_{ij} + \sum_{j=1}^{n} 2\,\alpha_{ij}X_j] \qquad (22.16)$$

حيث $\sum_{j=1}^{n}(X_j / 2\lambda_{ij})\tilde{W}_{ij}$ مجموع متغيرات χ^2 المرجحة، حيث يمثل $(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} X_j)$ مقدار ثابت.

الإثبات: بما أن دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{Y}_{ij}$ على النحو:

$$f(\tilde{Y}_{ij}) = (\frac{\lambda_{ij}}{X_j})\, e^{-(\lambda_{ij}/X_j)(\tilde{Y}_{ij}-\alpha_{ij}X_j)} \qquad , \ \tilde{Y}_{ij} \ge \alpha_{ij}X_j$$

كذلك:

$$\tilde{w}_{ij} = 2\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\left(\tilde{Y}_{ij} - \alpha_{ij}X_j\right) \longrightarrow \tilde{Y}_{ij} = \frac{X_j \tilde{w}_{ij}}{2\lambda_{ij}} + \alpha_{ij} X_j$$

وبتطبيق نظرية (٢٠-٢٤) نجد أن دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{w}_{ij}$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{w}_{ij}) = \left|\frac{X_j}{2\lambda_{ij}}\right| \left\{\frac{\lambda_{ij}}{X_j}\, e^{-(\lambda_{ij}/X_j)[(X_j\tilde{w}_{ij}/2\lambda_{ij})+\alpha_{ij}X_j-\alpha_{ij}X_j]}\right\} \longrightarrow$$

$$f(\tilde{w}_{ij}) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\tilde{w}_{ij}} \qquad , \ \tilde{w}_{ij} \ge 0 \qquad (22.17)$$

ويتضح أن دالة كثافة الأحتمال $f(\tilde{w}_{ij})$ هي دالة كثافة أحتمال لمتغير يتبع توزيع χ^2 بدرجتين حرية.

وهذه النظرية تثبت أن المجموع المرجح للمتغيرات العشوائية المستقلة التي يتبع كل منهم التوزيع الأسي السالب بمعلمتين يكافئ مجموع متغيرات χ^2 المرجحة وكل منهم يتبع توزيع χ^2 بدرجتين حرية بالإضافة إلى المقدار الثابت $(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} X_j)$ كما هو موضح بالعلاقة (22.16).

وفي الفصل (٢٢-٥) سوف نستخدم هذه النظرية في إشتقاق النموذج اليقيني عندما بعض أو كل المتغيرات $\tilde{a}_{ij}$ يتبع كل منها التوزيع الأسي بمعلمتين.

تعريف (٢٢-١): التغاير **Covariance**

إذا فرضنا أن X,Y متغيرين عشوائيين فإن مقياس الإختلاف بين X,Y يسمى بمؤشر (مقياس) التغاير ويرمز له بالرمز $Cov(X,Y)$ أو $\sigma_{X,Y}$ ويعرف على النحو التالي:

$$Cov(X,Y)=\sigma_{X,Y}=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} \qquad (22.18)$$

حيث μ_X,μ_Y تشيران إلى توقع المتغير X وتوقع المتغير Y على الترتيب.

ملاحظات: ١- التغاير $\sigma_{X,Y}$ ممكن أن يأخذ قيم موجبة أو قيم سالبة. وعندما يكون المتغيران X,Y مستقلين فإن $\sigma_{X,Y}=0$.

٢- وعندما تكون العلاقة بين X,Y علاقة طردية يكون قيمة موجبة $(\sigma_{X,Y}=+)$ وعندما تكون العلاقة عكسية يكون قيمة سالبة $(\sigma_{X,Y}=-)$.

نظرية (٢٢-٦): إذا فرضنا أن لدينا فئتين من المتغيرات $X_1,X_2,\ldots,X_n$ ، $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$ كذلك لدينا فئتين من المقادير الثابتة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ ، $b_1,b_2,\ldots\ldots,b_m$ فإن:

$$Cov[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i \ , \ \sum_{j=1}^{m}b_jY_j]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\,b_j\,Cov(X_i\,,Y_j) \quad (22.19)$$

الإثبات: أنظر مرجع [101, page 179].

نتيجة (٢٢-٤): إذا فرضنا أن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عدد n من المتغيرات العشوائية، والمقادير الثابتة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ فإن:

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\, a_j\, \mathrm{Cov}(X_i\,, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i}\ \sum_{i\neq j\ j} a_i\, a_j\, \mathrm{Cov}(X_i\,, X_j) \qquad (22.20)$$

<u>**نظرية (٢٢-٧)**</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{Y}_j$ ، $j = 1,2$ متغيران عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $\left(\frac{\lambda_j}{X_j}\,,\ \alpha_j X_j\right)$ ودالة كثافة الأحتمال $f(\tilde{Y}_j)$ على النحو:

$$f(\tilde{Y}_j) = \Big(\frac{\lambda_j}{X_j}\Big)\, e^{-\lambda_j/X_j(\tilde{Y}_j - \alpha_j X_j)} \qquad ,\quad \tilde{Y}_j \geq \alpha_j X_j \qquad (22.21)$$

فإذا فرضنا أن المتغير $\tilde{S}_1$ بحيث:

$$\tilde{S}_1 = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$$

فإن دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{S}_1$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{S}_1) = \Big(\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2\, X_1 - \lambda_1\, X_2}\Big)\Big\{e^{(\lambda_1/X_1)[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2]}\,.\,e^{-(\lambda_1/X_1)\tilde{S}_1} -$$

$$e^{(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)}\,.\,e^{-(\lambda_2/X_2)\tilde{S}_1}\Big\}\ ,\tilde{S}_1 \geq (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)\,,\ \lambda_1 X_2 \to \lambda_2 X_1 \quad (22.22)$$

$$E(\tilde{S}_1) = \Big(\frac{X_1}{\lambda_1} + \alpha_1 X_1\Big) + \Big(\frac{X_2}{\lambda_2} + \alpha_2 X_2\Big) \qquad (22.23)$$

الإثبات: بما أن $\tilde{Y}_j$ ، $j = 1,2$ متغيران عشوائيين مستقلين، بالتالي فإن دالة كثافة الأحتمال المشتركة على النحو التالي:

$$f(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \Big(\frac{\lambda_1\lambda_2}{X_1 X_2}\Big)\ e^{\frac{-\lambda_1}{X_1}(\tilde{Y}_1 - \alpha_1 X_1) - \frac{\lambda_2}{X_2}(\tilde{Y}_2 - \alpha_2 X_2)} \qquad (22.24)$$

فإذا فرضنا أن $\tilde{S}_2 = \tilde{Y}_2$ وبأستخدام نظرية (٢٠-١٩) نجد أن الدالة المشتركة للمتغيران $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2) = \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{X_1X_2}\right)\ e^{\frac{-\lambda_1}{X_1}(\tilde{S}_1-\tilde{S}_2-\alpha_1X_1)-\frac{\lambda_2}{X_2}(\tilde{S}_2-\alpha_2X_2)}$$

$$= \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{X_1X_2}\right)\ e^{\frac{-\lambda_1}{X_1}(\tilde{S}_1)}\ e^{(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)}\ e^{-\left(\frac{\lambda_2X_1-\lambda_1X_2}{X_1X_2}\right)\tilde{S}_2}$$

$$\longrightarrow$$

$$f(\tilde{S}_1) = \int_{\alpha_2X_2}^{\tilde{S}_1} f(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2)\ d\tilde{S}_2$$

$$= \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2X_1-\lambda_1X_2}\left\{e^{(\lambda_1/X_1)[\alpha_1X_1+\alpha_2X_2]}\,.\,e^{-(\lambda_1/X_1)\tilde{S}_1}\right.$$
$$\left. e^{(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)}\,.\,e^{-(\lambda_2/X_2)\tilde{S}_1}\right\}$$

$$E(\tilde{S}_1) = \int_{\alpha_1X_1+\alpha_2X_2}^{\infty} \tilde{S}_1\, f(\tilde{S}_1)\ d\tilde{S}_1 = \left(\frac{X_1}{\lambda_1}+\alpha_1X_1\right)+\left(\frac{X_2}{\lambda_2}+\alpha_2X_2\right)$$

نتيجة (٢٢-٥): إذا فرضنا أن $\alpha_j = 0$ ، $j = 1,2$ فإن:

$$f(\tilde{S}_1) = \frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_2X_1-\lambda_1X_2}\left\{e^{-(\lambda_1/X_1)\tilde{S}_1} - e^{-(\lambda_2/X_2)\tilde{S}_1}\right\}\ ,\ \ \tilde{S}_1 \geq 0 \qquad (22.25)$$

$$E(\tilde{S}_1) = \frac{X_1}{\lambda_1}+\frac{X_2}{\lambda_2}$$

تمرين (١)

(١) إذا فرضنا أن المتغيرين المستقلين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ حيث $\tilde{a}_1 \sim N(5,4)$ ، $\tilde{a}_2 \sim N(10,9)$ كذلك C_1, C_2 مقادير ثابتة. فإذا فرضنا أن:

$$\tilde{Y}_1 = C_1\,\tilde{a}_1 \quad , \quad \tilde{Y}_2 = C_2\,\tilde{a}_2 \quad , \quad S = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$$

أثبت ما يلي: ١- أن المتغيرين $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ كل منهما يتبع التوزيع المعتاد بحيث:

$$\tilde{Y}_1 \sim N(5\,C_1, 4\,C_1^2) \quad , \quad \tilde{Y}_2 \sim N(10\,C_1, 9\,C_1^2)$$

٢-
$$m_{\tilde{Y}_1}(t) = e^{(5\,C_1\,t + 4\,C_1^2\,t^2/2)}$$

$$m_{\tilde{Y}_2}(t) = e^{(10\,C_1\,t + 9\,C_1^2\,t^2/2)}$$

٣- أن المتغير $\tilde{S}$ يتبع التوزيع المعتاد بحيث:

$$\tilde{S} \sim N[(5\,C_1 + 10\,C_2), (4\,C_1^2 + 9\,C_2^2)]$$

$$m_{\tilde{S}}(t) = e^{(5\,C_1 + 10\,C_2)\,t + (4\,C_1^2 + 9\,C_2^2)\,t^2/2)}$$

(٢) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i$ بحيث $i = 1,2,3$ متغيرات عشوائية مستقلة ، $\tilde{a}_i \sim N(0,1)$

١- أوجد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ حيث $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{3} C_i\,\tilde{a}_i$ حيث C_i مقادير ثابتة – ثم أوجد توقع وتباين $\tilde{S}$.

(٣) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة ، $i = 1,2,3$ بحيث:

$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(2)} \quad , \quad \tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(8)} \quad , \quad \tilde{a}_3 \sim \chi^2_{(5)}$$

أثبت أن المتغير $\tilde{S}$ حيث $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_i$ متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(15)}$.

(٤) إذا فرضنا أن $\tilde{a}$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $(\lambda = 4, \alpha = 5)$

أوجد: ١- دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\tilde{a}$.

٢- أوجد الدالة المولدة للعزوم $m_{\tilde{a}}(t)$ ومنها أوجد التوقع والتباين للمتغير $\tilde{a}$.

(٥) إذا فرضنا أن $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ متغيرين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع الأسي بحيث:

$$\tilde{Y}_1 \sim \exp.(\lambda_1 = 3, \alpha_1 = 5) \ , \ \tilde{Y}_2 \sim \exp.(\lambda_2 = 5, \alpha_2 = 10)$$

فإذا كان $\tilde{S} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$ أوجد كل من:

١- التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$.

٢- الدالة المولدة للعزوم لـ $\tilde{S}$.

٣- توقع وتباين المتغير $\tilde{S}$.

(٦) أعتبر التمرين السابق (٥)، كذلك $\tilde{Y}_3$ متغير مستقل عن $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ أيضاً، بحيث $\tilde{Y}_3 \sim \exp.(\lambda_3 = 2, \alpha_3 = 2)$ فإذا كان $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{Y}_j$ أوجد:

١- التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ في هذه الحالة.

٢- الدالة المولدة للعزوم لـ $\tilde{S}$.

٣- من (٢) أوجد توقع وتباين $\tilde{S}$.

(٢٢-٣) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع المعتاد $\tilde{a}_{ij}$ ~ Normal Distribution

في هذا الفصل سوف نتناول بشئ من التفصيل أستخدام أسلوب (CCP) في تحويل القيود الأحتمالية في نماذج البرمجة الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة عندما تمثل بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية كل منهم يتبع التوزيع المعتاد في حالتين:

الحالة الأولى: عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية مستقلة بتوقع μ_j وتباين σ_j^2.

الحالة الثانية: عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية غير مستقلة بتوقع μ_j وتباين σ_j^2 وتغاير $\sigma_{\grave{j}j}$ حيث $\grave{j} \neq j$.

<u>الحالة الأولى</u>: إذا فرضنا أن المعلمات $\tilde{a}_j$، $j = 1,2,.....,n$ متغيرات عشوائية مستقلة بحيث $\tilde{a}_j \sim N(\mu_j\ ,\ \sigma_j^2)$ ، أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$\Big(\sum_{j}^{\grave{n}} \tilde{a}_j X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_j X_j\Big) \leq b \quad , \quad \grave{n} \leq n \qquad (22.26)$$

حيث a_j ، b تمثل معلمات ثابتة، X_j حيث $j = 1,2,...,n$ تمثل المتغيرات القرارية وهي متغيرات غير عشوائية. فإذا فرضنا مستوى المأمونية γ فإنه يمكن إعادة صياغة المتباينة في (22.26) على النحو التالي:

$$P_r\Big\{\sum_{j}^{\grave{n}} \tilde{a}_j X_j \leq b - \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_j X_j\Big\} = \gamma \qquad (22.27)$$

فإذا فرضنا أن المتغير $\tilde{S}$ بحيث:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_j X_j$$

ومن نظرية (٢٢-١) نجد أن:

$$\tilde{S} \sim N\left(\sum_{j=1}^{n_1} \mu_j X_j \ , \ \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_j^2 X_j^2\right)$$

وبالتالي فإن المتغير المعتاد القياسي Z بحيث:

$$Z = \frac{\tilde{S} - \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j X_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_1} \sigma_j^2 X_j^2}} \qquad (22.28)$$

متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسي ، وبالتالي يمكن تحويل القيد الأحتمالي (22.26) إلى قيد يقيني مكافئ على النحو التالي:

$$P_r\left\{Z \le \left(b - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_j X_j - \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j X_j\right) \div \sqrt{\sum_{j=1}^{n_1} \sigma_j^2 x_j^2}\right\} = \gamma \longrightarrow$$

$$F\left[\left(b - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_j X_j - \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j X_j\right) \div \sqrt{\sum_{j=1}^{n_1} \sigma_j^2 x_j^2}\right] = \gamma \longrightarrow$$

$$\frac{b - \sum_{j=n_1+1}^{n} a_j X_j - \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j X_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_1} \sigma_j^2 X_j^2}} = F^{-1}(\gamma) \qquad (22.29)$$

حيث F هي دالة التوزيع التراكمية للمتغير القياسي Z ، $F^{-1}(\gamma)$ هي قيمة الدالة العكسية للدالة F عند مستوى المأمونية γ، حيث يمكن الحصول عليها من جدول الأحتمالات التراكمية للمتغير Z بملحق رقم (٢). وسوف نوضح خطوات تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني مكافئ من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٢٢-١): إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1$ متغير يتبع توزيع معتاد بتوقع 5 وتباين 4، حول القيد الأحتمالي التالي

$$\tilde{a}_1 X_1 + 4 X_2 \le 10 \qquad (1)$$

إلى قيد يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية $\gamma \ge 0.9$.

الحل: أعتبر القيد الأحتمالي أعلاه حيث $\tilde{a}_1 \sim N(5,4)$ ، فإنه يمكن إعادة صياغة القيد (1) على النحو التالي:

$$P_r[\tilde{a}_1 X_1 + 4 X_2 \le 10] \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r[Z \le (10 - 4 X_2 - 5 X_1)/\sqrt{4 X_1^2}] \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$\frac{10 - 4 X_2 - 5 X_1}{2 X_1} \ge F^{-1}(0.9) \qquad (2)$$

ومن جدول ملحق (٢) نجد أن:

$$F^{-1}(0.9) = 1.28$$

وبالتعويض في الطرف الأيمن للقيد (2) بقيمة $F^{-1}(0.9)$ نجد أن:

$$\frac{10 - 4 X_2 - 5 X_1}{2 X_1} \ge 1.28 \longrightarrow 7.56 X_1 + 4 X_2 \le 10$$

مثال (٢٢-٢): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$Max.Z = 5 X_1 + 2 X_2 \qquad (1)$$

$$S.T. \quad 5 X_1 + \tilde{a}_{12} X_2 \le 25 \qquad (2)$$

$$\tilde{a}_{21} X_1 + \tilde{a}_{22} X_2 \ge 10 \qquad (3)$$

$$X_1 , \ X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{a}_{12} \sim N(3,4)\,,\tilde{a}_{21} \sim N(4,1)\,,\tilde{a}_{22} \sim N(2,1)$ تمثل متغيرات عشوائية مستقلة.

المطلوب: ١- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند القيم المتوقعة للمعلمات الأحتمالية،

٢- عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.95$, $\gamma_2 \leq 0.90$. حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج مكافئ يقيني ثم أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

٣- كذلك عند مستوى مأمونية $\gamma_1 \geq 0.90$, $\gamma_2 \geq 0.80$. أوجد الحل الأمثل للنموذج اليقيني المكافئ.

٤- قارن بين الحلول في (١)-(٣).

الحل: ١- بما أن $E(\tilde{a}_{12}) = 3$, $E(\tilde{a}_{21}) = 4$, $E(\tilde{a}_{22}) = 2$

ويصبح النموذج اليقيني في هذه الحالة على النحو:

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 5X_1 + 3X_2 \leq 25 \qquad (5)$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 10 \qquad (6)$$

$$X_1\,,\; X_2 \geq 0$$

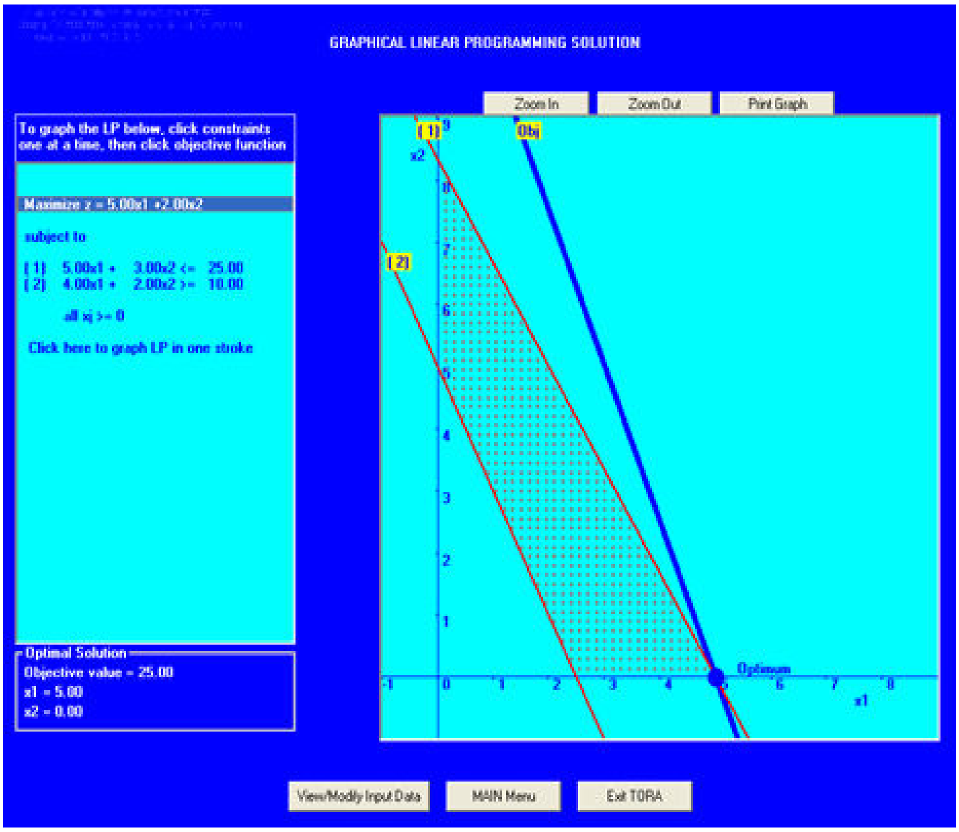
وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 25 \quad , \quad X_1^* = 5 \quad , \quad X_2^* = 0$$

والشكل التالي يوضح الحل بيانياً.

٢- وعند مستوى المأمونية $\gamma_1 \geq 0.95$, $\gamma_2 \leq 0.90$ يمكن تحويل القيدين (2),(3) على الترتيب على النحو التالي:

شكل (٢٢-١)



$$P_r\{5X_1+\tilde{a}_{12}X_2 \le 25\} \ge 0.95 \rightarrow P_r\{\tilde{a}_{12}X_2 \le 25-5X_1\} \ge 0.95 \rightarrow$$

$$P_r\{Z \le (25-5X_1-3X_2)/\sqrt{4X_2^2}\} \ge 0.95 \rightarrow \frac{25-5X_1-3X_2}{2X_2} \ge 1.64 \rightarrow$$

$$5X_1+6.28X_2 \le 25 \qquad (7)$$

بالمثل

$$P_r\{\tilde{a}_{21}X_1+\tilde{a}_{22}X_2 \ge 10\} \le 0.90 \qquad (8)$$

من نظرية (٢٢-١) نجد أن المتغير $(\tilde{a}_{21} X_1 + \tilde{a}_{22} X_2)$ يتبع التوزيع المعتاد أيضاً، بحيث:

$$E(\tilde{a}_{21} X_1 + \tilde{a}_{22} X_2) = 4 X_1 + 2 X_2$$

$$Var(\tilde{a}_{21} X_1 + \tilde{a}_{22} X_2) = X_1^2 + X_2^2$$

وبالتالي بتحويل المتغير المعتاد في الطرف الأيسر للمتباينة في (8) إلى معتاد قياسي، نجد أن الأحتمال المكافئ للأحتمال في (8) على النحو التالي:

$$1 - P_r\{Z \leq (10 - 4 X_1 - 2X_2) / \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\} \leq 0.90 \longrightarrow$$

ومن جدول الأحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسي بملحق (٢) نجد أن:

$$\frac{10 - 4 X_1 - 2X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \geq -1.28$$

ويصبح القيد اليقيني المكافئ للقيد (8) على النحو التالي:

$$(10 - 4 X_1 - 2 X_2)^2 \geq 1.64 (X_1^2 + X_2^2) \longrightarrow$$

$$-14.36 X_1^2 - 2.36 X_2^2 - 16 X_1 X_2 + 80 X_1 + 40 X_2 \leq 100 \qquad (9)$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Max.Z = 5 X_1 + 2 X_2 \qquad (10)$$

$$S.T. \quad 5 X_1 + 6.28 X_2 \leq 25 \qquad (11)$$

$$-14.36 X_1^2 - 2.36 X_2^2 - 16 X_1 X_2 + 80 X_1 + 40 X_2 \leq 100 \qquad (12)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \qquad (13)$$

ونجد أن النموذج اليقيني المكافئ في (13)-(10) نموذج برمجة غير خطية يمكن أستخدام أحد أساليب البرمجة غير الخطية مثل لأجرانج[٨, 134] للحصول على الحل الأمثل التالي:

$$Z^* = 25 \quad , \quad X_1^* = 5 \quad , \quad X_2^* = 0$$

<u>الحالة الثانية</u>: إذا فرضنا أن المعلمات $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية بحيث $\tilde{a}_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ ، والمتغيرات $\tilde{a}_j$ غير مستقلة والتغاير بين كل معلمتين $\tilde{a}_j$ ، $\tilde{a}_j$ يساوى σ_{jj} بحيث $j \neq j$ ويصبح المتغير القياسي Z على النحو التالي [90,91,85]:

$$Z = \frac{\tilde{S} - \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 X_j^2 + \sum\sum_{j \neq j} X_j X_j \ \mathrm{Cov}(\tilde{a}_j , \tilde{a}_j)}} \qquad (22.30)$$

فإذا أعتبرنا القيد (22.26) فإن:

$$F\left[(b - \sum_{j=n+1}^{n} a_j X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j) \div \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 X_j^2 + \sum\sum_{j \neq j} X_j X_j \ \mathrm{Cov}(\tilde{a}_j , \tilde{a}_j)}\right] = \gamma \longrightarrow$$

$$\frac{b - \sum_{j=n+1}^{n} a_j X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 X_j^2 + \sum\sum_{j \neq j} X_j X_j \ \mathrm{Cov}(\tilde{a}_j , \tilde{a}_j)}} = F^{-1}(\gamma) \qquad (22.31)$$

والقيد (22.31) قيد يقيني حيث F هي الدالة التراكمية للمتغير القياسي Z وبأستخدام جداول الأحتمالات التراكمية للتوزيع القياسي بملحق رقم (٢) يمكن إيجاد $F^{-1}(\gamma)$ وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٢٢-٣): إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيرين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد بحيث $\tilde{a}_2 \sim N(\mu_2 = 3\ ,\ \sigma_2^2 = 2)$ ، $\tilde{a}_1 \sim N(\mu_1 = 2\ ,\ \sigma_1^2 = 1)$ كذلك التغاير بينهما $\sigma_{12} = 0.5$ ، فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + 2\, X_1 + 3\, X_2 \le 20 \qquad (1)$$

والمطلوب تحول القيد الأحتمالي أعلاه إلى قيد يقيني بحيث $\gamma = 0.9$

يمكن صياغة القيد الأحتمالي على النحو التالي:

$$P_r\{\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + 2\, X_1 + 3\, X_2 \le 20\} = 0.9 \longrightarrow \qquad (2)$$

$$P_r\{Z \le \frac{20 - 2\, X_1 - 3\, X_2 - (2\, X_1 + 3\, X_2)}{\sqrt{X_1^2 + 2\, X_2^2 + 0.5\, X_1\, X_2}}\} = 0.9 \longrightarrow \qquad (3)$$

$$\frac{20 - 4\, X_1 - 6\, X_2}{\sqrt{X_1^2 + 2\, X_2^2 + 0.5\, X_1\, X_2}} = 1.28 \longrightarrow$$

$$4\, X_1 + 6\, X_2 + 1.28\sqrt{X_1^2 + 2\, X_2^2 + 0.5\, X_1\, X_2} = 20 \qquad (4)$$

والقيد (4) قيد يقيني مكافئ للقيد الأحتمالي (1) عند مستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

تمرين (٢)

(١) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيرين مستقليين بحيث $\tilde{a}_1 \sim N(6,2)\ ,\ \tilde{a}_2 \sim N(4,1)$

أ- أوجد الدالة الموالدة للعزوم لكل من $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$

ب- أعتبر النموذج الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.} Z = 6\, X_1 + 4\, X_2$$

$$\text{S.T.} \quad \tilde{a}_1\, X_1 + 4\, X_2 \le 10$$

$$5\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 \geq 13$$

$$\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 \leq 15$$

$$X_1\,,\;X_2 \geq 0$$

أوجد النموذج اليقيني المكافئ عند مستويات مأمونية $\gamma_1 \geq 0.90, \gamma_2 \geq 0.8, \gamma_3 \geq 0.7$ للقيود الثلاثة الأحتمالية على الترتيب.

(٢) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ متغيرات عشوائية مستقلة $\tilde{a}_1 \sim N(0,1)$ ، $\tilde{a}_2 \sim N(0,3)$ ، $\tilde{a}_3 \sim N(5,1)$ حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى المأمونية المناظر.

$$\tilde{a}_1\,X_1 + 3\,X_2 + \tilde{a}_3\,X_3 \leq 50 \;\longrightarrow\; \gamma_1 \geq 0.90$$

$$5\,X_1 - \tilde{a}_2\,X_2 + \tilde{a}_3\,X_3 \geq 30 \;\longrightarrow\; \gamma_2 \geq 0.80$$

$$\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + \tilde{a}_3\,X_3 \leq 20 \;\longrightarrow\; \gamma_3 \geq 0.50$$

(٣) إذا كان $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران غير مستقلين بحيث $\tilde{a}_1 \sim N(2,1), \tilde{a}_2 \sim N(5,2)$ كذلك $Cov(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 2$ بأستخدام التوزيعات الثنائية في الفصل (٢٠-٦) حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى المأمونية المناظر، ثم عقب على القيود اليقينية.

$$\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + 2\,X_3 \leq 100 \;\longrightarrow\; \gamma_1 \geq 0.90$$

$$5\,\tilde{a}_1\,X_1 - 3\,\tilde{a}_2\,X_2 \geq 20 \;\longrightarrow\; \gamma_2 \geq 0.80$$

$$\tilde{a}_1\,X_1 + 4\,X_2 - 3\,X_3 \leq 12 \;\longrightarrow\; \gamma_3 \geq 0.95$$

$$4\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + 5\,X_3 \leq 17 \;\longrightarrow\; \gamma_4 \geq 0.80$$

(٤) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i \sim N(0,1)$ متغيرات عشوائية مستقلة $i = 1,2,3$ - حول النموذج الأحتمالي التالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى المأمونية المناظر لكل قيد:

$$\text{Max.} Z = 5X_1 + 4X_2 + 2X_3$$

$$\text{S.T.} \quad 2\tilde{a}_1 X_1 + 5\tilde{a}_2 X_2 - 4X_3 \le 20 \longrightarrow \gamma_1 \ge 0.90$$

$$9X_1 + 2\tilde{a}_2 X_2 + 2X_3 \ge 5 \longrightarrow \gamma_2 \ge 0.95$$

$$5\tilde{a}_1 X_1 + 3\tilde{a}_2 X_2 + 2\tilde{a}_3 X_3 \le 15 \longrightarrow \gamma_3 \ge 0.80$$

$$X_1 ,\ X_2 ,\ X_3 \ge 0$$

(٥) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i \sim N(0,1)$ ، $i = 1,2$ ومعامل التغاير بين $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ على النحو $Cov(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 1$. فإذا فرضنا أن $\tilde{S} = 2\tilde{a}_1 X_1 + 3\tilde{a}_2 X_2$ أوجد:

١- التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ (أستخدم الفصل (٢٠-٦)).

٢- حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستوى المأمونية المناظر:

$$3\tilde{a}_1 X_1 + 5\tilde{a}_2 X_2 + X_3 \le 20 \longrightarrow \gamma_1 \ge 0.90$$

$$2\tilde{a}_1 X_1 + 3\tilde{a}_2 X_2 - 5X_3 \ge 18 \longrightarrow \gamma_2 \ge 0.80$$

(٦) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_i$ ، $i = 1,2,3$ متغيرات عشوائية غير مستقلة بحيث

$\tilde{a}_3 \sim N(\mu = 15, \sigma = 4)$ ، $\tilde{a}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 3)$ ، $\tilde{a}_1 \sim N(\mu = 5, \sigma = 1)$

$Cov(\tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = -0.5$ ، $Cov(\tilde{a}_1, \tilde{a}_3) = 0.5$ ، $Cov(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 1$

المطلوب: ١- إذا كان $\tilde{S}_1 = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$ - أوجد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}_1$.

٢- إذا كان $\tilde{S}_2 = \sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_i X_i$ - أوجد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}_2$.

٣- حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستويات المأمونية المناظرة.

$$\tilde{a}_1\, X_1 + 3\, X_2 + 4\, X_3 \leq 10 \quad , \quad \gamma_1 \geq 0.90$$

$$\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 - 7\, X_3 \geq 15 \quad , \quad \gamma_2 \geq 0.80$$

$$\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + \tilde{a}_3\, X_3 \leq 20 \quad , \quad \gamma_3 \geq 0.95$$

(٢٢-٤) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع توزيع مربع كا $(\chi^2_{(n)})$
$\tilde{a}_{ij}$ ~ Chi-square Distribution

في كثير من المشاكل الفعلية تكون معاملات المتغيرات القرارية $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية موجبة. وفي هذا الفصل سوف نتناول بشئ من التفصيل أستخدام أسلوب (CCP) في تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستويات مأمونية معينة، في حالة وجود بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_j$ تمثل متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع $\chi^2_{d_j}$ بدرجات حرية (d_j).

ويتطلب تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني مكافئ أولاً تحديد التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ حيث:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j X_j$$

لذلك في هذا الفصل سوف نقدم أولاً أشتقاق التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ الذي قدمة Sangupta سنة ١٩٧٢ والذي يمثل توزيع χ^2 غير المركزى non-central chi-squared dist. (أنظر الفصل (٢٠-٤) [130,131,51,127]).

ولكن نظراً لعدم بساطة أستخدام توزيع χ^2 غير المركزى للمتغير $\tilde{S}$ في هذه الحالة، لذلك فقد قدمت عدة تقريبات لتوزيع χ^2 غير المركزى يكون أستخدامها أبسط من توزيع χ^2 غير المركزى وبصفة خاصة المشاكل التطبيقية ذات الحجم الكبير.

لذلك سوف نقدم أولاً أشتقاق التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ ثم نقدم بعض التوزيعات التقريبية للمتغير $\tilde{S}$.

(٢٢-٤-١) <u>التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$</u>: بما أن $\tilde{a}_j \sim \chi^2_{d_j}$ أي يتبع توزيع χ^2 المركزى بدرجات حرية (d_j)، بالتالي فإنه يمكن إعادة صياغة $\tilde{S}$ على النحو التالي:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{n}_j \sqrt{X_j}\right)^2 \qquad (22.32)$$

حيث أن $\tilde{n}_j^2$ متغير له نفس التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{a}_j$ ، وبالتالي فإن المتغيرات $\tilde{n}_j$ ، $j = 1,2,...,n$ متغيرات عشوائية مستقلة أيضاً، وبالتالي فإن المتغيرات ζ_j ، $j = 1,2,...,n$ حيث:

$$\zeta_j = \tilde{n}_j \sqrt{X_j} \qquad (22.33)$$

متغيرات عشوائية كل منها يتبع التوزيع المعتاد بحيث:

$$E(\zeta_j) = m_j = E(\tilde{n}_j)\sqrt{X_j} = A_j \sqrt{X_j} \qquad (22.34)$$

$$Var(\zeta_j) = V_j = X_j \, Var(\tilde{n}_j) = B_j \, X_j \qquad (22.35)$$

حيث A_j ، B_j مقادير ثابتة تمثل دوال في عدد درجات الحرية d_j ويتم حساب القيمة التقريبية لكل منهما بأستخدام ملحق رقم (٩).

وبتحويل المتغيرات المعتادة ζ_j إلى متغيرات قياسية [51,140] يتم أعادة كتابة المتغير $\tilde{S}$ كدالة في المتغيرات المعتادة القياسية على النحو التالي:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 = \sum_{j=1}^{n} V_j (q_j + \overline{m}_j)^2 \;\;,\;\; \overline{m}_j = m_j \big/ \sqrt{V_j} \qquad (22.36)$$

حيث q_j متغيرات معتادة قياسية مستقلة أيضاً وتعرف على النحو التالي:

$$q_j = \left(\zeta_j - m_j\right) \big/ \sqrt{V_j}$$

حيث m_j, V_j توقع وتباين المتغير ζ_j .

وتصبح الدالة المميزة characteristic function للمتغير $\tilde{S}$ وسوف نشير لها بالرمز $\Phi(t)$ على النحو التالي [140,141]:

$$\Phi(t) = E(e^{it\tilde{S}}) = E\{\exp\, it(\sum_{j=1}^{n} V_j (q_j + \overline{m}_j)^2)\} \qquad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E\{\exp\, it V_j (q_j + \overline{m}_j)^2\}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} [(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it V_j (q_j + \overline{m}_j)^2 - \frac{1}{2} q_j^2\}\, dq_j]$$

ويمكن إثبات أن التكامل أعلاه يساوى:

$$(\frac{2\pi}{1 - 2itV_j})^{1/2} \exp\{\frac{itV_j \overline{m}_j^2}{1 - 2itV_j}\} \tag{22.37}$$

وبالتالي فإن $\Phi(t)$ تأخذ الصياغة التالية:

$$\Phi(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2itV_j)^{-1/2} \exp\{\sum_{j=1}^{n} \frac{itV_j \overline{m}_j^2}{1 - 2itV_j}\}$$

ويمكن للتبسيط كتابة $\Phi(t)$ على النحو التالي [140,141]:

$$\Phi(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2itV_j)^{-1/2} \exp\{\sum_{j=1}^{n} \frac{itV_j \overline{m}_j^2}{1 - 2itV_j}\} \tag{22.38}$$

ونلاحظ أن الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ في (22.38) تقترب تماماً من الدالة المميزة لمتغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزى [100]. حيث أن الدالة المميزة لمتغير يتبع توزيع كا٢ غير المركزي $\chi^2(n,\lambda)$ بدرجات حرية n والمعلمة غير المركزية λ على النحو التالي:

$$\Phi(t) = (1 - 2it)^{-n/2} \exp\{\frac{\lambda it}{1 - 2it}\} \tag{22.39}$$

بتوقع $(n+\lambda)$ وتباين $[2(n+2\lambda)]$. وبأستخدام الدالة المميزة $\Phi(t)$ للمتغير $\tilde{S}$ في (22.38) يمكن إشتقاق جميع العزوم μ_r، $r = 1,2,....$ للمتغير $\tilde{S}$ على النحو التالي :[81,82]

$$\mu_r = (-i)^r \left[\frac{d^r\, \Phi(t)}{d\, t^r} \right]_{t=0} \tag{22.40}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\mu_1 = E(\tilde{S}) = \sum_{j=1}^{n} (V_j + V_j\, \overline{m}_j^2) \tag{22.41}$$

$$\mu_2 = Var(\tilde{S}) = 2\sum_{j=1}^{n} (V_j^2 + 2V_j^2\, \overline{m}_j^2) \tag{22.42}$$

<u>حالات خاصة</u>: ١- إذا كان $V_j = V_{j'} = V$ ، $j \neq j'$ فإن الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ تصبح على النحو التالي:

$$\Phi(t) = \left(1 - 2\, i\, t\, V\right)^{-n/2} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{i\, t\, V\, \overline{m}_j^2}{1 - 2\, i\, t\, V} \right\} \tag{22.43}$$

وبالتالي فإن المتغير $(\tilde{S}/V)$ في هذه الحالة يتبع توزيع χ^2 غير المركزى بدرجات حرية تساوي (n) ومعلمة غير مركزية $\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2\right)$ بحيث:

$$E(\tilde{S}) = V\left[n + \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2\right] \tag{22.44}$$

$$Var(\tilde{S}) = 2\, V^2\left[n + 2\sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2\right] \tag{22.45}$$

٢- إذا فرضنا أن $V_j = 1$ لجميع قيم j فإن الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ في هذه الحالة تصبح على النحو:

$$\Phi(t) = (1 - 2\,i\,t)^{-n/2} \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} i\,t\,\overline{m}_j^2}{1 - 2\,i\,t}\right\} \tag{22.46}$$

وبالتالي فإن المتغير $\tilde{S}$ في هذه الحالة يتبع توزيع χ^2 غير المركزي أيضاً بدرجات حرية (n) ومعلمة غير مركزية تساوى $\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2\right)$ بحيث:

$$E(\tilde{S}) = n + \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2 \tag{22.47}$$

$$Var(\tilde{S}) = 2\left[n + 2\sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j^2\right] \tag{22.48}$$

ومما سبق يتضح أنه من الصعوبة أستخدام التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j X_j$ في الحالة العامة مباشرةً في تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني. لذلك قدمت العديد من التقريبات لتوزيع المتغير $\tilde{S}$ كما سوف نوضح فيما يلي.

(٢٢-٤-٢) بعض التوزيعات التقريبية للمتغير $\tilde{S}$: يوجد عدة تقريبات لتوزيع χ^2 غير المركزى أهمهما من حيث التطبيق التقريبات التالية:

أولاً: التقريب لتوزيع χ^2 المركزى: في سنة ١٩٤٩ قرب Patnaik [118] التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$ حيث $\tilde{S} = \tilde{S}/\alpha$ (α مقدار ثابت) إلى متغير يتبع توزيع $\chi^2(d)$ المركزي بدرجات حرية (d)، بحيث:

$$E(\tilde{S}\ ) = d \qquad , \qquad Var(\tilde{S}\ ) = 2d \qquad (22.49)$$

حيث يمكن الحصول على تقدير كل من d , عن طريق مساواة العزمين الأول والثاني للمتغير $\tilde{S}$ في (22.42),(22.41) بالعزمين الأول والثاني للمتغير $\tilde{S}$ في (22.49) على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n}(V_j + V_j\,\overline{m}_j^2) = \rho\, d \qquad (22.50)$$

$$2\sum_{j=1}^{n}(V_j^2 + 2\,V_j^2\,\overline{m}_j^2) = \rho^2\, d \qquad (22.51)$$

وبحل المعادلتين (22.51),(22.50) نحصل على قيمة كل من d , كدوال في d_j , X_j على النحو التالي:

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{n}(V_j^2 + 2\,V_j^2\,\overline{m}_j^2)}{\sum_{j=1}^{n}(V_j + V_j\,\overline{m}_j^2)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}X_j^2\,(2\,A_j^2\,B_j + B_j^2)}{\sum_{j=1}^{n}X_j\,(A_j^2 + B_j)} \qquad (22.52)$$

$$d = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(V_j + V_j\,\overline{m}_j^2)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}(V_j^2 + 2\,V_j^2\,\overline{m}_j^2)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\,(A_j^2 + B_j)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2\,(2\,A_j^2\,B_j + B_j^2)} \qquad (22.53)$$

حيث A_j , B_j مقادير ثابتة يتم حسابها بأستخدام ملحق رقم (٩).

ويلاحظ أن كل من d , دالة غير خطية في المتغيرات القرارية X_j ، وبالتالي يكون من غير الممكن أستخدام الجداول الإحصائية للدالة التراكمية لمتغير χ^2 المركزى لحساب قيم الدالة التراكمية العكسية $F^{-1}(\gamma)$ عند مستويات المأمونية γ.

ولكن يمكن أستخدام هذا التقريب عند أستخدام الأساليب العددية في الحصول على الحل للنموذج الأحتمالي مثل أساليب المحاكاة [141,128].

مثال (٢٢-٣): إذا فرضنا أن المتغير $\tilde{S}$ بحيث:

$$\tilde{S} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 \qquad (1)$$

وكل من $\tilde{a}_1 , \tilde{a}_2$ متغيرات عشوائية مستقلة بحيث:

$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2(4) \qquad , \qquad \tilde{a}_2 \sim \chi^2(6)$$

المطلوب: ١- أوجد الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ ، ثم أوجد توقع وتباين $\tilde{S}$.

٢- إذا فرضنا أن $\tilde{S} = \tilde{S}/\alpha$ حيث مقدار ثابت، قدر قيمة كل من وعدد درجات الحرية (d) للمتغير $\tilde{S}$.

الحل: ١- من تعريف V_j, m_j وأستخدام ملحق رقم (٩) نجد أن:

$$V_1 = X_1 B_1 = X_1\{4-[(32(4)^2-8(4)-5+42)/32(4)(2)]^2\}$$
$$= X_1 - \{4-3.44\} = 0.56 X_1 \longrightarrow \qquad (2)$$

$$m_1 = \sqrt{X_1}\, A_1 = \sqrt{X_1}\,\{[32(4)^2-8(4)-5]/32(4)(2)\}$$
$$= 1.855 X_1^{1/2} \longrightarrow \overline{m}_1 = m_1/\sqrt{V_1} = 3.313 \qquad (3)$$

$$V_2 = X_2\, B_2 = X_2\{6-[(32(6)^2-8(6)-5)/32(6)\sqrt{6}]^2\}$$
$$= (6-5.461)\, X_2 = 0.539\, X_2$$

$$m_2 = \sqrt{X_2}\, A_2 = \sqrt{X_2}\,[(32(6)^2-8(6)-5)/32(6)\sqrt{6}]$$
$$= 2.337\, X_2^{1/2} \longrightarrow \overline{m}_2 = m_2/\sqrt{V_2} = 3.183$$

وبما أن الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ على النحو التالي:

$$\Phi(t) = (1-2\,i\,t\,V_1)^{-1/2}\,(1-2\,i\,t\,V_2)^{-1/2}\exp\{\frac{i\,t\,V_1\,\overline{m}_1^2}{1-2\,i\,t\,V_1}+\frac{i\,t\,V_2\,\overline{m}_2^2}{1-2\,i\,t\,V_2}\}$$

بالتعويض في الطرف الأيمن لـ $\Phi(t)$ بقيم V_j, m_j نجد أن:

$$\Phi(t) = (1-1.12\,X_1\,i\,t)^{-1/2}\,(1-1.078\,X_2\,i\,t)^{-1/2}\exp\{\frac{3.441\,X_1 i\,t}{1-1.12\,X_1\,i\,t}+$$
$$\frac{5.461\,X_2 i\,t}{1-1.078\,X_2\,i\,t}\} \quad (5)$$

٢- إذا فرضنا أن $\tilde{S} = \tilde{S}/\rho$ حيث $\tilde{S}$ يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية d ومن ملحق (٩) تم حساب A_j, B_j حيث:

$$A_1 = 1.855 \quad , \quad A_2 = 2.337 \quad , \quad B_1 = 0.56 \quad , \quad B_2 = 0.538$$

بالتعويض في المعادلة (22.53),(22.52) نجد أن:

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_j^2\,(2\,A_j^2\,B_j + B_j^2)}{\sum_{j=1}^{2} X_j\,(A_j^2 + B_j)}$$

$$= \frac{X_1^2\,[2\,(1.855)^2\;(0.56)+(0.56)^2\,]+X_2^2\,[2\,(2.337)^2\;(0.538)+(0.538)^2\,]}{X_1[\,(1.855)^2\;+0.56\,]+X_2[\,(2.337)^2\;+0.538\,]}$$

$$= \frac{4.168\,X_1^2\;+6.166\,X_2^2}{4.001\,X_1\;+6\,X_1} \qquad (6)$$

وبالتعويض في المعادلة (22.48) نجد أن عدد درجات الحرية d على النحو التالي:

$$d = \frac{\left(\sum_{j=1}^{2} X_j\,(A_j^2+B_j)\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{2} X_j^2\,(2\,A_j^2\,B_j+B_j^2)\right)}$$

$$= \frac{[\,X_1\,(A_1^2+B_1)+X_2\,(A_2^2+B_2)]^2}{[X_1^2\,(2\,A_1^2\,B_1+B_1^2)+X_2^2\,(2\,A_2^2\,B_2+B_2^2)}$$

$$= \frac{4.001\,X_1\;+6.00\,X_1}{4.168\,X_1^2+6.166\,X_2^2} \qquad (7)$$

من (7),(6) نجد أن كل من d, دالة في X_1, X_2 .

<u>ثانياً</u>: **التقريب للتوزيع المعتاد**: إذا أعتبرنا المتغير $\tilde{S}$ يتبع توزيع χ^2 غير المركزي، فقد قدمت عدة تقريبات للمتغير $\tilde{S}$ للتوزيع المعتاد، ومن أهم هذه التقريبات:

(١) التقريب الذي قدمه Aty سنة ١٩٥٤ حيث قرب المتغير $\tilde{S}$ إلى متغير معتاد $\tilde{S}$ المعرف على النحو التالي [15,118]:

$$\tilde{\tilde{S}} = \left[\tilde{S}/E(\tilde{S})\,\right]^{1/2} \qquad (22.54)$$

بتوقع تقريبي $\left\{1-\frac{2}{9}(1/E(\tilde{S}))\right\}$ وتباين تقريبي $\left\{\frac{2}{9}(1/E(\tilde{S}))\right\}$.

مثال (٢٢-٤): أعتبر المثال السابق بأستخدام التقريب التالي:

$$\tilde{\mathbb{S}} = \left[\tilde{S}/E(\tilde{S})\right]^{1/2}$$

حول القيد الأحتمالي التالي إلى قيد يقيني:

$$P_r\left(\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 \le 10\right) \ge 0.90$$

الحل: بما أن:

$$E(\tilde{S}) = X_1 E(\tilde{a}_1) + X_2 E(\tilde{a}_2) = 4X_1 + 6X_2$$

$$P_r(\tilde{S} \le 10) \ge 0.90 \longrightarrow P_r\left(\sqrt{\tilde{S}/E(\tilde{S})} \le \sqrt{10/(4X_1 + 6X_2)}\right) \ge 0.90 \quad (8)$$

وبما أن المتغير $\sqrt{\tilde{S}/E(\tilde{S})}$ يؤول إلى التوزيع المعتاد بتوقع $E(\tilde{\mathbb{S}})$ وتباين $Var(\tilde{\mathbb{S}})$ على النحو:

$$E(\tilde{\mathbb{S}}) = E\left(\sqrt{\tilde{S}/E(\tilde{S})}\right) = 1 - \frac{2}{9}\left(1/E(\tilde{S})\right) = \frac{9(4X_1 + 6X_2) - 2}{9(4X_1 + 6X_2)} \quad (9)$$

$$Var(\tilde{\mathbb{S}}) = \frac{2}{9}\left(1/E(\tilde{\mathbb{S}})\right) = \frac{2}{9(4X_1 + 6X_2)} \quad (10)$$

وبتحويل المتغير المعتاد في المتباينة (8) إلى معتاد قياسي نجد أن القيد الأحتمالي المكافئ للقيد في (8) بدلالة المتغير المعتاد القياسي Z على النحو التالي:

$$P_r\left(Z \le \left[\sqrt{\frac{10}{4X_1 + 6X_2}} - \frac{9(4X_1 + 6X_2) - 2}{9(4X_1 + 6X_2)}\right] / \sqrt{2/9(4X_1 + 6X_2)}\right) \ge 0.90$$

$$\longrightarrow \quad (11)$$

وبأفتراض أن: $y^2 = 4X_1 + 6X_2$ فإن:

$$P_r\left(Z \le (9\sqrt{10}\ \ y - 9\,y^2 + 2)/(3\sqrt{2}\ \ y)\right) \ge 0.90$$

وباستخدام جداول الأحتمالات التراكمية للمتغير القياسي بملحق رقم (٢) نجد أن:

$$\frac{9\sqrt{10}\ \ y - 9\,y^2 + 2}{3\sqrt{2}\ \ y} \ge F^{-1}(0.90) \longrightarrow$$

$$\frac{9\sqrt{10}\ \ y - 9\ \ y^2 + 2}{3\sqrt{2}\ \ y} \ge 1.28 \longrightarrow$$

$$9\,y^2 - 23.03\,y \le 2 \qquad (12)$$

حيث:

$$y = \sqrt{4\,X_1 + 6\,X_2} \qquad (13)$$

ونلاحظ أن القيد (12) قيد يقيني مكافئ للقيد الأحتمالي (8) وغير خطى عند مستوى مأمونية $\gamma > 0.90$.

(٢) وفي سنة ١٩٧٩ قدم كل من Kendall and Stuart تقريب معتاد أخر للمتغير $\tilde{S}$، حيث أثبت أن المتغير $\tilde{S}$، بحيث [86,119]:

$$\tilde{\tilde{S}} = \left[2\,\tilde{S}/\ \ \right]^{1/2} \qquad (22.55)$$

متغير يؤول للتوزيع المعتاد بتوقع $\left(\sqrt{2d-1}\right)$ وتباين يساوى (1) أسرع من $\tilde{S}$ الذي عرف في (22.53) عندما يكون عدد درجات الحرية d عدد كبير [90, page 245].

وبالتالي يمكن تحويل $\tilde{S}$ إلى معتاد قياسي على النحو:

$$Z = \tilde{S}\ \ - \sqrt{2d-1} \qquad (22.56)$$

وبالتالي إمكانية إستخدام جداول الدالة التراكمية للتوزيع المعتاد القياسي بملحق رقم (٢).

<u>مثال (٢٢-٥)</u>: أعتبر المثال السابق – بأستخدام التقريب في (22.55) حول القيد الأحتمالي التالي:

$$P_r\left(\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 \leq 10\right) \tag{14}$$

إلى قيد يقيني مكافئ عندما $\gamma \geq 90$.

الحل:

$$P_r\left(\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 \leq 10\right) \geq 0.90 \longrightarrow P_r\left(\tilde{S} \leq 10\right) \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$P_r\left\{\sqrt{2\tilde{S}/\theta} \leq \sqrt{20/\theta}\right\} \geq 0.90 \longrightarrow \tag{15}$$

$$P_r\left\{\sqrt{\frac{2\tilde{S}}{\theta}} - \sqrt{2d-1} \leq \sqrt{\frac{20}{\theta}} - \sqrt{2d-1}\right\} \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$P_r\left\{Z \leq \sqrt{\frac{20}{\theta}} - \sqrt{2d-1}\right\} \geq 0.90 \longrightarrow$$

وبأستخدام جدول الدالة التراكمية للمتغير القياسي بملحق (٢) نجد أن:

$$\sqrt{\frac{20}{\theta}} - \sqrt{2d-1} \geq 1.28 \tag{16}$$

بالتعويض بقيمتي ، d في (7),(6) في الطرف الأيسر للقيد (16) نجد أن القيد اليقيني المناظر قيد غير خطي في X_1, X_2 ويمكن تحويله تقريبية إلى قيد خطي [82]

(٣) وفي سنة ٢٠٠٥ قدم Muirhead تقريب للمتغير $\tilde{S}$ إلى متغير معتاد القياسي على النحو التالي [157]:

$$Z = \frac{\tilde{S} - E(\tilde{S})}{\sqrt{Var(\tilde{S})}}$$

ويستخدم هذا التقريب عندما تكون عدد درجات الحرية (d) للمتغير $\tilde{S}$ كبيرة كذلك المعلمة غير المركزية عدد كبير أو بعبارة أخرى عندما: $\sum_j \overline{m}_j^2 \to \infty$ أو $n \to \infty$.

<u>مثال (٢٢-٦)</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1 \sim \chi^2(10)$, $\tilde{a}_2 \sim \chi^2(15)$ حيث $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران مستقلين بحيث: $\tilde{S} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$ فإن:

$$E(\tilde{S}) = 10\,X_1 + 15\,X_2 \quad , \quad Var(\tilde{S}) = 20\,X_1^2 + 30\,X_2^2$$

فإذا أعتبرنا القيد الأحتمالي التالي:

$$P_r\left(\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 \le 10\right) \ge 0.90 \longrightarrow \qquad (17)$$

$$P_r\left(Z \le (10 - 10\,X_1 - 15\,X_2) \big/ \sqrt{20\,X_1^2 + 30\,X_2^2}\right) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$\frac{10 - 10\,X_1 - 15\,X_2}{\sqrt{20\,X_1^2 + 30\,X_2^2}} \ge 1.28 \longrightarrow$$

$$10\,X_1 + 15\,X_2 + 1.28\sqrt{20\,X_1^2 + 30\,X_2^2} \le 10 \qquad (18)$$

ونلاحظ أن القيد (18) قيد يقيني مكافئ للقيد (17) بمستوى مأمونية $\gamma > 0.90$.

ويمكن تبسيط هذا القيد اليقيني بتحويله إلى قيدين مكافئين على النحو التالي، وذلك بافتراض أن:

$$y^2 = 20\,X_1^2 + 30\,X_2^2 \qquad (19)$$

فأن القيدين التاليين مكافئين للقيد الأحتمالي (19)، على النحو:

$$10\,X_1 + 15\,X_2 + 1.28\,y \le 10 \qquad (20)$$

$$y^2 - 20\,X_1^2 - 30\,X_2^2 = 0 \qquad (21)$$

تمرين (٣)

(١) إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1 \sim \chi^2(5), \tilde{a}_2 \sim \chi^2(3)$ متغيرين عشوائيين مستقليين، كذلك $\tilde{S} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$ أوجد ما يلي:

١- الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$.

٢- الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{S}$ ، ومنها أوجد توقع وتباين المتغير $\tilde{S}$.

(٢) في التمرين (١) قرب المتغير $\tilde{S}$ إلى متغير يتبع التوزيع المعتاد بأستخدام طرق التقريب المقدمة في (٢٢-٤-٢) ثم أوجد الأحتمالات التالية:

$$\text{(i)}\ P_r(\tilde{S} < 8) \qquad , \qquad \text{(ii)}\ P_r(\tilde{S} > 10)$$

ثم قارن النتائج بأستخدام طرق التقريب المختلفة المستخدمة.

(٣) أعتبر المتغيرات العشوائية $\tilde{a}_j$ متغيرات مستقلة بحيث $\tilde{a}_j \sim \chi^2(3)$ ، $j = 1,2,3$ فإذا فرضنا أن $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j$ أوجد:

١- التوزيع الأحتمالي للمتغير $\tilde{S}$.

٢- الدالة التراكمية للمتغير $\tilde{S}$.

٣- الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{S}$ ومنها أحسب التوقع والتباين للمتغير $\tilde{S}$.

٤- أعتبر المتغير $\tilde{K}$ حيث $\tilde{K} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j X_j$ أوجد الدالة المميزة للمتغير $\tilde{K}$.

٥- أعتبر المتغير $\tilde{K}$ ، أوجد الدالة المولدة للعزوم ومنها أشتق التوقع والتباين للمتغير $\tilde{K}$.

(٤) أعتبر المتغيرات العشوائية المستقلة $\tilde{a}_j$ ، $j = 1,2,3$ بحيث $\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(3)}$ ، $\tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(7)}$ ، $\tilde{a}_3 \sim \chi^2_{(10)}$ وبأفتراض أن المتغير $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{3} C_j \tilde{a}_j$ حيث C_j مقادير ثابتة. أوجد:

١- الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ في صياغة مبسطة.

٢- الدالة المولدة للعزوم للمتغير $\tilde{S}$ ومنها أوجد توقع وتباين المتغير $\tilde{S}$.

٣- عندما $C_1 = 1\ ,\ C_2 = C_3 = 2$ أوجد الأحتمالات التقريبية التالية:

i) $P_r(\tilde{S} \le 20)$, ii) $P_r(\tilde{S} \ge 20)$, iii) $P_r(15 \le \tilde{S} \le 20)$

iv) $P_r(\tilde{S} + E(\tilde{S}) \le 13)$, v) $P_r(1 \le \tilde{S} \le E(\tilde{S}) - 1)$

vi) $P_r(\tilde{S} \ge E(\tilde{S})/\sqrt{2})$, vii) $P_r(5 \le \tilde{S} \le 7)$

(٥) حول القيود الأحتمالية التالية إلى قيود يقينية مكافئة عند مستويات المأمونية المناظرة في كل حالة من الحالات التالية:

١- إذا فرضنا أن $\tilde{a} \sim \chi^2_{(4)}$ ، X_1, X_2, X_3 متغيرات قرارية

$$P_r(\tilde{a}_1 X_1 + 2X_2 - 5X_3 \le 100) \quad , \quad \gamma \ge 0.80$$

٢- إذا فرضنا أن $\tilde{a}$ متغير يتبع $\chi^2_{(d=5,\lambda=2)}$ أوجد:

أ) الدالة المميزة للمتغير $\tilde{S}$ حيث $\tilde{S} = \tilde{a}\,X$.

ب)أشتق التوقع والتباين للمتغير $\tilde{S}$ بأستخدام (أ).

ج) قرب التوزيع الاحتمالي للمتغير $\tilde{a}$ إلى التوزيع المعتاد ثم إلى التوزيع المعتاد القياسي.

٣- إذا فرضنا أن $\tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(d=10,\lambda=5)}$, $\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(d=5,\lambda=2)}$ حيث:

$$P_r(\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2 + 10\, X_3 \geq 29) \quad , \quad \gamma \geq 0.80$$

أ) أوجد توقع وتباين المتغير $(\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2)$.

ب) أوجد الدالة المميزة للمتغير $(\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2)$، ومنها أشتق التوقع والتباين.

ج) أوجد التوزيع الأحتمالي للمتغير $(\tilde{a}_1\, X_1 + \tilde{a}_2\, X_2)$، ثم قربه للتوزيع المعتاد.

د) حول القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني مكافئ.

(٥-٢٢) $\tilde{a}_{ij}$ تتبع التوزيع الأسي

$\tilde{a}_{ij} \sim$ Exponential Distribution

إذا فرضنا أن بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_j$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين (σ_j, α_j) وأيضاً الحالة الخاصة بمعلمة واحدة عندما $\alpha_j = 0$ (أنظر نظرية (٢٠-٧))، حيث نجد أن دالة كثافة الأحتمال $f(\tilde{a}_j)$ والدالة التراكمية $F(a_0)$ على النحو التالي:

$$f(\tilde{a}_j) = \frac{1}{\sigma_j} e^{-(\tilde{a}_j - \alpha_j)/\sigma_j} \quad , \quad \tilde{a}_j \geq \alpha_j \geq 0 \quad , \quad \alpha_j > 0$$

$$F(a_0) = \int_{\alpha_j}^{a_0} f(\tilde{a}_j)\ d\,\tilde{a}_j = 1 - e^{-(a_0 - \alpha_j)/\sigma_j}$$

فإذا فرضنا أن القيد الأحتمالي على النحو:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j X_j + \sum_{j=n+1}^{n} a_j X_j \leq b \qquad (22.57)$$

حيث X_j المتغيرات القرارية، a_j, b مقادير ثابتة. هنا سوف نميز بين حالتين هما:

الحالة الأولى: عندما يوجد معلمة عشوائية واحدة ولتكن $\tilde{a}_1$، وباقي المعلمات a_j مقادير ثابتة، أي عندما $n = 1$.

الحالة الثانية: عندما تكون $n > 1$.

وسوف نتناول الحالتين كل على حدة فيما يلي:

<u>الحالة الأولى</u>: في هذه الحالة تعتبر المعلمة $\tilde{a}_1$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين (σ_1, α_1)، وباقي المعلمات مقادير ثابتة على النحو التالي:

$$\tilde{a}_1\, X_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j\, X_j \le b \qquad (22.58)$$

وعند مستوى مأمونية أكبر من أو يساوى γ يمكن أعادة صياغة القيد على النحو التالي:

$$P_r\{\tilde{a}_1 \le (b - \sum_{j=2}^{n} a_j X_j)/X_1\} \ge \gamma$$

وتصبح الدالة التراكمية للمتغير $\tilde{a}_1$ على النحو:

$$F[(b - \sum_{j=2}^{n} a_j X_j)/X_1] \ge \gamma \longrightarrow 1 - e^{-\{(b - \sum_{j=2}^{n} a_j\, X_j - \alpha_1\, X_1)/X_1\, \sigma_1\}} \ge \gamma$$

وبأخذ ln للطرفين نجد أن:

$$-(b - \sum_{j=2}^{n} a_j\, X_j - \alpha_1\, X_1)/X_1\, \sigma_1 \le \ln(1-\gamma)$$

$$(b - \sum_{j=2}^{n} a_j\, X_j - \alpha_1\, X_1)/X_1\, \sigma_1 \ge -\ln(1-\gamma) \longrightarrow$$

$$\sum_{j=2}^{n} a_j\, X_j + \alpha_1\, X_1 - X_1\, \sigma_1 \ln(1-\gamma) \le b \qquad (22.59)$$

ملحوظة: $F^{-1}(\gamma) = \alpha_1 - \sigma_1 \ln(1-\gamma)$

<u>مثال (٢٢-٧)</u>: إذا فرضنا أن $\tilde{a}$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $(\sigma_1 = 2, \alpha_1 = 5)$. حول القيد الأحتمالي التالي إلى قيد يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية أكبر من 0.9:

$$\tilde{a}_1\, X_1 - 7\, X_2 - 4\, X_3 \le 100$$

الحل: يمكن إعادة كتابة القيد على النحو التالي:

$$P_r\{\,\tilde{a}_1 \le (100 + 7\,X_2 + 4\,X_3)/X_1\} \ge 0.9 \;\longrightarrow$$

$$F\,[\,(100 + 7\,X_2 + 4\,X_3)/X_1] \ge 0.9 \;\longrightarrow$$

$$-\{\frac{100 + 7\,X_2 + 4\,X_3}{X_1}\} \le \ln(0.10)$$

$$2.3\,X_1 - 7\,X_2 - 4\,X_3 \le 100$$

<u>الحالة الثانية</u>: في هذه الحالة عندما $n > 1$ أي وجود أكثر من معلمة واحدة $\tilde{a}_j$ تمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي. فإذا أعتبرنا القيد (22.57) بحيث:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j\,X_j$$

فإنه يمكن أعادة صياغة المتغير $\tilde{S}$ كدالة في متغيرات كل منها يتبع توزيع $\chi^2_{(2)}$ المركزى بدرجتين حرية أو بعبارة أخرى فإن المتغير $\tilde{S}$ هو عبارة عن مجموع مرجح لمتغيرات كل منها يتبع χ^2 على النحو التالي [51,141,128]:

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j\,X_j = \frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j\,X_j\,W_j + \sum_{j=1}^{n} 2\,\alpha_j\,X_j\}$$

حيث نجد أن المتغير W_j :

$$W_j = [2(\tilde{a}_j - \alpha_j)/\sigma_j] \sim \chi^2_{(2)} \qquad (22.60)$$

ومن (22.60) نجد أنه تم التعبير عن المتغير $\tilde{S}$ كمجموع لمتغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع توزيع χ^2 بدرجتين حرية، أي $d_j = 2$ بالإضافة إلى مقدار ثابت متمثل في المقدار:

$$(\sum_{j=1}^{n} 2\,\alpha_j\,X_j)$$

وبالتالي إذا أشرنا إلى الجزء العشوائي بالمتغير $\tilde{K}$ على النحو:

$$\tilde{K} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2} \sigma_j X_j) W_j \qquad (22.61)$$

فإن المتغير $\tilde{K}$ هو عبارة عن مجموع مرجح لمتغيرات مستقلة W_j كل منها يتبع $\chi^2_{(2)}$ ومن الفصل (٢٢-٤) نجد أن المتغير $\tilde{K}$ متغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزي بدالة مميزة $\phi(t)$ على النحو التالي:

$$\phi(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2 i t V_j)^{-1/2} \exp(\sum_{j=1}^{n} \frac{2 i t V_j}{1 - 2 i t V_j})$$

وفي هذه الحالة بالتعويض بـ $d_j = 2$ في ملحق (٩) لجميع قيم j، نجد أن:

$$A_j = A \approx 1.182 \longrightarrow m_j = 0.182 \sqrt{\sigma_j X_j} \qquad (22.62)$$

$$B_j = B \approx 0.603 \longrightarrow V_j = 0.603 \sigma_j X_j \qquad (22.63)$$

$$\overline{m}_j = \overline{m} = \frac{m_j}{\sqrt{V_j}} = \frac{1.182 \sqrt{\sigma_j X_j}}{\sqrt{0.603 \sigma_j X_j}} = 1.521 \rightarrow \overline{m}^2 = 2.313 \qquad (22.64)$$

من العلاقة (22.41) نجد أن:

$$E(\tilde{K}) = \sum_{j=1}^{n} (V_j + V_j \overline{m}_j^2) = 0.603 \{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j X_j + 2.313 \sigma_j X_j)\} \qquad (22.65)$$

كذلك من العلاقة (22.42) نجد أن:

$$Var(\tilde{K}) = 2 \sum_{j=1}^{n} (V_j^2 + 2V_j^2 \overline{m}_j^2)$$

$$\text{Var}(\tilde{K}) = 2\{\sum_{j=1}^{n}(0.364\,\sigma_j^2\,X_j^2 + 0.728\,\sigma_j^2\,X_j^2)\} \qquad (22.66)$$

وللتبسيط في تطبيق أسلوب (CCP) في هذه الحالة فإنه يمكن أستخدام نفس التقريبات للتوزيع χ^2 غير المركزي المقدم في الفصل (٢٢-٤) نظراً لأن هذه الحالة حالة خاصة من متغير χ^2 غير المركزي المقدم في الفصل (٢٢-٤).

<u>مثال (٢٢-٨)</u>: إذا فرضنا أن:

$$\tilde{a}_2 \sim \exp.(\sigma_2 = 4, \alpha_2 = 10) \;\text{،}\; \tilde{a}_1 \sim \exp.(\sigma_1 = 2, \alpha_1 = 5)$$

حول القيد الأحتمالي التالي إلى قيد يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية γ، $0.9 < \gamma$ حيث:

$$\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + 10\,X_3 \le 20$$

بأستخدام: ١- تقريب المتغير $\tilde{S}$ الذي يتبع χ^2 غير المركزي إلى متغير $\tilde{S}$ الذي يتبع التوزيع المعتاد المقدم من Kendall and Stuart [90] حيث أفترضا أن:

$$\tilde{\tilde{S}} = \left[2\,\tilde{S}\right]^{1/2} \qquad (22.67)$$

٢- أو تقريب $\tilde{S}$ إلى المتغير المعتاد القياسي Z [157] حيث:

$$Z = \frac{\tilde{S} - E(\tilde{S})}{\sqrt{V(\tilde{S})}} \qquad (22.68)$$

الحل: ١- يمكن إعادة صياغة القيد الأحتمالي على النحو التالي:

$$P_r\{\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 \le 20 - 10\,X_3\} \ge 0.90 \qquad (1)$$

وبما أن $(\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2)$ متغير يتبع χ^2 غير المركزي، ومن (22.65) ، (22.66) نجد أن توقع وتباين $(\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2)$ على النحو التالي:

$$E(\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2) = 0.603\{(2X_1 + 4.626X_1) + (4X_1 + 9.252X_2)\}$$
$$= 6.626X_1 + 13.252X_2 \qquad (2)$$

$$Var(\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2) = 2\{(1.456X_1^2 + 6.728X_1^2) + (5.824X_2^2 + 26.912X_2^2)\}$$
$$= 16.368X_1^2 + 65.472X_2^2 \qquad (3)$$

ومن المعادلات في (22.64)-(22.62) يمكن إيجاد كل من d, على النحو التالي:

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{n}(V_j^2 + 2V_j^2\,\overline{m}_j^2)}{\sum_{j=1}^{n}(V_j + V_j\,\overline{m}_j^2)} = \frac{17.035X_1^2 + 68.141X_2^2}{7.658X_1 + 15.316X_2} \qquad (4)$$

$$d = \frac{(\sum_{j=1}^{n} V_j + V_j\,\overline{m}_j^2)^2}{\sum_{j=1}^{n}(V_j^2 + 2V_j^2\,\overline{m}_j^2)} = \frac{(7.658X_1 + 15.316X_2)^2}{17.035X_1^2 + 68.141X_2^2}$$
$$= \frac{58.645X_1^2 + 234.580X_1X_2 + 234.580X_2^2}{17.035X_1^2 + 68.141X_2^2} \qquad (5)$$

وبالتالي أمكانية أستخدام أحد التقريبات لتوزيع χ^2 غير المركزي المقدمة في الفصل (٢٢-٤). فإذا أستخدمنا التقريب المقدم من **Kendall and Stuart** بأفتراض أن:

$$\tilde{S} = [2\tilde{S}\rho/\ ]^{1/2}$$

فإن المتغير القياسي Z حيث:

$$Z = \tilde{S} \quad - \sqrt{2d-1}$$

بالتالي يصبح القيد (1) على النحو التالي:

$$P_r\left\{\tilde{S} \quad \le \sqrt{\frac{(40-20\,X_3)(7.658\,X_1+15.316\,X_2)}{17.035\,X_1^2+68.141\,X_2^2}}\right\} \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(40-20\,X_3)(7.658\,X_1+15.316\,X_2)}{17.035\,X_1^2+68.141\,X_2^2}} - \sqrt{\frac{100.255+469.16\,X_1X_2+401.019\,X_2^2}{17.035\,X_1^2+68.141\,X_2^2}-1} \ge 1.28 \quad (6)$$

٢- بأفتراض أن المتغير $\tilde{S}$ يؤول إلى المعتاد فأنه يمكن من (١) كتابة القيد الأحتمالي على النحو:

$$P_r\left\{\tilde{S} \le (20-10\,X_3)\right\} \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$P_r\left\{Z \le \frac{(20-10\,X_3)-(6.626\,X_1+13.252\,X_2)}{\sqrt{16.368\,X_1^2+65.472\,X_2^2}}\right\} \ge 0.90 \longrightarrow (7)$$

وبأفتراض أن $Y^2 = 16.368\,X_1^2 + 65.472\,X_2^2$ فإنه يمكن تحويل القيد (7) إلى قيدين يقينيين (8)،(9) على النحو التالي:

$$\frac{20-6.626\,X_1-13.252\,X_2-10\,X_3}{Y} \ge 1.28 \longrightarrow$$

$$1.28\,Y + 6.626\,X_1 + 13.252\,X_2 + 10\,X_3 \le 20 \qquad (8)$$

$$Y^2 - 16.368\,X_1^2 - 65.472\,X_2^2 = 0 \qquad (9)$$

تمرين (٤)

(١) إذا كان $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الأسي بحيث:

$\tilde{a}_1 \sim \exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 5)$ ، $\tilde{a}_2 \sim \exp(\lambda_2 = 3, \alpha_2 = 8)$ ،

$\tilde{a}_3 \sim \exp(\lambda_3 = 1, \alpha_3 = 10)$. كذلك C_j مقادير ثابتة $j = 1,2,3$.

المطلوب: ١- أوجد التوزيع الأحتمالي لكل متغير من المتغيرات التالية:

$$\tilde{Y}_1 = C_1\,\tilde{a}_1 \;,\; \tilde{Y}_2 = C_1\,\tilde{a}_1 + C_2\,\tilde{a}_2 \;,\; \tilde{Y}_3 = \sum_{j=1}^{3} C_j\,\tilde{a}_j$$

٢- أوجد التوقع والتباين لكل من $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3$.

٣- أوجد الدالة المولدة للعزوم لكل من $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3$.

٤- أوجد الأحتمالات التقريبية التالية:

$$\text{(i)}\; P_r(\tilde{Y}_1 \le 7) \quad , \quad \text{(ii)}\; P_r(\tilde{Y}_2 \le 10) \quad , \quad \text{(iii)}\; P_r(\tilde{Y}_3 \le 22)$$

(٢) أعتبر القيود الأحتمالية التالية:

$$9\,\tilde{a}_1\,X_1 \ge 50 \longrightarrow \qquad \gamma_1 = 0.80$$

$$3\,\tilde{a}_1\,X_1 + 4\,\tilde{a}_2\,X_2 \le 20 \longrightarrow \qquad \gamma_2 \ge 0.90$$

$$\tilde{a}_1\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 + \tilde{a}_3\,X_3 \ge 100 \longrightarrow \quad \gamma_3 \le 0.80$$

$$5\,\tilde{a}_1\,X_1^2 - 8\,\tilde{a}_2\,X_2^2 \le 40 \longrightarrow \qquad \gamma_4 \ge 0.75$$

حيث: $\tilde{a}_1 \sim \exp(\lambda_1 = 1, \alpha_1 = 0)$, $\tilde{a}_2 \sim \exp(\lambda_2 = 3, \alpha_2 = 8)$,

$\tilde{a}_3 \sim \exp(\lambda_3 = 4, \alpha_3 = 20)$

المطلوب: ١- تحويل القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية مكافئة عند مستويات المأمونية المناظرة.

٢- أعتبر مستويات المأمونية على النحو التالي:

$$\gamma_1 \geq 0.90 \quad , \quad \gamma_2 \geq 0.85 \quad , \quad \gamma_3 \geq 0.20 \quad , \quad \gamma_4 \geq 0.80$$

(٣) أعتبر القيود الأحتمالية التالية:

$$5\,X_1 + \tilde{a}_2\,X_2 - 3\,X_3 \geq 20 \quad , \quad \gamma_1 \leq 0.90$$

$$\tilde{a}_1\,X_1 \leq \tilde{b}_1 \quad , \quad \gamma_2 \leq 0.80$$

حيث $\tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(5)}$, $\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(20)}$, $\tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(d=7,\lambda=10)}$.

المطلوب: حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية مكافئة.

ملحوظة: $\{\frac{\tilde{a}}{10}/\frac{\tilde{b}}{5}\} = \tilde{C}_{(10,5)}$

حيث $\tilde{C}_{(10,5)}$ متغير عشوائي يتبع توزيع فيشر بدرجات حرية (10,5) [113,٩].

(٢٢-٦) أمثلة تطبيقية　Applied Examples

<u>تطبيق (١)</u>: في أحدى محطات تمويل البنزين يوجد ٢طلمبة لضخ البنزين (٩٢) حيث تصل السيارات التي ترغب في التمويل فإذا وجدت طلمبة واحدة على الأقل خالية دخلت مباشرة عليها وإذا لم تجد تنتظر في طابور الإنتظار – حيث يتم إخلاء طلمبة، وفقاً لنظام الصف من يصل أولاً يخدم أولاً [134]. ويحتسب زمن خدمة السيارةً من لحظة دخولها على الطلمبة حتى لحظة مغادرة السيارة للمحطة، ويعتمد زمن خدمة السيارة على الكمية المطلوبة كذلك كفاءة العامل على الطلمبة، حيث يمثل زمن خدمة السيارة متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمة $\lambda_1 = 1/20 , \lambda_2 = 1/11$ على الطلمبة الأولي والثانية على الترتيب. وبأفتراض أن كمية البنزين المتاحة يومياً 6,000 لتر كذلك الكميات المطلوبة لكل سيارة تمثل متغير معتاد بتوقع $\mu = 50$ وأنحراف معياري $\sigma = 10$ وتعمل المحطة 18 ساعة في اليوم.

ويرغب متخذ القرار في تحديد أقصى عدد من السيارات يمكن خدمتهم في اليوم.

<u>المطلوب</u>: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية.

٢- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عندما تأخذ المعلمات العشوائية القيمة المتوقعة – ثم حل النموذج اليقيني وتوضيح ذلك بيانياً.

٣- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستوى المأمونية $\gamma > 0.8$.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي عدد السيارات التي يمكن خدمتهم في الطلمبة الأولي والثانية على الترتيب، كذلك $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ عبارة عن زمن خدمة السيارة على الطلمبة الأولي والثانية على الترتيب. $\tilde{a}_3$ عبارة عن الكمية التي يتم تمويلها للسيارة في الطلمبة الأولى أو الثانية.

١- النموذج الأحتمالي على النحو:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad \tilde{a}_1\, X_1 \le 18(60) \qquad (2)$$

$$\tilde{a}_2\, X_2 \le 18(60) \qquad (3)$$

قيود متعلقة بزمن الخدمة بالدقائق

$$\tilde{a}_3\,(X_1 + X_2) \le 6{,}000 \quad \text{قيد الكمية} \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

٢- بما أن $E(\tilde{a}_1) = 20\ ,\ E(\tilde{a}_2) = 11\ ,\ E(\tilde{a}_3) = 50$

وعند أستبدال المعلمات الأحتمالية بالقيمة المتوقعة لها يصبح النموذج اليقيني المناظر في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 20\,X_1 \le 1080 \qquad (6)$$

$$11\,X_2 \le 1080 \qquad (7)$$

$$50\,X_1 + 50\,X_2 \le 6{,}000 \qquad (8)$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

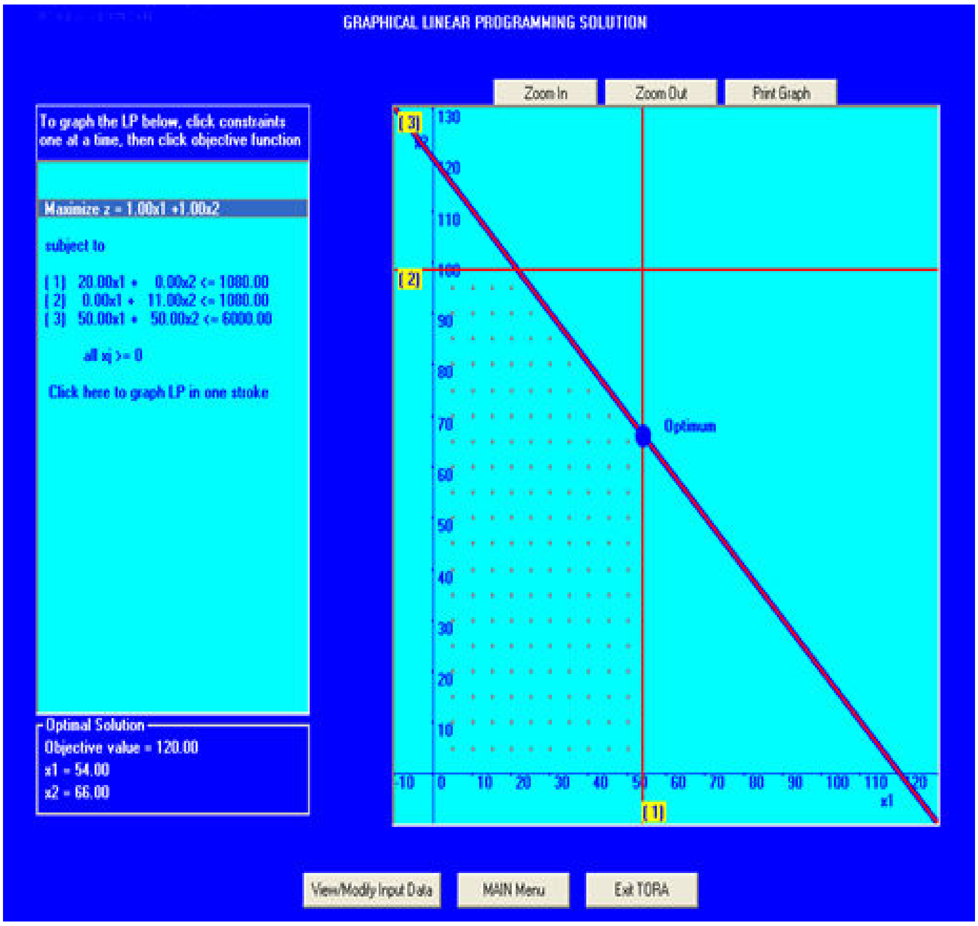
$$X_1^* = 54 \quad , \quad X_2^* = 66 \quad , \quad Z^* = 120 \qquad (9)$$

والشكل التالي (٢٢-٢) يوضح الحل الأمثل

٣- بما أن $\tilde{a}_1 \sim \exp(\lambda_1 = 1/20)$ ، $\tilde{a}_2 \sim \exp(\lambda_2 = 1/11)$ فإنه يمكن أعادة صياغة القيدين (3),(2) على النحو التالي:

$$P_r(\tilde{a}_1\, X_1 \le 1080) \ge 0.8 \longrightarrow P_r(\tilde{a}_1 \le 1080/X_1) \ge 0.8 \longrightarrow$$
$$F(1080/X_1) \ge 0.8 \longrightarrow 1080/X_1 \ge F^{-1}(0.8)$$

شكل (٢٢-٢)



ومن نظرية (٢٠-١٠) نجد أن:

$$32.04\, X_1 \leq 1080 \qquad (10)$$

بالمثل بالنسبة للقيد (3) نجد أن:

$$P_r(\tilde{a}_2\, X_2 \leq 1080) \geq 0.80 \longrightarrow P_r(\tilde{a}_2 \leq 1080/X_2) \geq 0.80 \longrightarrow$$

$$17.699\, X_2 \leq 1080 \qquad (11)$$

وبما أن $\tilde{a}_3 \sim N(\mu = 50, \sigma = 10)$ ، فإنه يمكن أعادة صياغة القيد (4) على النحو التالي:

$$P_r\left(\tilde{a}_3 \le 6000/(X_1 + X_2)\right) \ge 0.8 \longrightarrow P_r\left(Z \le \frac{6000 - 50(X_1 + X_2)}{10(X_1 + X_2)}\right) \ge 0.8$$

$$\longrightarrow \frac{6000 - 50(X_1 + X_2)}{10(X_1 + X_2)} \ge F^{-1}(0.8) \qquad (12)$$

ومن جدول توزيع الدالة التراكمية للمتغير المعتاد القياسي بملحق (٢) نجد أن:

$$F^{-1}(0.8) = 0.84$$

بالتالي بالتعويض في الطرف الأيمن لـ (12) بقيمة $F^{-1}(0.8)$ نجد أن:

$$58.4\,(X_1 + X_2) \le 6000 \qquad (13)$$

وبأستبدال القيود (4)−(2) بـ (13),(11),(10) على الترتيب يصبح النموذج اليقينئ المكافئ على النحو التالي:

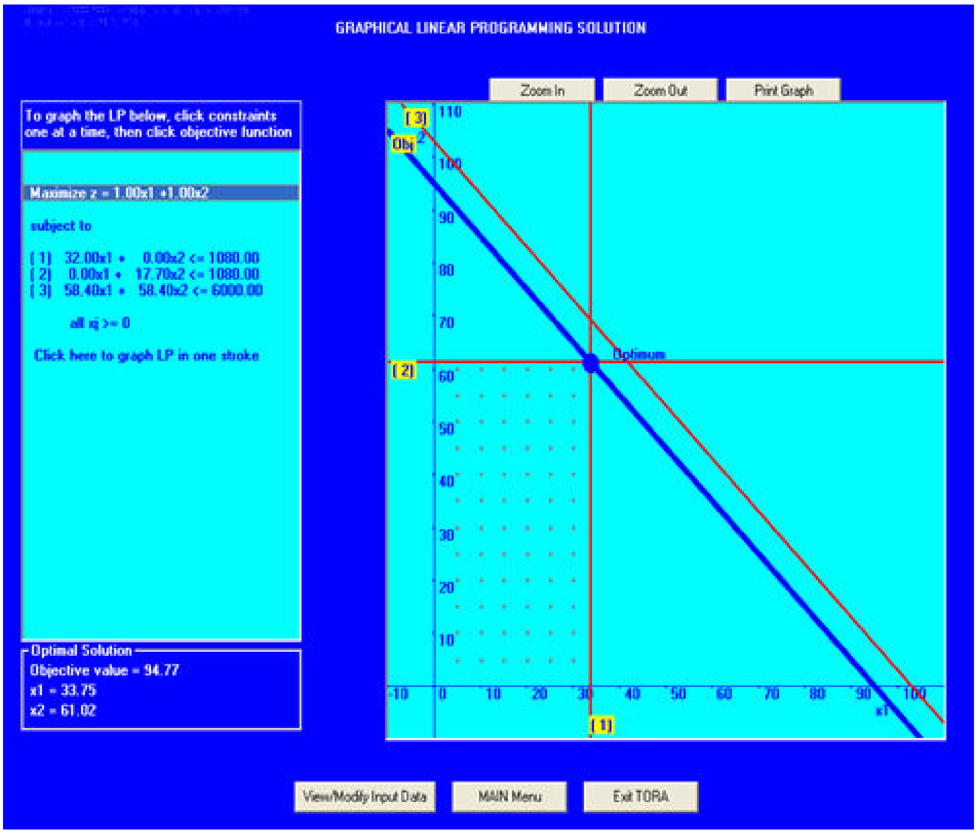
$$\begin{aligned} &Max.Z = X_1 + X_2 \\ &S.T. \quad 32.04\,X_1 \le 1080 \\ &\qquad 17.699\,X_2 \le 1080 \\ &\qquad 58.4\,(X_1 + X_2) \le 6000 \\ &\qquad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X_1^* = 33.75 \quad , \quad X_2^* = 61.02 \quad , \quad Z^* = 94.77 \qquad (9)$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل.

شكل (٢٢–٣)



<u>تطبيق (٢)</u>: أعتبر التطبيق السابق ولكن مع أفتراض أن زمن خدمة السيارة يتبع توزيع χ^2، على النحو التالي:

$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(20)} \quad , \quad \tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(11)}$$

١ – أوجد النموذج اليقيني المكافئ عند أستبدال المعلمات الأحتمالية بالقيمة المتوقعة لها، ثم قارن بالتطبيق (١).

٢ – عند مستوى مأمونية $\gamma \geq 0.9$ أوجد النموذج اليقيني المكافئ، ثم أوجد الحل الأمثل.

الحل: من نظرية (٢٠-١٤) ونظرية (٢٠-٩) نجد أن:

$$E(\tilde{a}_1) = 20 \quad , \quad E(\tilde{a}_2) = 11 \quad , \quad E(\tilde{a}_3) = 50$$

ويكون النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة هو:

$$\begin{aligned} & Max.Z = X_1 + X_2 \\ & S.T. \quad 20\,X_1 \le 1080 \\ & \qquad 11\,X_2 \le 1080 \\ & \qquad 50\,X_1 + 50\,X_2 \le 6000 \\ & \qquad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

وهو نفس النموذج اليقيني في تطبيق (١) بند (٢) وبالتالي يكون نفس الحل الأمثل:

$$X_1^* = 54 \quad , \quad X_2^* = 66 \quad , \quad Z^* = 120$$

ورغم أختلاف التوزيع الأحتمالي في تطبيق (١) لكل من $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ عن التوزيع الأحتمالي لهما في هذا التطبيق، إلا أن أستبدال المعلمة الأحتمالية بالقيمة المتوقعة لها لم يأخذ في الأعتبار النموذج اليقيني المكافئ وبالتالي لم يأخذ في الأعتبار في الحل النموذج اليقيني.

ولكن أستخدام أسلوب (CCP) في تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني يأخذ شكل التوزيع الأحتمالي للمعلمة العشوائية متمثل في دالة التوزيع التراكمية والدالة العكسية لها كذلك مستوى المأمونية في الأعتبار، ويتضح ذلك في بند (٢).

٢- النموذج الأحتمالي في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} & Max.Z = X_1 + X_2 \\ & S.T. \quad P_r\{\, \tilde{a}_1\, X_1 \le 1080 \,\} \ge 0.90 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$P_r\{\ \tilde{a}_2\ X_2 \le 1080\ \} \ge 0.90 \qquad (2)$$

$$P_r\{\ \tilde{a}_3\ (X_1 + X_2) \le 6000\ \} \ge 0.90 \qquad (3)$$

وبأستخدام جدول التوزيع التراكمي لتوزيع χ^2 بملحق (٣) يتم تحويل القيدين (1),(2) على النحو التالي:

$$28.412\ X_1 \le 1080 \qquad (4)$$

$$17.275\ X_2 \le 1080 \qquad (5)$$

وكذلك بتحويل القيد (3) إلى قيد يقيني عن طريق تحويل المتغير $\tilde{a}_3$ إلى متغير قياسي فنجد أن:

$$6.28\ X_1 + 6.28\ X_2 \le 6000 \qquad (6)$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ عند مستوى مأمونية $\gamma \ge 0.9$ لكل قيد أحتمالي على النحو التالي:

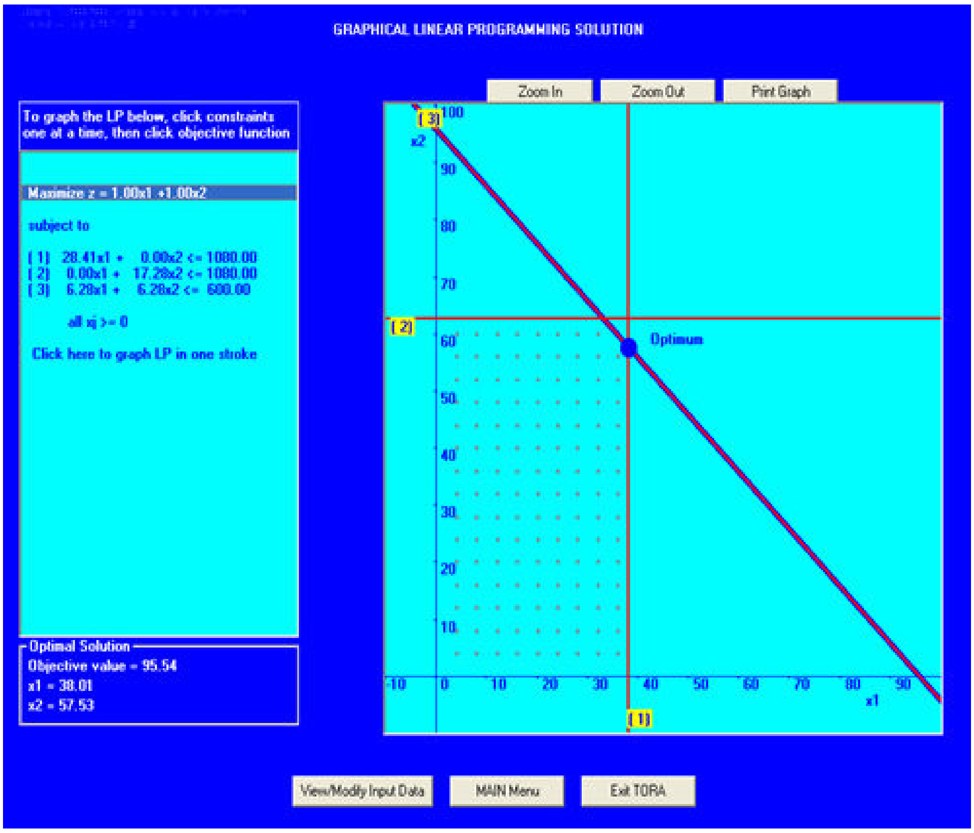
$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = X_1 + X_2 \\ \text{S.T.}\quad &28.412\ X_1 \le 1080 \\ &17.275\ X_2 \le 1080 \\ &6.28\ X_1 + 6.28\ X_2 \le 6000 \\ &X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

وبحل النموذج نجد أن الحل الأمثل:

$$X_1^* = 30.01 \quad , \quad X_2^* = 57.53 \quad , \quad Z^* = 95.54 \qquad (7)$$

والشكل التالي يوضح الحل بيانياً.

شكل (٢٢-٤)



<u>تطبيق (٣)</u>: في أحد الفروع لبنك تجارى يوجد ثلاث شبابيك للتعامل مع العملاء. فإذا كان زمن خدمة العميل (بالدقائق) على الشباك يمثل متغير عشوائي يتوقف على نوع الخدمة المطلوبة وكفاءة أداء الموظف على الشباك. فإذا رمزنا لزمن خدمة العميل على الشباك j بالرمز $\tilde{a}_j$ حيث $\tilde{a}_1 \sim N(\mu = 5, \sigma = 1)$, $\tilde{a}_2 \sim N(7,1)$, $\tilde{a}_3 \sim N(10,2)$.

فإذا كان زمن العمل على الشباك في اليوم 5 ساعات (من 9 صباحاً حتى الثانية ظهراً) والعمل على كل شباك مستقل عن العمل بالشبابيك الأخرى، فإذا كان عدد العملاء الذين يصلون إلى الفرع لطلب الخدمة يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بتوقع $\lambda = 90$.

والمطلوب: ١- يرغب متخذ القرار في تحديد أقصى عدد من العملاء يتم خدمتهم خلال يوم عمل من خلال صياغة المشكلة كنموذج برمجة احتمالية مناسب.

٢- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستوى مأمونية أكبر من أو يساوى 0.90 لكل قيد أحتمالي.

٣- أعتبر مستوى المأمونية أكبر من أو يساوى 0.80 – أوجد النموذج اليقيني في هذه الحالة.

الحل: إذا رمزنا لعدد العملاء الذي يتم خدمتهم على الشبابيك بالرمز X_1, X_2, X_3 على الترتيب فإنه يمكن صياغة المشكل على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 + X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \tilde{a}_3 X_3 \le 3(300) \qquad (2)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \ge \tilde{b}_1 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- بأستخدام أسلوب (CCP) يمكن أعادة صياغة النموذج أعلاه إلى النموذج الأحتمالي التالي عند مستوى مأمونية لكل قيد $\gamma \ge 0.90$:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 + X_3$$

$$\text{S.T.} \quad P_r\{\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j X_j \le 900\} \ge 0.90 \qquad (5)$$

$$P_r\{\sum_{j=1}^{3} X_j \ge \tilde{b}_1\} \ge 0.90 \qquad (6)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,3$$

من نظرية (٢٢-١) نجد أن المتغير $\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j X_j\right)$ يتبع توزيع معتاد بتوقع وتباين على النحو التالي:

$$E\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j X_j\right) = 5X_1 + 7X_2 + 10X_3 \qquad (7)$$

$$Var\left(\sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_j X_j\right) = X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2 \qquad (8)$$

وبالتالي يمكن تحويل القيد (5) إلى القيد التالي حيث Z متغير معتاد قياسي:

$$P_r\left\{Z \le \frac{900 - (5X_1 + 7X_2 + 10X_3)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2}}\right\} \ge 0.90 \qquad (9)$$

ومن ملحق (٢)نجد أن القيد (9) إلى قيد يقيني مكافئ على النحو التالي:

$$\frac{900 - (5X_1 + 7X_2 + 10X_3)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2}} \ge 1.28 \longrightarrow$$

$$(5X_1 + 7X_2 + 10X_3) + 1.28\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2} \le 900 \qquad (10)$$

فإذا فرضنا أن المتغير Y بحيث:

$$Y^2 = X_1^2 + X_2^2 + 4X_3^2 \qquad (11)$$

وبالتالي يمكن أحلال القيد (10) بالقيدين التاليين:

$$5X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 1.28Y \le 900 \qquad (12)$$

$$Y^2 - X_1^2 - X_2^2 - 4X_3^2 = 0 \qquad (13)$$

كذلك بالنسبة للقيد (6) يمكن تحويله إلى قيد يقيني مكافئ على النحو التالي بأستخدام ملحق (٥).

$$P_r\{\tilde{b}_1 \le \sum_{j=1}^{3} X_j\} \ge 0.90 \longrightarrow \sum_{j=1}^{3} X_j \ge 25 \qquad (14)$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 + X_3 \qquad (15)$$

$$\text{S.T.} \quad 5\,X_1 + 7\,X_2 + 10\,X_3 + 1.28\,Y \le 900 \qquad (16)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \ge 25 \qquad (17)$$

$$Y^2 - X_1^2 - X_2^2 - 4\,X_3^2 = 0 \qquad (18)$$

$$X_1, X_2, X_3, Y \ge 0 \qquad (19)$$

والنموذج (19)-(15) نموذج برمجة غير خطية يمكن إيجاد الحل له بأستخدام أحد طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية [128,115,٨] .

<u>تطبيق (٤)</u>: يملك أحد المزارعين مزرعة مساحتها 1000 فدان وفي أحد المواسم متاح له زراعة ثلاثة أصناف من المحاصيل فإذا كانت تكلفة الفدان الواحد من كل محصول (بما فيها المخاطرة تغير الطقس والعوامل الطبيعية الأخرى) تمثل متغير عشوائي $\tilde{C}_j$ ، $j = 1,2,3$

بحيث: $\tilde{C}_1 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_1} = 50, \alpha_1 = 1500)$ ،

$\tilde{C}_2 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_2} = 80, \alpha_2 = 2000)$ ، $\tilde{C}_3 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_3} = 100, \alpha_3 = 2500)$

فإذا كان الربح المتوقع من محصول الفدان الواحد من كل محصول P_j ، $j = 1,2,3$ حيث:

$$P_1 = 10{,}000 \quad , \quad P_2 = 9{,}000 \quad , \quad P_3 = 11{,}000$$

كذلك المبلغ المخصص للتكاليف يساوى 200,000 ويرغب المزارع في تحديد المساحة التي يتم زراعتها من كل محصول بحيث يكون الربح المتوقع أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة أحتمالية.

٢- بأستخدام أسلوب (CCP) وعند مستوى مأمونية $0.9 < \gamma$، حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ.

الحل: ١- إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي المساحة التي يتم زراعتها من المحاصيل 1,2,3 على الترتيب.

فيصبح النموذج الأحتمالي للمشكلة:

$$\text{Max.}Z = 10{,}000\,X_1 + 9{,}000\,X_2 + 11{,}000\,X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 = 1000 \qquad (2)$$

$$\tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + \tilde{C}_3\,X_3 \le 200{,}000 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- بما أن $0.9 \le \gamma$ بالتالي يمكن أعادة صياغة القيد (3) على النحو:

$$P_r\{\tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + \tilde{C}_3\,X_3 \le 200{,}000\} \ge 0.90 \qquad (5)$$

وبأفتراض أن $\tilde{S}$ بحيث:

$$\tilde{S} = \tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + \tilde{C}_3\,X_3$$

فإن المتغير $\tilde{S}$ يتبع توزيع χ^2 غير المركزي. كما سبق أثبات ذلك في الفصل (٢٢-٥) وبتحويل المتغير $\tilde{S}$ كدالة في متغيرات تتبع $\chi^2_{(2)}$ بتطبيق العلاقة (22.60) نجد أن:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j X_j W_j + \sum_{j=1}^{n} 2\alpha_j X_j\}$$
$$= \{(0.01 X_1 W_1 + 0.006 X_2 W_2 + 0.005 X_3 W_3) + (1500 X_1 + 2000 X_2 + 2500 X_3)\}$$

حيث:
$$W_j = [2(\tilde{a}_j - \alpha_j)/\sigma_j] \sim \chi^2_{(2)}$$

وبأفتراض أن:

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}\{\sigma_1 X_1 W_1 + \sigma_2 X_2 W_2 + \sigma_3 X_3 W_3\}$$
$$= 0.01 X_1 W_1 + 0.006 X_2 W_2 + 0.005 X_3 W_3$$

ويصبح القيد (5) على النحو التالي:

$$P_r\{\tilde{K} \le 200,000 - (1500 X_1 + 2000 X_2 + 2500 X_3)\} \ge 0.9 \qquad (6)$$

حيث $\tilde{K}$ عبارة عن مجموع متغيرات كل منها يتبع $\chi^2_{(2)}$ المرجحة أو بعبارة أخرى $\tilde{K}$ متغير يتبع توزيع χ^2 غير المركزي تقريباً بتوقع $E(\tilde{K})$ وتباين $Var(\tilde{K})$ حيث:

$$E(\tilde{K}) = \sum_{j=1}^{3}(V_j + V_j \overline{m}_j^2) = 0.02 X_1 + 0.01 X_2 + 0.01 X_3 \qquad (7)$$

$$Var(\tilde{K}) = 2\sum_{j=1}^{3}(V_j^2 + 2 V_j^2 \overline{m}_j^2)$$

$$Var(\tilde{K}) = 0.00008 X_1^2 + 0.00296 X_2^2 + 0.00018 X_3^2 \qquad (8)$$

حيث:

$$A_j = A = 1.182 \quad , \quad B_j = B = 0.603 \quad , \quad \overline{m}_j = \frac{m_j}{\sqrt{V_j}} \longrightarrow$$

$$m_1 = A\sqrt{\sigma_1 X_1} = 1.182\sqrt{0.01 X_1} = 0.1182\sqrt{X_1} \longrightarrow \overline{m}_1 = 0.1522$$

$$m_2 = A\sqrt{\sigma_2\, X_2} = 1.182\sqrt{0.006\, X_2} = 0.0916\sqrt{X_2} \longrightarrow \overline{m}_2 = 0.118$$

$$m_3 = A\sqrt{\sigma_3\, X_3} = 1.82\sqrt{0.005\, X_3} = 0.0836\sqrt{X_3} \longrightarrow \overline{m}_3 = 0.1077$$

حيث:

$$V_j = B_j\left(\frac{\sigma_j\, X_j}{2}\right) \longrightarrow$$

$$V_1 = 0.603(0.01\, X_1) = 0.006\, X_1 \longrightarrow V_1^2 = 0.000036\, X_1^2$$

$$V_2 = 0.603(0.063\, X_2) = 0.038\, X_2 \longrightarrow V_2^2 = 0.0014\, X_2^2$$

$$V_3 = 0.603(0.005\, X_3) = 0.00302\, X_3 \longrightarrow V_3^2 = 0.000009\, X_3^2$$

ويمكن بأستخدام تقريب متغير χ^2 غير المركزى $(\tilde{K})$ إلى متغير يتبع التوزيع المعتاد القياسي (Z) وبالتالي يصبح القيد (6) على النحو التالي:

$$P_r\{Z \le (200{,}000 - 1500.02\, X_1 - 2000.01\, X_2 - 2500.01\, X_3) \div \sqrt{0.000036\, X_1^2 + 0.0014\, X_2^2 + 0.000009\, X_3^2}\} \ge 0.9$$

$$\longrightarrow$$

$$1.28\, Y + 1500.02\, X_1 + 2000.01\, X_2 + 2500.01\, X_3 \le 200{,}000 \qquad (8)$$

حيث:

$$Y^2 = 0.000036\, X_1^2 + 0.0014\, X_2^2 + 0.000009\, X_3^2 \qquad (9)$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 10{,}000\, X_1 + 9{,}000\, X_2 + 11{,}000\, X_3$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 = 1000$$

$$1.28\, Y + 1500.02\, X_1 - 2000.01\, X_2 - 2500.01\, X_3 \le 200{,}000$$

$$Y^2 = 0.000036\,X_1^2 + 0.0014\,X_2^2 + 0.000009\,X_3^2$$

$$X_1, X_2, X_3, Y \geq 0$$

تطبيق (٥): تقوم أحدى الشركات بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات A,B,C، حيث أن المتاح من المادة الخام المستخدمة في الأنواع الثلاثة في اليوم 1500 وحدة بحيث يتطلب إنتاج الوحدة من كل نوع الكمية 3 , 1 , 2 من المادة الخام لكل نوع على الترتيب. كذلك المدة التى تستغرقها الوحدة الواحدة في الإنتاج والتغليف يمثل متغير عشوائي يتبع توزيع $\chi^2_{(20)}$ بدرجات حرية (20) حيث زمن التشغيل في اليوم 15 ساعة.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون عدد الوحدات المنتجة أكبر ما يمكن وذلك بمستوى مأمونية أكبر من 0.90.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي الكميات التي يجب إنتاجها من الأنواع الثلاثة. فإن:

$$\text{Max.}Z = X_1 + X_2 + X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 1500 \qquad (2)$$

$$\tilde{a}_1\,(X_1 + X_2 + X_3) \leq 15(60) \qquad (3)$$

$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(20)} \quad , \; X_1, X_2, X_3 \geq 0 \qquad (4)$$

فنجد أن القيد (3) قيد أحتمالي ممكن أعادة صياغته على النحو:

$$P_r\{\tilde{a}_1 \leq 900/(X_1 + X_2 + X_3)\} \geq 0.90 \longrightarrow$$

وبأستخدام جدول الدالة التراكمية لتوزيع χ^2 بملحق (٣) يتم تحويل القيد الأحتمالي إلى قيد يقيني على النحو التالي:

$$\frac{900}{X_1 + X_2 + X_3} \geq F^{-1}(0.9) \longrightarrow \; 28.4\,(X_1 + X_2 + X_3) \leq 900$$

تطبيق (٦): إذا فرضنا أن $\tilde{b} \sim \chi^2_{(15)}$, $\tilde{a} \sim \chi^2_{(10)}$ متغيرين مستقلين، حيث X_j متغيرات قرارية، ولدينا القيد الأحتمالي التالي:

$$P_r\{\tilde{a}\sum_{j=1}^{n} X_j \le \tilde{b}\} \ge 0.90$$

حول القيد الأحتمالي أعلاه إلى قيد يقيني مكافئ.

الحل: ممكن أعادة كتابة القيد على النحو التالي:

$$P_r\{(\tilde{a}/\tilde{b}) \le (1/\sum_{j=1}^{n} X_j)\} \ge 0.90 \qquad (1)$$

وبما أن المتغير $\tilde{F}$ حيث:

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{a}/10}{\tilde{b}/15}$$

حيث $\tilde{F}_{(10,15)}$ متغير يتبع توزيع F فيشر بدرجات حرية (10,15) [113]. بالتالي فإنه يمكن أعادة كتابة القيد (1) على النحو التالي:

$$P_r\{\frac{\tilde{a}/10}{\tilde{b}/15} \le \frac{1/10}{\sum_j X_j/15}\} \le 0.90 \longrightarrow$$

$$P_r\{\tilde{F}_{(10,15)} \le \frac{3}{2\sum_j X_j}\} \ge 0.90 \qquad (2)$$

ومن جدول الدالة التراكمية لتوزيع F فيشر نجد أن $F^{-1}_{(10,15)} = 206$ بالتالي فإن القيد رقم (2) يصبح على النحو التالي:

$$\frac{3}{2\sum_j X_j} \le 206 \longrightarrow 412\sum_j X_j \ge 3$$

(٢٢-٧) تمرينات Exercises

(١) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (×) أمام العبارة غير الصحيحة.

١. يتطلب أستخدام أسلوب (CCP) ضرورة معلومية التوزيع الإحتمالى للمعلمات التى تمثل متغيرات عشوائية.

٢. دائما يكون القيد اليقينى المكافئ للقيد الإحتمالى قيد غير خطى عندما تكون بعض أو كل معاملات المتغيرات القرارية تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات إحتمالية معينة.

٣. يمكن تحويل القيد الإحتمالى إلى آخر يقيني مكافئ بأستخدام أسلوب (CCP) فى حالة عدم معلومية الدالة التراكمية والدالة العكسية لها لكل متغير من المتغيرات العشوائية بالقيد.

٤. عند إستخدام أسلوب (CCP) لابد من وجود exist الدالة العكسية للدالة التراكمية لكل معلمة تمثل متغير عشوائى .

٥. يمكن تحويل القيد الإحتمالى الخطى إلى قيد يقيني خطى أخر مكافئ فى الحالة التى توجد معلمة واحدة تمثل معامل متغير قرارى متغير عشوائى.

(٢) حول القيد الإحتمالى إلى قيد يقينى مكافئ فى كل حالة من الحالات التالية عند مستوى المأمونية γ المناظر:

١. إذا كان المتغير $\tilde{a}_1$ يتبع التوزيع الأسى بمعلمتين $(\frac{1}{\lambda_1} = 4, \alpha_1 = 50)$

$$\tilde{a}_1 X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 20 \quad , \quad \gamma > 0.90$$

٢. إذا كان $\tilde{a}_1 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_1} = 2, \alpha_1 = 20) \quad , \quad \tilde{a}_2 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_2} = 10, \alpha_2 = 200)$

$$2\tilde{a}_1 X_1 + 3\tilde{a}_2 X_2 + 7X_3 \le 100 \quad , \quad \gamma > 0.8$$

٣. إذا كان $\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(10)}$

$$\tilde{a}_1 X_1 + 5X_2 - 9X_3 \geq 20 \quad , \quad \gamma < 0.9$$

٤. إذا كان $\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(5)}, \tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(8)}$

$$\tilde{a}_1 X_1 + 7\,\tilde{a}_2 X_2 - X_3 \leq 30 \quad , \quad \gamma > 0.9$$

٥. إذا فرضنا أن $\tilde{a}_1 \sim N(\mu_1 = 10, \sigma_1 = 2), \tilde{a}_2 \sim N(\mu_2 = 20, \sigma_2 = 2)$

$$\tilde{a}_1 X_1 - \tilde{a}_2 X_2 + 8X_3 \leq 20 \quad , \quad \gamma > 0.8$$

٦. إذا كان $\tilde{a}_1 \sim \exp(\lambda = 3), \tilde{a}_2 \sim \exp(\lambda = 5), \tilde{a}_3 \sim \exp(\lambda = 7)$

$$\tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \tilde{a}_3 X_3 \geq 20 \quad , \quad \gamma > 0.9$$

٧. إذا كان $\tilde{a}_i \sim N(0,1)$ ، $i = 1,2,3,4$

$$\sum_{i=1}^{4} \tilde{a}_i X_i \leq 100 \quad , \quad \gamma > 0.9$$

٨. إذا كان $\tilde{a} \sim \chi^2_{(5)}$ ، $\tilde{b} \sim \chi^2_{(10)}$

$$P_r\{\tilde{a}(X_1 + X_2) \leq \tilde{b}\} = 0.9$$

(٣) في أحد فروع البنوك التجارية يوجد ثلاث شبابيك للتعامل مع العملاء، وزمن خدمة العميل بالدقائق على الشباك يمثل متغير عشوائى يتبع التوزيع الأسى فى كل شباك بحيث: $\tilde{a}_1 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_1} = 5, \alpha_1 = 15)$ ، $\tilde{a}_2 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_2} = 3, \alpha_2 = 10)$, $\tilde{a}_3 \sim \exp(\frac{1}{\sigma_3} = 4, \alpha_3 = 20)$ ، فإذا كانت عدد ساعات العمل اليومى على الشباك 7 ساعات . ويرغب متخذ القرار فى تحديد عدد العملاء الذين يتم خدمتهم على كل شباك فى اليوم بحيث يكون عدد العملاء أقصى ما يمكن.

والمطلوب : ١- بناء نموذج برمجة إحتمالية مناسب.

٢- عند مستوى مأمونية أكبر من 0.90 حول النموذج الإحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ.

(٤) فى أحد المراكز الطبية يوجد جهازين للعلاج بالإشعاع ويعمل المركز مدة ١٨ ساعة فى اليوم، ويصل المريض للمركز لأخذ جلسة أشعاع فإذا وجد جهاز غير مشغول يدخل عليه مباشرة ، وإذا كان الجهازين مشغولين فإنه ينتظر فى طابور الإنتظار والمدة التى يستغرقها المريض على الجهاز الأول تمثل متغير عشوائى يتبع توزيع $\chi^2_{(10)}$ بتوقع 10 دقائق (حيث تتوقف المدة التى يستغرقها المريض على الجهاز تتوقف على حالة المريض وكفاءة الفنى على الجهاز ، .... إلخ) كذلك تمثل المدة التى يستغرقها المريض على الجهاز الثانى تتبع توزيع $\chi^2_{(5)}$ بتوقع 5 دقائق.

ويرغب متخذ القرار فى المركز فى تحديد عدد المرضى الذين يتم خدمتها فى اليوم على كل جهاز بحيث يكون عدد المرضى الذين يتم خدمتهم أكبر ما يمكن ، وذلك بمستوى مأمونية $\gamma > 0.9$. كذلك يتم إيقاف الجهاز ساعة واحدة متصلة أو متقطعة خلال اليوم.

والمطلوب : ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة إحتمالية مناسب.

٢- تحويل النموذج الإحتمالى إلى نموذج يقينى مكافئ عند مستوى مأمونية أكبر من 0.85.

(٥) أعتبر التمرين السابق (٤) في حالة وجود ثلاثة أجهزة بدلاً من جهازين، بحيث مدة الخدمة على الجهاز الثالث متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(8)}$ بتوقع 8 دقائق.

الباب الثالث والعشرون
نماذج البرمجة المقيدة أحتمالياً عندما تكون دالة الهدف متغير عشوائي
(CCP)Models with Random Objective Function ($\tilde{Z}$)

(٢٣-١) مقدمة Introduction

في البابين السابقين (٢١،٢٢) تناولنا بشيء من التفصيل كيفية تحويل نماذج البرمجة الخطية (وأيضاً ممكن تكون نماذج غير خطية) الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون بعض أو كل المعلمات في الطرف الأيمن للقيود $(\tilde{b}_i)$ وأيضاً عندما تكون بعض أو كل معاملات المتغيرات القرارية في الطرف الأيسر للقيود $(\tilde{a}_{ij})$ $j = 1,2,....n$, $i = 1,2,.....,m$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة، وذلك عند مستويات مأمونية γ_i معلومة أيضاً بأستخدام أسلوب (CCP).

ويرتبط هذا الباب أرتباط وثيق بالباب السابق (٢٢) ويمكن أن نطلق عليه تطبيق مباشر للطرق السابق تقديمها.

وفي هذا الباب سوف نتناول تحويل النماذج الأحتمالية إلى نماذج يقينية مكافئة عندما تكون بعض (أو كل) معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف $\tilde{C}_j$ متغيرات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة، وعادةً يتم هذا التحويل وفقاً لعدة معايير مختلفة ممثلة في القواعد القرارية decision's rules التي يتم على أساسها تكوين دالة هدف يقينية.

<u>القواعد القرارية</u>: يتم تحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية مكافئة بأساليب مختلفة تعتمد على طبيعة المشكلة وطبيعة التوزيعات الأحتمالية للمعلمات الأحتمالية $\tilde{C}_j$ وبالتالي التوزيع الأحتمالي لدالة الهدف $\tilde{Z}$.

وعادة يتم هذا التحويل وفقاً لعدة معايير من أهمها المعايير التالية:

١- معيار القيمة المتوقعة Expected Value Criterion لدالة الهدف. وصياغة المشكلة في هذه الحالة يسمى بـ E-model [40].

٢- معيار تصغير التباين **Minimum Variance Criterion** لدالة الهدف. وصياغة المشكلة في هذه الحالة يسمى بـ **V-model [39]**.

٣- معيار تعظيم دالة الأمكان **Maximum Likelihood Criterion** لدالة الهدف الأحتمالية وصياغة المشكلة في هذه الحالة يسمى بـ **P-model [38]**. وعادةً يتم أفتراض قيم معينة لمستويات المأمونية γ_i , $i = 1,2,.....$.

ولكن في كثير من الحالات يكون متخذ القرار غي قادر على تحديد قيم γ_i ، وفي هذه الحالة يمكن أعتبار مستويات المأمونية γ_i متغيرات قرارية أيضاً ويتم دمجها بأساليب مختلفة في دالة الهدف اليقينية، وتندرج هذه الأساليب المختلفة تحت عنوان برمجة الصلاحية **Reliability Programming [121]**.

٤- معيار الحدود المثلى لدالة الهدف **Optimum Limits Objective Function Criterion**.

وفي هذا الباب بالإضافة إلى تقديم المعايير المذكورة أعلاه بالتفصيل سوف نتناول أيضاً بعض الأساليب للحصول على القيم المثلى لمقاييس الصلاحية **Reliability Measures** للنظام (أو لحل المشكلة).

كذلك سوف نتناول في هذا الباب أيضاً عدة أمثلة تطبيقية في حالة دالة الهدف الأحتمالية وأيضاً دالة الهدف وبعض القيود الأحتمالية بالإضافة إلى قياس صلاحية النظام.

(٢٣-٢) معيار القيمة المتوقعة Expected Value Criterion

إذا فرضنا أن دالة الهدف الأحتمالية على النحو التالي:

$$\text{Max.(or Min.) } \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n^\backslash} \tilde{C}_j X_j + \sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j X_j \qquad (23.1)$$

حيث X_j تشير إلى المتغيرات القرارية، C_j معاملات X_j في الحالة اليقينية (أي C_j معلمات غير عشوائية)، $\tilde{C}_j$ معلمات عشوائية ذات توزيعات أحتمالية معلومة.

ومنذ الستينات وقدمت عدة معايير على أساسها يتم تحويل الدالة الأحتمالية $\tilde{Z}$ إلى دالة يقينية.

في سنة (١٩٦٦) قدم كل من Charnes and Kirly نموذج E-model وأعتبرا معيار التحويل هو أستبدال الدالة $\tilde{Z}$ الأحتمالية بالقيمة المتوقعة لها حيث تشير E إلى القيمة المتوقعة Expectation، وبالتالي أستبدال الدالة في (23.1) بالدالة التالية:

$$\text{Max.(or Min.) } E(\tilde{Z}) = \sum_{j=1}^{n^\backslash} X_j\, E(\tilde{C}_j) + \sum_{j=n^\backslash+1}^{n} C_j X_j \qquad (23.2)$$

حيث $E(\tilde{Z})$ تشير إلى توقع $\tilde{Z}$، كذلك $E(\tilde{C}_j)$ يشير إلى توقع المتغير $\tilde{C}_j$. ويلاحظ أن أستخدام هذا المعيار لا يتطلب معلومية التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{Z}$.

<u>مثال (٢٣-١)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max. } \tilde{Z} = \tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \geq 10 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 8X_2 \leq 40 \qquad (3)$$

$$X_2 \le 2 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

حيث $\tilde{C}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 4)$, $\tilde{C}_1 \sim N(\mu = 3, \sigma = 1)$.

المطلوب: ١- حول الدالة Z إلى دالة يقينية.

٢- حل النموذج اليقيني ثم عقب على الناتج.

الحل: ١- بأستبدال الدالة الأحتمالية في (1) بالقيمة المتوقعة لها لتصبح:

$$\text{Max.}\, E(\tilde{Z}) = 3\, X_1 + 10\, X_2 \qquad (6)$$

٢- وبحل النموذج (5)-(2),(6) كنموذج برمجة خطية نجد أن الحل الأمثل

$$E^*(\tilde{Z}) = 34.4 \quad , \quad X_1^* = 4.8 \quad , \quad X_2^* = 2.0 \qquad (7)$$

والشكل التالي (٢٣-١) يوضح الحل البياني للنموذج اليقيني.

وبما أن $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ تتبع كل منها التوزيع المعتاد كذلك $\tilde{Z}$ بالتالي فإن أحتمال أن تكون $\tilde{Z}$ أقل من او تساوى 34.4 يساوى 0.5 أو بعبارة أخرى:

$$P_r(\tilde{Z} \le 34.4) = 0.5 \qquad (8)$$

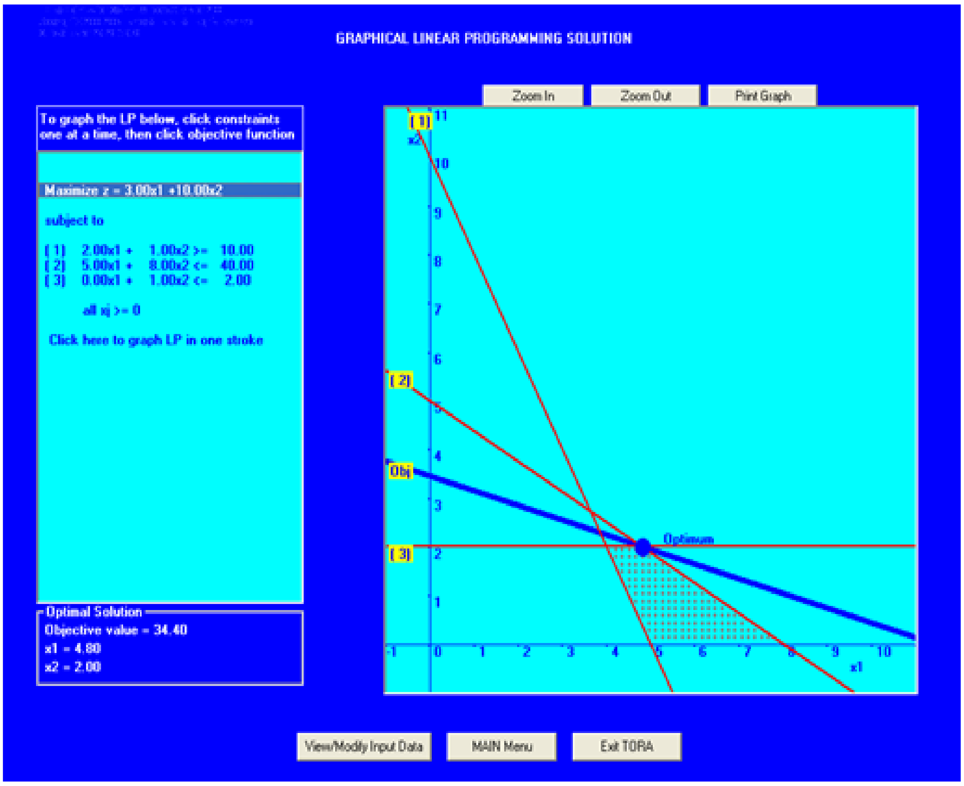
والحل في (7) يمثل الحل الأمثل للقيمة المتوقعة للدالة $\tilde{Z}$، ولكن لم يأخذ في الأعتبار:

أ- تباين المتغير $\tilde{Z}$.

ب- التوزيع الأحتمالي للمتغيران $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ وبالتالي التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{Z}$.

ج- النموذج اليقيني المحول أعلاه لا يعطي القيمة المثلي لدالة الهدف عند أحتمال معين يحدده متخذ القرار.

شكل (٢٣-١)



وفي الفصول التالية سوف تأخذ هذه البنود (أ)-(ج) في الأعتبار عند أستخدام المعايير الأخرى.

مثال (٢٣-٢): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}\tilde{Z} = 10\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.}\quad 3\,X_1 + 2\,X_2 \geq \tilde{b} \qquad (2)$$

$$X_1 - X_2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$X_1 \leq 5 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0\ ,\ E(\tilde{C}_2) = 10 \qquad (5)$$

$\tilde{b}$ متغير يتبع التوزيع المعتاد $\tilde{b} \sim N(10,2)$ – حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني بمستوى مأمونية لتحقيق القيد (2) أكبر من 0.95.

الحل:

$$Max.E(\tilde{Z}) = 10\,X_1 + 10\,X_2 \qquad (6)$$

ويمكن تحويل القيد الأحتمالي:

$$P_r(3\,X_1 + 2\,X_2 \geq \tilde{b}) \geq 0.95 \qquad (7)$$

وبالرجوع إلى الباب (٢١) فإنه يمكن تحويل القيد (7) إلى قيد يقيني بأستخدام جداول المعتاد القياسي بملحق (٢) على النحو التالي:

$$F(3\,X_1 + 2\,X_2) \geq 0.95 \longrightarrow 3\,X_1 + 2\,X_2 \geq F^{-1}(0.95)$$
$$\longrightarrow 3\,X_1 + 2\,X_2 \geq 1.65 \qquad (8)$$

ويصبح النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

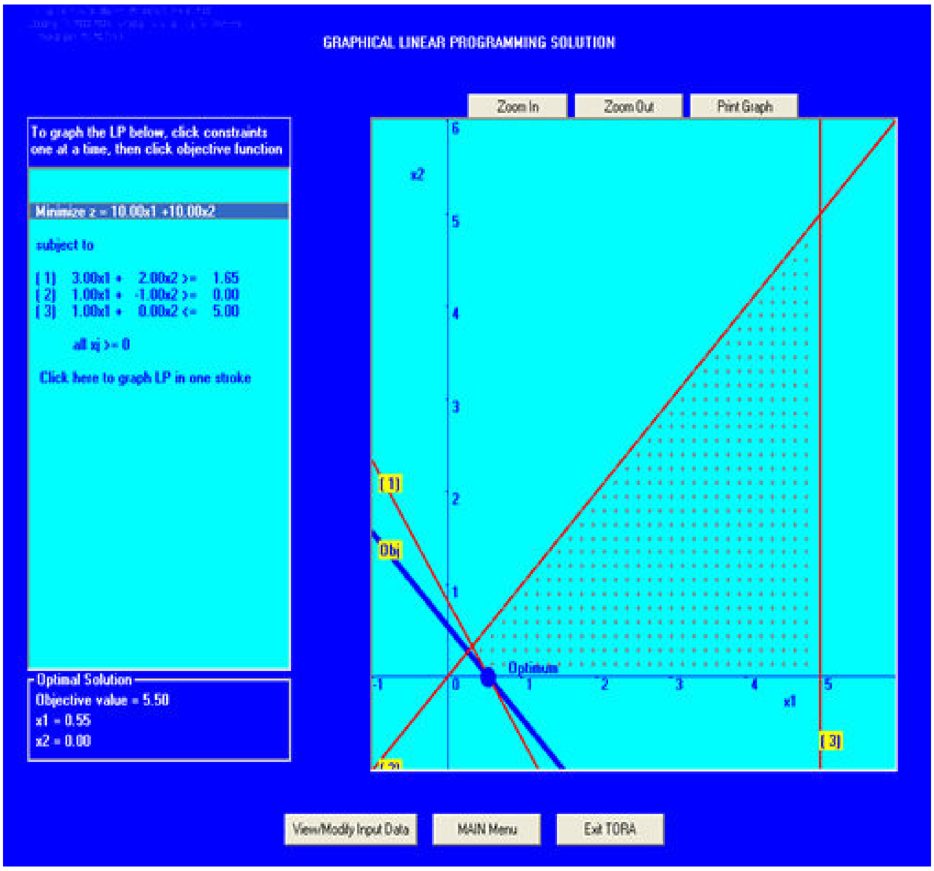
$$\begin{aligned} Max.E(\tilde{Z}) &= 10\,X_1 + 10\,X_2 \\ S.T.\quad 3\,X_1 + 2\,X_2 &\geq 1.65 \\ X_1 - X_2 &\geq 0 \\ X_1 &\leq 5 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه كنموذج برمجة خطية نجد أن الحل الأمثل

$$E^*(\tilde{Z}) = 5.5 \quad , \quad X_1^* = 0.55 \quad , \quad X_2^* = 0$$

والشكل التالي يوضح الحل البياني للنموذج اليقيني

شكل (٢٣-٢)


GRAPHICAL LINEAR PROGRAMMING SOLUTION
Zoom In
Zoom Out
Print Graph
To graph the LP below, click constraints one at a time, then click objective function
Minimize z = 10.00x1 +10.00x2
subject to
[1] 3.00x1 + 2.00x2 >= 1.65
[2] 1.00x1 + -1.00x2 >= 0.00
[3] 1.00x1 + 0.00x2 <= 5.00
all xj >= 0
Click here to graph LP in one stroke
Optimal Solution
Objective value = 5.50
x1 = 0.55
x2 = 0.00
x2
x1
Obj
Optimum
View/Modify Input Data
MAIN Menu
Exit TORA

(٢٣-٣) معيار تصغير التباين
Minimum Variance Criterion

في سنة ١٩٧٢ أقترح Charnes وآخرين أمكانية أستخدام تصغير تباين دالة الهدف الأحتمالية $\tilde{Z}$ في العلاقة (23.1) كمعيار لتحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة هدف يقينية [36,37]. حيث أن تصغير تباين الدالة $(\tilde{Z})$ يعني إيجاد قيم X_j ، $j = 1,2,...,n$ التي تجعل متوسط مجموع أنحرافات قيم الدالة $\tilde{Z}$ عن توقعها $E(\tilde{Z})$ أقل ما يمكن، أو بعبارة أخرى:

$$\text{Min.}V(\tilde{Z}) = \left\{\sum_t [\tilde{Z}_t - E(\tilde{Z}_t)]^2\right\} \div N \qquad (23.3)$$

حيث $V(\tilde{Z})$ تشير إلى تباين $(\tilde{Z})$، وN عدد مفردات المجتمع، أما إذا أستخدمت عينة فيتم استبدال N بـ (n-1) حيث (n) حجم العينة [٦، ٩].

وبما أن N أو (n-1) مقادير ثابتة بالتالي فيمكن أستخدام معيار تصغير التباين على أنه مجموع مربعات أنحرافات $\tilde{Z}$ عن قيمتها المتوقعة $E(\tilde{Z})$.

فإذا أعتبرنا دالة الهدف الأحتمالية $\text{Min.}(\tilde{Z})$ على النحو التالي:

$$\text{Min.}\ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n'} \tilde{C}_j X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} C_j X_j \qquad (23.4)$$

حيث أن المعلمات $\tilde{C}_j$ ، $j = 1,2,...,n$ متغيرات عشوائية مستقلة. فأقترحوا أستبدال دالة الهدف الأحتمالية في (23.4) بدالة الهدف اليقينية التي تمثل تصغير تباين الدالة $(\tilde{Z})$ على النحو التالي:

$$\text{Min.}V(\tilde{Z}) = \sum_{j=1}^{n'} X_j^2\ V(\tilde{C}_j) \qquad (23.5)$$

حيث $V(\tilde{C}_j)$ تشير إلى تباين المتغير $(\tilde{C}_j)$، $j = 1,2,...,n$.

<u>ونلاحظ ما يلي</u>: ١- دالة الهدف في (23.5) دالة غير خطية في X_j ، $j = 1,2,...,n$ تربيعية quadratic function محدبة convex في المتغيرات القرارية X_j التي تمثل معاملات للمعلمات العشوائية $\tilde{C}_j$ ، $j = 1,2,...,n$.

٢- المتغيرات القرارية X_j ، $j = n+1, n+2,...,n$ غير ممثلة في دالة الهدف اليقينية في (23.5) علماً بأنها ممثلة في دالة الهدف الأحتمالية في (23.4) في الحد غير العشوائي $\left(\sum_{j=n+1}^{n} C_j X_j\right)$.

٣- يمكن التغلب على (٢) بأقتراح أن تكون دالة الهدف اليقينية عبارة عن تصغير مجموع توقع وتباين المتغير $\tilde{Z}$ في حالة إذا كان الهدف في الدالة الأحتمالية تصغير، وسوف نشير لها بالرمز K حيث:

$$K = E(\tilde{Z}) + V(\tilde{Z}) \tag{23.6}$$

وتصبح دالة الهدف اليقينية على النحو التالي:

$$\text{Min.}K = \left\{\sum_{j=n+1}^{n} C_j X_j + \sum_{j=1}^{n} X_j E(\tilde{C}_j)\right\} + \left\{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \ V(\tilde{C}_j)\right\} \tag{23.7}$$

ونلاحظ أن الدالة K دالة غير خطية مربعة ومحدبة أيضاً. وبالتالي في حالة القيود الخطية نحصل على الحل الأمثل المطلق (أنظر [103,٨]) للنموذج اليقيني وفقاً للمعيار في (23.7).

٤- أما إذا كان الهدف هو تعظيم الدالة $(\tilde{Z})$ فإنه يمكن إضافة التباين إلى التوقع للمتغير $\tilde{Z}$ بإشارة سالبة وتصبح الدالة اليقينية في هذه الحالة:

$$\text{Max.K} = \{ \sum_{j=n+1}^{n} C_j X_j + \sum_{j=1}^{n} X_j E(\tilde{C}_j) \} - \{ \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \ V(\tilde{C}_j) \} \quad (23.8)$$

ونلاحظ أن الدالة K في (23.8) دالة مقعرة concave حيث $(\text{Min.}V(\tilde{Z}) = \text{Max.}(-V(\tilde{Z})))$ [128,78,٧]. وبالتالي يمكن الحصول على الحل الأمثل المطلق للنموذج في هذه الحالة عندما تكون قيود النموذج قيود خطية.

<u>**مثال (٢٣-٣)**</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\text{Min.}\tilde{Z} = 10 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3 X_1 + 5 X_2 \le 15 \qquad (2)$$

$$5 X_1 + 2 X_2 \ge 10 \qquad (3)$$

$$X_2 \ge 1 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

حيث $\tilde{C}_2$ متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 5 وتباين 2.

المطلوب: ١- حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار توقع دالة الهدف $\tilde{Z}$، ثم حل النموذج اليقيني في هذه الحالة.

٢- حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار تصغير تباين دالة الهدف $\tilde{Z}$. ثم حل النموذج اليقيني في هذه الحالة.

الحل: ١- إذا أخذنا بمعيار تصغير توقع الدالة $\tilde{Z}$ فإن دالة الهدف اليقينية تصبح:

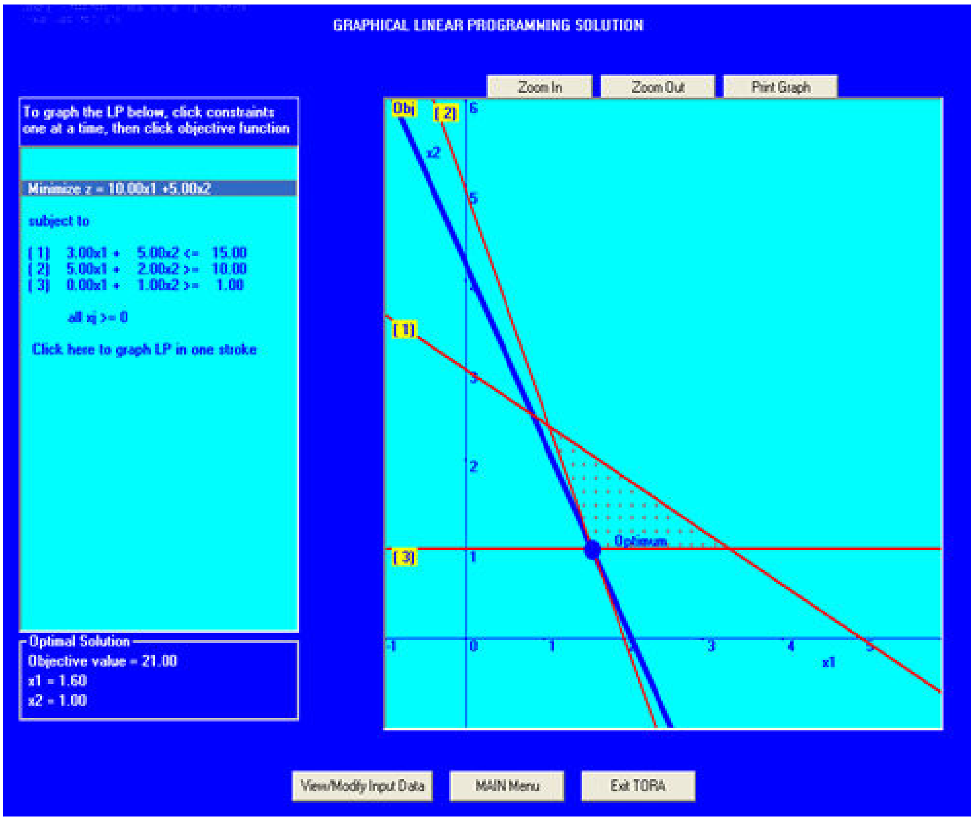
$$\text{Min.}E(\tilde{Z}) = 10 X_1 + 5 X_2 \qquad (5)$$

وبحل النموذج اليقيني في (4)-(2),(5) نجد أن الحل الأمثل

$$E^{*}(\tilde{Z}) = 21 \quad , \quad X_1^{*} = 1.6 \quad , \quad X_2^{*} = 1$$

والشكل التالي يوضح نقطة الحل المثلى

شكل (٣-٢٣)



٢- ووفقاً لمعيار أقل تباين للدالة $(\tilde{Z})$ فإن دالة الهدف اليقينية في هذه الحالة تصبح على النحو التالي:

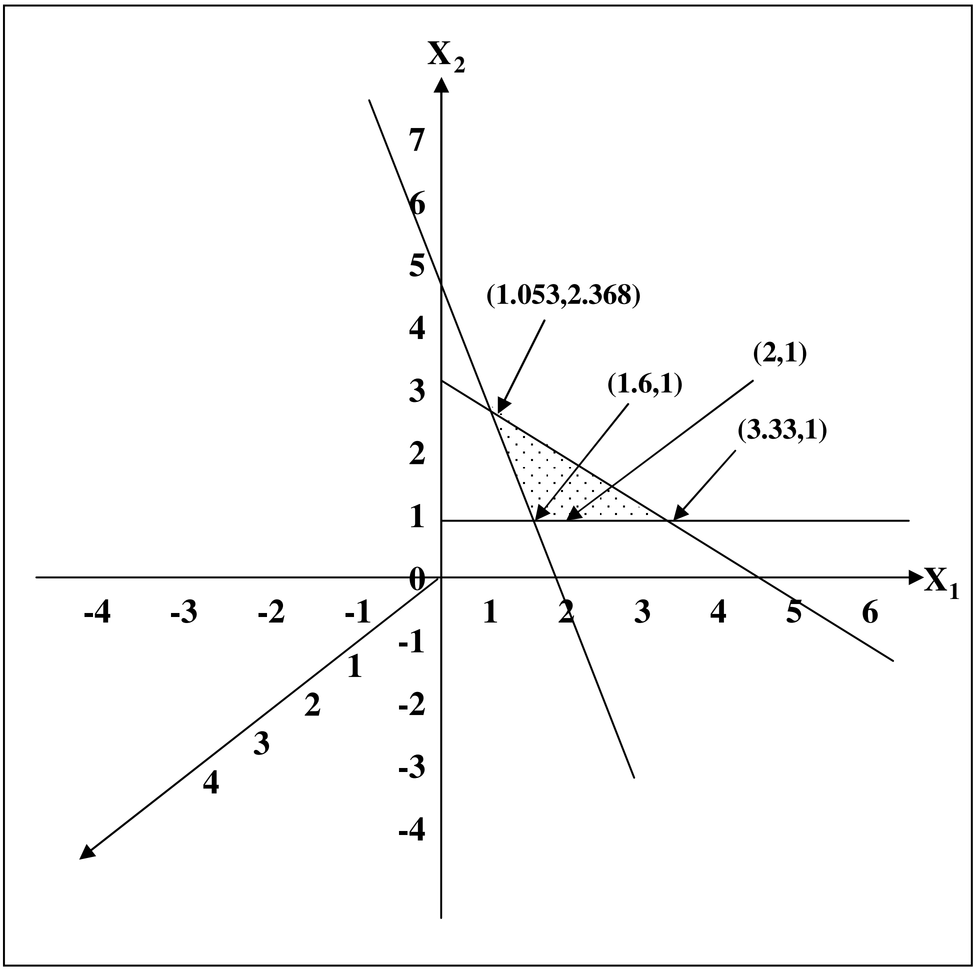
$$\text{Min.}V(\tilde{Z}) = 2\,X_2^2 \qquad (6)$$

ونلاحظ أن الدالة في(6) دالة غير خطية محدبة. وبحل النموذج غير الخطي (4)−(2),(6) بأستخدام طريقة لأجرانج [141,٨] نجد أن الحل الأمثل:

$$V^*(\tilde{Z}) = 2 \quad , \quad X_1^* = 2 \quad , \quad X_2^* = 1$$

ويمكن توضيح الحل بيانياً كما هو موضح في الشكل التالي (أنظر ملحق رقم　　):

شكل (٢٣-٤)



(٢٣-٤) معيار تعظيم دالة الإمكان

Maximum Likelihood Criterion

قدم **Charnes** وآخرين سنة ١٩٦٧ معيار تعظيم أحتمال تحقق دالة الهدف عند حد معين **certain limit** لقيمة الهدف، عندما يوجد معلمة أو أكثر في دالة الهدف تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة. فهم يعتبروا أول من أقترحوا وضع دالة الهدف في شكل دالة أحتمال.

فإذا أعتبرنا دالة الهدف الأحتمالية ($\tilde{Z}$) في (23.1) فقد أفترضوا وجود حد أدنى معلوم (L_0) في حالة إذا كان الهدف تعظيم وحد أعلى (U_0) معلوم أيضاً في حالة التصغير. حيث يتم تحديد L_0, U_0 عن طريق متخذ القرار.

وبالتالي أعتبروا المعيار:

$$\text{Max.}P_r(\tilde{Z} > L_0) \longleftarrow \text{في حالة التعظيم} \qquad (23.9)$$

أو:

$$\text{Max.}P_r(\tilde{Z} \le U_0) \longleftarrow \text{في حالة التصغير} \qquad (23.10)$$

وأطلقوا على النموذج الأحتمالي بعد تحويل دالة الهدف الأحتمالية في (23.10)،(23.9) إلى دالة يقينية وأطلقوا على النموذج بنموذج الأحتمال أو بـ **P-model** نسبة إلى كلمة أحتمال **Probability**. والدالة في (23.9) هي عبارة عن مكمل الدالة التراكمية للمتغير العشوائي $\tilde{Z}$ أو بعبارة أخرى:

$$P_r(\tilde{Z} \ge L_0) = 1 - F(L_0) \qquad (23.11)$$

حيث F دالة التوزيع التراكمية للمتغير $\tilde{Z}$، كذلك بالنسبة للدالة في (23.10) نجد أن:

$$P_r(\tilde{Z} \le U_0) = F(U_0) \qquad (23.12)$$

حيث أن الدالة التراكمية F دالة في المتغيرات القرارية.

ورغم أن هذا المعيار يعد معيار جيد لأنه يأخذ في الأعتبار شكل التوزيع الأحتمالي لـ $\tilde{Z}$ ولكن من الناحية النظرية فقط للأسباب التالية:

أ- الدالة في (23.12)-(23.11) عادةً دالة غير خطية في المتغيرات القرارية X_j حتى في حالة إذا كانت دالة الهدف الأحتمالية $\tilde{Z}$ دالة خطية في المتغيرات القرارية X_j ، $j = 1,2,...,n\ ,n\ +1,.....,n$.

ب- قيمة الدالة التراكمية F تنحصر بين الصفر والواحد $(0 \le F \le 1)$ مما يجعل أي تقريب للدالة F مؤثر على الحل الأمثل للمشكلة تأثير كبير. وبصفة خاصة في المشاكل التطبيقية ذات الحجم الكبير.

للأسباب المذكورة أعلاه أقترح Sengupta وآخرين أستخدام القيد الأحتمالي لدالة الهدف $\tilde{Z}$ ولكن بأسلوب آخر كما سوف نوضح ذلك في الفصل التالي.

(٢٣-٥) معيار الحدود المثلى Optimum Limits Criterion

المقصود هنا بالحدود المثلى هي الحدود المثلى لدالة الهدف الأحتمالية في (23.1) كما سوف نوضح فيما يلي.

في سنة ١٩٧٢ قدم Sengupta معيار أخر هو تعظيم (أو تصغير) الحد الأدنى لدالة الهدف (L_0) في حالة التعظيم أو تصغير الحد الأعلى (U_0) في (23.10)-(23.9) فالمعيار المقترح يعتمد على تحويل دالة الهدف الأحتمالية ($\tilde{Z}$) إلى قيد أحتمالي بوضع حد L_0 أو U_0 غير معلوم ومستوى مأمونية γ معلوم. وتحويل دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة يقينية تهدف إلى تعظيم L_0 أو تصغير U_0 كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية، ومن خلال الأمثلة سوف نوضح أهم مزايا أستخدام معايير الحدود المثلى.

وتحويل دالة الهدف إلى قيد أحتمالي يمكننا من أستخدام جميع التحويلات transformations التي سبق تقديمها في الباب (٢٢).

ويعتبر هذا المعيار أفضل من المعايير السابقة (التوقع والتباين) فهو يأخذ شكل التوزيع الأحتمالي لدالة الهدف $\tilde{Z}$ في الأعتبار، حيث يمكن متخذ القرار من الحصول على معلومات أكثر من المعلومات التي يتم الحصول عليها بأستخدام المعايير السابقة كل على حده كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة.

<u>مثال (٢٣-٤)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي، حيث المعلمة $\tilde{C}_1$ متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 10 وتباين 4.

$$\text{Max.}\tilde{Z} = \tilde{C}_1 X_1 + 10 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 5X_2 \le 15 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

المطلوب: ١- حول دالة الهدف الأحتمالية في (1) إلى دالة هدف يقينية بأستخدام معيارين تعظيم الحد الأدنى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ وذلك بمستوى مأمونية

أ- $\gamma = 0.5$		ب- $\gamma = 0.9$

٢- حل النموذج اليقيني في (١) في كل حالة من (أ) ، (ب).

٣- قارن بين النتائج في (أ) ، (ب).

الحل: إذا فرضنا أن L_0 هو الحد الأدنى لدالة الهدف $\tilde{Z}$ فإنه يمكن تحويل الدالة في (1) إلى قيد أحتمالي على النحو التالي:

$$P_r(\tilde{C}_1\, X_1 + 10\, X_2 \geq L_0) = \gamma \rightarrow P_r(\tilde{C}_1 \leq \{(L_0 - 10\, X_2)/X_1\}) = 1 - \gamma \quad (5)$$

وبما أن المتغير $\tilde{C}_1$ متغير معتاد بالتالي يمكن تحويله إلى متغير معتاد قياسي (أنظر الفصل (٢٢-٣)) وتصبح المعادلة (5) مكافئة للمعادلة التالية:

$$P_r(Z \leq \{(L_0 - 10\, X_2 - 10\, X_1)/2\, X_1\}) = 1 - \gamma$$

أو بعبارة أخرى:

$$F\left(\frac{L_0 - 10\, X_2 - 10\, X_1}{2\, X_1}\right) = 1 - \gamma \quad (6)$$

وبأستخدام ملحق (٢) للدالة التراكمية للمتغير المعتاد القياسي Z نجد أن:

أ- عند $\gamma = 0.5$ فأن $F = 0$

$$\frac{L_0 - 10\, X_2 - 10\, X_1}{2\, X_1} = 0 \longrightarrow L_0 = 10\, X_1 + 10\, X_2 \quad (7)$$

وتصبح دالة الهدف اليقينية المكافئة في هذه الحالة:

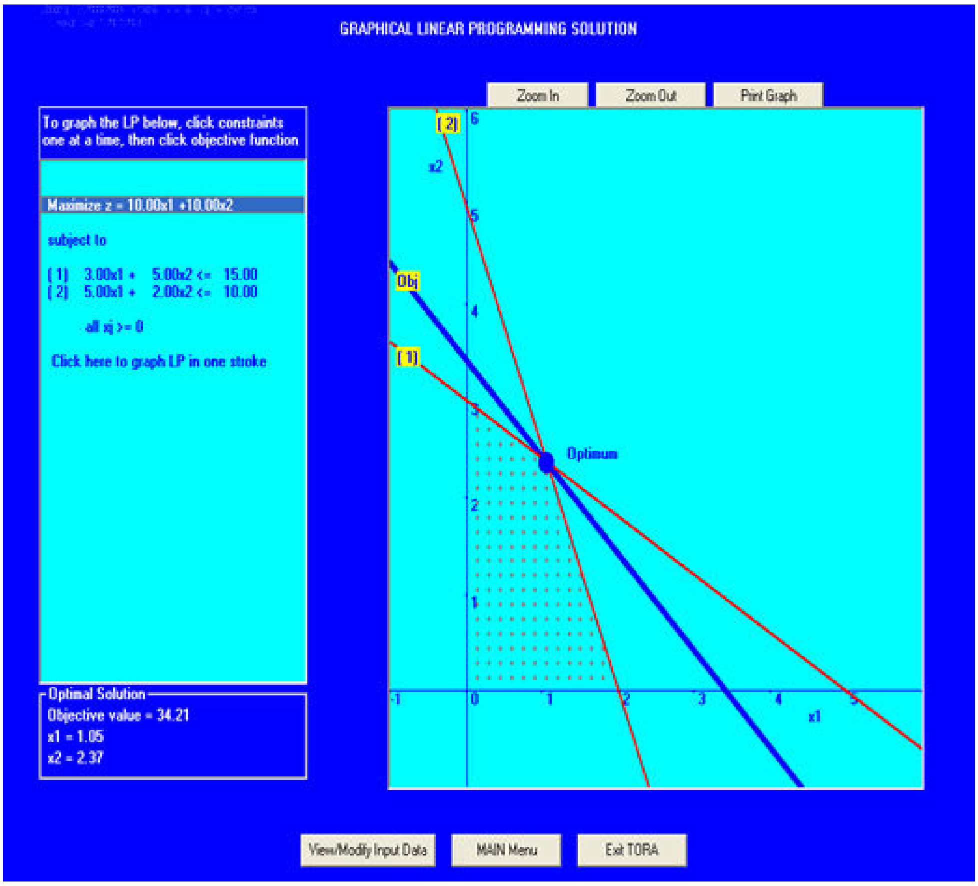
$$\text{Max.}L_0 = 10\,X_1 + 10\,X_2 \qquad (8)$$

ويلاحظ أن دالة الهدف في هذه الحالة دالة خطية وبالتالي يصبح النموذج اليقيني (4)-(2),(8) المكافئ للنموذج الأحتمالي في (4)-(1) نموذج برمجة خطية. وبحل النموذج نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$L_0^* = 34.21 \quad , \quad X_1^* = 1.053 \quad , \quad X_2^* = 2.368 \qquad (9)$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً

شكل (٢٣-٥)



والحل في (9) مكافئ للحل بأستخدام معيار التوقع E، والحل في (9) يعني أيضاً أن دالة الهدف الأحتمالية في (1) تزيد عن القيمة 34.21 بأحتمال 0.50 (50%).

ب- وعند $\gamma = 0.9$ نجد $F^{-1}(1-\gamma) = -1.28$ وبالتعويض في (6) نجد أن:

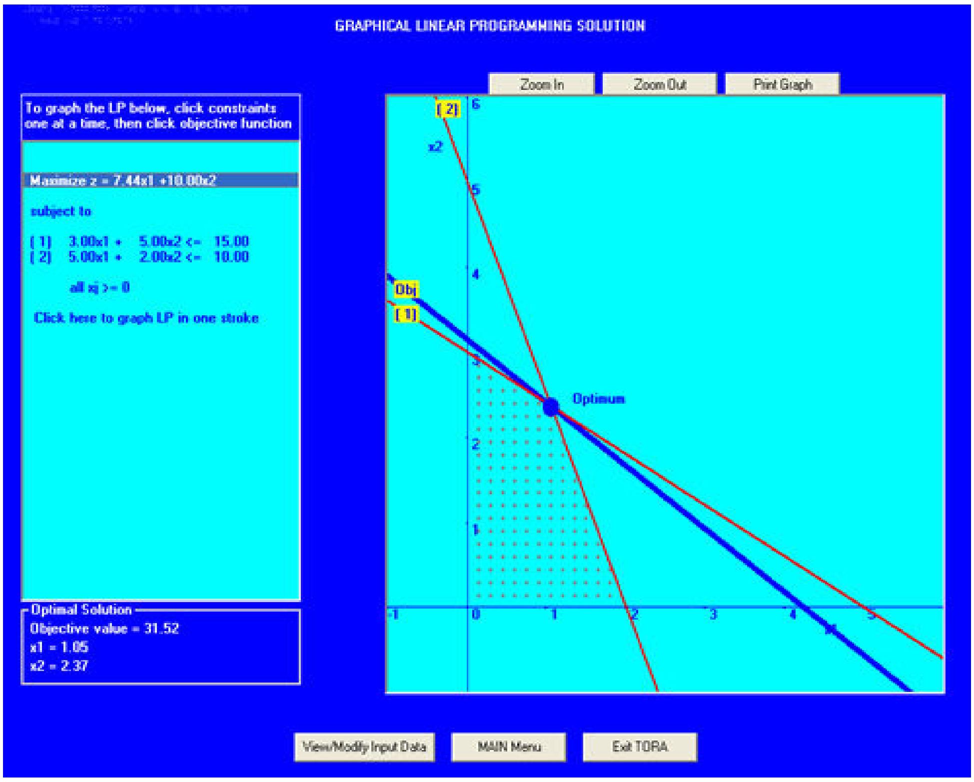
$$\frac{L_0 - 10\,X_2 - 10\,X_1}{2\,X_1} = -1.28 \longrightarrow L_0 = 7.44\,X_1 + 10\,X_2$$

وتصبح دالة الهدف اليقينية المكافئة في هذه الحالة:

$$\text{Max.}L_0 = 7.44\,X_1 + 10\,X_2 \qquad (10)$$

والشكل التالي يوضح الحل الأمثل بيانياً

شكل (٢٣-٦)



وبحل النموذج (4)−(2),(10) نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$L_0^* = 31.514 \quad , \quad X_1^* = 1.053 \quad , \quad X_2^* = 2.368 \qquad (11)$$

والحل في (11) يعني أن دالة الهدف الأحتمالية في (1) تزيد عن القيمة 31.514 بأحتمال 0.90 (90%)، كذلك نلاحظ أن زيادة مستوى المأمونية γ من 0.50 إلى 0.90 أدي إلى نقص الحد الأدنى الأمثل L_0^* من 34.21 إلى 31.514 على الترتيب.

<u>مثال (٢٣−٥)</u>: اعتبر نموذج برمجة الهدف الأحتمالي التالي:

$$\text{Min.}\tilde{Z} = 100 + \tilde{C}_1\, X_1 + \tilde{C}_2\, X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + 5X_2 \le 15 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 2X_2 \ge 10 \qquad (3)$$

$$X_2 \ge \tilde{b} \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

حيث:

$$\tilde{C}_1 \sim N(\mu = 3, \sigma = 1)\,, \tilde{C}_2 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2), \tilde{b} \sim \exp(\lambda = 5, \alpha = 1.32)$$

وتمثل متغيرات عشوائية مستقلة.

المطلوب: ١− حول دالة الهدف الأحتمالية إلى دالة هدف يقيني بمستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

٢− حول القيد الأحتمالي (4) إلى قيد يقيني عند مستوى مأمونية $\gamma_2 = 0.8$.

٣− قارن بين النموذج الأحتمالي والنموذج اليقيني المكافئ.

الحل: بما أن $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ متغيران معتادين مستقلين، بالتالي فإن $\tilde{Z}$ متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد أيضاً (أنظر نظرية (٢٢−١)).

$$E(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2) = 3X_1 + 5X_2 \;,\; V(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2) = X_1^2 + 4X_2^2$$

$$\longrightarrow$$

$$P_r(\tilde{Z} \le U_0) = 0.9 \longrightarrow P_r(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \le U_0 - 100) = 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r\left(\tilde{Z} \le \frac{U_0 - 100 - 3X_1 - 5X_2}{\sqrt{X_1^2 + 4X_2^2}}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

وتصبح دالة الهدف اليقينية في هذه الحالة:

$$\text{Min.}U_0 = 100 + 3X_1 + 5X_2 + 1.28\sqrt{X_1^2 + 4X_2^2} \qquad (6)$$

٢- يمكن أعادة كتابة القيد الأحتمالي (4) على النحو التالي:

$$P_r(X_2 \ge \tilde{b}) \ge 0.8 \longrightarrow F(X_2) \ge 0.8 \longrightarrow \qquad (7)$$

ومن نظرية (٢٠-١٠) يمكن كتابة (7) على النحو التالي:

$$X_2 \ge F^{-1}(0.8) \longrightarrow X_2 \ge 1.32 - 0.32 \longrightarrow X_2 \ge 1.0 \quad (8)$$

ويصبح النموذج اليقيني في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \text{Min.}U_0 &= 3X_1 + 5X_2 + 1.28\sqrt{X_1^2 + 4X_2^2} + 100 \\ \text{S.T.}\quad & 3X_1 + 5X_2 \le 15 \\ & 5X_1 + 2X_2 \ge 10 \\ & X_2 \ge 1.642 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

٣- أ) النموذج الأحتمالي في (5)-(1) نموذج برمجة خطية في المتغيرات القرارية X_j، $j = 1,2$ والنموذج اليقيني أعلاه نموذج غير خطي، ولكن نموذج محدب convex

فجميع القيود خطية ودالة الهدف غير خطية ولكنها دالة محدبة convex أيضاً [103,٨]، يمكن حله بأستخدام أحد أساليب البرمجة غير الخطية [128,148] والحصول على الحل الأمثل المطلق.

ب) دالة الهدف اليقينية في (6) هي عبارة عن مجموع مرجح للتوقع والانحراف المعياري للدالة الأحتمالية $\tilde{Z}$، وهذا يعني أن تصغير الحد U_0 يعني تصغير للتوقع والانحراف المعياري وفقاً لأوزان الترجيح لـ $\tilde{Z}$، أو بعبارة أخرى فأن هذا المعيار جامع بين معياري التوقع والتباين معاً في هذه الحالة.

<u>مثال (٢٣-٦)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max.}\tilde{Z} = 4X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 10X_1 + 8X_2 \le 80 \qquad (2)$$

$$6X_1 + 12X_2 \le 72 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{C}_2$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين $(\lambda = 2, \alpha = 10)$.

المطلوب: ١- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني عند مستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

٢- قارن النموذج الأحتمالي بالنموذج اليقيني.

الحل: ١- إذا أعتبرنا أن الحد الأدنى لدالة الهدف L_0 (أنظر نظرية (٢٢-٤)) فإن:

$$P_r(\tilde{Z} \ge L_0) = 0.9 \longrightarrow P_r(\tilde{C}_2 \ge \{(L_0 - 4X_1)/X_2\}) = 0.9 \longrightarrow$$

$$F\left(\frac{L_0 - 4X_1}{X_2}\right) = 0.10 \longrightarrow (L_0 - 4X_1) - \alpha X_2 = \frac{-X_2}{\lambda}\ln(0.9) \longrightarrow$$

$$L_0 = 4X_1 + 10.053X_2 \qquad (5)$$

ويصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

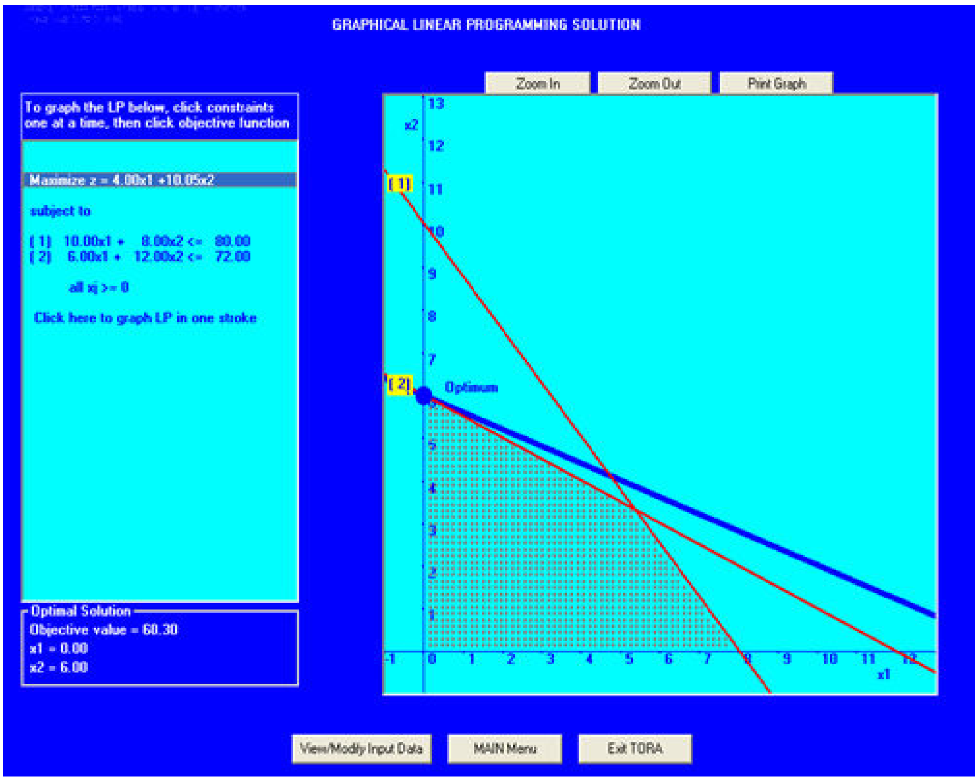
$$\text{Max.} L_0 = 4\,X_1 + 10.053\,X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 10\,X_1 + 8\,X_2 \leq 80$$
$$6\,X_1 + 12\,X_2 \leq 72$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

٢- ونلاحظ أن النموذج اليقيني أعلاه نموذج برمجة خطية يمكن حله بيانياً أو بأستخدام طريقة السمبلكس ويكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$L_0^* = 60.30 \quad , \quad X_1^* = 0.00 \quad , \quad X_2^* = 6.0$$

والشكل التالي يوضح الحل البياني

شكل (٢٣-٧)



(٢٣-٦) برمجة الصلاحية Reliability Programming

بالنسبة للأنظمة الأحتمالية probabilistic systems مثل أنظمة الصفوف queue systems أو أنظمة الإنتاج Production systems أو أنظمة العرض والطلب، يكون من الأهمية تحديد أحتمال عمل النظام بكفاءة (حيث يوجد أحتمال موجب لعدم عمل النظام بكفاءة). ويسمى أحتمال عمل النظام بكفاءة بمقياس (أو مؤشر) الصلاحية reliability measure فإذا أشرنا لهذا المؤشر بالرمز R فإن $0 < R \leq 1$.

ومنذ ١٩٥٠ وتزيد الأهتمام بتقديم تعريفات مختلفة لمقياس الصلاحية R، فقدمت نظرية الصلاحية reliability theory التى تتناول العلاقة بين R والتوزيع العمري the age distribution لكل مكون من مكونات النظام الأحتمالى محل الأعتبار [109,136,54].

وبالنسبة لنماذج البرمجة الاحتمالية فهي تمثل أنظمة أحتمالية ، وبالتالي يعرف مقياس الصلاحية لنموذج البرمجة الأحتمالية بأنه أحتمال تحقيق القيود الأحتمالية والهدف الأحتمالي أيضاً أن وجد.

وبرمجة الصلاحية هو أسلوب من أساليب البرمجة التي تأخذ فى الإعتبار تعظيم مقياس الصلاحية (أى تعظيم إحتمال تحقيق القيود والهدف) للحل أو بعبارة أخري تصغير مقياس المخاطرة والمتمثل في عدم تحقيق قيد أو أكثر، ويمكن الإشارة له بالرمز R^0 حيث أن $R^0 = 1 - R$.

ومن مزايا أستخدام أسلوب CCP في تحويل النموذج الأحتمالى إلى نموذج يقيني مكافئ أنه يمكننا من دمج مؤشر الصلاحية (أو المخاطرة) فى دالة الهدف اليقينية بعد التحويل، وسوف نوضح ذلك فيما يلى.

فإذا كان مستوى المأمونية tolerance measure للقيد رقم (i) يساوي γ_i وكما ذكرنا سابقاً فإن γ_i هي أحتمال تحقق القيد (i)، وبالتالي فإن مقياس الصلاحية لتحقيق القيد رقم (i) يساوي γ_i أيضاً [136].

وبالتالي فإن مقياس صلاحية الحل هو دالة في المؤشرات γ_i ويمكن أن يأخذ صياغات مختلفة على النحو التالي:

$$\text{i)}\ \ R_1 = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i \tag{23.12}$$

وفي هذه الحالة يكون مقياس صلاحية الحل هو أحتمال أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود في نفس الوقت.

$$\text{ii)}\ \ R_2 = 1 - \left[\prod_{i=1}^{m} (1-\gamma_i) \right] \tag{23.13}$$

وفي هذه الحالة يكون مقياس الصلاحية هو أحتمال أن يحقق الحل الأمثل واحد أو أكثر من القيود. حيث يمثل المقدار $\left[\prod_{i=1}^{m} (1-\gamma_i) \right]$ أحتمال عدم تحقق القيود معاً أو ما يسمى بالمخاطرة risk وسوف نرمز للمخاطرة بالرمز R_2 على النحو التالي:

$$\text{iii)}\ \ \grave{R}_2 = \prod_{i=1}^{m} (1-\gamma_i) \tag{23.14}$$

بالنسبة للمقياس R_1 في حالة وجود واحد على الأقل من العناصر γ_i يساوي صفر فإن هذا يؤدي إلى أن $R_1 = 0$، ولمعالجة ذلك في هذه الحالة يمكن أفتراض أن $\gamma_i = \varepsilon_i$، $\varepsilon_i \to 0$ بالمثل بالنسبة للمقياس R_2 عند وجود واحد من العناصر $(1-\gamma_i)$ يساوي صفر فأن هذا يؤدي إلى أن R_2 يساوي صفر أيضاً. ويمكن أيضاً أفتراض أن $(1-\gamma_i) = \varepsilon_i$، $\varepsilon_i \to 0$.

وفي كثير من الحالات يكون متخذ القرار غير قادر على تحديد المؤشرات γ_i أو $(1-\gamma_i)$، وفي هذه الحالة يمكن أعتبار γ_i، $i=1,2,.....,m$ متغيرات قرارية غير معلومة unknown decisions variables أيضاً وتعامل كمتغيرات قرارية، وبالتالي يصبح متخذ القرار يرغب في تحقيق:

$$\text{Max.}R_1 = \prod_{i=1}^{m}\gamma_i \text{ أو } \text{Max.}R_2 = 1-\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i) \text{ أو } \text{Min.}\dot{R}_2 = \prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)$$

$$0<\gamma_i\le 1 \quad , \quad 0<R_1,R_2,R_2\le 1 \qquad (23.15)$$

وفي الأمثلة التالية سوف نوضح كيفية دمج أحد المقاييس في (23.15) في دالة الهدف. ويلاحظ أن المقاييس في (23.14)−(23.12) دوال غير خطية في المتغيرات γ_i، $i=1,2,.....,m$، ولكن يمكن تحويلها إلى دوال خطية على النحو:

إذا فرضنا أن $R_1=\prod_{i=1}^{m}\gamma_i$ فبأخذ اللوغاريتم للطرفين نجد أن:

$$\ln R_1 = \sum_{i=1}^{m}\ln\gamma_i \qquad (23.16)$$

وبما أن γ_i بحيث $0<\gamma_i<1$ فإن الدالة $\ln\gamma_i$ دالة تأخذ قيم سالبة، فإذا عرفنا المتغير y_i بحيث $y_i-\ln\gamma_i$ ، $y_i\ge 0$ يمثل دالة متناقصة في γ_i وبالتالي فإن $\text{Max.}R_1$ تكافئ $\text{Max.}\left(-\sum_{i=1}^{m}y_i\right)$ [51,141].

وفي الأمثلة التالية سوف نوضح كيفية دمج مقياس الصلاحية (أو مقياس المخاطرة) في دالة الهدف، الذي يؤدي إلى دالة هدف غير خطية ولكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بأستخدام التحويل في (23.16).

مثال (٢٣-٧): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\text{Max.}Z = 2X_1 + 3X_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad P_r(2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1) \ge \gamma_1 \quad (2)$$

$$P_r(X_1 + 2X_2 \le \tilde{b}_2) \ge \gamma_2 \quad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 6)$, $\tilde{b}_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 4)$

المطلوب: ١- تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ وفقاً لأولويات متخذ القرار w_1, w_2.

٢- تحويل النموذج اليقيني غير الخطي إلى نموذج خطي.

٣- حل النموذج الخطي عند قيم مختلفة لأولويات متخذ القرار w_1, w_2.

الحل: ١- من نظرية (٢٠-١) نجد أن القيد اليقيني المكافئ للقيد (2) على النحو التالي:

$$-\lambda_1(2X_1 + X_2 - \alpha_1) \ge \ln\gamma_1 \rightarrow \; 2X_1 + X_2 + 0.5\ln\gamma_1 \le 6 \quad (5)$$

بالمثل بالنسبة للقيد (3)، نجد أن القيد اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$-\lambda_2(X_1 + 2X_2 - \alpha_2) \ge \ln\gamma_2 \rightarrow \; X_1 + 2X_2 + \ln\gamma_2 \le 4 \quad (6)$$

فإذا كان مقياس الصلاحية

$$R_1 = \gamma_1\,\gamma_2 \quad (7)$$

ويصبح نموذج برمجة الصلاحية اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = w_1(2X_1 + 3X_2) + w_2(\gamma_1\,\gamma_2)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 + 0.5\ln\gamma_1 \le 6$$

$$X_1 + 2X_2 + \ln \gamma_2 \le 4$$

$$w_1, w_2 > 0 \;,\; X_1, X_2 \ge 0 \;,\; 0 < \gamma_1, \gamma_2 \le 1$$

حيث w_1, w_2 تشير إلى أوزان ترجيحية في دالة الهدف توضح الأولوية لأهداف متخذ القرار في تعظيم دالة الهدف Z ، وبحل النموذج نحصل على الحل الكفأ efficient solution وهو يعتبر حل أمثل مطلق في هذه الحالة أيضاً [١٠,125].

٢- والنموذج أعلاه نموذج برمجة غير خطية ولكن يمكن تحويله إلى برمجة خطية وذلك بافتراض أن $y_2 = -\ln \gamma_2$ ، $y_1 = -\ln \gamma_1$.

ويمكن تحويل نموذج برمجة الصلاحية غير الخطي إلى نموذج برمجة خطية على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = w_1(2X_1 + 3X_2) - w_2(y_1 + y_2)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 - 0.5y_1 \le 6$$

$$X_1 + 2X_2 - y_2 \le 4$$

$$X_1, X_2, y_1, y_2 \ge 0$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس. والجدول التالي يعطى الحل الأمثل للنموذج عند قيم أفتراضية مختلفة لأولويات متخذ القرار w_1, w_2.

ومن الجدول نجد أن أفضل حلين هما برقم (2),(4) حيث أن مؤشر الصلاحية الأمثل R_1^* يساوى (1)

جدول (٢٣-١)

الرقم	w_1	w_2	Z^*	$R_1^*=\gamma_1^*\gamma_2^*$	نقط الحلول المثلى
1	1	1	10.00	0.00034	$X_1^*=0, X_2^*=6, \gamma_1^*=1, \gamma_2^*=0.00034$
2	1	2	7.33	1.000	$X_1^*=2.67, X_2^*=0.67, \gamma_1^*=1, \gamma_2^*=1 \leftarrow$
3	2	1	28.00	0.00034	$X_1^*=0, X_2^*=6, \gamma_1^*=1, \gamma_2^*=0.00034$
4	1	3	10.00	1.000	$X_1^*=2, X_2^*=2, \gamma_1^*=1, \gamma_2^*=1 \leftarrow$

<u>**مثال (٢٣-٨)**</u>: أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\text{Min.}Z = 2X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_1) \geq \gamma_1 \qquad (2)$$

$$P_r(5X_1 + 8X_2 \leq \tilde{b}_2) \leq (1-\gamma_2) \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ \gamma_1 \geq 0.8 \ , \ \gamma_2 \geq 0.5 \qquad (4)$$

حيث $\tilde{b}_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 4)$, $\tilde{b}_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2 = 5, \alpha_2 = 40)$

وحيث γ_1, γ_2 تشير إلى أحتمال تحقق القيدين (3),(2)على الترتيب.

المطلوب: ١- تحويل القيدين (3),(2) إلى قيدين يقينيين.

٢- كون نموذج صلاحية يقيني مكافئ للنموذج في (4)-(1) بحيث تكون قيمة مؤشر المخاطرة (R_2) أقل ما يمكن (أو بعبارة أخرى تعظيم مقياس الصلاحية R_2)، وفقاً للأوزان الترجيحية w_1, w_2 .

٣- حول النموذج اليقيني غير الخطي في (٢) إلى نموذج خطي، وأوجد الحل الأمثل عند قيم مختلفة لـ w_1, w_2 .

الحل: إذا فرضنا أن $y_i = -\ln(1-\gamma_i)$ ، $i = 1,2$ ، حيث y_i دوال متناقصة في $(1-\gamma_i)$ ، $0 < \gamma_i < 1$. ويمكن تحويل القيدين (3),(2) إلى (6),(5) على النحو التالي:

$$X_1 + X_2 - 0.5\, y_1 \geq 4 \qquad (5)$$

$$5\, X_1 + 8\, X_2 - 0.2\, y_2 \leq 40 \qquad (6)$$

٢- إذا فرضنا أن مؤشر المخاطرة R_2 فإن:

$$\acute{R}_2 = \prod_{i=1}^{2} (1-\gamma_i) \longrightarrow \ln R_2 = \ln(1-\gamma_1) + \ln(1-\gamma_2) \qquad (7)$$

وفي هذه الحالة يصبح مقياس الصلاحية R_2 بحيث $R_2 = 1 - R_2$. وبإدماج الدالة $\ln R_2$ في دالة الهدف يصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = w_1(2\, X_1 + X_2) + w_2\left(\prod_{i=1}^{2} (1-\gamma_i)\right)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + 0.5 \ln(1-\gamma_1) \geq 4$$

$$5\, X_1 + 8\, X_2 + 0.2 \ln(1-\gamma_2) \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \;, \quad \gamma_1 \geq 0.8 \;, \; \gamma_2 \geq 0.5$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة غير خطية يمكن تحويله إلى نموذج خطى على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z \quad = w_1(2\, X_1 + X_2) - w_2(y_1 + y_2)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - 0.5\, y_1 \geq 4$$

$$5\, X_1 + 8\, X_2 - 0.2\, y_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ \ y_1 \geq 1.6094 \ , \ y_2 \geq 0.69315$$

والجدول التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج أعلاه عند القيم المختلفة لـ w_1, w_2.

جدول (٢٣-٢)

الرقم	w_1	w_2	Z^*	R_2^*	$R_2^* = 1 - R_2^*$	نقط الحلول المثلى
1	1	1	2.51	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.81, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 0.5$
2	2	1	7.31	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.0, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 5$
3	1	2	2.21	0.40	0.60	$X_1^* = 0, X_2^* = 4.81, \gamma_1^* = 0.8, \gamma_2^* = 0.5$

مثال (٢٣-٩): أعتبر التطبيق رقم (٢١-١) بالفصل (٢١-٤). فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من المنتج A يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي وسوف نشير له بالرمز $\tilde{C}$ بحيث: $\tilde{C} \sim Exp(\lambda = 5, \alpha = 2000)$

المطلوب: ١- صياغة دالة الهدف للمشكلة كدالة أحتمالية ثم تحويلها إلى دالة يقينية وفقاً لمعيار القيمة المتوقعة، ثم كون النموذج اليقيني بأحتمالات تحقق القيود الأحتمالية γ_1, γ_2 وحدود قيمة مؤشر الصلاحية للحل في هذه الحالة.

٢- معيار تعظيم الحد الأدنى لدالة الهدف باحتمال $\gamma \geq 0.9$، ثم كون النموذج اليقيني في هذه الحالة وحدد قيمة مؤشر الصلاحية في هذه الحالة.

الحل: ١- بما أن $\tilde{C}$ متغير فإن دالة الهدف في هذه الحالة على النحو:

$$Max.\tilde{Z} = \tilde{C}\, X_1 + 1500\, X_2 + 1000\, X_3$$

وبما أن $\tilde{C}$ متغير يتبع التوزيع الأسي (أنظر نظرية (٢٠-١٠)) فإن:

$$E(\tilde{C}) = \frac{1}{\lambda} + \alpha = 0.2 + 2000 = 2000.2 \qquad (1)$$

وبالتالي فإن:

$$P_r(\tilde{C} \geq E(\tilde{C})) = P_r(\tilde{Z} \geq E(\tilde{Z})) = 0.961 \longrightarrow \gamma = 0.961$$

وبأستبدال $\tilde{Z}$ بالقيمة المتوقعة $E(\tilde{Z})$ يصبح النموذج اليقيني في هذه الحالة على النحو التالي:

$$Max.E(\tilde{Z}) = 2000.2\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 \qquad (2)$$

$$S.T. \qquad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \leq 600 \qquad (3)$$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \leq 561 \qquad (4)$$

$$X_1 \geq 19 \;,\; X_2 \geq 24 \;,\; X_3 \geq 29 \qquad (5)$$

وبحل النموذج (5)-(2) بأستخدام طريقة السمبلكس [148,٨] نجد أن الحل الأمثل:

$$E^*(\tilde{Z}) = 258199.55 \;,\; X_1^* = 83.04 \;,\; X_2^* = 41.22 \;,\; X_3^* = 29 \qquad (6)$$

والحل في (6) يعنى أن أكبر قيمة متوقعة لـ $\tilde{Z}$ تساوي 358199.55 بحيث أن القيم المثلى لكل من X_1, X_2, X_3 على النحو:

$$X_1^* = 83.04 \;,\; X_2^* = 41.22 \;,\; X_3^* = 29$$

وفي هذه الحالة تكون قيمة مؤشر الصلاحية R_1^* على النحو التالي:

$$R_1^* = \gamma\,\gamma_1\,\gamma_2 = 0.961(0.9)(0.98) = 0.848 \qquad (7)$$

$$P_r(\tilde{Z} > L_0) = P_r(\tilde{C}\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 > L_0) = 0.90 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{L_0 - 1500X_2 + 1000X_3}{X_1}\right) = 0.90 \longrightarrow$$

$$L_0 = 1500\,X_2 + 1000\,X_3 + 2000\,X_1 - 4.5\,X_1 \longrightarrow$$

$$\text{Max.}L_0 = 1995.5\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3 \qquad (8)$$

$$\text{S.T.} \qquad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600$$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561$$

$$X_1 \ge 19 \;,\; X_2 \ge 24 \;,\; X_3 \ge 29$$

وبحل النموذج أعلاه نجد أن الحل الأمثل:

$$L_0^* = 277853.33 \;,\; X_1^* = 106.67 \;,\; X_2^* = 24 \;,\; X_3^* = 29 \qquad (9)$$

وقيمة مقياس الصلاحية في هذه الحالة على النحو:

$$R_1^* \ge (0.9)(0.9)(0.9) = 0.729 \qquad (10)$$

(٢٣-٧) تمرينات Exercises

(٢٣-١) بأستخدام معيار القيمة المتوقعة حول دوال الهدف الأحتمالية التالية إلى دوال هدف يقينية، ثم أحسب أحتمال تحقق الهدف:

(1) $\text{Max.}\tilde{Z} = \tilde{a}_1 X_1 + 3X_2 - 5X_3$

حيث أن المتغير $\tilde{a}_1$ متغير يتبع التوزيع المنتظم بدالة أحتمال $f(\tilde{a}_1)$ حيث:

$$f(\tilde{a}_1) = \frac{1}{10} \quad , \quad \tilde{a}_1 = 1,2,.....,10$$

(2) $\text{Min.}\tilde{Z} = 5X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \tilde{a}_3 X_3 + 10X_4$

حيث $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ متغيران عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمات $(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 7), (\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 5)$ على الترتيب:

(3) $\text{Min.}\tilde{Z} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2$

حيث $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع التوزيع المعتاد $\tilde{a}_1 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2), \tilde{a}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 3)$

(4) أعتبر المشكلة أعلاه (3) وأعتبر المتغيران $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ متغيران عشوائيين غير مستقلين بمعامل أرتباط $0.7 =$

(٢٣-٢) أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}\tilde{Z} = 10X_1 + \tilde{a}_2 X_2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1$$

$$0 \le X_1, X_2 \le 3$$

أعتبر $\tilde{a}_2, \tilde{b}_1$ متغيران عشوائيين مستقلين بحيث:

$$\tilde{a}_2 \sim N(\mu = 7, \sigma = 1), \tilde{b}_1 \sim Exp(\lambda = 1, \alpha = 5)$$

أ- حول النموذج الأحتمالي أعلاه إلى نموذج يقيني بأخذ معيار القيمة المتوقعة لكل من $\tilde{a}_2, \tilde{b}_1$ على الترتيب.

ب- عند مستوى مأمونية $\gamma = 0.9, \gamma_1 = 0.9$ حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني – حل النموذج اليقيني – ثم أوجد صلاحية الحل.

ج- إذا فرضنا أن قيم γ, γ_1 غير معلومة – حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مناسب – ثم حل النموذج وأوجد قيمة مؤشر صلاحية الحل.

د- قارن بين الحل في كل من (أ)،(ب)،(ج).

(٢٣-٣) أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\begin{aligned} Max.\tilde{Z} &= 4X_1 + \tilde{C}_2 X_2 + \tilde{C}_3 X_3 \\ S.T. \quad \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + 5X_3 &\le 20 \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 &\le \tilde{b}_2 \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

حيث $\tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ متغيران عشوائيين مستقلين يتبع كل منهما التوزيع المعتاد بتوقع 2,3 وتباين 1,1 على الترتيب. كذلك $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع المعتاد:

$$\tilde{a}_1 \sim N(\mu_1 = 2, \sigma_1 = 1), \tilde{a}_2 \sim N(\mu_2 = 5, \sigma_2 = 1), \tilde{b}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 1)$$

أ- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مكافئ عند مستويات المأمونية التالية $\gamma = 0.7, \gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 0.9$ – ثم حل النموذج اليقيني.

ب- بأفتراض أن γ,γ_1,γ_2 غير معلومة، كون نموذج برمجة صلاحية مناسب وحل النموذج.

ج- قارن بين الحل في (أ)،(ب).

(٢٣-٤) أعتبر التمرين (٢١-١) في الفصل (٢١-٥). أذا أعتبرنا دوال الأهداف على النحو التالي:

$$(1)\ \ Max.\tilde{Z} = \tilde{a}_1\ X_1 + 2\,X_2 + \tilde{a}_3\ X_3$$

حيث $\tilde{a}_1$ متغير عشوائي يتبع $Exp(\lambda = 1, \alpha = 5)$ ومستوى مأمونية $\gamma = 0.9$.

$$(2)\ \ Max.\tilde{Z} = 2\,X_1 + 3\,X_2 + \tilde{a}_3\ X_3$$

حيث $\tilde{a}_3 \sim N(\mu = 2, \sigma = 1)$ ومستوى مأمونية $\gamma = 0.8$.

في كل من $(1),(2)$:

أ- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني وفقاً لمعيار القيمة المتوقعة، ثم حل النموذج وأوجد قيمة مقياس صلاحية الحل في هذه الحالة.

ب- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني وفقاً لمعيار الحدود المثلى لدالة الهدف، ثم حل النموذج وأوجد قيمة مقياس الصلاحية للحل.

ج- أعتبر مؤشرات المأمونية γ,γ_1,γ_2 غير معلومة – كون نموذج برمجة صلاحية مناسب ثم أوجد حل النموذج وأوجد قيمة مقياس الصلاحية للحل.

د- قارن بين الحلول في (أ)،(ب)،(ج).

الباب الرابع والعشرون

برمجة الهدف الخطية

Linear Goal Programming (LGP)

(٢٤-١) مقدمة Introduction

منذ نشر طريقة السمبلكس سنة ١٩٤٧ التي قدمها Dantzing لحل مشاكل البرمجة الخطية على نطاق واسع، فتكونت العديد من المدارس العلمية لتطوير وتطبيق أسلوب البرمجة الخطية [41].

ومن أهم المدارس التي تم تكوينها المدرسة العلمية التي كونها كل من Charles and Cooper، فقد تناولا العديد من المشاكل الصناعية [34,35] التي يمكن صياغتها في شكل نماذج برمجة خطية ولكن غير قابلة للحل باستخدام أساليب حل مشاكل البرمجة الخطية أطلقا عليها أسم "مشاكل برمجة خطية غير قابلة للحل Unsolvable Linear Prog. Problems". ومن أمثلة هذه المشاكل المشاكل المرتبطه بالمجالات الصناعية، الإقتصادية، المالية ...... إلخ. حيث تتصف هذه المشاكل بالمرونة حيث يمكن صياغة المشكلة فى الشكل:

- نموذج برمجة خطية يوجد به بعض (أو كل) القيود الهيكلية قيود متعارضة conflicting constraints ولكنها تتصف بالمرونة فى نفس الوقت كما سوف نوضح فيما بعد.
- نموذج برمجة خطية ولكن يوجد أكثر من هدف Multi-objectives .
- نموذج برمجة خطية ولكن يرتبط الهدف objective (أو الأهداف) بمستوى (أو مستويات) معين مرجو تحقيقه aspiration level يصنعه متخذ القرار.

وفي سنة ١٩٦١ قدما Charles and Cooper للمرة الأولى أسلوب برمجة الهدف Goal Programming Technique، الذي يمكن بأستخدامه الحصول على أفضل حلول توافقية best compromise solutions للمشاكل التي أطلقوا عليها أسم مشاكل غير قابلة للحل باستخدام أسلوب البرمجة الخطية. ثم تطور أسلوب برمجة الهدف وتم تطبيقه على نطاق واسع بصفة خاصة في حل المشاكل الإدارية والمحاسبية

والاقتصادية من خلال الدراسات التي قدمها **Ijiri** سنة ١٩٦٥، ثم **Lee** سنة ١٩٧٢، ثم **Ignizio** سنة ١٩٧٦، وآخرين [75,72,74].

وبصفة عامة فإنه يمكن أستخدام أسلوب برمجة الهدف في حالة وجود واحد على الأقل من الحالات التالية. وبحل المشكلة باستخدام أسلوب برمجة الهدف نحصل على أفضل حل توافقي.

<u>الحالة الأولي</u>

عند وجود بعض (أو كل) القيود الهيكلية المتعارضة، ولكن في نفس الوقت تتصف بالمرونة **elastic constraints**، بمعنى أمكانية عدم تحقق القيد في الحل النهائي ولكن الوصول إلى أفضل حل توافقى يجعلنا أقرب ما يمكن لتحقيق القيد كما سوف نوضح ذلك في المثال التالي.

<u>مثال (٢٤-١)</u>: تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات البديلة A,B ، بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من A أربعون دقيقة والوحدة من B تستغرق ثلاثون دقيقة وزمن التشغيل المتاح في اليوم 20 ساعة، فإذا كان الطلب في السوق على المنتجين A,B معاً لا يقل عن 50 وحدة يومياً. وإذا كان ربح الوحدة من A يساوي 35 جنيه ومن B يساوى 40 جنيه. ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من A,B بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- وضح بيانياً أن القيود الهيكلية متعارضة.

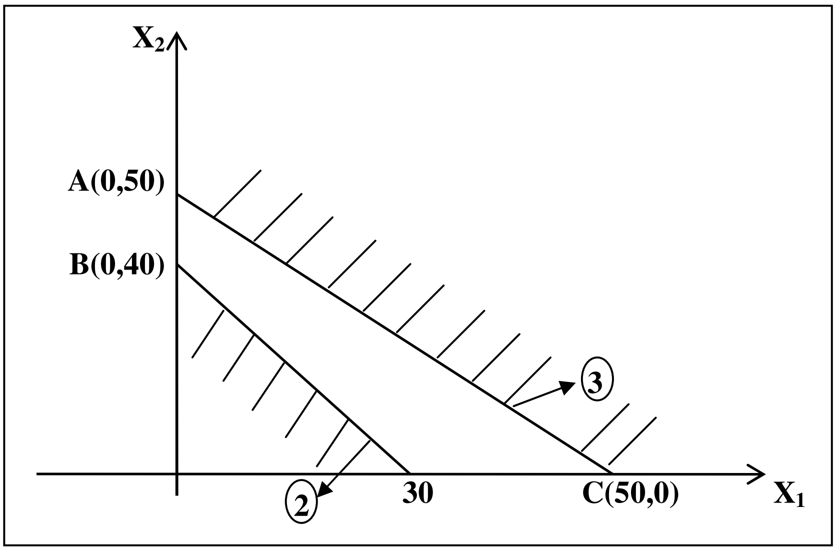
الحل: ١- إذا فرضنا ان X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A,B على الترتيب فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Max.}Z = 35X_1 + 40X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 40X_1 + 30X_2 \le 1200 \qquad (2)$$
$$X_1 + X_2 \ge 50 \qquad (3)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- وبرسم قيود النموذج السابق (4)-(1) نجد أن القيدين (3),(2) قيود متعارضة وبالتالي منطقة الحلول الممكنة فئة خالية [٦] وبالتالي لا يمكن أستخدام أسلوب البرمجة الخطية في الحل.

شكل (٢٤-١)



ولكن أسلوب برمجة الهدف الخطية يمكن استخدامه للحصول على أفضل حل توافقي لهذا النوع من المشاكل كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية. ومن الرسم نجد أن أفضل حل توافقي

$$(X^*_1 = 0 \quad , \quad X^*_2 = 40 \quad , \quad Z^* = 1600)$$

وهذا عند النقطة B(0,40) حيث نجد أن هذا الحل يحقق القيد الهيكلي (2) ولا يحقق القيد الهيكلي (3) ولكن يكون أقرب ما يمكن من تحقيق القيد (3) حيث نجد أن النقطة B(0,40) تمثل أقرب نقطة لتحقيق القيد (3).

الحالة الثانية

وفي هذه الحالة يوجد أكثر من هدف multi-objectives ويرغب متخذ القرار في تحقيقها وفقاً لأولوياته.

وفي كثير من المشاكل تكون هذه الأهداف متعارضة ومتنافسة competitive and conflecting objectives هذا بالإضافة لوجود مستوى لكل هدف يأمل متخذ القرار في الوصول إليه (أو اقرب ما يمكن له) وعادة يسمي بالمستوى المرجو تحقيقه aspiration Level- وعادة يحدد هذا المستوى متخذ القرار. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٢٤-٢): تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنظفات A,B ويتطلب الإنتاج من A,B نوعين من مستلزمات الأنتاج I,II والجدول التالي يوضح متطلبات الوحدة الواحدة من A,B من كل مستلزم، كذلك المتاح من المستلزمين I,II وربح الوحدة الواحدة من A,B ، كذلك الوقت المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من A,B.

جدول (٢٤-١)

الكمية المتاحة من مستلزمات الإنتاج	متطلبات الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج		مستلزمات الإنتاج
	B	A	
1200	40	30	I
50	1	2	II
	50	30	ربح الوحدة الواحدة
	20	15	زمن إنتاج الوحدة بالدقائق

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب أنتاجها من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية:

١. تعظيم الربح من A,B.

٢. تصغير الزمن المطلوب للإنتاج.

الحل: يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية متعددة الأهداف على النحو التالي: إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A,B على الترتيب بالتالي يصبح النموذج على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Max.}Z_1 = 30X_1 + 50X_2 \qquad (1)$$

$$\text{Min.}Z_2 = 15X_1 + 20X_2 \qquad (2)$$

$$\text{S.T.} \quad 30X_1 + 40X_2 \le 1200 \qquad (3)$$

$$2X_1 + X_2 \le 50 \qquad (4)$$

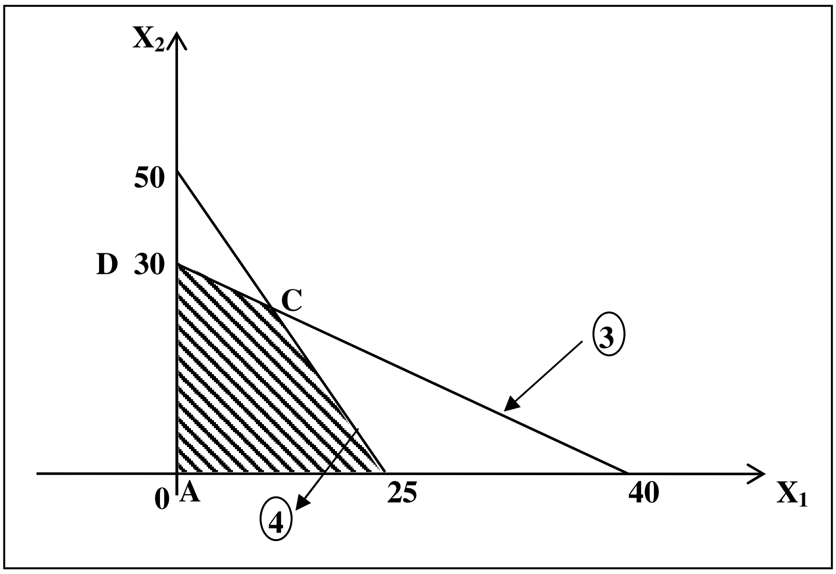
$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

والشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة ABCD للقيود (5)-(3) ولكن تواجهنا مشكلة وجود هدفين (2),(1) وهما هدفين متعارضين ومتنافسين أيضاً.

حيث الهدف (1) له أولوية في تحقيقة عن الهدف (2) أو بعبارة أخرى أهم من الهدف (2). وفي هذه الحالة، فإنه يمكن أستخدام أسلوب برمجة الهدف للحصول على أفضل حل توافقي – كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية.

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على أسلوب برمجة الهدف الخطية Linear Goal Prog. Technique . وفي الفصل التالي سوف نقدم أهم المفاهيم الأساسية لأسلوب برمجة الهدف الخطية.

شكل (٢٤-٢)



(٢٤-٢) مفاهيم أساسية Basic Concepts

يبنى أسلوب برمجة الهدف على بعض المفاهيم الأساسية في صياغة المشكلة وحلها أيضاً. وفيما يلي سوف نقدم أهم هذه المفاهيم التي سوف نتناولها في الفصول التالية [31,44,72]:

(١) الهدف العام Objective: الهدف العام هو عبارة عامة نسبياً Relatively General Statement تعكس رغبة متخذ القرار. ففي البرمجة الخطية مثلاً تكون رغبة متخذ القرار تعظيم دالة الربح او تصغير دالة التكاليف حيث تكون دالة الربح أو دالة التكلفة دوال خطية في المتغيرات القرارية.

(٢) المستوى المرجو تحقيقه aspiration Level: هو قيمة معينة مقترنه يرغبه متخذ القرار أو هو المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام acceptable Level of achievement of an Objective.

(٣) الهدف Goal: الهدف هو عبارة عن رغبة متخذ القرار ولكنها مقترنه بالمستوى المرجو تحقيقه أيضاً. وبهذا المفهوم للهدف يتطلب أن يكون لمتخذ القرار رؤية للمستوى المرجو تحقيقه وليس رغبة فقط وبهذا التعريف يصبح الهدف عبارة عن قيد في شكل متساوية أو متباينة كما سوف نوضح فيما بعد.

(٤) المتغيرات الانحرافية deviational Variables: يرتبط بالطرف الأيسر لكل هدف Goal وليكن الهدف (i) متغيرين أنحرافيين يشار إليهما بـ d_i^-, d_i^+ وهما عبارة عن الفرق بين المستوى المرجو تحقيقه وليكن (b_i) وما يتم تحقيقه فعلاً. وعادة قد يكون ما تم تحقيقه للهدف G_i مساوي للمستوى المرجو b_i في هذه الحالة يكون $d_i^- = d_i^+ = 0$. كذاك في حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أقل من المستوى المرجو في هذه الحالة يكون $d_i^- > 0$ ، $d_i^+ = 0$ ، بالمثل في حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أكبر من

المستوى المرجو في هذه الحالة يكون $d_i^+ > 0$ ، $d_i^- = 0$ ، وبالتالي فإن في جميع الحالات تكون $d_i^-, d_i^+ \geq 0$ كذلك وجود قيمة موجبة لأحداهما سواء d_i^- أو d_i^+ يؤدي إلى أن تكون قيمة المتغير الأخرى تساوي صفر أو بعبارة أخرى دائما حاصل ضرب d_i^- فى d_i^+ يساوى صفر، أو بعبارة أخرى:

$$d_i^- * d_i^+ = 0 \qquad (24.1)$$

حيث يسمى المتغير d_i^- بالانحراف السالب الذي يمثل المقدار الأقل من إنجاز الهدف under-achievement (أي الفرق بين المستوى المرجو وما يتم تحقيقه) كذلك يسمى المتغير d_i^+ بالانحراف الموجب الذي يمثل المقدار الأكبر عن إنجاز الهدف over-achievement (أي الفرق بين ما يتم تحقيقه والمستوى المرجو).

(٥) صياغة الهدف Goal Formulation: إذا اعتبرنا الدالة $f_i(x)$ ، حيث X متجه المتغيرات القرارية $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ ، b_i تشير إلى المستوى المرجو تحقيقه المرتبط بالدالة $f_i(x)$.

في هذه الحالة يكون لدينا ثلاث أمكانيات لصياغة الهدف رقم i وسوف نشير له بالرمز G_i ويمكن أن يأخذ الهدف أحد الحالات التالية:

1) $f_i(x) \leq b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ لا تزيد عن b_i

2) $f_i(x) \geq b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ تزيد عن b_i

3) $f_i(x) = b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ تساوي b_i

والجدول التالي يوضح صياغة الهدف رقم (i)

جدول (٢٤-٢)

المتغيرات الانحرافية التي يجب تصغيرها	صياغة الهدف في أسلوب برمجة الهدف	Goal
(24.2) d_i^+	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	1) $f_i(x) \le b_i$
(24.3) d_i^-	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	2) $f_i(x) \ge b_i$
(24.4) $(d_i^- + d_i^+)$	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	3) $f_i(x) = b_i$

وسوف نوضح في الفصول التالية أنه في المشاكل التي يتم صياغتها في شكل نموذج برمجة هدف فإنه يتم تحويل الأهداف العامة **Objectives** والقيود **Constraints** إلى أهداف **Goals**.

(٦) الأولويات المرتبة Preemptive Priorities: وبالنسبة للمشاكل متعددة الأهداف أو المشاكل ذات القيود المتعارضة فأستخدام أسلوب برمجة هدف يتطلب من متخذ القرار ضرورة ترتيب أهدافه **goals** وفقاً لأولوياتها.

(٧) القيود Constraints: في البرمجة الخطية لأبد أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود وهذا يعني عدم وجود قيود متعارضة. أما بالنسبة لأسلوب برمجة الهدف نميز بين نوعين من القيود، قيود لأبد أن تتحقق في الحل النهائي للمشكلة وهي ما تسمي بالقيود الصارمة **rigid constraints** ويوجد نوع آخر من القيود لا تتحقق في الحل النهائي ولكن يكون عدم تحققها أقل ما يمكن ويمكن تسميت هذا النوع من القيود بالقيود المرنة **elastic constraints**. وفي أسلوب برمجة الهدف يتم تحويل القيود (الصارمة والمرنة) إلى أهداف **goals** بإضافة المتغيرات الانحرافية.

(٨) الأولوية المطلقة absolute Priority: في العديد من المشاكل يرغب متخذ القرار في تحقيق القيود الصارمة rigid constraints وفي هذه الحالة يتم تمثيل هذه القيود في الأولوية الأولي first priority وتسمي في هذه الحالة أولوية مطلقة كما سوف نوضح فيما يلى.

(٩) دالة الإنجاز Achievement Function: هي عبارة عن متجه كل عنصر فيه يمثل دالة هدف عام في المتغيرات الانحرافية d^-, d^+ فقط تقيس مدى إنجاز الأهداف G_i وذلك وفقاً لأولويات، فإذا أشرنا لهذا المتجه بالرمز a فإن:

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, ..., a_k] \qquad (24.5)$$

حيث تعتبر الدالة a_{j-1} أهم من الدالة a_j حيث $j = 2,3,...,k$. وكل دالة خطية a_j دالة في المتغيرات الانحرافية d_i^-, d_i^+ ، حيث $i = 1,2,...,m$ ، $j = 2,3,...,k$.

وفي أسلوب برمجة الهدف يتم تصغير عناصر المتجه (a) وفقاً لأولوياتها Lexicographic Minimum a.

(١٠) أفضل حل توافقي Best Compromise Solution: هو الحل الذي يتم الحصول عليه باستخدام أسلوب برمجة الهدف وهو يمثل أفضل حل توافقي كما سوف نوضح ذلك في الفصول (٢٤-٥)، (٢٤-٦).

(٢٤-٣) صياغة المشكلة Formulation Problem

في هذا الفصل سوف نوضح كيفية صياغة بعض المشاكل الخطية في شكل نماذج برمجة هدف وذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٢٤-٣): تقوم أحدى شركات إنتاج دهانات الحوائط بإنتاج نوعين A,B من الدهانات معبأة في وحدات الوحدة الواحدة جالوت من المنتج. ويدخل في إنتاج كل وحدة من B أو A، ثلاثة أنواع من المواد الكيمائية I,II,III والجدول التالي يوضح احتياج الوحدة الواحدة من B أو A من كل مادة كيمائية I,II,III كذلك الكميات المتاحة من المواد الكيمائية بالكيلوجرام كذلك ربح الوحدة من B او A.

جدول (٢٤-٣)

ربح الجالوت الواحد بالجنيه	الكميات المطلوبة من كل مادة كيمائية لإنتاج الوحدة الواحدة من B أو A			نوع المنتج
	III	II	I	
80	1	4	4	A
100	0	2	5	B
	6	48	80	الكميات المتاحة يومياً بالكيلوجرام

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات المنتجة يومياً من B أو A التي تحقق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) لا يمكن زيادة المواد الكيماوئية المتاحة يومياً، (أو بعبارة أخرى القيود المرتبطة بالمواد الكيماوئية المتاحة يومياً تمثل قيود صارمة Rigid Constraints).

(٢) الربح اليومي من B أو A لا يقل عن 1000 جنيه.

(٣) تقليل استخدام المادة الكيمائية III بقدر الإمكان.

(٤) تقليل العدد الإجمالي للجالونات من B أو A معاً لظروف النقل أو مساحات التخزين.

بحيث يرى متخذ القرار أن المستوى المرجو لتحقيقه يساوي 10جالونات يومياً.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B على الترتيب. وفيما يلي سوف نوضح كيفية صياغة هذه المشكلة في شكل نموذج برمجة هدف خطي على النحو التالي:

١) من الجدول السابق نجد أنه بالنسبة للمواد الكيمائية القيود التالية يمكن تحويلها إلى أهداف Goals على النحو التالي:

$$4X_1 + 5X_2 \leq 80 \longrightarrow G_1 : 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 48 \longrightarrow G_2 : 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \qquad (2)$$

$$X_1 \qquad \leq 6 \longrightarrow G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \qquad (3)$$

وبما أن الأولوية الأولى لمتخذ القرار هو تحقيق القيود بالتالي فإن دالة الهدف العام المرتبطة بهذه الأولوية يصبح على النحو التالي:

$$\text{Min.}a_1 = g_1(d^-, d^+) = (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+) \qquad (4)$$

٢) بما أن الهدف والأولوية الثاني هو تحقيق ربح لا يقل عن 1000جنيه:

$$80X_1 + 100X_2 \geq 1000 \longrightarrow G_4 : 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000 \quad (5)$$

$$\text{Min.}a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_4^-$$

٣) وبما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو أستخدام أقل ما يمكن من المادة الكيمائية III:

$$Min.a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_3^+ \qquad (6)$$

٤) وبما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تقليل عدد الجالونات، فيصبح الهدف:

$$G_5 : X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \longrightarrow$$

$$Min.a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^+ \qquad (7)$$

مما سبق نجد ان دالة الإنجاز تصبح على النحو التالي:

$$\text{Lexic. Minimize } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$= \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), g_3(d^-, d^+), g_4(d^-, d^+)\} \qquad (8)$$

حيث d^- متجه المتغيرات الانحرافية السالبة، d^+ متجه المتغيرات الانحرافية الموجبة.

من (8)−(1) نجد ان نموذج برمجة الهدف تصبح على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_4^+), (d_3^+), (d_5^+)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.} \qquad & G_1 : 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\
& G_2 : 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \\
& G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
& G_4 : 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000 \\
& G_5 : X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \\
& X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5 \\
& (d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , i = 1,2,3,4,5
\end{aligned}$$

<u>مثال (٢٤-٤)</u>: تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات A,B من خلال ثلاثة ماكينات I,II,III والجدول التالي يوضح الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من A,B في كل ماكينة كذلك الزمن الشهري المتاح لتشغيل كل ماكينة في الشهر بالساعات.

جدول (٢٤-٣)

ثمن بيع الوحدة بالجنية	الزمن المطلوب بالساعة لإنتاج الوحدة الواحدة			المنتج
	III	II	I	
500	8	3	3	A
750	10	6	4	B
	700	620	500	الزمن المتاح بالساعة
	90	70	50	تكلفة الساعة الواحدة في كل ماكينة بالجنية

فإذا كان الطلب الشهري على المنتج A لا يقل عن 250 وحدة ومن B لا يزيد عن 400 وحدة. ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) تحقيق الطلب في السوق.

(٢) تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات I,II,III بحيث لا تزيد عن 10000

(٣) تصغير زمن التشغيل الإضافي Overtime باستخدام الماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة.

(٤) تعظيم إيرادات بيع الوحدات من A,B بحيث تزيد عن 125,000 جنيه.

صيغ المشكلة أعلاه كمشكلة برمجة هدف.

الحل: إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من المنتج i حيث $i = 1,2$ بأستخدام الماكينة j حيث $j = 1,2,3$ ، $X_{ij} \geq 0$.

من الجدول ووفقاً للأولويات نجد أن:

١) الأهداف المتعلقة بالطلب في السوق

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 250 \longrightarrow G_1 : X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 250 \quad (1)$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 400 \longrightarrow G_2 : X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 400 \quad (2)$$

$$\text{Min.}a_1 = g_1(d^-, d^+) = (d_1^+ + d_2^+) \qquad (3)$$

٢) وبما أن الهدف ذو الأولوية الثانية هو تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات الثلاثة:

$$50(3X_{11} + 4X_{21}) + 70(3X_{12} + 6X_{22}) + 90(8X_{13} + 10X_{23}) \leq 10{,}000$$

$$\longrightarrow$$

$$G_3 : 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10{,}000 \quad (4)$$

$$\text{Min.}a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^+ \qquad (5)$$

٣) وبما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو تصغير الزمن الإضافي للماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة.

$$3X_{12} + 6X_{22} \leq 620 \longrightarrow G_4 : 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620 \qquad (6)$$

وبما أن d_4^+ تشير إلى ساعات التشغيل الإضافية بالتالي فإن:

$$d_4^+ \leq 80 \longrightarrow G_5 : d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80 \qquad (7)$$

$$Min.a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_{41}^+ \quad (8)$$

٤) وبما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تعظيم الإيرادات بحيث تزيد عن 125,000 جنية.

$$500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \geq 125,000 \longrightarrow$$

$$G_6 : 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + d_5^- - d_5^+ = 125,000 \quad (9)$$

$$Min.a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^- \quad (10)$$

ومن (10)−(1) نجد أن نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij} بحيث $i = 1,2$, $j = 1,2,3$ التي تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$= \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^+), (d_{41}^+), (d_5^+)\}$$

S.T. $\quad G_1 : X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 250$

$$G_2 : X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 400$$

$$G_3 : 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10,000$$

$$G_4 : 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620$$

$$G_5 : d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80$$

$$G_6 : 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + d_5^- - d_5^+ = 125,000$$

$$G_7 : 3X_{11} + 4X_{21} + d_6^- - d_6^+ = 500$$

$$G_8 : 8X_{13} + 10X_{23} + d_7^- - d_7^+ = 700$$

$$X_{ij}, d_i^-, d_i^+, d_{41}^-, d_{41}^+ \geq 0$$

$$(d_i^-)(d_i^+) = 0 \qquad , \qquad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

$$(d_{41}^-)(d_{41}^+) = 0$$

(٢٤-٤) النموذج العام General Model

من الفصل السابق نخلص إلى أن الصياغة العامة لنموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_j بحيث $j = 1,2,...,n$ التي تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), ..., g_k(d^-, d^+)\} \qquad (24.6)$$

$$\text{S.T. } \; G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\; , \;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;\; , i = 1,2,..,m \, , j = 1,2,...,n \quad (24.8)$$

خصائص النموذج:

١- يوجد عدد k من الأولويات مرتبطة بعدد أكبر من أو يساوي k من الأهداف goals. جميع الدوال $g_j(d^-, d^+)$ ، $j = 1,2,...,n$ دوال خطية في المتغيرات الإنحرافيه d^-, d^+.

٢- جميع الأهداف العامة، والقيود يتم تحويلها إلى أهداف G_i، بحيث $i = 1,2,...,m$ الطرف الأيسر من كل منها دالة خطية في المتغيرات القرارية X_j بحيث $j = 1,2,...,n$ ، والمتغيرات الانحرافية d_i^-, d_i^+ كذلك ممكن أن يكون الهدف دالة خطية في المتغيرات الانحرافية بنفس الهدف والأهداف الأخرى أنظر G_5 بـ(7) في المثال السابق.

٣- نظراً لأن دوال الإنجاز $g_t(d^-, d^+)$ ، $t = 1,2,...,k$، والأهداف G_i ، $i = 1,2,...,m$ دوال خطية بالتالي فإنه يمكن تطويع طريقة السمبلكس لحل هذا النموذج. ويوجد طريقتين لتطويع طريقة السمبلكس لحل نماذج برمجة الهدف الخطية هما:-

أ) طريقة السمبلكس المعدلة

Modified Simplex Method [82,83]

ب) طريقة الحل المتتالي

Sequential (Iterative) Solution Method [104,82]

وفي حالة تضمن المشكلة متغيرين قراريين فقط فإنه يمكن حلها بيانياً أو بأحد الطريقتين المذكورتين أعلاه. وسوف نتناول في الفصل التالي حل مشكلة برمجة الهدف الخطية بيانياً، وفي الفصل التالي سوف نقدم طريقة الحل البياني.

كذلك سوف نقدم في الفصل (٢٤-٦) طريقة الحل المتتالي وفقاً لطريقة السمبلكس. حيث أنها تتميز بالآتي عن طريقة السمبلكس المعدلة [١٠]:

١- طريقة السمبلكس المعدلة تستخدم في حل المشاكل ذات الحجم الصغير والتي يمكن حلها يدويا، أما طريقة الحل المتتالي فتتيح أستخدامها في حالة المشاكل ذات الحجم الكبير.

٢- يمكن أستخدام برامج الحاسب المتوفرة لحل مشاكل البرمجة الخطية بأستخدام طريقة السمبلكس مثل Tora أو Maple في حالة أستخدام طريقة الحل المتتالي.

٣- أستخدام طريقة الحل المتتالي تتيح لمتخذ القرار أجراء تعديلات أثناء الحل على الأولويات أو الأوزان الترجيحية لـ d^-, d^+ داخل الأولوية الواحدة.

(٢٤-٥) طريقة الحل البياني Graphical Solution Method

في هذا الفصل سوف نقدم الحل البياني لمشكلة برمجة الهدف الخطية التي تتضمن متغيرين قراريين على الأكثر وذلك بهدف توضيح المفاهيم الأساسية لبرمجة الهدف مثل:

(١) المتغيرات الانحرافية.

(٢) الأهداف المرتبطة بالمستويات المرجو goals.

(٣) الأهداف objectives وفقاً للأولويات.

(٤) أفضل حل توافقي.

وذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٢٤-٤): شركة تقوم بإنتاج نوعين من الأثاث المكتبي الخشبي A,B من خلال خط إنتاج واحد بحيث تتطلب الوحدة الواحدة من المنتج A خمسة ساعات، والوحدة الواحدة من B أربعة ساعات في خط الإنتاج حيث أن المتاح أسبوعياً للخط 80 ساعة في الظروف العادية، كذلك ربح الوحدة من A يساوي 500 جنيه، ومن B يساوي 400 جنيه. كذلك إفادة إدارة التسويق أن الطلب الأسبوعي في السوق على المنتج B يزيد عن 30 وحدة أسبوعياً. ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

(١) عدم اللجوء إلى زمن تشغيل أضافي على خط الإنتاج.

(٢) تحقيق ربح أسبوعي لا يقل عن 10,000 جنيه أسبوعياً.

(٣) إشباع الطلب في السوق من المنتج B.

الحل: يمكن صياغة المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+),(d_2^-),(d_3^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 5X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (2)$$

$$G_2 : 500X_1 + 400X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10{,}000 \qquad (3)$$

$$G_3 : X_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;,\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\quad i = 1,2,3 \qquad (5)$$

حيث تشير:

d_1^- : زمن التشغيل الفائض (غير المستخدم) الأسبوعي على خط التشغيل

d_1^+ : زمن التشغيل الإضافي الأسبوعي على خط التشغيل

d_2^- : النقص في الربح المحقق عن 10,000 جنيه

d_2^+ : الزيادة في الربح المحقق عن 10,000 جنيه

d_3^- : مقدار النقص في العرض من B عن الطلب

d_3^+ : مقدار الزيادة في العرض من B عن الطلب

والشكل التالي يوضح الأهداف G_i، والمتغيرات الأنحرافية d_i^-, d_i^+ في النموذج (5)–(1).
فنجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} a^* = \{0,2000,10\} \\ X_1^* = 0 \qquad , \quad X_2^* = 20 \\ d_1^- = d_1^+ = 0 \;,\; d_2^- = 2000 \;,\; d_2^+ = 0 \;,\; d_3^- = 10 \;,\; d_3^+ = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

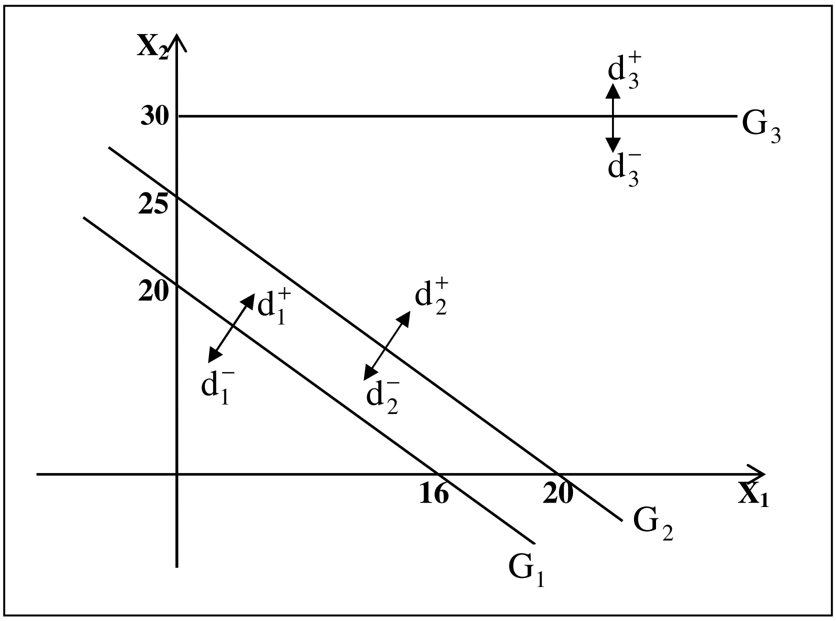
والحل في (6) يفيد أنه في حالة إنتاج عدد $X_2^* = 20$ وعدم إنتاج أي وحدة من A حيث $X_1^* = 0$ فإنه:

١ - يتم تحقيق الهدف الأول بعدم استخدام ساعات تشغيل إضافية ($d_1^+ = 0$).

٢- في ضوء (أو بأخذ الهدف الأول في الاعتبار) فإنه في هذه الحالة الربح الذي يتم تحقيقه يساوي 8000 أي بنقص يساوي 2000 جنيه عن المستوى المرجو $(d_5^- = 2000)$.

٣- الكمية التي يتم عرضها من B أي $X_2^* = 20$ تقل عن الطلب المتوقع في السوق بـ 10 وحدات $(d_3^- = 10)$.

شكل (٢٤-٣)



<u>مثال (٢٤-٥)</u>: أعتبر نموذج برمجة الهدف التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_3^+ + d_4^+), (d_1^+), (d_3^- + d_4^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : 4X_1 + 3X_2 + d_1^- - d_1^+ = 120 \qquad (2)$$

$$G_2 : 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 \qquad (3)$$

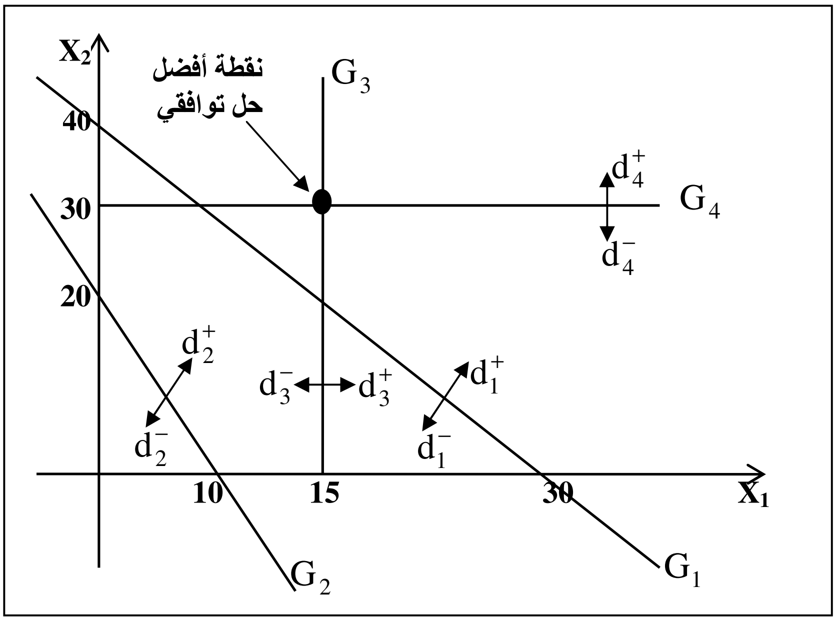
$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 15 \qquad (4)$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \qquad (5)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;,\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \qquad (6)$$

الحل: الشكل التالي يوضح الأهداف G_i، والمتغيرات الأنحرافية d_i^-, d_i^+.

شكل (٢٤-٤)



ومن الشكل نجد أن أفضل حل توافقي للنموذج أعلاه على النحو التالي:

$$a^* = \{0,30,0\}$$

$$X_1^* = 7.5 \quad , \quad X_2^* = 30$$

$$d_1^{-*} = 0 \;,\; d_1^{+*} = 30 \;,\; d_2^{-*} = 0 \;,\; d_2^{+*} = 40 \;,$$

$$d_3^{-*} = d_3^{+*} = 0 \;,\; d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0$$

مثال (٢٤-٥): تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأدوات الكهربائية المنزلية A,B، بحيث يدخل في إنتاج الوحدة الواحدة من A أو B مكون متاح منه 100 وحدة أسبوعياً، كذلك ربح الوحدة من A يساوي 500 جنيه ومن B يساوي 450 جنيه، فإذا كان الطلب في السوق على A لا يزيد عن 90 وحدة ومن B لا يزيد عن 80 وحدة.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من المنتج A,B بحيث يكون ربحه الأسبوعي أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- حل النموذج بيانياً وإيجاد الحل الأمثل.

٣- صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف.

٤- حل نموذج برمجة الهدف بيانياً.

٥- قارن بين الحل في (٢) ، والحل في (٤).

الحل: إذا فرضنا أن X_1 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A في الأسبوع، كذلك X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من B في الأسبوع.

١- فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Max.} Z = 500X_1 + 450X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le 100 \qquad (2)$$

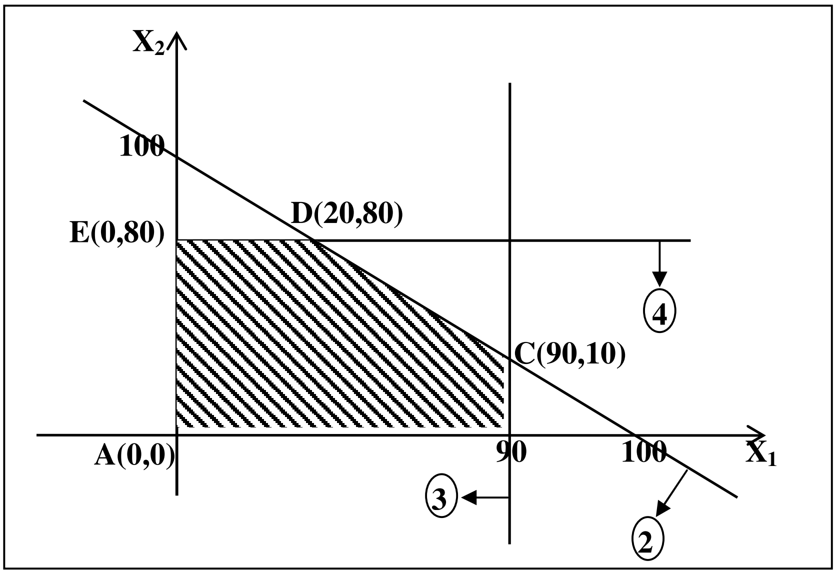
$$X_1 \le 90 \qquad (3)$$

$$X_2 \le 80 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

٢- الشكل التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج (5)-(1) ومن الشكل يتضح أن جميع القيود غير متعارضة ومنطقة الحلول الممكنة فئة مغلقة محدبة [٨].

شكل (٢٤-٥)



من الرسم يتضح أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 49,500 \quad , \quad X_1^* = 90 \quad , \quad X_2^* = 10$$

٣- ويمكن صياغة المشكلة السابقة كنموذج برمجة هدف على النحو التالي:

إذا فرضنا أن المستوى المرجو للربح 100,000جنيه مثلاً. وبالتالي يمكن تحويل الهدف العام في (1) إلى هدف مقترن بالمستوى المرجو وإضافة المتغيرات الانحرافية على النحو التالي:

$$G_1 : 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000$$

وبما أن القيود (4)-(2) يجب تحقيقها في شكل قيود أي تعتبر قيود صارمة، فأنه يمكن تحويلها إلى أهداف على النحو التالي:

$$G_2 : X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80$$

ويصبح الهدف ذو الأولوية الأولي على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+), (d_1^-)\}$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+), (d_1^-)\} \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100{,}000 \qquad (7)$$

$$G_2 : X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \qquad (8)$$

$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90 \qquad (9)$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80 \qquad (10)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0, i = 1,2,3,4 \qquad (11)$$

٤- والشكل التالي يوضح النموذج (11)-(6).

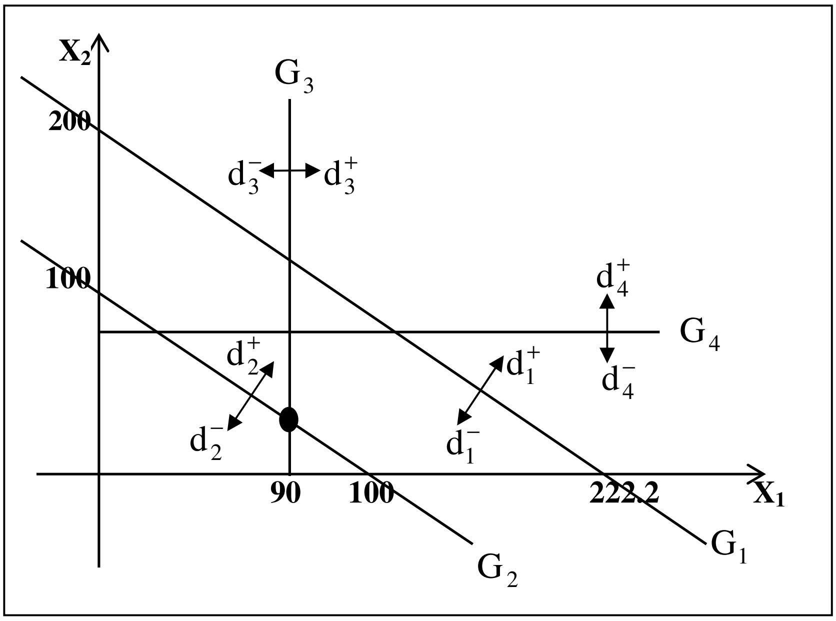
ومن الرسم يتضح أن أفضل حل توافقي هو:

$$a^* = \{0,50,500\}$$

$$X_1^* = 90 \quad , \quad X_2^* = 10 \quad , \quad Z^* = 49{,}500$$

٥- من (٢) ، (٤) يتضح أن الحل الأمثل بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية هو نفس الحل بأستخدام أسلوب برمجة الهدف ($X_1^* = 90$, $X_2^* = 10$) - وهذا يوضح كفاءة أسلوب برمجة الهدف.

شكل (٢٤-٦)



(٢٤-٦) طريقة الحل المتتالي

Sequential (Iterative) Solution method

في سنة ١٩٧٧ قدم كل من Dauer and Krueger الأسلوب التكراري Iterative Approach لحل مشاكل برمجة الهدف الخطية وغير الخطية أيضاً. وفي هذا الباب سوف نتناول هذا الأسلوب بالنسبة لمشاكل برمجة الهدف الخطية فقط.

فإذا أعتبرنا نموذج برمجة الهدف المكون من k من الأولويات على النحو التالي (أنظر الفصل (٢٤-٤)):

أوجد X بحيث تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } \mathbf{a} = \{g_1(d^-,d^+), g_2(d^-,d^+), \ldots, g_k(d^-,d^+)\} \qquad (24.9)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (24.10)$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (24.11)$$

حيث: $d^- = (d_1^-,\ldots,d_i^-)^T \ , d^+ = (d_1^+,\ldots,d_m^+)^T \ , X = (X_1,\ldots,X_n)^T$

ويمكن تلخيص طريقة الحل المتتالي فى حالة أعتبار المشكلة (24.11)-(24.9) مكونة من k من المشاكل الجزئية وحيدة الهدف المتداخله، بمعنى إذا اعتبرنا الهدف العام $g_t(d^-,d^+)$ ذو الأولوية t فإن النموذج وحيد الهدف الجزئي المرتبط بالأولوية t يأخذ في الاعتبار جميع المشاكل الجزئية السابقة ذات الأولويات الأهم من t وعددها $(t-1)$ بحيث $t = 2,\ldots,k$، ويكون أفضل حل توافقي للمشكلة (24.11)-(24.9) هو الحل للمشكلة الجزئية ذو الأولوية P_k.

وفيما يلي سوف نوضح الخطوات المتتالية لحل نموذج برمجة الهدف الخطية على النحو التالي:

الخطوة (١): ١- اعتبر المشكلة الجزئية ذو الأولوية الأولي:

$$\text{Min.} a_1 = g_1(d^-, d^+) \qquad (24.12)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , i \in P_1 \qquad (24.13)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (24.14)$$

حيث p_t تشير إلى الأولوية t.

٢- وبحل النموذج (24.14)-(24.12) باستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل وليكن a_1^*.

الخطوة (٢): ١- أعتبر النموذج الجزئي الثاني أي الذي يمثل الأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\text{Min.} a_2 = g_2(d^-, d^+) \qquad (24.15)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , i \in P_1, P_2 \qquad (24.16)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (24.17)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (24.18)$$

٢- وبحل النموذج (24.18)-(24.15) بطريقة السمبلكس نحصل على الحل وليكن a_2^*.

ويلاحظ أن النموذج الجزئي الثاني أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول G_i، $i \in p_1$، كذلك يضع حل النموذج الجزئي الأول a_1^* كقيد في النموذج الثاني كما هو واضح في القيد (24.17).

الخطوة (٣): ١- أعتبر النموذج الجزئي الثالث أي الذي يمثل الأولوية الثالثة على النحو:

$$\text{Min.}a_3 = g_3(d^-,d^+) \qquad (24.19)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1, P_2, P_3 \qquad (24.20)$$

$$g_1(d^-,d^+) = a_1^* \qquad (24.21)$$

$$g_2(d^-,d^+) = a_2^* \qquad (24.22)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (24.23)$$

٢- وبحل النموذج (24.23)-(24.19) نحصل على الحل a_3^*.

ويلاحظ أن النموذج الجزئي الثالث أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول، والثاني. كذلك يضع حل النموذجين الأول والثاني كقيود في (24.22),(24.21).

بالمثل يتم تكوين النماذج الجزئية المرتبطة بالأولويات $P_4, P_5, ..., P_{k-1}$.

الخطوة (k): ١- اعتبر النموذج الذي يمثل الأولوية الأخيرة P_k على النحو:

$$\text{Min.}a_k = g_k(d^-,d^+) \qquad (24.24)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1, P_2, ..., P_k \qquad (24.25)$$

$$g_j(d^-,d^+) = a_j^* \quad , \; j = 1,2,...,k-1 \qquad (24.26)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad (24.27)$$

٢- وبحل النموذج (24.27)-(24.42) نحصل على الحل a_k^*.

ملاحظات: ١- حل النموذج الأخير (24.27)-(24.42) يمثل أفضل حل توافقي للنموذج الأصلي (24.11)-(24.9) - ويتضمن جميع الأهداف G_i لنموذج برمجة الهدف الأصلي.

٢- حل النموذج الجزئي t حيث $t = 1,2,...,k$ يتضمن أهداف النماذج الجزئية ذو الأولوية الأهم من t أي يأخذ فى الإعتبار النماذج الجزئية السابقة $(1,2,....,t-1)$.

٣- كل نموذج جزئي يتم حله باستخدام طريقة السمبلكس.

٤- تمكن طريقة الحل المتتالي متخذ القرار من:

أ- إجراء تعديلات فى الأولويات.

ب- إجراء تعديلات فى المستويات المرجوة.

وسوف نوضح هذه الخطوات من خلال الأمثلة التالية.

<u>مثال (٢٤-٦)</u>: أعتبر نموذج برمجة الهدف الخطي التالي [١٠،104]:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(2d_1^+ + 3d_2^+), (d_3^-), (d_4^+)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (2)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (3)$$

$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (4)$$

$$G_4 : X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (5)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad (6)$$

بأستخدام طريقة الحل المتتالية أوجد أفضل حل توافقي.

الحل:

<u>الخطوة (١)</u>: ١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الأولي المرتبطة بالأولوية الأولى P_1 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a = g_1(d^-, d^+) = 2d_1^+ + 3d_2^+ \qquad (7)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (8)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (9)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad (10)$$

٢- وبحل النموذج (10)-(7) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل:

$$a_1^* = 0, \; X_1^* = 4, \; X_2^* = 6, \; d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0, \; d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad (11)$$

<u>الخطوة (٢)</u>: ١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية P_2 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^- \qquad (12)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (13)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (14)$$

$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (15)$$

$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \qquad (16)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (17)$$

ملحوظة: بما أن $g_1(d^-, d^+) = a_1^* \longrightarrow 2d_1^+ + 3d_2^+ = 0$

٢- وبحل النموذج (17)-(12) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$a_2^* = d_3^- = 18 \ , \ X_1^* = 4 \ , \ X_2^* = 6 \ , \ d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$
$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \ , \ d_3^{-*} = 18 \ , \ d_3^{+*} = 0 \qquad (18)$$

الخطوة (٣): ١- سوف نعتبر المشكلة الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة P_3 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_4^+ \qquad (19)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (20)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (21)$$

$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (22)$$

$$G_4 : X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (23)$$

$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \qquad (24)$$

$$d_3^- = 18 \qquad (25)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (26)$$

ملحوظة: بما أن $g_2(d^-, d^+) = a_2^* \longleftarrow d_3^- = 18$

٢- وبحل النموذج (26)-(19) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل:

$$a_3^* = d_4^+ = 0 \ , \ X_1^* = 4 \ , \ X_2^* = 6 \ , \ d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$
$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \ , \ d_3^{-*} = 18 \ , \ d_3^{+*} = 0 \ , \ d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0 \qquad (27)$$

ومن (27),(18),(11) نجد أن أفضل حل توافقي لنموذج برمجة الهدف (6)-(1) على النحو التالي:

$$a^* = \{0,18,0\} \;,\; X_1^* = 4 \;,\; X_2^* = 6 \;,\; d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$

$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \;,\; d_3^{-*} = 18 \;,\; d_3^{+*} = 0 \;,\; d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0$$

مثال (٢٤-٧): اعتبر نموذج برمجة الهدف التالي:

أوجد X بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-),(d_2^+),(d_3^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (2)$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \qquad (3)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \; i = 1,2,3 \qquad (5)$$

الحل:

الخطوة (١): ١- تكون المشكلة الجزئية المرتبطة بالأولوية الأولى على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = d_1^- \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (8)$$

٢- وبحل النموذج (8)-(6) باستخدام طريقة السمبلكس نجد:

$$X_1^* = 50, \;\; X_2^* = 0, \;\; a_1^* = 0 \qquad (9)$$

الخطوة (٢): ١- تكون المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_2 = d_2^+ \qquad (10)$$

$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \qquad (11)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (12)$$

$$d_1^- = 0 \qquad (13)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (14)$$

٢- وبحل النموذج (14)-(10) نجد أن الحل

$$X_1^* = 50, \;\; X_2^* = 0, \;\; X_3^* = 0, \;\; a_2^* = 0 \qquad (15)$$

<u>**الخطوة (٣):**</u> ١- تكون المشكلة الجزئية الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_3 = d_3^- \qquad (16)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \qquad (17)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (18)$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \qquad (19)$$

$$d_1^- = 0 \quad , \quad d_2^+ = 0 \qquad (20)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (21)$$

٢- وبحل النموذج (21)-(16) نحصل على الحل على النحو:

$$a^* = \{0,0,0\} \quad , \quad X_1^* = 23.33 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad X_3^* = 26.67$$

$$d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0 \; , \; d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad , \; d_3^{-*} = 0 \; , \; d_3^{+*} = 40$$

(٢٤-٧) تمرينات　　Exercises

(١) وضح أهم الاختلافات بين مفهوم الهدف العام objective والهدف goal.

(٢) ما هي الفروق الأساسية بين المتغيرات الانحرافية d^-, d^+ في أسلوب برمجة الهدف والمتغيرات المكملة والمصطنعة في أسلوب البرمجة الخطية.

(٣) لماذا حاصل ضرب المتغيرات الإنحرافية d_i^-, d_i^+ ، $i = 1,2,...$ فى أسلوب برمجة الهدف يساوى صفر أى أن:

$$(d_i^-) \cdot (d_i^+) = 0$$

(٤) لماذا يستخدم مفهوم "التصغير وفقاً للأولويات Lexicographically Minimization" في أسلوب برمجة الهدف بدلاً من استخدام "تعظيم أو تصغير Maximization أو Minimization" في أسلوب البرمجة الخطية.

(٥) تقوم أحدى الشركات بإنتاج المنتجين A,B والجدول التالي يوضح الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة (في التصنيع، والتجميع، والاختبار) ، كذلك الزمن المتاح في كل مرحلة للإنتاج وتكلفة الساعة الواحدة في الأسبوع.

وترغب الشركة في تحديد عدد الوحدات من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

(أ) تصغير الزمن الفائض في التصنيع أو التجميع أو الاختبار عن المتاح.

(ب) تحقيق ربح أسبوعي لا يقل عن 10,000 جنيه أسبوعياً.

(ج) بيع أكبر عدد ممكن من الوحدات المنتجة.

(د) تصغير ساعات الزمن الإضافي في التشغيل (تصنيع، تجميع، اختبار).

جدول (٢٤-٤)

ثمن بيع الوحدة بالجنية	زمن الإنتاج بالساعة			المنتج
	اختبار	تجميع	تصنيع	
3000	3	5	20	A
2000	1	3	12	B
	20	100	120	تكلفة الساعة الواحدة بالجنية
	50	120	240	عدد الساعات المتاحة أسبوعياً

أعتبر نماذج برمجة الهدف التالية من (٦) –(٩) – أوجد أفضل حل توافقي جبرياً ووضح ذلك بيانياً:

(٦)
$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (2d_2^+ + d_3^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 - 10X_2 + d_1^- - d_1^+ = 70 \\ & 3X_1 + 5X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ & 8X_1 + 6X_2 + d_3^- - d_3^+ = 120 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٧)
$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+), (d_2^-), (3d_1^- + d_3^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & -X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = -30 \\ & 5X_1 + 6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 80 \\ & X_2 + d_3^- - d_3^+ = 20 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٨)
$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_4^-), (d_1^- + 1.5d_2^-), (d_3^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + d_1^- - d_1^+ = 30 \\ & X_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \\ & 8X_1 + 12X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \\ & X_1 + 2X_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٩)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_3^-), (d_4^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ & 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 500 \\ & X_1 + d_3^- - d_3^+ = 300 \\ & 0.4X_1 + 0.3X_2 + d_4^- - d_4^+ = 240 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

أعتبر مشاكل البرمجة الخطية التالية من (١٠)-(١٢):

أ- أوجد الحل الأمثل باستخدام البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس.

ب- أوجد نموذج برمجة الهدف الخطي المناظر في (١٠) - ثم أوجد أفضل حل توافقي باستخدام طريقة الحل المتتالي.

ج- قارن بين حل المشكلة (١٠) في (أ)،(ب).

(١٠) أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\begin{aligned} \text{Min.} Z = 2\,X_1 + 5\,X_2 & \\ \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 & \geq 50 \\ 3X_1 + 8\,X_2 & \leq 240 \\ X_1\,, X_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

(١١)

$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = 5X_1 + X_2 + 3X_3 \\ &\text{S.T.} \quad 5X_1 - X_2 + X_3 \le 100 \\ &\qquad X_1 + 2X_2 \le 84 \\ &\qquad X_1 + 5X_3 \le 45 \\ &\qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(١٢)

$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = 7X_1 + 4X_2 + 12X_3 + X_4 \\ &\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \ge 200 \\ &\qquad 2X_1 + X_2 - X_3 \le 350 \\ &\qquad X_1 + 8X_4 \le 200 \\ &\qquad X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

(١٣) ينتج مصنع ثلاث أنواع من المنتجات A , B , C ، ربح الوحدة الواحدة 10 , 15 , 20 جنيه على الترتيب.

فإذا كانت الوحدة الواحدة من A,B,C تتطلب 7,5,8 ساعات عمل على الترتيب، والمتاح من ساعات التشغيل أسبوعياً يساوي 350ساعة أسبوعياً. كذلك يوجد أمكانية استخدام ساعات عمل إضافية بحيث لا تزيد عن 30 ساعة أسبوعياً، حيث يؤدي استخدام الزمن الإضافي إلى انخفاض ربح الوحدة من كل نوع بجنيه واحد، كذلك لا يقل الطلب الأسبوعي من إنتاج الأنواع الثلاثة عن 500 وحدة أسبوعياً.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات الأسبوعية من كل منتج بحيث يحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

أ- تعظيم الربح.

ب- تصغير الزمن الإضافي.

ج- تغطية الطلب في السوق.

(١٤) تقوم أحدى شركات إنتاج العصائر المحفوظة بإنتاج الأنواع التالية I,II,III بحيث يدخل في إنتاج كل نوع المواد A,B,C بحيث سعر بيع الوحدة (الوحدة تساوي نصف كيلو جرام) 5,10,15 جنيه على الترتيب.

والجدول التالي يوضح الكميات المتاحة بالكيلو جرام من A,B,C في إنتاج الوحدة الواحدة من I,II,III والكميات المتاحة أيضاً.

جدول (٢٤-٥)

الكميات المتاحة بالكيلوجرام	نسب المواد الداخلة في الوحدة الواحدة من I,II,III	المواد الداخلة
6000	أقل من 10% للمنتج II، أكثر من 50% لـ I	A
2000	أقل من 60% لـ III، أكثر من 20% لـ I	B
50	أقل من 50% لـ I، أكثر من 10% لـ II	C

المطلوب: ١- غير ممكن اللجوء إلى كميات إضافية من A أو B أو C واستغلال كل الكميات المتاحة.

٢- تعظيم الربح.

٣- أن يكون الإنتاج من I يمثل على الأقل 5000 وحدة.

الباب الخامس والعشرون

نماذج برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً

Chance-Constrained Goal Programming (CCGP) Models

(٢٥-١) مقدمة **Introduction**

(٢٥-٢) فئة الأهداف الأحتمالية **Probabilistic Goal's Set**

(٢٥-٣) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{b}_i$

(٢٥-٤) المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{a}_{ij}$

(٢٥-٥) أمثلة تطبيقية **Applied Examples**

(٢٥-٦) تمرينات **Exercises**

(٢٥-١) مقدمة Introduction

في الباب السابق تناولنا بشئ من التفصيل أسلوب برمجة الهدف الخطية (LGP) في الحالة اليقينية عندما تكون جميع معلمات النموذج (a_{ij}, b_i), $i = 1,2,...m$, $j = 1,2,...,n$ مقادير ثابتة constants. ولكن في كثير من المشاكل الفعلية تكون بيئة صناعة القرار بيئة عشوائية وبالتالي تكون بعض المعلمات عبارة عن متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة أو ممكن تقديرها.

والمشاكل القرارية التي يتم صياغتها في شكل نماذج برمجة هدف أحتمالية تتضمن نوعين من المخاطرة: النوع الأول يرجع إلى التعارض بين القيود والمتمثل في المتغيرات الأنحرافية، والنوع الثاني يرجع إلى العامل العشوائي والمتمثلة في مؤشر. ومن أهم مزايا أستخدام أسلوب برمجة الهدف المقيدة أحتمالياً للحصول على أفضل حل توافقي أنه يمكنا من قياس نوعي المخاطرة المذكورة، كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل (٢٥-٣).

وهذا الباب هو أمتداد للبابين الحادي والعشرون والثاني والعشرون لنماذج البرمجة الخطية الأحتمالية عندما تكون المعلمات a_{ij}, b_i متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة (أو ممكن تقديرها). ففي هذا الباب سوف نتناول نماذج برمجة الهدف الأحتمالية عندما تكون بعض أو كل المعلمات b_i أو a_{ij} متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة أو ممكن تقديرها.

ففي الفصل (٢٥-٢) سوف نقدم فئة الأهداف الأحتمالية من خلال تعريف المتغيرات الأنحرافية العشوائية random deviational variables $(\tilde{d}^-, \tilde{d}^+)$، وكيفية تحويل الأهداف الأحتمالية إلى أهداف يقينية مناظرة بأستخدام أسلوب (CCP) وتكوين نموذج برمجة هدف يقيني بحله يمكن الحصول على أفضل حل توافقي عند مستوى مأمونية معينة.

وفي الفصل (٢٥-٣) نقدم العلاقة بين أفضل حل توافقي للنموذج اليقيني المحول وأحتمالات المتغيرات الأنحرافية العشوائية عندما تكون المعلمات $(\tilde{b}_i)$ متغيرات عشوائية.

وفي الفصل (٢٥-٤) نعتبر المعلمات ($\tilde{a}_{ij}$) متغيرات عشوائية وكيفية تحويل نموذج برمجة الهدف الأحتمالي إلى نموذج يقيني مناظر عند مستوى مأمونية معين.

ومما هو جدير بالذكر أن جميع التحويلات الأحصائية المقدمة في البابين الحادي والعشرون والثاني والعشرون لتحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية سوف تستخدم في هذا الباب بالنسبة لتحويل الأهداف الأحتمالية **probabilistic goals** إلى أهداف يقينية مناظرة.

وكما ذكرنا في الفصل التاسع عشر أن نموذج البرمجة اليقينية هو الحالة الخاصة وأن الحالة العامة هو نموذج البرمجة الأحتمالية، بالمثل فأن نموذج برمجة الهدف اليقيني هو الحالة الخاصة وأن الحالة العامة هو نموذج البرمجة الأحتمالية، كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية.

وفي الفصل (٢٥-٥) نقدم أمثلة تطبيقية لنماذج برمجة الهدف الأحتمالية في بعض القطاعات المختلفة.

(٢٥-٢) فئة الأهداف الأحتمالية   Probabilistic Goal's Set

في كثير من المشاكل القرارية تكون بعض أو كل القيود متعارضة، وكما ذكرنا في الباب السابق فإن متخذ القرار في هذه الحالة (وجود قيود أو أهداف متعارضة) يبحث عن أفضل حل توافقي.

وعندما تكون بعض أو كل القيود أو الأهداف أحتمالية هنا يتم تحويل القيود المتعارضة الأحتمالية إلى أهداف أحتمالية probabilistic goals كما سنوضح ذلك في هذا الفصل والفصول التالية. وفي هذا الفصل سوف نقدم فئة الأهداف الأحتمالية في حالتين:

الحالة الأولي: عندما تكون بعض أو كل معلمات الطرف الأيمن للأهداف $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية مستقلة بتوزيعات أحتمالية معلومة.

الحالة الثانية: عندما تكون بعض أو كل المعلمات التي تمثل معاملات المتغيرات القرارية في الطرف الأيسر من الأهداف $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية مستقلة بتوزيعات أحتمالية معلومة.

<u>الحالة الأولي</u>: إذا فرضنا أن فئة القيود الأحتمالية probabilistic constraints على النحو التالي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i \qquad , \quad i = 1,2,....,m \qquad (25.1)$$

أو

$$\sum_{i=m+1}^{M} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i \qquad , \quad i = m+1, m+2,....,M \qquad (25.2)$$

حيث $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية بدالة كثافة أحتمال (أو دالة أحتمال) $f(\tilde{b}_i)$ ودالة توزيع تراكمية $F(\tilde{b}_i)$، $i = 1,2,....,M$، والمعلمات a_{ij} مقادير ثابتة، X_j تشير إلى المتغيرات

القرارية، $j = 1,2,...,n$. فأن فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة لفئة القيود في (25.1),(25.2) على النحو التالي:

$$G_i : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = \tilde{b}_i \qquad , \quad i = 1,2,....,M \quad (25.3)$$

حيث $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ تشير إلى المتغيرات الأنحرافية العشوائية **random deviational variables** السالبة والموجبة على الترتيب بحيث:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^- &= \text{Max.}\{0 \ , \ \tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j\} \\ \tilde{d}_i^+ &= \text{Max.}\{0 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j - \tilde{b}_i\} \end{aligned} \quad , \quad i = 1,2,....,M \qquad (25.4)$$

كذلك:

$$P_r(\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0) = P_r(\phi) = 0 \quad , \quad i = 1,2,....,M \qquad (25.5)$$

فإذا فرضنا أن مقياس المأمونية للقيد رقم (i) يساوى γ_i ، $i = 1,2,....,M$ (مقياس المأمونية هو أحتمال تحقق القيد)، فإنه يمكن أعادة صياغة القيود (25.1),(25.2) إلى قيود يقينية على النحو التالي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i) = \gamma_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) \ , \ i = 1,2,...,m \quad (25.6)$$

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge \tilde{b}_i) = \gamma_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(\gamma_i) \ , \ i = m+1,...,M \quad (25.7)$$

ملحوظة: ممكن أن تكون القيود في (25.6),(25.7) متباينات بدلاً من معادلات تأخذ الشكل $(\ge \gamma_i)$ أو $(\le \gamma_i)$.

والقيدين اليقينين أعلاه ممكن تحويلهما إلى أهداف يقينية على النحو التالي:

$$G_i : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad i = 1,2,....,m \quad (25.8)$$

$$G_i : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(\gamma_i) \ , \ i = m+1, m+2,....,M \ (25.9)$$

حيث:

$$d_i^- = \text{Max.} \begin{Bmatrix} 0 \quad , \quad F^{-1}(1-\gamma_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ , i = 1,2,..,m \\ 0 \quad , \quad F^{-1}(\gamma_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ , \ i = m+1,...,M \end{Bmatrix} (25.10)$$

$$d_i^+ = \text{Max.} \begin{Bmatrix} 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - F^{-1}(1-\gamma_i) \ , i = 1,2,..,m \\ 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - F^{-1}(\gamma_i) \ , \ i = m+1,...,M \end{Bmatrix} (25.11)$$

والشكلين التاليين يوضحان العلاقتين (25.9),(25.8) على الترتيب.

حيث تتحقق الشروط التالية بالإضافة إلى الشروط في (25.5):

$$\begin{aligned} P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0 \cup \tilde{d}_i^+ \geq 0) &= P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0) + P_r(\tilde{d}_i^+ \geq 0) \\ &= (1-\gamma_i) + \gamma_i = 1 \ , \quad i = 1,2,...,m \qquad (25.12) \\ &= P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0) + P_r(\tilde{d}_i^+ \geq 0) \\ &= \gamma_i + (1-\gamma_i) = 1 \ , \ i = m+1,...,M \quad (25.13) \end{aligned}$$

ولتحقيق العلاقات (25.1) أو أقرب ما يمكن منها فأن ذلك يتطلب:

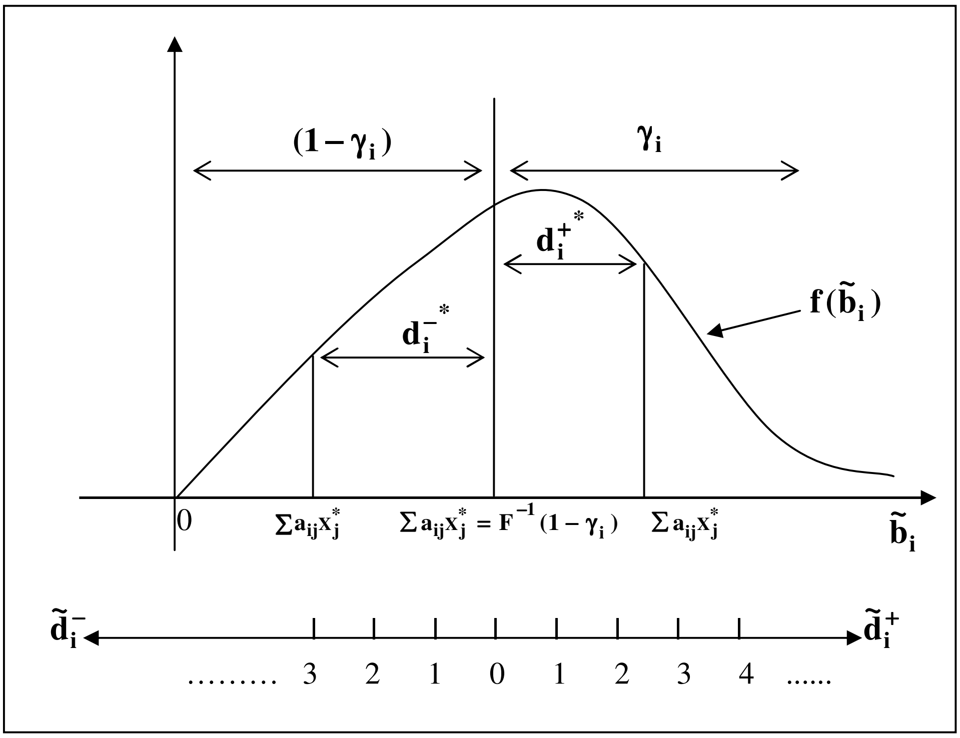
$$\text{Min.}\left(\sum_{i=1}^{m} d_i^{+}\right) \qquad (25.14)$$

وبالمثل لتحقيق العلاقات (25.2) أو أقرب ما يمكن منها فأن ذلك يتطلب:

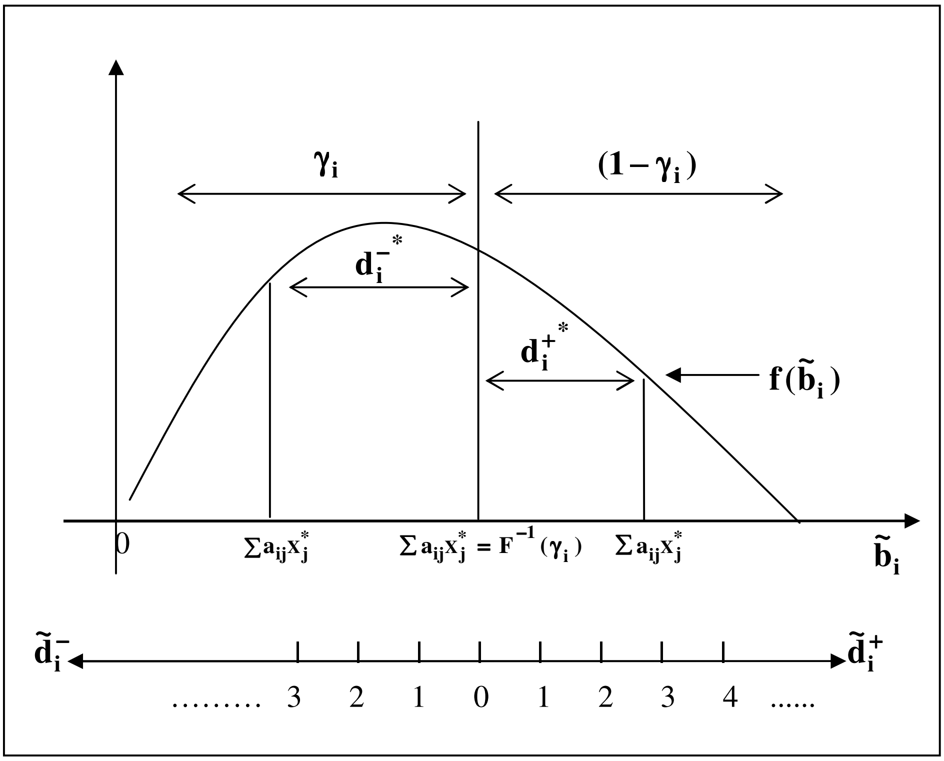
$$\text{Min.}\left(\sum_{i=m+1}^{M} d_i^{-}\right) \qquad (25.15)$$

ومن الأهداف اليقينية في (25.8),(25.9) ودالتي الأنجاز في (25.14),(25.15) يمكن تكوين نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر للأهداف الأحتمالية في (25.3) على النحو التالي:

شكل (٢٥-١): الأهداف الأحتمالية $i = 1,2,...,m$



شكل (٢٥-٢): الأهداف الأحتمالية $i = m+1, m+2, ..., M$



$$\text{Lexic.Min. } a = \{\sum_{i=1}^{m} d_i^+ + \sum_{i=m+1}^{M} d_i^-\} \tag{25.16}$$

S.T.

$$G_i: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad i = 1,2,....,m \tag{25.17}$$

$$G_i: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = F^{-1}(\gamma_i) \quad , \quad i = m+1,....,M \tag{25.18}$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \; , \; i = 1,2,...,M \; , \; j = 1,2,...,n \tag{25.19}$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطى يقيني يمكن حله بأحد الأساليب المقدمة في الباب السابق. وبحل النموذج أعلاه نحصل على أفضل حل توافقي للنموذج وليكون $(a^*, X^*, d^{-^*}, d^{+^*})$.

والشكلين (٢٥-١)،(٢٥-٢) يوضحان بيانياً علاقة قيمة المتغيرات الأنحرافية اليقينية $(d_i^{-^*}, d_i^{+^*})$ في أفضل حل توافقي بالمتغيرات الأنحرافية العشوائية (الأحتمالية) $\tilde{d}^-, \tilde{d}^+$.

والنظرية التالية تعطى العلاقة بين الحل الأمثل (X^*, d^{-^*}, d^{+^*}) والمتغيرات الأنحرافية العشوائية $\tilde{d}^-, \tilde{d}^+$ في الأهداف (25.3)، أو بعبارة أخري تعطي الأحتمالات الفعلية (مستويات المأمونية الفعلية) لتحقق (أو عدم تحقق) الأهداف.

نظرية (٢٥-١): إذا فرضنا الأهداف الأحتمالية في (25.3) المناظرة للقيود الأحتمالية (25.1),(25.2) وكان أفضل حل توافقي لنموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر في (25.16)-(25.19) يساوى (X^*, d^{-^*}, d^{+^*}) فأن:

١) إذا كان $d_i^{+^*} = 0, d_i^{-^*} > 0$ فأن أقل أحتمال يحقق القيد (i) أكبر من γ_i، $i = 1,2,...,m$، بمقدار $P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-^*})$ بحيث:

$$\text{Min.}\, P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^-) = P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-^*})$$

$$= \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)-d_i^{-^*}}^{F^{-1}(1-\gamma_i)} f(\tilde{b}_i)\; d\,\tilde{b}_i > 0 \;\;,\; i = 1,2,...,m \quad (25.20)$$

أو:

$$= \int_{F^{-1}(\gamma_i)-d_i^{-^*}}^{F^{-1}(\gamma_i)} f(\tilde{b}_i)\; d\,\tilde{b}_i > 0 \;,\; i = m+1,...,M \quad (25.21)$$

٢) وإذا كان $d_i^{-*} = 0, d_i^{+*} > 0$ فأن أقل أحتمال يحقق القيد (i) أقل من γ_i، بمقدار $P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*})$ بحيث:

$$\text{Min. } P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^+) = P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*})$$

$$= \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_i^{+*}} f(\tilde{b}_i) \quad d\,\tilde{b}_i > 0 \quad , \; i = 1,2,...,m \quad (25.22)$$

أو:

$$= \int_{F^{-1}(\gamma_i)}^{F^{-1}(\gamma_i)+d_i^{+*}} f(\tilde{b}_i) \quad d\,\tilde{b}_i > 0 \; , \; i = m+1,...,M \quad (25.23)$$

<u>الإثبات [51]:</u> بما أن كل دالة من الدالتين $P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ \le d_i^+)$ ، $P_r(0 \le \tilde{d}_i^- \le d_i^-)$ دالة متزايدة بالتواتر monotonic increasing function في المتغيرات الانحرافية اليقينية d_i^-, d_i^+ على الترتيب، بالتالي فإن:

أ) عندما $d_i^{-*} > 0$ فأن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}) = + > 0 \qquad (25.24)$$

وبما أن

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \le \tilde{b}_i) = \gamma_i + P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}) = + > \gamma_i \; , \; i = 1,2,...,m \; (25.25)$$

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \ge \tilde{b}_i) = \gamma_i - P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-*}) = + < \gamma_i , i = m+1,..,M \; (25.26)$$

ب) بالمثل عندما $d_i^{+*} > 0$ فأن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+*}) = + > 0 \qquad (25.27)$$

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \le \tilde{b}_i) = \gamma_i - P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ \le d_i^{+^*}) = + < \gamma_i \ \ ,\ i = 1,2,...,m \quad (25.28)$$

$$P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^* \ge \tilde{b}_i) = \gamma_i + P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+^*}) = + > \gamma_i , i = m+1,..,M \quad (25.29)$$

<u>**نتيجة (٢٥-١)**</u>: إذا كان $d_i^{-^*} = d_i^{+^*} = 0$ فإن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_i^- < d_i^{-^*}) = P_r(0 \le \tilde{d}_i^+ < d_i^{+^*}) = 0$$

وبالتالي فإن:

$$P_r(\tilde{d}_i^- \ge 0) = \gamma_i \qquad , \qquad i = 1,2,...,m \qquad (25.30)$$

$$P_r(\tilde{d}_i^+ \ge 0) = \gamma_i \qquad , \qquad i = m+1, m+2,...,M \qquad (25.31)$$

<u>**الحالة الثانية**</u>: إذا فرضنا أن فئة القيود الأحتمالية على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (25.32)$$

أو

$$\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge b_i \quad , \quad i = m+1, m+2,...,M \qquad (25.33)$$

حيث $\tilde{a}_{ij}$ عبارة عن متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة. فأن فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة للقيود أعلاه على النحو:

$$G_i :\quad \sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ \ ,\ i = 1,2,...,M \qquad (25.34)$$

حيث $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ تشير إلى المتغيرات الأنحرافية العشوائية السالبة والموجبة على الترتيب بحيث:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^- &= \text{Max.}\{0\ ,\ b_i - (\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j)\} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad i = 1,2,....,M \qquad (25.35) \\ \tilde{d}_i^+ &= \text{Max.}\{0\ ,\ (\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j) - b_i\} \end{aligned}$$

حيث تحقق $\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+$ نفس المعادلات في (25.5).

فإذا فرضنا أن مقياس المأمونية للقيد رقم (i) يساوي (γ_i)، $i = 1,2,..,m, m+1,..,M$ فأنه يمكن أعادة صياغة القيود (25.29),(25.30) على النحو التالي:

$$P_r(\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j \le \tilde{b}_i - \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j) = \gamma_i \longrightarrow$$

$$b_i - \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(\gamma_i) \quad , \quad j = 1,2,...,\grave{n} \qquad (25.36)$$

بالمثل

$$b_i - \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j = F^{-1}(1-\gamma_i) \quad , \quad j = \grave{n}+1, \grave{n}+2,...,n \qquad (25.37)$$

حيث F, F^{-1} تشير إلى الدالة التراكمية للمتغير العشوائي ($\sum_{j=1}^{\grave{n}} \tilde{a}_{ij}\, X_j$) والدالة العكسية لها على الترتيب. وفي معظم الحالات تكون كل من الدالة F, F^{-1} دالة غير خطية في المتغيرات القرارية X_j ، $j = 1,2,...,n$.

ويمكن تحويل القيود في (25.36),(25.37) إلى أهداف يقينية على النحو التالي:

$$G_i : \quad F^{-1}(\gamma_i) + \sum_{j=\grave{n}+1}^{n} a_{ij}\, X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,....,m \qquad (25.38)$$

ويكون المطلوب

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=1}^{m} d_i^{+}\right) \qquad (25.39)$$

بالمثل

$$G_i : \quad F^{-1}(1-\gamma_i) + \sum_{j=n+1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^{-} - d_i^{+} = b_i \ , i = m+1,..,M \qquad (25.40)$$

ويكون المطلوب

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=m+1}^{M} d_i^{-}\right) \qquad (25.41)$$

ويكون النموذج اليقيني المناظر على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.}\, a = \left\{\sum_{i=1}^{m} d_i^{+} + \sum_{i=m+1}^{M} d_i^{-}\right\}$$

S.T.

$$G_i : \quad F^{-1}(\gamma_i) + \sum_{j=n+1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^{-} - d_i^{+} = b_i \ , \quad i = 1,2,....,m$$

$$G_i : \quad F^{-1}(1-\gamma_i) + \sum_{j=n+1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^{-} - d_i^{+} = b_i \ , \ i = m+1,....,M$$

$$X_j, d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \ , \ (d_i^{-})(d_i^{+}) = 0 \ , \ i = 1,2,...,M \ , \ j = 1,2,...,n$$

ملحوظة: يتم حساب F أو F^{-1} بأستخدام نفس الطرق المقدمة في الباب (٢٢) بالنسبة للتوزيعات الأحتمالية السابق تقديمها في الباب ٢٢.

(٢٥-٣) المعلمات $\tilde{b}_i$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{b}_i$

في الباب الحادي والعشرون تم تقديم عدة تحويلات أحصائية لبعض القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{b}_i$ تمثل متغيرات عشوائية متقطعة أو متصلة.

وفي هذا الفصل سوف نستخدم نفس التحويلات الإحصائية المقدمة في الباب (٢١) ولكن بهدف أشتقاق نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر لفئة الأهداف الأحتمالية في (25.3) ثم حساب أحتمالات حدوث المتغيرات الأنحرافية العشوائية وذلك من خلال تقديم عدة أمثلة.

مثال (٢٥-١): أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالي التالي

$$\text{Max.}Z = 3X_1 + 5X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \le 8 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 4X_2 \ge 40 \qquad (3)$$

$$P_r(2X_1 + X_2 \le \tilde{b}_1) \ge 0.90 \qquad (4)$$

$$P_r(X_1 + X_2 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.80 \qquad (5)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (6)$$

بحيث: $\tilde{b}_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 5), \tilde{b}_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 8)$

المطلوب: (١) تحويل النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني بأستخدام أسلوب (CCP) عندما $\gamma_1 \ge 0.90 \ , \ \gamma_2 \ge 0.80$.

(٢) تحويل النموذج في (١) إلى نموذج برمجة هدف يقيني مع الأخذ في الأعتبار أن الأولوية الأولي لتحقيق الهدف objective في الدالة (1)، والأولوية الثانية لتحقيق القيدين (3),(2)، والأولوية الثالثة لتحقيق القيدين (5),(4) بقدر الأمكان.

ملحوظة: النموذج (6)-(1) نموذج برمجة أحتمالية ذو قيود متعارضة.

(٣) حل نموذج برمجة الهدف اليقيني في (٢) بأستخدام طريقة الحلول المتتالية مع توضيح الحل بيانياً.

(٤) حدد الأهداف G_i التي لم يتم تحقيقها مع تحديد المتغيرات الأنحرافية المناظرة لها.

(٥) بأستخدام نظرية (٢٥-١) أوجد أقل أحتمال لعدم تحقق الأهداف ثم أوجد قيمة مقياس صلاحية الحل.

الحل: بما أن $\tilde{b}_i$ يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين (λ_i, α_i). بالرجوع إلى الفصل (٢١-٢-٢) نجد أن $f(\tilde{b}_i)$ دالة كثافة الأحتمال للمتغير $\tilde{b}_i$، $F(\tilde{b}_i)$ هي الدالة التراكمية على النحو التالي:

$$f(\tilde{b}_i) = \lambda_i \exp[-\lambda_i(\tilde{b}_i - \alpha_i)] \quad , \ \lambda_i > 0 \ , \ \tilde{b}_i \geq \alpha_i \geq 0$$

$$F(\tilde{b}_i) = 1 - \exp[-\lambda_i(\tilde{b}_i - \alpha_i)] \longrightarrow$$

$$F(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j) = 1 - \exp[-\lambda_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \alpha_i)] \qquad (7)$$

وبتحويل القيدين (5),(4) إلى قيود يقينية بأستخدام الدالة التراكمية في (7) نجد أن:

$$P_r(2X_1 + X_2 \leq \tilde{b}_1) \geq 0.90 \longrightarrow 1 - F(2X_1 + X_2) \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$F(2X_1 + X_2) \leq 0.10 \longrightarrow 2X_1 + X_2 \leq F^{-1}(0.1) \longrightarrow$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5.053 \qquad (8)$$

بالمثل

$$P_r(X_1 + X_2 \geq \tilde{b}_2) \geq 0.80 \longrightarrow F(X_1 + X_2) \geq 0.80 \longrightarrow$$

$$X_1 + X_2 \geq 9.609 \qquad (9)$$

(١) ويصبح النموذج اليقيني المكافئ للنموذج الأحتمالي (6)-(1) على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
& \text{Max.}Z = 3\,X_1 + 5\,X_2 \\
& \text{S.T.} \quad 2\,X_1 + X_2 \le 8 \\
& \qquad 5\,X_1 + 4\,X_2 \ge 40 \\
& \qquad 2\,X_1 + X_2 \le 5.053 \\
& \qquad X_1 + X_2 \ge 9.609 \\
& \qquad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

ونلاحظ أن قيود النموذج اليقيني أعلاه قيود متعارضة ولكن يمكن تحويله إلى نموذج برمجة هدف يقيني على النحو التالي.

$$\begin{aligned}
\text{Lexic.Min.}a &= \{g_1(d^-,d^+), g_2(d^-,d^+), g_3(d^-,d^+)\} \\
&= \{(d_1^-),(d_2^+ + d_3^-),(d_4^+ + d_5^-)\}
\end{aligned}$$

S.T.

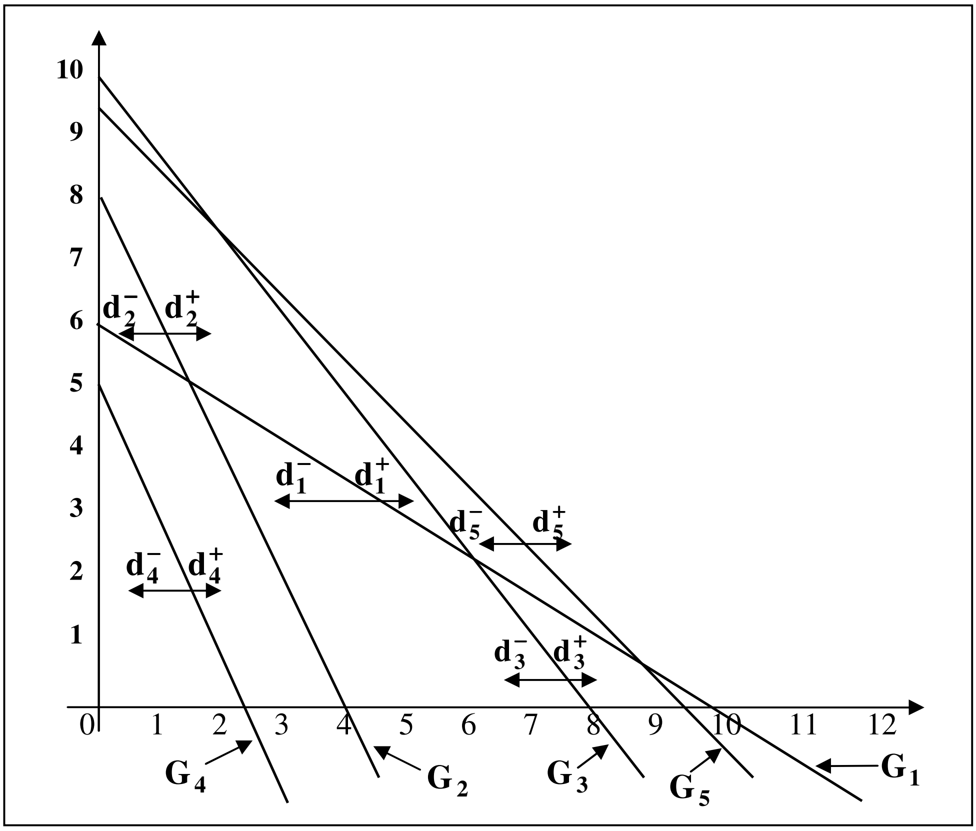
$$\begin{aligned}
& G_1: \quad 3\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 30 \qquad (10) \\
& G_2: \quad 2\,X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 8 \\
& G_3: \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 40 \\
& G_4: \quad 2\,X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 5.053 \\
& G_5: \quad X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 9.609 \\
& X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3,4,5
\end{aligned}$$

ملحوظة: الطرف الأيمن للهدف G_1 المساوي لـ (30) يتم أفتراضه عن طريق متخذ القرار (وتوجد بعض الأساليب التي يمكن بأستخدامها تحديد أفضل قيمة [68,81])،

حيث يتم أفتراض قيمة كبيرة ممكنة نظراً لأن العملية في (1) عملية تعظيم (Max.).

(٣) وبحل النموذج أعلاه بأستخدام طريقة الحلول المتتالية (أنظر الفصل (٢٤-٦)) نجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

شكل (٢٥-٣): يوضح الأهداف والمتغيرات الأنحرافية المناظرة لها



$$g_1(d^-,d^+)=0 \quad , \quad g_2(d^-,d^+)=2 \quad , \quad g_3(d^-,d^+)=4.45$$

$$X_1^*=0 \ , \quad X_2^*=10 \ , \ d_1^{-*}=0 \ , \ d_1^{+*}=20 \ , \ d_2^{-*}=0 \ , \ d_2^{+*}=2$$

$$d_3^{-*}=d_3^{+*}=0 \ , \ d_4^{-*}=0 \ , \ d_4^{+*}=4.45 \ , \ d_5^{-*}=0 \ , \ d_5^{+*}=0.39 \qquad (8)$$

(٤) بما أن $d_2^{+^*} = 2 \neq 0$ ، $g_2(d^{-^*}, d^{+^*}) = 2 \neq 0$ بالتالي فأن الهدف G_2 لم يتحقق وبما أن الهدف G_2 هدف يقيني فإن أقل مخاطرة ترجع لتعارض الأهداف بالنسبة للهدف G_2 تساوى 2 وحدة، بمعنى أن أفضل حل توافقي يتطلب زيادة الطرف الأيمن لـ G_2 بمقدار وحدتين، أما بالنسبة للهدف G_4 فأن $d_4^{+^*} = 4.45$ ، $g_3(d^{-^*}, d^{+^*}) = 4.45 \neq 0$ بالتالي فإن الهدف G_4 لم يتحقق والهدف G_4 هدف يقيني مناظر الهدف الأحتمالي، وبالتالي يمكن تحديد الأحتمال $P_r(0 \leq \tilde{d}_4^+ < d_4^{+^*})$ ثم تحديد أحتمال تحقق القيد.

(٥) وبتطبيق نظرية (٢٥-١) فأن أقل أحتمال لعدم تحقق القيود G_4 يمكن حسابة على النحو التالي:

$$P_r(0 \leq \tilde{d}_4^+ < d_4^{+^*}) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_4^{+^*}} f(\tilde{b}_1)\ d\tilde{b}_1 = \int_{5.053}^{9.503} f(\tilde{b}_1)\ d\tilde{b}_1 = 0.8993$$

وبالتالي فأن أحتمال تحقق القيد رقم (4) في الحل سوف نشير له بالرمز γ_1^* يكون على النحو التالي:

$$\gamma_1^* = P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \leq \tilde{b}_1) = \gamma_1 - 0.8993 = 0.9000 - 0.8993 = 0.0007$$

بالمثل:

$$\gamma_2^* = P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* \geq \tilde{b}_2) = \gamma_2 + \int_{F^{-1}(\gamma_2)}^{F^{-1}(\gamma_2)+d_5^{+^*}} f(\tilde{b}_2)\ d\tilde{b}_2$$
$$= 0.8 + 0.0646 = 0.8646$$

ومن الفصل (٢٣-٦) أيضاً نجد أن مقياس صلاحية الحل:

$$R = (\gamma_1^*)(\gamma_2^*) = (0.0007)(0.8646) = 0.00061 \qquad (9)$$

مثال (٢٥-٢): أعتبر المثال السابق ولكن تغير الأولويات بحيث تكون الأولوية الأولي لتحقيق القيدين (5),(4) والأولوية الثانية لتحقيق القيدين (3),(2) والأولوية الثالثة لتحقيق الهدف العام objective في (1). ثم قارن بين أحتمال صلاحية الحل في المثال السابق وأحتمال صلاحية الحل في هذا المثال،

الحل: في هذه الحالة يصبح متجه الإنجاز على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_4^+ + d_5^-),(d_2^+ + d_3^-),(d_1^-)\} \qquad (10)$$

وبحل نموذج برمجة الهدف في هذه الحالة نجد أن أفضل حل توافقي في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &a^* = \{4.56\ ,\ 3.17\ ,\ 5\} \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 9.61 \quad , \\ &d_1^{-*} = 0\ ,\ d_1^{+*} = 18.05\ ,\ d_2^{-*} = 0\ ,\ d_2^{+*} = 1.61\ ,\ d_3^{-*} = 1.56\ , \\ &d_3^{+*} = d_4^{-*} = 0 \quad , \quad d_4^{+*} = 4.56 \quad , \quad d_5^{-*} = d_5^{+*} = 0 \qquad (11) \end{aligned}$$

ومن الحل يتضح أن الهدف G_4 لم يتحقق حيث:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_4^+ < d_4^{+*}) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_i)}^{F^{-1}(1-\gamma_i)+d_4^{+*}} f(\tilde{b}_1)\ d\,\tilde{b}_1 \approx 0.8993$$

وبالتالي فأن أحتمال تحقق القيد رقم (4) في الحل في هذه الحالة على النحو:

$$\gamma_1^{**} = P_r(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j^* \le \tilde{b}_1) = \gamma_1 - 0.8993 = 0.0007$$

وصلاحية الحل في هذه الحالة تصبح على النحو التالي:

$$R = (\gamma_1^{**})(\gamma_2) = (0.0007)(0.80) = 0.000056$$

ومما سبق يتضح أنه للحصول على مقياس صلاحية ملائم لأبد من حدوث تغير بالنسبة للهدف G_4.

مثال (٢٥-٣): أعتبر نموذج البرمجة الخطية الأحتمالي التالي

$$\text{Max.}Z = 10\,X_1 + 15\,X_2 + 12\,X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.}\quad 4\,X_1 + 3\,X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1 \qquad (2)$$

$$-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge \tilde{b}_2 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

حيث: $\gamma_1 \ge 0.9\ ,\ \gamma_2 \ge 0.9\ ,\tilde{b}_1 \sim N(\mu = 50, \sigma = 2)\ ,\tilde{b}_2 \sim \chi^2_{(10)}$

المطلوب: ١- حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مناظر.

٢- حول النموذج اليقيني إلى نموذج برمجة هدف - ثم أوجد أفضل حل توافقي مع الأخذ في الأعتبار أن الأولوية الأولى لتحقيق القيدين (3),(2).

٣- أوجد أحتمال عدم تحقق القيود.

الحل: ١- بما أن $\tilde{b}_1$ متغير يتبع التوزيع المعتاد، من الفصل (٢١-٢-٣) نجد أن:

$$P_r(4\,X_1 + 3\,X_2 + X_3 \le \tilde{b}_1) \ge 0.9 \longrightarrow$$

$$P_r(Z \ge 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 - 25) \ge 0.9 \longrightarrow$$

من جدول توزيع الدالة التراكمية للتوزيع المعتاد القياسي بملحق (٢) نجد أن:

$$2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 - 25 \le -1.28 \longrightarrow 2\,X_1 + 1.5\,X_2 + X_3 \le 23.72 \quad (5)$$

بالنسبة للقيد (3) بما أن $\tilde{b}_2$ متغير يتبع توزيع $\chi^2_{(10)}$، من الفصل (٢١-٢-٤) وبأستخدام جدول توزيع الدالة التراكمية لتوزيع $\chi^2_{(10)}$ بملحق (٣) نجد أن:

$$P_r(-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3 \ge \tilde{b}_2) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$F(-5\,X_1 + 2\,X_2 + 2\,X_3) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$-5X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq F^{-1}(0.9) \longrightarrow -5X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 4.87 \quad (6)$$

ومن النموذج (4)-(1)، والقيدين (6),(5) يكون النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 10X_1 + 15X_2 + 12X_3$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 1.5X_2 + X_3 \leq 23.72$$
$$-5X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 4.87$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

٢- نموذج برمجة الهدف المناظر على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.}a = \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+)\}$$
$$= \{(d_2^+ + d_3^-), (d_1^-)\}$$

S.T.

$$G_1: \quad 10X_1 + 15X_2 + 12X_3 + d_1^- - d_1^+ = 200$$
$$G_2: \quad 2X_1 + 1.5X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 23.72$$
$$G_3: \quad -5X_1 + 2X_2 + 2X_3 + d_3^- - d_3^+ = 4.87$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3$$

وبحل النموذج اليقيني أعلاه نجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$X_1^* = 3.44 \quad , \quad X_2^* = 11.04 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad g_1(d^{-^*}, d^{+^*}) = 0$$
$$g_2(d^{-^*}, d^{+^*}) = 0 \quad , \quad d_1^{-^*} = d_1^{+^*} = 0 \quad , \quad d_2^{-^*} = 0.28 \quad , \quad d_2^{+^*} = 0$$
$$d_3^{-^*} = 0 \quad , \quad d_3^{+^*} = 0.01$$

وبما أن:

$$P_r(0 \le \tilde{d}_2^- < d_2^{-*}) = \int_{F^{-1}(1-\gamma_2)-d_2^{-*}}^{F^{-1}(1-\gamma_2)} f(\tilde{b}_2)\ d\,\tilde{b}_2 = \int_{23.44}^{23.72} f(\tilde{b}_1)\ d\,\tilde{b}_1 \approx 0 \longrightarrow$$

$$\gamma_1^* = \gamma_1 + \int_{23.44}^{23.72} f(\tilde{b}_1)\ d\,\tilde{b}_1 = 0.90$$

بالمثل:

$$\gamma_2^* = \gamma_2 + \int_{F^{-1}(\gamma_2)}^{F^{-1}(\gamma_2)+d_2^{+*}} f(\tilde{b}_2)\ d\,\tilde{b}_2 = 0.90 + 0 = 0.90$$

وبالتالي صلاحية الحل R حيث:

$$R = (\gamma_1^*)(\gamma_2^*) = (0.90)(0.90) = 0.81$$

(٢٥-٤) المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية

Random Parameters $\tilde{a}_{ij}$

في الباب الثاني والعشرون تناولنا بالتفصيل تحويل نموذج البرمجة الأحتمالية إلى نموذج برمجة يقينية مكافئ عندما تكون بعض أو كل المعلمات $\tilde{a}_{ij}$ تمثل متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة.

ويعتبر هذا الفصل أمتداد للباب الثاني والعشرون فهو يتناول نفس النماذج برمجة الهدف الأحتمالية عندما تكون $\tilde{a}_{ij}$ متغيرات عشوائية لها توزيعات أحتمالية معلومة، ولكن بهدف الحصول على نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر.

فإذا فرضنا أن القيود الأحتمالية على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,m \qquad (25.42)$$

$$\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j \ge b_i \quad , \quad i = m+1, m+2,\ldots\ldots,M \qquad (25.43)$$

فإذا أشرنا إلى الدالة التراكمية والدالة العكسية للمتغير العشوائي ($\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j$) بالرمز F, F^{-1} على الترتيب. ويمكن تحويل القيود الأحتمالية أعلاه إلى قيود يقينية بأستخدام (CCP) عند مستوى مأمونية γ_i على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + F^{-1}(\gamma_i) = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,m \qquad (25.44)$$

$$\sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j + F^{-1}(1-\gamma_i) = b_i \quad , \quad i = m+1, m+2,\ldots\ldots,M \qquad (25.45)$$

فإذا عرفنا فئة الأهداف الأحتمالية المناظرة للقيود (25.43),(25.42) على النحو:

$$\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = b_i \ , \ i = 1,2,.....,M \qquad (25.46)$$

$$\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \geq 0 \qquad (25.47)$$

$$\tilde{d}_i^- = b_i - \Big(\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j\Big) \quad , \quad i = 1,2,.....,M \qquad (25.48)$$

$$\tilde{d}_i^+ = \Big(\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j\Big) - b_i \quad , \quad i = 1,2,.....,M \qquad (25.49)$$

$$P_r(\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0) = P_r(\phi) = 0 \qquad (25.50)$$

$$P_r(\tilde{d}_i^- \geq 0 \cup \tilde{d}_i^+ \geq 0) = 1 \qquad (25.51)$$

كذلك يمكن الحصول على الأهداف اليقينية المناظرة من تحويل القيود اليقينية (25.45),(25.44) على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n'} \tilde{a}_{ij} X_j + F^{-1}(\gamma_i) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,.....,m \qquad (25.52)$$

ولتحديد أفضل حل توافقي للأهداف أعلاه فإن ذلك يتطلب:

$$\text{Min.} \sum_{i=1}^{m} d_i^+ \qquad (25.53)$$

بالمثل:

$$\sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} X_j + F^{-1}(1-\gamma_i) + d_i^- - d_i^+ = b_i \ , \ i = m+1,.....,M \qquad (25.54)$$

كذلك لتحديد أفضل حل توافقي للأهداف أعلاه فإن ذلك يتطلب:

$$\text{Min.}\sum_{i=1}^{m} d_i^- \qquad (25.55)$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر للأهداف (25.46) الأحتمالية على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.}\, a = \{g_1(d^-,d^+), g_2(d^-,d^+), \ldots\ldots, g_k(d^-,d^+)\}$$

S.T.

$$G_i:\quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} X_j + F^{-1}(\gamma_i) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,m$$

$$G_i:\quad \sum_{j=n+1}^{n} a_{ij} X_j + F^{-1}(1-\gamma_i) + d_i^- - d_i^+ = b_i \;, \;\; i = m+1,\ldots\ldots,M$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\;,\;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,\ldots,M \;,\;\; j = 1,2,\ldots,n$$

وفيما يلي سوف نقدم بعض الأمثلة توضح تحويل نموذج البرمجة الأحتمالية إلى نموذج برمجة يقينية ثم الحصول على أفضل حل توافقي.

مثال (٢٥-٤): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالي التالي:

$$\text{Max.}\tilde{H} = 14X_1 + \tilde{C}_2 X_2$$

$$\text{S.T.}\quad \tilde{a}_{11} X_1 + 5X_2 \geq 40$$

$$\tilde{a}_{21} X_1 + 4X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث: $\tilde{C}_2 \sim N(\mu = 10, \sigma = 2), \tilde{a}_{11} \sim N(\mu = 4, \sigma = 2), \tilde{a}_{21} \sim N(\mu = 3, \sigma = 1)$

المطلوب: (١) حول دالة الهدف الأحتمالية إلى قيد أحتمالي بمستوى مأمونية $\gamma = 0.9$ ثم تحويله إلى هدف أحتمالي.

(٢) حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية بمستويات مأمونية $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.9$ ثم تحويلهم إلى أهداف يقينية.

(٣) كون نموذج برمجة هدف يقيني مناظر للنموذج الأحتمالي ثم أوجد أفضل حل توافقي للنموذج ووضح ذلك بيانياً.

(٤) فسر النتائج في (٣) ثم أوجد صلاحية الحل.

الحل: (١) بما أن:

$$\tilde{H} = 14\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2$$

فإنه يمكن تحويل الدالة إلى قيد أحتمالي بأفتراض حد أدنى لدالة الهدف وليكن L وعادةً يفترض أن متخذ القرار يحدد هذا الحل، وفي هذا المثال نفترض أن $L = 100$، وبالتالي يمكن تحويل الدالة $\tilde{H}$ إلى قيد أحتمالي على النحو التالي:

$$P_r(14\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \geq 100) = 0.9 \rightarrow P_r\left(Z \geq \frac{100-14X_1-10X_2}{2X_2}\right) = 0.9 \rightarrow$$

$$\frac{100-14X_1-10X_2}{2X_2} = F^{-1}(0.10) \longrightarrow 14X_1 + 97.74X_2 = 100 \longrightarrow$$

$$G_1: \quad 14\,X_1 + 97.74X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100 \qquad (1)$$

(٢) يتم تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية على النحو التالي:

$$\tilde{a}_{11}\,X_1 + 5\,X_2 \geq 40 \longrightarrow P_r\left(Z \geq \frac{40-5X_2-4X_1}{2X_1}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

$$1.44\,X_1 + 5\,X_2 = 40 \longrightarrow G_2: \quad 1.44\,X_1 + 5\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \qquad (2)$$

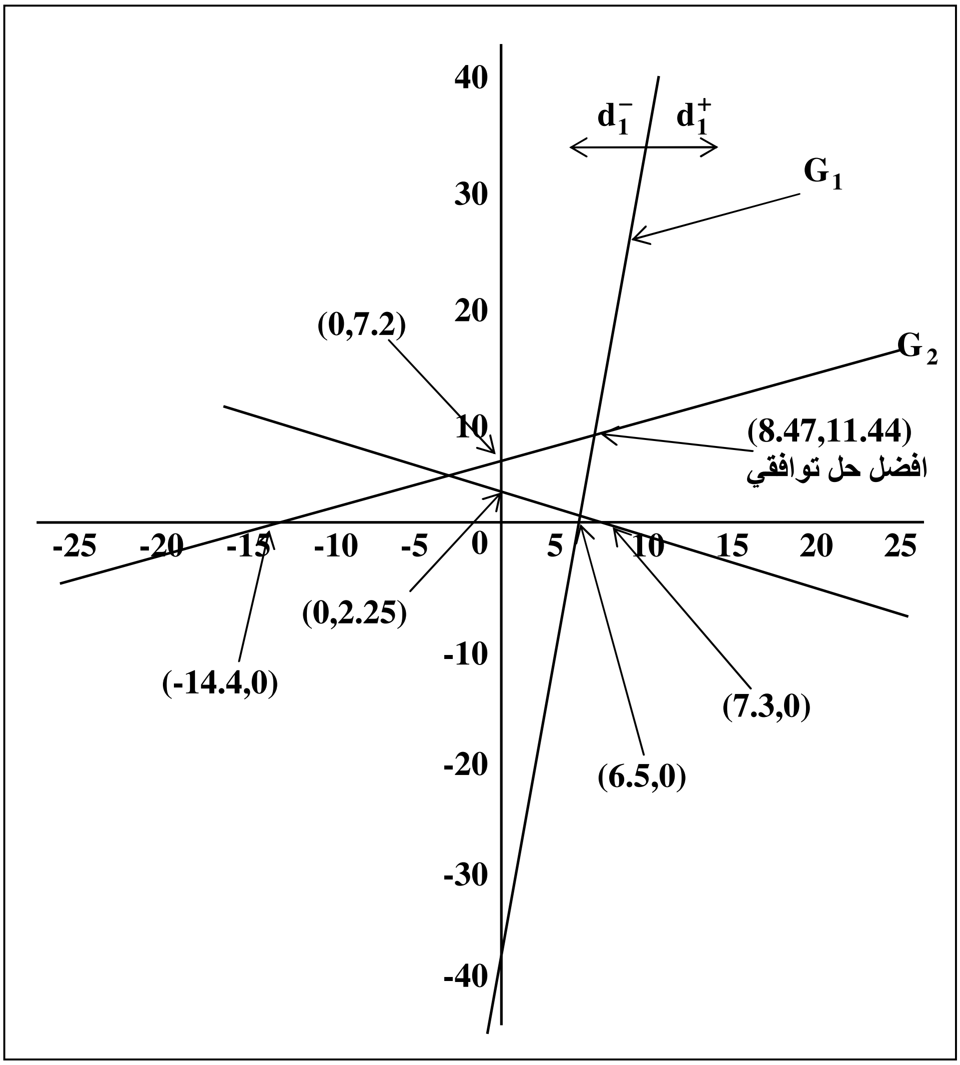
بالمثل:

$$\tilde{a}_{21}\,X_1 + 4\,X_2 \leq 12 \longrightarrow P_r\left(Z \geq \frac{12-4X_2-3X_1}{X_1}\right) = 0.9 \longrightarrow$$

$$1.72\,X_1 + 4\,X_2 = 12 \longrightarrow G_3: \quad 1.72\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 \qquad (3)$$

(٣) نموذج برمجة الهدف المناظر على النحو:

شكل (٢٥-٥)



$$\text{Lexic.Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^- + d_3^+)\}$$

S.T.

$$G_1 : \quad 14\,X_1 + 97.79\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100$$

$$G_2 : \quad 1.44\,X_1 + 5\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$G_3 : \quad 1.72\,X_1 + 4\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 12$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \;\;,\;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3$$

وبحل النموذج أعلاه نجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 8 \quad , \quad d_1^{-*} = 0 \quad , \quad d_1^{+*} = 681.92$$

$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad , \quad d_3^{-*} = 0 \quad , \quad d_3^{+*} = 20$$

$$g_1(d^{-*}, d^{+*}) = 0 \quad , \quad g_2(d^{-*}, d^{+*}) = 20$$

<u>مثال (٢٥-٥)</u>: أعتبر مثال (٢٢-٢) مع أعتبار أن $\gamma_1 \ge 0.95$ ، $\gamma_2 \le 0.90$.

المطلوب: ١- بأستخدام أسلوب (CCP) حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج برمجة هدف يقيني مناسب بحيث تكون الأولوية الأولي لتحقيق القيدين (3),(2) بقدر الإمكان.

الحل: ١- يمكن تحويل دالة الهدف Z إلى هدف على النحو التالي:

$$5\,X_1 + 2\,X_2 \ge L \longrightarrow G_1 : \quad 5\,X_1 + 2\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (1)$$

ويتم تحويل القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية ثم إلى أهداف يقينية على النحو التالي:

$$P_r(5\,X_1 + \tilde{a}_{12}\,X_2 \le 25) \ge 0.95 \longrightarrow 5\,X_1 + 6.28\,X_2 \le 25 \longrightarrow$$

$$G_2 : \quad 5\,X_1 + 6.28\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 25 \qquad (2)$$

بالمثل:

$$P_r(\tilde{a}_{21}\,X_1 + \tilde{a}_{22}\,X_2 \geq 10) \leq 0.90 \longrightarrow \frac{10 - 4\,X_1 - 2\,X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \geq -1.28 \longrightarrow$$

$$G_3 :\; -14.36\,X_1^2 - 2.36\,X_2^2 - 16\,X_1\,X_2 + 80\,X_1 + 40\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 100 \quad (3)$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^-), (d_1^-)\}$$

S.T.

$$G_1 :\quad 5\,X_1 + 2\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 50$$

$$G_2 :\quad 5\,X_1 + 6.28\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 25$$

$$G_3 :\; -14.36\,X_1^2 - 2.36\,X_2^2 - 16\,X_1\,X_2 + 80\,X_1 + 40\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 100$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;\;,\;\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3$$

ويلاحظ أن النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف غير خطى يمكن حله بأحد طرق حل نموذج برمجة الهدف غير الخطى بأسلوب الحل المتتالي [١٠،81].

مثال (٢٥-٦): أعتبر نموذج البرمجة الأحتمالية التالي:

$$\text{Min.}\tilde{C} = 3\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \longrightarrow \gamma \geq 0.90$$

$$\text{S.T.}\quad 8\,X_1 + 5\,X_2 \leq \tilde{b}_1 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.75$$

$$X_1 + \tilde{a}_3\,X_2 \geq 8 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.90$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

حيث: $\tilde{C}_2 \sim \text{Exp}(\lambda = 1, \alpha = 5),\; \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(30)},\; \tilde{a}_3 \sim N(\mu = 8, \sigma = 1)$

المطلوب: ١- حول دالة الهدف $\tilde{C}$ إلى دالة يقينية، كذلك حول القيود الأحتمالية إلى قيود يقينية بأستخدام أسلوب (CCP) عند مستويات المأمونية المناظرة.

٢- كون نموذج برمجة هدف يقيني مناظر بأفتراض أن الأولوية الأولي لتحقيق القيود ما أمكن.

الحل: إذا فرضنا أن $L = 25$ بالتالي فأن:

$$1\text{-}\ P_r(\tilde{C} \le L) = P_r(3X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \le 25) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$3X_1 + 7.303X_2 \le 25 \qquad (1)$$

$$2\text{-}\ P_r(8X_1 + 5X_2 \le \tilde{b}_1) \ge 0.75 \longrightarrow 1 - F(8X_1 + 5X_2) \ge 0.75 \longrightarrow$$

وبأستخدام ملحق (٣) نجد أن $F^{-1}(0.25) = 24.5$

$$8X_1 + 5X_2 \le 24.5 \qquad (2)$$

$$3\text{-}\ P_r(X_1 + \tilde{a}_3 X_2 \ge 8) \ge 0.90 \longrightarrow P_r\left(\tilde{a}_3 \ge \frac{8 - X_1}{X_2}\right) \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$1 - F\left(\frac{8 - X_1 - 8X_2}{X_2}\right) \ge 0.90 \longrightarrow \frac{8 - X_1 - 8X_2}{X_2} \le F^{-1}(0.1)$$

من ملحق (٢) نجد أن $F^{-1}(0.1) = -1.28$

$$X_1 + 9.28X_2 \ge 8 \qquad (3)$$

وبتحويل القيود (3)-(1) إلى أهداف، يصبح نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^-), (d_1^+)\}$$

$$\text{S.T.}$$

$$G_1: \quad 3X_1 + 7.303X_2 + d_1^- - d_1^+ = 25$$

$$G_2: \quad 8X_1 + 5X_2 + d_2^- - d_2^+ = 24.5$$

$$G_3: \quad X_1 + 9.28X_2 + d_3^- - d_3^+ = 8$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3$$

وبحل النموذج أعلاه نجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$X_1^* = 1.24 \quad , \quad X_2^* = 2.91 \quad , \quad g_1(d^{-^*}, d^{+^*}) = d_2^{+^*} = d_3^{-^*} = 0$$
$$g_2(d^{-^*}, d^{+^*}) = d_1^{-^*} = 0 \quad , \quad d_1^{+^*} = 20.29$$

(٢٥-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٢٥-١): تقوم أحدى الشركات لإنتاج الأثاث الخشبي من ضمن إنتاجها الترابيزات والكراسي من نفس نوع الخشب وعلى نفس خط الإنتاج. والجدول التالي يوضح متطلبات الإنتاج والكميات المتاحة من الخشب وساعات العمل ومساحة التخزين المتاحة لتخزين المنتجات.

جدول (٢٥-١)

الكميات المتاحة	متطلبات الوحدة الواحدة من كل منتج		المتطلبات
	كرسي	ترابيزة	
2000	5	10	ألواح الخشب (بالمتر المربع)
1500	4	5	ساعات التشغيل العادية
1000	0.5	2.0	مساحة التخزين (بالمتر المربع)

فإذا كان ربح كل من الترابيزة والكرسي $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ على الترتيب يمثل متغير معتاد بحيث:

$$\tilde{C}_1 \sim N(\mu_1 = 500, \sigma_1 = 5), \tilde{C}_2 \sim N(\mu_2 = 200, \sigma_2 = 2)$$

كذلك الطلب على كل من الترابيزات والكراسي $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ بحيث:

$$\tilde{S}_1 \sim Exp(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 50), \tilde{S}_2 \sim Exp(\lambda_2 = 1, \alpha_2 = 200)$$

فإذا كان غير مسموح لزيادة الخشب أو مساحة التخزين ولكن ممكن زيادة ساعات التشغيل بساعات إضافية. ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من الترابيزات والكراسى بحيث يكون ربحه أكبر ما يمكن وذلك بمستوى مأمونية $\gamma \geq 0.90$.

المطلوب: ١- حدد القيود الأحتمالية والقيود اليقينية للإنتاج.

٢- كون نموذج برمجة هدف أحتمالي مناسب، ثم حول الأهداف الأحتمالية إلى أهداف يقينية مناظرة بأستخدام أسلوب (CCP).

٣- حول الأهداف اليقينية غير الخطية إلى أهداف خطية ثم حل النموذج الخطي.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 عدد الترابيزات والكراسي التي يجب إنتاجها على الترتيب.

١- القيود اليقينية على النحو التالي:

الخشب $\longrightarrow 10\,X_1 + 5\,X_2 \le 2000$

ساعات التشغيل $\longrightarrow 5\,X_1 + 4\,X_2 \le 1500$

مساحة التخزين $\longrightarrow 2\,X_1 + 0.5\,X_2 \le 1000$

القيود الأحتمالية:

الربح $\longrightarrow \tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 \ge C$

حيث C الحد الأدنى للربح الذي يفترضه متخذ القرار وليكن (50,000).

قيود الطلب $\longrightarrow X_1 \ge \tilde{S}_1 \;,\quad X_2 \ge \tilde{S}_2$

٢- نموذج برمجة الهدف الأحتمالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث

$$\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(d_1^+ + d_3^+),(d_4^- + d_4^+),(d_2^-),(\tilde{d}_5^- + \tilde{d}_6^- + \tilde{d}_7^-)\} \qquad (1)$$

S.T

$$G_1: \quad 10\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000 \qquad (2)$$

$$G_2: \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1500 \qquad (3)$$

$$G_3: \quad 2\,X_1 + 0.5\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \qquad (4)$$

$$G_4: \quad \tilde{C}_1\,X_1 + \tilde{C}_2\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 50{,}000 \qquad (5)$$

$$G_5: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = \tilde{S}_1 \qquad (6)$$

$$G_6: \quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = \tilde{S}_2 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3,4,5,6 \quad (8)$$

$$\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \geq 0 \ , \ (\tilde{d}_i^- > 0 \cap \tilde{d}_i^+ > 0) = \phi \ , \ i = 5,6,7 \qquad (9)$$

٣- بالنسبة للهدف G_4 يتم تحويله إلى هدف يقيني على النحو التالي (راجع الفصل (٢٢-٣)):

$$P_r(\tilde{C}_1 X_1 + \tilde{C}_2 X_2 \geq 50{,}000) \geq 0.9 \longrightarrow$$

$$F\left(Z \leq \frac{50000 - (500X_1 + 200X_2)}{\sqrt{25X_1^2 + 4X_2^2}}\right) \leq 0.1 \longrightarrow$$

$$500\,X_1 + 200\,X_2 - 1.28\sqrt{25\,X_1^2 + 4\,X_2^2} \geq 50{,}000 \qquad (10)$$

حيث Z متغير معتاد قياسي.

والقيد اليقيني في (10) يتم تحويله إلى هدف يقيني مناظر على النحو التالي:

$$500\,X_1 + 200\,X_2 - 1.28\sqrt{25\,X_1^2 + 4\,X_2^2} + d_4^- - d_4^+ = 50{,}000 \quad (11)$$

ونلاحظ أن الهدف أعلاه غير خطي يمكن تحويله إلى هدف خطى بتقريب الدالة ($\sqrt{25\,X_1^2 + 4\,X_2^2}$) إلى دالة خطية حول نقطة ممكنة X^0. حيث أن التقريب الخطي للدالة $f(X)$ (دالة قابلة للتفاضل) على النحو التالي [81,141]:

$$f(X) \approx f(X^0) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X^0} (X_j - X_j^0) \qquad (12)$$

وبالتالي فإذا فرضنا أن النقطة $X^0 = (X_1^0 = 5, X_2^0 = 10)$

$$\begin{aligned} 500\,X_1 + 200\,X_2 - 1.28\sqrt{25\,X_1^2 + 4\,X_2^2} &\approx \\ & 4459.02 + 340(X_1 - 5) + 148.8(X_2 - 10) \\ & = 1271.02 + 340\,X_1 + 148.8\,X_2 \qquad (13) \end{aligned}$$

وبالتعويض بـ (13) في الطرف الأيمن للهدف (11) نجد أن الهدف غير الخطي يصبح هدف خطي بعد التقريب على النحو التالي:

$$G_4: \quad 340\,X_1 + 148.8\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 48{,}729 \qquad (14)$$

كذلك يمكن تحويل قيود الطلب الأحتمالية إلى قيود يقينية على النحو التالي (راجع الفصل (٢١-٢)).

$$P_r(\tilde{S}_1 \le X_1) \ge 0.90 \longrightarrow F_1(X_1) = 1 - e^{-\lambda_1(X_1-\alpha_1)} \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$X_1 \ge 51 \qquad (15)$$

بالمثل:

$$P_r(\tilde{S}_2 \le X_2) \ge 0.90 \longrightarrow F_2(X_2) = 1 - e^{-\lambda_2(X_2-\alpha_2)} \ge 0.90 \longrightarrow$$

$$X_2 \ge 198 \qquad (16)$$

وبتحويل القيدين (16),(15) إلى أهداف تصبح على النحو التالي:

$$G_5: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 51 \qquad (17)$$

$$G_6: \quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = 198 \qquad (18)$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر للنموذج الأحتمالي على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_1^+ + d_3^+ + d_2^-), (d_5^- + d_6^- + d_7^-)\}$$

S.T

$$G_1: \quad 10\,X_1 + 5\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000$$

$$G_2: \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1500$$

$$G_3: \quad 2\,X_1 + 0.5\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$$

$$G_4: \quad 340\,X_1 + 148.8\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 48{,}729$$

$$G_5: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 51$$

$$G_6: \quad X_2 + d_6^- - d_6^+ = 198$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3,4,5,6$$

وبحل النموذج أعلاه بأستخدام طريقة الحلول المتتالية نجد أن أفضل حل توافقي على النحو:

$$a^* = \{1 \ , \ 18\} \quad , \quad X_1^* = 33 \quad , \quad X_2^* = 333 \quad , \quad d_1^{-^*} = 5 \quad , \quad d_1^{+^*} = 0 \quad ,$$
$$d_2^{-^*} = 1 \quad , \quad d_2^{+^*} = 0 \quad , \quad d_3^{-^*} = 67.5 \quad , \quad d_3^{+^*} = 0 \quad , \quad d_5^{-^*} = 0 \quad ,$$
$$d_5^{+^*} = 12041.4 \quad , \quad d_6^{-^*} = 18 \quad , \quad d_6^{+^*} = 0 \quad , \quad d_7^{-^*} = 0 \quad , \quad d_7^{+^*} = 135$$

تطبيق (٢٥-٢): تقوم أحدى الشركات العقارية بتسويق منتجاتها عن طريق وسائل الأعلان بالداخل والخارج: التليفزيون، الجرائد. ووجدت إدارة التسويق أن زيادة عدد الأعلانات يؤدي إلى زيادة المبيعات وبالتالي زيادة العائد. فإذا كان تكلفة الأعلان الواحد بالتليفزيون يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع 50آلف وأنحراف معياري 5آلاف، كذلك تكلفة الأعلان في الجرائد يمثل متغير يتبع التوزيع الأسي بمعلمات $\lambda = 1$، $\alpha = 30$. فإذا كان المخصص في الفترة القادمة للأعلانات 6000آلف جنيه.

المطلوب: ١- كون نموذج برمجة أحتمالية مناسب يمثل المشكلة.

٢- أوجد نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر. بحيث لا يزيد المخصص للأعلانات عن 6000 آلف جنيه ولا يقل عدد الأعلانات عن 14 آلف، وذلك بمستويات مأمونية $\gamma_1 = 0.90 , \gamma_2 = 0.90$.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الأعلانات في التليفزيون وفي الجرائد على الترتيب، كذلك $\tilde{C}_1 \sim N(50,5) , \tilde{C}_2 \sim Exp(\lambda = 1, \alpha = 30)$

$$\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(d_1^-),(d_2^+ + d_3^+)\} \qquad (1)$$

S.T

$$G_1: \quad X_1\ X_2 + d_1^- - d_1^+ = 14 \quad \text{آلف أعلان} \qquad (2)$$

$$G_2: \quad \tilde{C}_1\ X_1 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 400 \quad \text{آلف جنيه} \qquad (3)$$

$$G_3: \quad \tilde{C}_2\ X_2 + \tilde{d}_3^- - \tilde{d}_3^+ = 200 \quad \text{آلف جنيه} \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

٢- من الأهداف G_2, G_3 نجد أنه يمكن تحويلها إلى قيود تحت أفتراض أن الحد الأعلى للتكلفة في التليفزيون 400 آلف، والجرائد 200 آلف (قيم أفتراضية يحددها متخذ القرار):

$$P_r(\tilde{C}_1\ X_1 \leq 400) = P_r\left(Z \leq \frac{400 - 50X_1}{5X_1}\right) \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$56.4\ X_1 + d_2^- - d_2^+ = 400 \qquad (5)$$

$$P_r(\tilde{C}_2\ X_2 \leq 200) = P_r\left(\tilde{C}_2 \leq \frac{200}{X_2}\right) \geq 0.90 \longrightarrow$$

$$32.303\ X_2 + d_3^- - d_3^+ = 200 \qquad (6)$$

ويصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_1^-),(d_2^+ + d_3^+)\}$$

S.T

$$G_1: \quad X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 14 \quad \text{آلف أعلان}$$

$$G_2: \quad 56.4\ X_1 + d_2^- - d_2^+ = 400 \quad \text{آلف جنيه}$$

$$G_3: \quad 32.303\ X_2 + d_3^- - d_3^+ = 200 \quad \text{آلف جنيه}$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3$$

وبحل النموذج نجد أن:

$$a^* = \{0\ ,\ 40370\} \quad , \quad X_1^* = 7810 \quad , \quad X_2^* = 6190 \quad , \quad d_1^{-*} = 0 \quad ,$$
$$d_1^{+*} = 0 \quad , \quad d_2^{-*} = 0 \quad , \quad d_2^{+*} = 40370 \quad , \quad d_3^{-*} = d_3^{+*} = 0$$

<u>تطبيق (٢٥-٣)</u>: في أحد البنوك التجارية، ترغب إدارة البنك في أفضل موازنة تخطيطية [١٠] أو بعبارة أخرى تحديد حجم المبالغ المخصصة في كل بند من البنود التي يخصصها البنك، حيث تعتبر الموازنة التخطيطية خلال فترة معينة أفضل موازنة من وجهه نظر متخذ القرار عندما تحقق التوازن بين العائد والمخاطر **balancing return and risk**. علماً بأن المتاح للبنك على النحو التالي [128]:

- 50 مليون جنيه رأس المال **capital**.
- 500 مليون جنيه حسابات جارية **checking accounts**.
- 200 مليون جنيه حسابات أدخارية **saving accounts**.

ويرغب البنك في تحديد المبالغ التي يجب تخصيصها في كل بند من البنود التالية:

١- المبالغ النقدية **cash**، وسوف نرمز لها بالرمز X_1 ،

٢- المبالغ المخصصة للأستثمارات قصيرة الأجل، وسوف نرمز لها بالرمز X_2 ،

٣- المبالغ المخصصة للأستثمارات خلال الفترة (1-5) سنوات، وسوف نرمز لها بالرمز X_3 ،

٤- المبالغ المخصصة للأستثمارات خلال الفترة (5-10) سنوات، وسوف نرمز لها بالرمز X_4 ،

٥- المبالغ المخصصة للأستثمارات طويلة الأجل (أكبر من 10 سنوات)، وسوف نرمز لها بالرمز X_5 ،

٦- المبالغ المخصصة للقروض في شكل أقساط، وسوف نرمز لها بالرمز X_6 ،

٧- المبالغ المخصصة للقروض التجارية، وسوف نرمز لها بالرمز X_7 ،

والجدول التالي يوضح النسب المالية لكل مخصص، كذلك وجود أو عدم وجود مخاطرة.

جدول (٢٥-٢)

البند j	نوع المخصص ورمزه	معدل العائد%	نسبة السيولة%	نسبة المشاركة في رأس المال%	وجود أو عدم وجود مخاطرة
1	المبالغ النقدية X_1	0.0	100.0	0.0	لا يوجد
2	أستثمار قصير الأجل X_2	4.0	99.5	0.5	لا يوجد
3	أستثمار (1-5) X_3	4.5	96.0	4.0	لا يوجد
4	أستثمار (5-10) X_4	5.5	90.0	5.0	لا يوجد
5	أستثمار (10+) X_5	7.0	85.0	7.0	لا يوجد
6	قروض أقساط X_6	10.5	0.0	10.0	يوجد
7	قروض تجارية X_7	9.2	0.0	10.0	يوجد

وتخضع سياسة البنك للقيود التالية:

القيد الأول: أن يكون مجموع المخصصات مساوي للمبالغ المتاحة للبنك من رأس المال والحسابات الجارية والحسابات الادخارية.

القيد الثاني: يجب أن تزيد المبالغ النقدية عن نسبة 15% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 5% من الحسابات الجارية.

القيد الثالث: إجمالي نسبة السيولة من المخصصات يجب أن تزيد عن نسبة 40% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 30% من الحسابات الادخارية.

القيد الرابع: يجب أن يزيد المبلغ لكل مخصص عن نسبة 3% من إجمالي المبالغ المتاحة.

القيد الخامس: يجب أن تزيد القروض التجارية عن 45% من أجمالي المبالغ المتاحة.

القيد السادس: الطلبات على الأستثمارات (ما عدا قصيرة الأجل) ولتكن $\tilde{S}_3, \tilde{S}_4, \tilde{S}_5$ على الترتيب تمثل متغيرات عشوائية بحيث $\tilde{S}_3 \sim N(\mu_3 = 25, \sigma_3 = 2)$,

$\tilde{S}_4 \sim N(\mu_4 = 30, \sigma_4 = 2)$, $\tilde{S}_5 \sim N(\mu_5 = 40, \sigma_5 = 1)$

وترغب إدارة البنك في تحديد المبلغ المخصص لكل بند بحيث تحقق الأهداف التالية:

الهدف الأول: تعظيم العائد من المخصصات.

الهدف الثاني: تصغير مجموع نسب المشاركة في رأس المال للمخصصات إلى رأس مال البنك.

الهدف الثالث: تصغير نسبة المخصصات للبنود التي يوجد بها مخاطرة إلى رأس مال البنك.

المطلوب: أ- تحديد القيود الأحتمالية ثم تحويلها إلى قيود يقينية بأستخدام أسلوب (CCP).

ب- كون نموذج برمجة هدف يقينية بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

١- تحقيق القيود كأولوية مطلقة.

٢- تعظيم العائد من المخصصات.

٣- تصغير مجموع نسب المشاركة في رأس المال للمخصصات إلى رأس المال.

٤- تصغير نسبة المخصصات للبنود التي يوجد بها مخاطرة إلى رأس مال البنك.

٥- تصغير المخاطرة الراجعة لعدم تحقيق الأستثمارات (ما عدا قصيرة الأجل) التي ترجع للعامل العشوائي.

الحل: إذا فرضنا أن المتغيرات القرارية هي $X_1 - X_7$ كما هي معرفة بالجدول السابق.

القيود الأحتمالية: $X_3 \geq \tilde{S}_3 \ , \ X_4 \geq \tilde{S}_4 \ , \ X_5 \geq \tilde{S}_5$

ويمكن تحويل هذه القيود إلى قيود يقينية عند مستوى مأمونية $\gamma \geq 0.90$ لتصبح على النحو التالي:

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_3 - 25}{2}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_3 \geq 27.56 \qquad (1)$$

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_4 - 30}{2}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_4 \geq 32.56 \qquad (2)$$

$$P_r\left(Z \leq \frac{X_5 - 40}{1}\right) \geq 0.90 \longrightarrow X_5 \geq 41.28 \qquad (3)$$

وبتحويل القيود (3)−(1) إلى أهداف تصبح على النحو التالي:

$$G_1: \quad X_3 + d_1^- - d_1^+ = 27.56 \qquad (4)$$

$$G_2: \quad X_4 + d_2^- - d_2^+ = 32.56 \qquad (5)$$

$$G_3: \quad X_5 + d_3^- - d_3^+ = 41.28 \qquad (6)$$

ويكون المطلوب:

$$\text{Min.}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i^-\right) \qquad (7)$$

القيود التي تخضع لسياسة البنك وتحويلها إلى أهداف على النحو التالي:

<u>القيد الأول:</u>

$$\sum_{j=1}^{7} X_j = (50 + 500 + 200) = 750 \longrightarrow$$

وبتحويله إلى هدف يصبح على النحو:

$$G_4: \quad \sum_{j=1}^{7} X_j + d_4^- - d_4^+ = 750 \qquad (8)$$

ويكون المطلوب:

$$\text{Min.}(d_4^- + d_4^+) \qquad (9)$$

<u>القيد الثاني:</u>

$$X_1 \geq 0.15(500) + 0.05(200) \longrightarrow X_1 \geq 85.00 \longrightarrow$$

$$G_5: \quad X_1 + d_5^- - d_5^+ = 85.00 \tag{10}$$

$$\text{Min.}(d_5^-) \tag{11}$$

<u>القيد الثالث:</u>

$$1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.9X_4 + 0.85X_5 \geq 0.40(500) + 0.3(200)$$

$$\longrightarrow 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4 + 0.85X_5 \geq 80.00 \longrightarrow$$

$$G_6: \quad 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4 + 0.85X_5 + d_6^- - d_6^+ = 80 \tag{12}$$

$$\text{Min.}(d_6^-) \tag{13}$$

<u>القيد الرابع:</u>

$$G_7 - G_{13}: \quad X_j + d_{j+6}^- - d_{j+6}^+ = 22.5 \quad , \ j = 1,2,...,7 \tag{14}$$

$$\text{Min.}\left(\sum_{j=1}^{7} d_{j+6}^-\right) \tag{15}$$

<u>القيد الخامس:</u>

$$X_7 \geq 0.45(50 + 500 + 200) \longrightarrow X_7 \geq 337.5 \longrightarrow$$

$$G_{14}: \quad X_7 + d_{14}^- - d_{14}^+ = 337.5 \tag{16}$$

$$\text{Min.}(d_{14}^-) \tag{17}$$

<u>تحويل الأهداف المطلقة إلى أهداف نسبية:</u>

إذا فرضنا أن C_1, t_1, t_2 هي قيمة أعلى عائد يحدده متخذ القرار، وكل من t_1, t_2 هي قيمة أقل مجموع نسب المشاركة في رأس المال للمخصصات إلى رأس مال البنك، وأقل قيمة لنسبة المخصصات للبنود التي يوجد بها مخاطرة إلى رأس المال على الترتيب.

بالتالي فإن:

$$G_{15}: \quad 0.04X_2 + 0.045X_3 + 0.055X_4 + 0.07X_5 + 0.105X_6 + 0.092X_7 + d_{15}^- - d_{15}^+ = C_1 \tag{18}$$

$$\text{Min.}(d_{15}^-) \tag{19}$$

$$G_{16}: \quad \frac{1}{50}\{0.005X_2 + 0.004X_3 + 0.0X_4 + 0.075X_5 + 0.10X_6 + 0.10X_7 + d_{16}^- - d_{16}^+ = t_1 \tag{20}$$

$$\text{Min.}(d_{16}^+) \tag{21}$$

$$G_{17}: \quad \frac{1}{50}\{X_6 + X_7\} + d_{17}^- - d_{17}^+ = t_2 \tag{22}$$

$$\text{Min.}(d_{17}^+) \tag{23}$$

من (23)-(4) فإن نموذج برمجة الهدف اليقيني المناظر وفقاً للأولويات على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_6^- + \sum_{j=1}^{7} d_{j+6}^- + d_{14}^-)\ ,\ (d_{15}^-)\ ,\ (d_{16}^+)\ ,\ (d_{17}^+)\ ,\ (\sum_{i=1}^{3} d_i^-)\}$$

S.T

$$G_1 - G_{17}$$

$$X_j, , d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,17$$

تطبيق (٢٥-٤): تقوم أحدى أعادة دوران المخلفات الصلبة (مثل الورق، القمامة، قش الأرز، ... الخ) بإعادة تدوير الورق السابق أستخدامه، حيث عملية أعادة تدوير الورق تؤول إلى إنتاج نوعين من الورق A (أقل جودة)، والنوع B (أعلى جودة). والجدول التالي يوضح متطلبات الطن الواحد من A,B من الورق من المواد المعالجة I,II بالكيلوجرام ومن مخلفات الورق بالطن كذلك سعر بيع الطن الواحد من A,B، وتكلفة الوحدة الواحدة من كل مادة من المواد المعالجة.

فإذا كان تجميع وفرز مخلفات الورق يمثل متغير يتبع التوزيع المعتاد، وسوف نرمز له بالرمز $\tilde{C}$ حيث $\tilde{C} \sim N(\mu = 100, \sigma = 5)$.

جدول (٢٥-٣)

أنواع المنتجات	متطلبات الطن الواحد من المنتجات من المواد المعالجة، ومخلفات الورق، وساعات التشغيل			مخلفات الورق	ربح الوحدة بالجنيه
	المادة المعالجة الأولى (بالكيلوجرام)	المادة المعالجة الثانية (بالكيلوجرام)	ساعات التشغيل		
A	20	0	20	2	1200
B	50	20	30	3	5000
المتاح	2000	1200	1000	$\tilde{C}$	
التكلفة بالجنيه	50	80			

فإذا كان متخذ القرار يرغب في تحديد الكميات التي يتم إنتاجها من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

١- تعظيم الربح من عملية أعادة دوران المخلفات.

٢- أن تكون المخلفات المتبقية بدون أجراء عملية أعادة الدوران أقل ما يمكن.

٣- عدم زيادة المواد المعالجة عن الكميات المتاحة، كذلك عدم زيادة عدد ساعات التشغيل المتاحة.

٤- كون نموذج برمجة هدف يقيني مناسب.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هما الكميات (بالطن) التي يجب إنتاجها من A,B على الترتيب.

القيود:

المادة المعالجة الأولي $\longleftarrow 20\,X_1 + 50\,X_2 \le 2000$

$$G_1: \quad 20\,X_1 + 50\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000 \qquad (1)$$

بالمثل:

$$G_2: \quad 20\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1200 \longleftarrow \text{المادة المعالجة الثانية} \qquad (2)$$

$$G_3: \quad 20\,X_1 + 30\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \longleftarrow \text{ساعات التشغيل} \qquad (3)$$

$$G_4: \quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + \tilde{d}_4^- - \tilde{d}_4^+ = \tilde{C} \longleftarrow \text{المخلفات} \qquad (4)$$

الأهداف: ١- بالنسبة للربح

$$200\,X_1 + 950\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = R$$

ملحوظة: R هي قيمة الربح الذي يرغب متخذ القرار في تحقيقه وليكن 400,000 جنيه، بالتالي فإن:

$$G_5: \quad 200\,X_1 + 900\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = 400{,}000 \qquad (5)$$

وبتحويل الهدف الأحتمالي في (4) إلى هدف يقيني عند مستوى مأمونية $\gamma \ge 0.9$

$$G_4: \quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 93.6 \qquad (4')$$

ويصبح النموذج اليقيني على النحو التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_5^-),(d_4^-),(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+)\}$$

S.T

$$G_1: \quad 20\,X_1 + 50\,X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2000$$

$$G_2: \quad 20\,X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1200$$

$$G_3: \quad 20\,X_1 + 30\,X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$$

$$G_4: \quad 2\,X_1 + 3\,X_2 + d_4^- - d_4^+ = 93.6$$

$$G_5: \quad 200\,X_1 + 900\,X_2 + d_5^- - d_5^+ = 400{,}000$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3,4,5$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة هدف يقيني يمكن حله بيانياً أو بطريقة الحلول المتتالية.

(٢٥-٦) تمرينات　Exercises

(٢٥-١): حدد أي العبارات التالية صحيحة (√) وأي العبارات خاطئة (×) مع ذكر السبب.

١- المتغيرات الأنحرافية العشوائية دائماً متغيرات عشوائية سواء كانت المعلمات العشوائية موجبة أو سالبة.

٢- دائماً التوزيع الأحتمالي للمتغيرات الأنحرافية العشوائية يكون معلومة التوزيع الأحتمالي لها.

٣- عدم وجود علاقة بين المتغيرات الانحرافية العشوائية والمتغيرات الأنحرافية اليقينية المناظرة لها.

٤- أسلوب (CCGP) يتطلب معلومية التوزيع الأحتمالي للمعلمات العشوائية.

٥- بالنسبة للمشاكل الأحتمالية التي تصاغ في نماذج برمجة هدف أحتمالية يكون متجه الأنجاز متجه أحتمالي.

٦- بالنسبة للمشاكل الأحتمالية لبرمجة الهدف، وجود قيم موجبة للمتغيرات الأنحرافية المناظرة للمتغيرات الأنحرافية العشوائية يرجع إلى العامل العشوائي.

(٢٥-٢): أعتبر نماذج برمجة الهدف الأحتمالية في كل حالة من الحالات التالية، حول النموذج الأحتمالي إلى نموذج يقيني مناظر عند مستوى المأمونية المناظر.

(1) $\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(\tilde{d}_1^+), (\tilde{d}_2^-)\}$

S.T.

$$2X_1 + 5X_2 - X_3 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = \tilde{C}_1 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.80$$

$$5X_1 + 2X_3 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = \tilde{C}_2 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.90$$

$$X_1\ ,\ X_2\ , X_3 \geq 0\quad ,\quad (\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+) = \phi\ ,\quad i = 1,2$$

$$\tilde{C}_1 \sim N(\mu_1 = 20, \sigma_1 = 2), \tilde{C}_2 \sim N(\mu_2 = 50, \sigma_2 = 5)$$

(2) $\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(d_3^-), (\tilde{d}_1^-), (\tilde{d}_2^+)\}$

S.T.

$$\tilde{a}_{11}\ X_1 + \tilde{a}_{12}\ X_2 - 3\,X_3 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = 120 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.90$$

$$\tilde{a}_{21}\ X_1 + 7\,X_2 + 5\,X_3 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 80 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.80$$

$$X_1 - 2\,X_2 + 9\,X_3 + d_3^- - d_3^+ = 50$$

$$X_1\ ,\ X_2\ , X_3, \tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \geq 0\quad ,\quad (\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+) = \phi\ ,\quad i = 1,2,3$$

$$\tilde{a}_{11} \sim N(20,2), \tilde{a}_{12} \sim N(5,1), \tilde{a}_{21} \sim N(10,2), \text{Cov}(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}) = -2$$

(3) $\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(\tilde{d}_4^+ + \tilde{d}_3^+), (\tilde{d}_2^- + \tilde{d}_2^+), (\tilde{d}_1^-)\}$

S.T.

$$\tilde{a}_1\ X_1 + 5\,X_2 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = 100 \longrightarrow \gamma_1 \geq 0.50$$

$$8\,X_1 + \tilde{a}_2\ X_2 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ = 120 \longrightarrow \gamma_2 \geq 0.90$$

$$2\,X_1 + \tilde{d}_3^- - \tilde{d}_3^+ = \tilde{b}_1 \longrightarrow \gamma_3 \geq 0.90$$

$$5\,X_2 + \tilde{d}_4^- - \tilde{d}_4^+ = \tilde{b}_2 \longrightarrow \gamma_4 \geq 0.80$$

$$X_1\ ,\ X_2\ , \tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \geq 0\quad ,\quad (\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+) = \phi\ ,\quad i = 1,2,3,4$$

$$\tilde{a}_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 2, \alpha_1 = 15), \tilde{a}_2 \sim N(50,2), \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(80)}, \tilde{b}_2 \sim \chi^2_{(100)}$$

(4) $\text{Lexic.Min.}\tilde{a} = \{(\tilde{d}_1^-), (\tilde{d}_2^-)\}$

S.T.

$$\tilde{a}_1 X_1 + 3 X_2 + \tilde{d}_1^- - \tilde{d}_1^+ = \tilde{b}_1$$

$$X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \tilde{d}_2^- - \tilde{d}_2^+ =$$

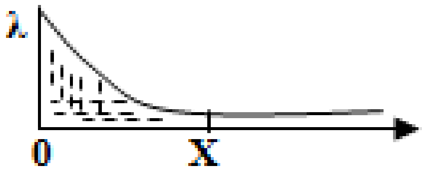
$$X_1 \, , \; X_2 \, , \tilde{d}_i^- , \tilde{d}_i^+ \geq 0 \quad , \quad (\tilde{d}_i^- \cap \tilde{d}_i^+) = \phi \; , \quad i = 1,2$$

$$\tilde{a}_1 \sim \chi^2_{(5)} , \tilde{b}_1 \sim \chi^2_{(10)} , \tilde{a}_2 \sim \chi^2_{(20)}$$

<u>ملحوظة</u>: المتغير $F_{(5,10)}$ حيث $F_{(5,10)} = \dfrac{\tilde{a}_1 / 5}{\tilde{a}_2 / 10}$ يتبع توزيع F بدرجات حرية (5,10)

الملاحق

ملحق (١) : الاحتمالات التراكمية للمتغير الآسى بمعلمة λ.

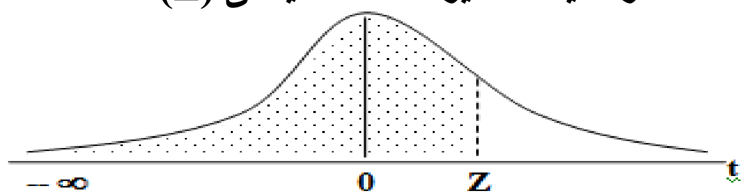


الإحتمالات داخل الجدول تساوى المساحة من 0 إلى X ، العمود الأول ($X\lambda$) والصف الأول يعطى الرقم العشرى الثانى فمثلا عند $\lambda = 4.2$ ، $X = 0.9$ فإن $\lambda X = 3.78$ وبالتالى فالمساحة من 0 إلى X أسفل المنحنى تساوى 0.9772 [99].

λx \ λx	.00	.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0582	0.0676	0.0769	0.0861
0.1	0.0952	0.1042	0.1131	0.1219	0.1306	0.1393	0.1479	0.1563	0.1647	0.1730
0.2	0.1813	0.1894	0.1975	0.2055	0.2134	0.2212	0.2289	0.3266	0.2442	0.2517
0.3	0.2592	0.2666	0.2739	0.2811	0.2882	0.2953	0.3023	0.3093	0.3161	0.3229
0.4	0.3297	0.3363	0.3430	0.3495	0.3560	0.3624	0.3687	0.3750	0.3812	0.3874
0.5	0.3935	0.3995	0.4055	0.4114	0.4173	0.4231	0.4288	0.4345	0.4401	0.4457
0.6	0.4512	0.4566	0.4621	0.4674	0.4727	0.4780	0.4831	0.4883	0.4934	0.4984
0.7	0.5034	0.5084	0.5132	0.5181	0.5229	0.5276	0.5323	0.5370	0.5416	0.5462
0.8	0.5507	0.5551	0.5596	0.5640	0.5683	0.5726	0.5768	0.5810	0.5852	0.5893
0.9	0.5934	0.5975	0.6015	0.6054	0.6094	0.6133	0.6171	0.6209	0.6247	0.6284
1.0	0.6321	0.6358	0.6394	0.6430	0.6465	0.6501	0.6535	0.6570	0.6604	0.6638
1.1	0.6671	0.6704	0.6737	0.6770	0.6802	0.6834	06865	0.6896	0.6927	0.6958
1.2	0.6988	0.7018	0.7048	0.7077	0.7106	0.7135	0.7163	0.7192	0.7220	0.7247
1.3	0.7275	0.7302	0.7329	0.7355	0.7382	0.7408	0.7433	0.7459	0.7484	0.7509
1.4	0.7534	0.7559	0.7583	0.7607	0.7631	0.7654	0.7678	0.7701	0.7724	0.7746
1.5	0.7769	0.7791	0.7813	0.7835	0.7856	0.7878	0.7899	0.7920	0.7940	0.7961
1.6	0.7981	0.8001	0.8021	0.8041	0.8060	0.8080	0.8099	0.8118	0.8136	0.8155
1.7	0.8173	0.8191	0.8209	0.8227	0.8245	0.8262	0.8280	0.8297	0.8314	0.8336
1.8	0.8347	0.8363	0.8380	0.8396	0.8412	0.8428	0.8443	0.8459	0.8474	0.8489
1.9	0.8504	0.8519	0.8534	0.8549	0.8563	0.8577	0.8591	0.8605	0.8619	0.8633

λx \ λx	.00	.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	08647	0.8660	0.8673	0.8687	0.8700	0.8713	0.8725	0.8738	0.8751	0.8763
2.1	0.8775	0.8788	0.8800	0.8812	0.8823	0.8835	0.8847	0.8858	0.8870	0.8881
2.2	0.8892	0.8903	0.8914	0.8925	0.8935	0.8946	0.8956	0.8967	0.8977	0.8987
2.3	0.8997	0.9007	0.9017	0.9027	0.9037	0.9046	0.9056	0.9065	0.9074	0.9084
2.4	0.9093	0.9102	0.9111	0.9120	0.9128	0.9137	0.9146	0.9154	0.9163	0.9171
2.5	0.9179	0.9187	0.9195	0.9203	0.9211	0.9219	0.9227	0.9235	0.9242	0.9250
2.6	0.9257	0.9265	0.9272	0.9279	0.9286	0.9293	0.9301	0.9307	0.9314	0.9321
2.7	0.9328	0.9335	0.9341	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9380	0.9386
2.8	0.9392	0.9398	0.9404	0.9410	0.9416	0.9422	0.9427	0.9433	0.9439	0.9444
2.9	0.9450	09455	0.9461	0.9466	0.9471	0.9477	0.9482	0.9487	0.9492	0.9497
3.0	0.9802	0.9507	0.9512	0.9517	0.9522	0.9526	0.9531	0.9536	0.9540	0.9545
3.1	0.9550	0.9554	0.9558	0.9563	0.9567	0.9571	0.9576	0.9580	0.9584	0.9588
3.2	0.9592	0.9596	0.9600	0.9604	0.9608	0.9612	0.9616	0.9620	0.9624	0.9627
3.3	0.9631	0.9635	0.9638	0.9642	0.9646	0.9649	0.9653	0.9656	0.9660	0.9663
3.4	0.9666	0.9670	0.9673	0.9676	0.9679	0.9683	0.9686	0.9689	0.9692	0.9695
3.5	0.9698	0.9701	0.9704	0.9707	0.9710	0.9731	0.9716	0.9718	0.9721	0.9724
3.6	0.9727	0.9729	0.9732	0.9735	0.9737	0.9740	0.9743	0.9745	0.9748	0.9750
3.7	0.9753	0.9755	0.9758	0.9760	0.9762	0.9762	0.9765	0.9769	0.9772	0.9774
3.8	0.9776	0.9779	0.9781	0.9783	0.9785	0.9787	0.9789	0.9791	0.9793	0.9796
3.9	0.9798	0.9800	0.9802	0.9804	0.9806	0.9807	0.9809	0.9811	0.9813	0.9815
4.0	0.9817	0.9834	0.9850	0.9864	0.9877	0.9889	0.9899	0.9909	0.9918	0.9926
5.0	0.9933	0.9939	0.9945	0.9950	0.9955	0.9959	0.9963	0.9967	0.9970	0.9973
6.0	0.9975	0.9978	0.9980	0.9982	0.9983	0.9985	0.9986	0.9988	0.9989	0.9990
7.0	0.09991	0.9992	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996
8.0	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999
9.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

ملحق (٢) : الأحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسى (Z)



$$F(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7701	.7734	7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8284	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633

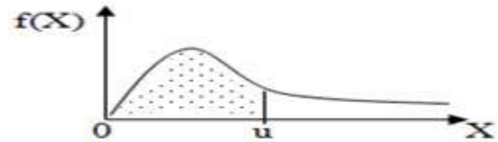
ملحق (٢): الأحتمالات التراكمية للمتغير المعتاد القياسي (Z)

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9498	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9888	.9842	.9846	.9856	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.989	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

ملخص لبعض القيم الحرجة لـ(Z) والقيم المناظرة لها لـ F(Z)

Z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
F(Z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	.99995	.999995

ملحق (٣) : الأحتمالات التراكمية لمتغير كا٢



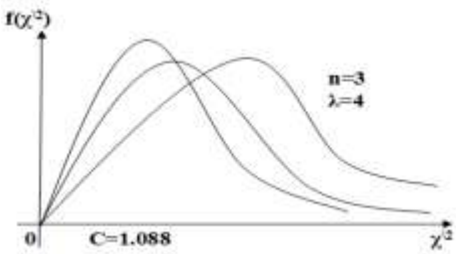
$$F(u) = \int_0^u \frac{X^{(n-2)/2} \; e^{-X/2}}{2^{n/2} \; \Gamma(n/2)} \, dX$$

F / n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	$.0^4393$	$.0^3157$	$.0^3982$	$.0^2393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	625	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.67	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	17.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.4	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.4	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8

n \ F	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
16	5.14	8.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	124	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	46.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	97.0	50.9	53.7

Catharine (1994): Tahles of the chi-square distribution , Biometrika, Val.32, [99].

ملحق (٤) : جزء من جداول توزيع كا٢ ($\chi'^2_{(n,\lambda)}$) غير المركزي



$$\int_{min.}^{c} f(\chi'^2)\ d\chi'^2 = 0.05$$

جدول (١): n عدد درجات الحرية، λ المعلمة غير المركزية. والقيم داخل الجدول عبارة عن $\chi'^2 = C$ عند $F(C) = 0.05$ [86].

$\sqrt{\lambda}$ / n	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
1	0.0627	0.06397	0.06703	0.07507	0.0863	0.1033	0.1286	0.1662	0.2226
2	0.3203	0.3335	0.3333	0.3504	0.3756	0.4104	0.4567	0.5169	0.5935
3	0.5932	0.5071	0.6092	0.6297	0.6297	0.6991	0.7501	0.8135	0.8906
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.294	3.297	3.307	3.324	3.347	3.376	3.413	3.455	3.505
$\sqrt{\lambda}$ / N	**2.0**	**2.2**	**2.4**	**2.6**	**2.8**	**3.0**	**3.2**	**3.4**	**3.6**
1	0.4252	0.5809	0.7627	0.9570	1.156	1.355	1.555	1.755	1.955
2	0.8035	0.9367	1.085	1.246	1.415	1.590	1.769	1.952	2.138
3	1.088	1.208	1.341	1.485	1.637	1.767	1.963	2.133	2.307
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.623	3.691	3.766	3.846	3.933	4.025	4.123	4.226	4.335
$\sqrt{\lambda}$ / N	**4.0**	**4.2**	**4.4**	**4.6**	**4.8**	**5.0**	**5.2**	**5.4**	**5.6**
1	2.355	2.555	2.755	2.955	3.155	3.355	3.555	3.755	3.955
2	2.514	2.705	2.896	3.089	3.282	3.470	3.670	3.865	4.060
3	2.665	2.847	3.031	3.217	3.404	3.592	3.782	3.972	4.163
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	4.566	4.688	4.814	4.944	5.078	5.216	5.356	5.500	5.647

ملحق (٤): جزء من جداول توزيع كا٢ $\chi'^{2}_{(n,\lambda)}$ غير المركزي

$$\int_{\min.}^{C} f(\chi'^{2}) \; d\chi'^{2} = 0.01$$

جدول (٢): يعطى قيم C عند $F(C) = 0.01$

N \ $\sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
1	0.0125	0.0127	0.0136	0.0150	0.0173	0.0207	0.0258	0.0334	0.0451
2	0.1418	0.1432	0.1476	0.1551	0.1664	0.1820	0.2030	0.2309	0.2676
3	0.3389	0.3411	0.3480	0.3598	0.3769	0.4000	0.4300	0.4681	0.5155
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	2.874	2.877	2.886	2.900	2.920	2.946	2.978	3.016	3.059

N \ $\sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6
1	0.0922	0.1392	0.2153	0.3325	0.4919	0.6780	0.8745	1.074	1.274
2	0.3779	0.4579	0.5581	0.6792	0.8192	0.9740	1.139	1.312	1.491
3	0.6448	0.7297	0.8294	0.9438	1.072	1.212	1.362	1.520	1.684
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	3.164	3.225	3.292	3.365	3.444	3.528	3.618	3.714	3.814

N \ $\sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6
1	1.674	1.874	2.074	2.474	2.474	2.674	2.874	3.074	3.274
2	1.857	2.044	2.233	2.423	2.615	2.807	3.000	3.194	3.388
3	2.027	2.204	2.383	2.565	2.749	2.935	3.122	3.310	3.500
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	4.030	4.145	4.264	4.388	4.515	4.647	4.782	4.920	5.062

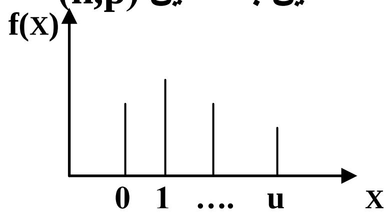
جدول (٣): يعطى قيم C عندما: $\int_C^{\infty} f(\chi'^2) = 0.05$

$n \backslash \sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
1	1.960	1.999	2.107	2.265	2.450	2.646	2.845	3.045
2	2.448	2.472	2.542	2.650	2.785	2.940	3.106	3.280
3	2.795	2.814	2.868	2.953	3.064	3.194	3.339	3.493
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	5.604	5.610	5.627	5.655	5.693	5.742	5.800	5.868
$n \backslash \sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
1	3.645	3.845	4.045	4.245	4.445	4.645	4.845	5.045
2	3.826	4.014	4.203	4.393	4.585	4.777	4.970	5.164
3	3.998	4.174	4.354	4.536	4.720	5.093	5.281	5.470
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.121	6.221	6.327	6.439	6.556	6.679	6.807	6.939
$n \backslash \sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4
1	5.645	5.845	6.045	6.245	6.445	6.645	6.845	7.045
2	5.749	5.945	6.141	6.338	6.534	6.731	6.928	7.126
3	5.852	6.043	6.236	6.429	6.622	6.816	7.011	7.205
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	7.358	7.507	7.654	7.806	7.960	8.117	8.277	8.438

جدول (٤): يعطى قيم C حيث $\int_C^{\infty} f(\chi'^2) = 0.01$

n \ $\sqrt{\lambda}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
1	2.576	2.626	2.757	2.934	3.128	3.327	3.526	3.726
2	3.035	3.065	3.148	3.272	3.421	3.584	3.757	3.936
3	3.368	3.390	3.454	3.552	3.675	3.816	3.969	4.131
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.129	6.135	6.154	6.184	6.225	6.278	6.341	6.414
n \ $\sqrt{\lambda}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
1	4.326	4.526	4.726	4.926	5.126	5.326	5.526	5.726
2	4.492	4.681	4.871	5.063	5.256	5.449	5.643	5.838
3	4.649	4.829	5.011	5.196	5.382	5.589	5.768	5.947
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	6.683	6.788	6.899	7.016	7.139	7.266	7.399	7.535
n \ $\sqrt{\lambda}$	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4
1	6.326	6.526	6.726	6.926	7.126	7.326	7.526	7.726
2	6.426	6.621	6.817	7.014	7.211	7.408	7.803	7.803
3	6.521	6.714	6.907	7.101	7.295	7.489	7.684	7.879
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:
20	7.965	8.115	8.268	8.423	8.581	8.740	8.902	9.066

ملحق (٥) : الأحتمالات التراكمية لمتغير توزيع ذات الحدين بمعلمتين (n,p)

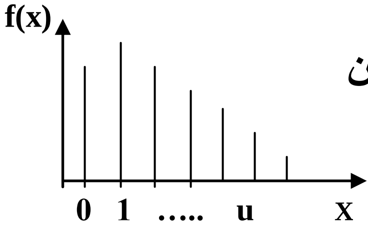


$$F(u) = P_r(X \le u) = \sum_{x=0}^{u} C_x^n (p)^x (1-p)^{n-x}$$

n	u \ P	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.9025	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9600	0.9100	0.8400	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250
	1	0.9927	0.9720	0.8960	0.7840	0.6480	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9920	0.9730	0.9360	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8192	0.6517	0.4752	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9728	0.9163	0.8208	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9984	0.9919	0.9744	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.7373	0.5282	0.3270	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.944	0.8369	0.6826	0.5000
	3	1.000	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.6554	0.4202	0.2333	0.1094
	2	0.9978	0.9841	0.9011	0.7443	0.5443	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9830	0.9295	0.8208	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9891	0.9590	0.8906
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9959	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.6983	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.5767	0.3294	0.1586	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.8520	0.6471	0.4199	0.2266

n	u \ P	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
	3	0.9998	0.9973	0.9667	0.8740	0.7102	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9953	0.9712	0.9037	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9996	0.9962	0.9812	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	0.6634	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.5033	0.2553	0.1064	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.7969	0.5518	0.3154	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9437	0.8059	0.5941	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9896	0.9420	0.8263	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9988	0.9887	0.9502	0.8555
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9915	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.1342	0.0404	0.0101	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.4362	0.1960	0.0705	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.7382	0.4628	0.2318	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9144	0.7297	0.4826	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9804	0.9012	0.7334	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9969	0.9747	0.9006	0.7461
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9957	0.9750	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9962	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.3758	0.1493	0.0464	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.6778	0.3828	0.1673	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.8791	0.6496	0.3823	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9672	0.8497	0.6331	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9936	0.9526	0.8338	0.6230
	6	1.0000	1.0000	0.9991	0.9894	0.9452	0.8281
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9877	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9983	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

n	u \ P	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.5
50	0	0.0769	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2794	0.0338	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.5405	0.1117	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.7604	0.2503	0.0057	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.8964	0.4312	0.0185	0.0002	0.0000	0.0000
	5	0.9622	0.6161	0.0480	0.0007	0.0000	0.0000
	6	0.9882	0.7702	0.1034	0.0025	0.0000	0.0000
	7	0.9968	0.8779	0.1904	0.0073	0.0001	0.0000
	8	0.9992	0.9421	0.3073	0.0183	0.0002	0.0000
	9	0.9998	0.9755	0.4437	0.0402	0.0008	0.0000
	10	1.0000	0.9906	0.5836	0.0789	0.0022	0.0000
	11		0.9968	0.7107	0.1390	0.0057	0.0000
	12		0.9990	0.8139	0.2229	0.0133	0.0002
	13		0.9997	0.8894	0.3279	0.0280	0.0005
	14		0.9999	0.9393	0.4468	0.0540	0.0013
	15		1.0000	0.9692	0.5692	0.0955	0.0033
	16			0.9856	0.6839	0.1561	0.0077
	17			0.9937	0.7822	0.2369	0.0164
	18			0.9975	0.8594	0.3356	0.0325
	19			0.9991	0.9152	0.4465	0.0595
	20			0.9997	0.9522	0.5610	0.1013
	21			0.9999	0.9749	0.6701	0.1611
	22			1.0000	0.9877	0.7660	0.2399
	23				0.9944	0.8438	0.3359
	24				0.9976	0.9022	0.4439
	25				0.9991	0.9427	0.5561
	26				0.9997	0.9686	0.6641
	27				0.9999	0.9840	0.7601
	28				1.0000	0.9924	0.8389
	29					0.9966	0.8987
	30					0.9986	0.9405
	31					0.9995	0.9675
	32					0.9998	0.9836
	33					0.9999	0.9923
	34					1.0000	0.9967
	35						0.9987
	36						0.9995
	37						0.9998
	38						1.0000



ملحق (٦) : الاحتمالات التراكمية لمتغير بواسون

$$F(u) = \sum_{x=0}^{u} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x\,!}$$

U \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4493	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
U \ λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9468	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
U \ λ	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472

4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9958	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

U \ λ	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8940	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.4815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ويستمر هذا الجدول إلى أن نصل إلى $\lambda = 20$ مثلا

U \ λ	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

U \ λ	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.02424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1847	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2670	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4656	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3714	0.2866	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3750	0.2926	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6549	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9176	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9711	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7355	0.6437
22	0.9989	0.9969	0.9924	0.9833	0.9672	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9593	0.9317	0.8933	0.8432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9747	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9940	0.9881	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973

U \ λ	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
39	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Source: Richard S. Burington and Donald C. May, Handbook of Probability and Statistics with Tables (Sanduky, Ohio: Handbook Publishers, 1953), PP 259 – 262.

ملحق (٧) : الحل التفصيلي لتطبيق (٢١-١)

(١) عندما يكون النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 2000\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3$$

$$\text{S.T.}\quad 5\,X_1 + 3\,X_2 + 2\,X_3 \le 600$$

$$3\,X_1 + 4\,X_2 + 5\,X_3 \le 561$$

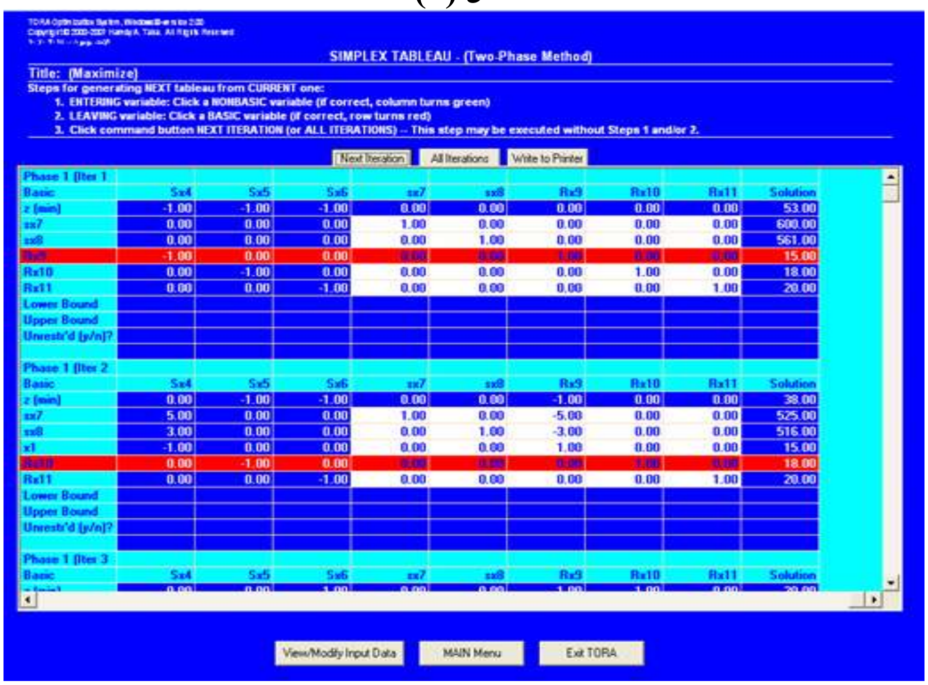
$$X_1 \ge 15 \;\;,\;\; X_2 \ge 18 \;\;,\;\; X_3 \ge 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

وبأستخدام أسلوب المرحلتين two-phase technique [٨]، فإن الخطوات التفصيلية للحل كما هو موضح في الجداول المتابعة التالية في شكل (١)-(٣) ويكون الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = 77{,}000 \quad , \quad X_1^* = 15 \quad , \quad X_2^* = 18 \quad , \quad X_3^* = 20$$

شكل (١)



SIMPLEX TABLEAU - (Two-Phase Method)

Title: (Maximize)

Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:
1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Phase 1 (Iter 1									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	53.00
sx7	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	600.00
sx8	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	561.00
Rx9	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 2									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	38.00
sx7	5.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	525.00
sx8	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	0.00	0.00	516.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٢)

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	20.00
sx7	5.00	3.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	0.00	471.00
sx8	3.00	4.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	0.00	444.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									
Phase 1 (Iter 4									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									
Phase 2 (Iter 5									

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٣)

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Unrestr'd (y/n)?									
Phase 1 (Iter 4									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									
Phase 2 (Iter 5									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	-2000.00	-1500.00	-1000.00	0.00	0.00	blocked	blocked	blocked	77000.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	431.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	344.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	15.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	18.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	20.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

(٢) عندما يكون النموذج اليقيني المكافئ على النحو التالي:

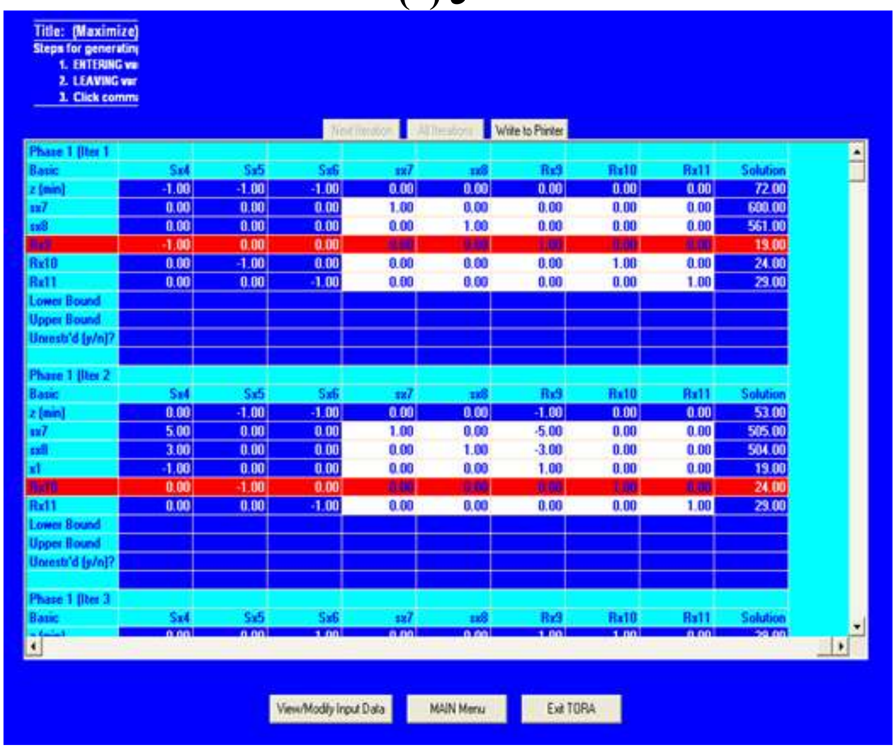
$$\text{Max.}Z = 2000\,X_1 + 1500\,X_2 + 1000\,X_3$$

$$\text{S.T.} \quad 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 600$$
$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 561$$
$$X_1 \ge 19 \;,\; X_2 \ge 24 \;,\; X_3 \ge 29$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

عنـــدما تكـــون مســـتويات المأمونيـــة $\gamma_3 \ge 0.98 \;,\; \gamma_2 \ge 0.90 \;,\; \gamma_1 \ge 0.8752$.
وبأستخدام أسلوب المرحلتين أيضاً فإن الخطوات التفصيلية للحل كما هو موضح في الجداول المتتالية التالية في شكل (٤)-(٦) على النحو التالي:

$$Z^* = 167{,}425 \quad , \quad X_1^* = 19 \quad , \quad X_2^* = 89.75 \quad , \quad X_3^* = 29$$

شكل (٤)



Phase 1 (Iter 1									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	72.00
sx7	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	600.00
sx8	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	561.00
Rx9	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 2									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	53.00
sx7	5.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	505.00
sx8	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	0.00	0.00	504.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
Rx10	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution

شكل (٥)

Phase 1 (Iter 3									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	29.00
sx7	5.00	3.00	0.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	0.00	433.00
sx8	3.00	4.00	0.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	0.00	408.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
Rx11	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 1 (Iter 4									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	375.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	263.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 5

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٦)

Unrestr'd (y/n)?									
Phase 2 (Iter 5									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	-200.00	-1500.00	-1000.00	0.00	0.00	blocked	blocked	blocked	68800.00
sx7	5.00	3.00	2.00	1.00	0.00	-5.00	-3.00	-2.00	375.00
sx8	3.00	4.00	5.00	0.00	1.00	-3.00	-4.00	-5.00	263.00
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	24.00
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

Phase 2 (Iter 6									
Basic	Sx4	Sx5	Sx6	sx7	sx8	Rx9	Rx10	Rx11	Solution
z (max)	925.00	0.00	875.00	0.00	375.00	blocked	blocked	blocked	167425.00
sx7	2.75	0.00	-1.75	1.00	-0.75	-2.75	0.00	1.75	177.75
Sx5	0.75	1.00	1.25	0.00	0.25	-0.75	-1.00	-1.25	65.75
x1	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	19.00
x2	0.75	0.00	1.25	0.00	0.25	-0.75	0.00	-1.25	89.75
x3	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	29.00
Lower Bound									
Upper Bound									
Unrestr'd (y/n)?									

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

ملحق (٨): الحل التفصيلي لتطبيق (٢١-٣)

أولاً: إذا أعتبرنا النموذج اليقيني:

$$\text{Max.}Z = 50\,X_1 + 70\,X_2 + 80\,X_3$$

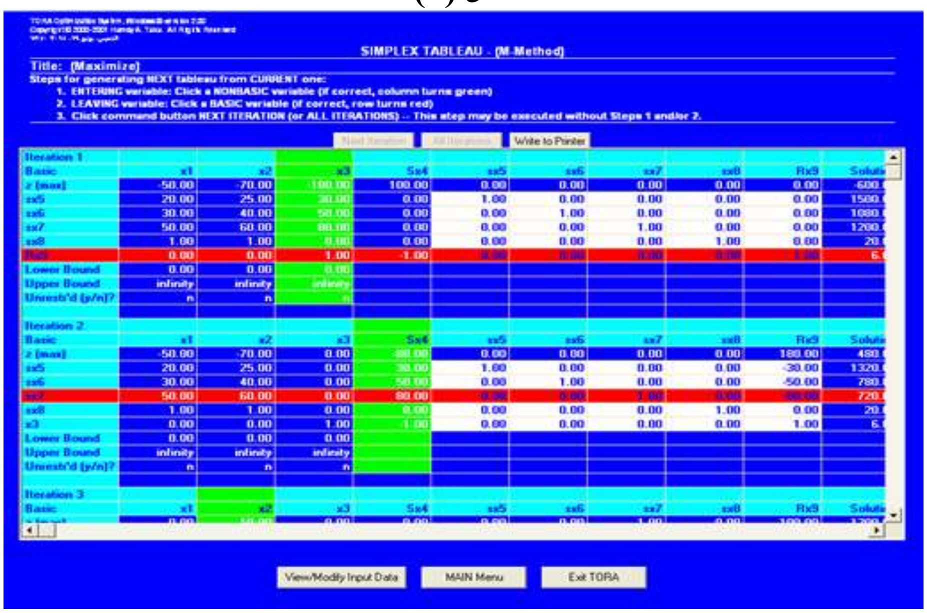
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & 20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \le 1500 \\ & 30\,X_1 + 40\,X_2 + 50\,X_3 \le 1080 \\ & 50\,X_1 + 60\,X_2 + 80\,X_3 \le 1200 \\ & X_1 + X_2 < 20 \quad , \quad X_3 \ge 6 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

فإن الحل الأمثل:

$$Z^* = 1320 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 12 \quad , \quad X_3^* = 6$$

وفيما يلي الخطوات التفصيلية للحل بأستخدام أسلوب M كما هو موضح في شكل (١)،(٢).

شكل (١)



شكل (٢)

Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							
Iteration 3										
Basic	x1	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Soluti
z (max)	0.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	100.00	1200.
sx5	1.25	2.50	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.38	0.00	0.00	1050.
sx6	-1.25	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.63	0.00	0.00	330.
[illegible]	0.63	0.75	0.00	1.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.
sx8	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	20.
x3	0.63	0.75	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	15.
Lower Bound	0.00	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							

Iteration 4										
Basic	x1	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Soluti
z (max)	8.33	0.00	0.00	13.33	0.00	0.00	1.17	0.00	86.67	1320.
sx5	-0.83	0.00	0.00	-3.33	1.00	0.00	-0.42	0.00	3.33	1020.
sx6	-3.33	0.00	0.00	-3.33	0.00	1.00	-0.67	0.00	3.33	300.
x2	0.83	1.00	0.00	1.33	0.00	0.00	0.02	0.00	-1.33	12.
sx8	0.17	0.00	0.00	-1.33	0.00	0.00	-0.02	1.00	1.33	8.
x3	0.00	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	6.
Lower Bound	0.00	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n							

ثانياً: إذا أعتبرنا النموذج اليقيني:

$$\text{Max.} Z = 50\,X_1 + 70\,X_2 + 80\,X_3$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & 20\,X_1 + 25\,X_2 + 30\,X_3 \le 1500 \\ & 30\,X_1 + 40\,X_2 + 50\,X_3 \le 1080 \\ & 50\,X_1 + 60\,X_2 + 80\,X_3 \le 1200 \\ & X_1 + X_2 < 15 \quad , \quad X_3 \ge 9 \\ & X_1 , X_2 , X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

فإن الحل الأمثل:

$$Z^* = 1280 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 8 \quad , \quad X_3^* = 9$$

وفيما يلي الخطوات التفصيلية للحل بأستخدام أسلوب M كما هو موضح في شكل (٣)،(٤).

شكل (٣)

SIMPLEX TABLEAU - (M-Method)

Title: (Maximize)

Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:

1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Iteration 1									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	-70.00	-100.00	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-900.00
sx5	25.00	30.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1500.00
sx6	40.00	50.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1080.00
sx7	60.00	80.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1200.00
sx8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
Rx9	0.00	1.00	-1.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n							

Iteration 2									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	-70.00	0.00	[illegible]	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	720.00
sx5	25.00	0.00	30.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-30.00	1230.00
sx6	40.00	0.00	50.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-50.00	630.00
sx7	60.00	0.00	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	480.00
sx8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
x3	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n							

Iteration 3									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤)

Unrestr'd (y/n)?	n	n							

Iteration 3									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	-10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	100.00	1200.00
sx5	2.50	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.38	0.00	0.00	1050.00
sx6	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.63	0.00	0.00	330.00
Sx4	0.75	0.00	1.00	[illegible]	[illegible]	0.01	[illegible]	[illegible]	6.00
sx8	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	15.00
x3	0.75	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	15.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n							

Iteration 4									
Basic	x2	x3	Sx4	sx5	sx6	sx7	sx8	Rx9	Solution
z (max)	0.00	0.00	13.33	0.00	0.00	1.17	0.00	86.67	1280.00
sx5	0.00	0.00	-3.33	1.00	0.00	-0.42	0.00	3.33	1030.00
sx6	0.00	0.00	-3.33	0.00	1.00	-0.67	0.00	3.33	310.00
x2	1.00	0.00	1.33	0.00	0.00	0.02	0.00	-1.33	8.00
sx8	0.00	0.00	-1.33	0.00	0.00	-0.02	1.00	1.33	7.00
x3	0.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	9.00
Lower Bound	0.00	0.00							
Upper Bound	infinity	infinity							
Unrestr'd (y/n)?	n	n							

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

ملحق (٩) : التوقع والتباين للمتغير $\tilde{n}_j$

لحساب قيم $E(\tilde{n}_j)$ ، $Var(\tilde{n}_j)$ بالفصل (٢-٤-٢٢) سوف نستخدم نظرية Taylor [51,140] على النحو التالي:

إذا فرضنا أن y متغير مربع، كذلك y_0 تشير إلى توقع y فإن:

$$y^{1/2} = y_0^{1/2} + \frac{1}{2}(y - y_0)y_0^{-1/2} - \frac{1}{8}(y - y_0)^2\, y_0^{-3/2} + \frac{1}{16}(y - y_0)^3\, y_0^{-5/2} - \frac{15}{384}(y - y_0)^4\, y_0^{-7/2} + ... \quad (1)$$

وبما أن $\tilde{n}_{kj}^2 \sim \chi_{d_j}^2$ بحيث:

$$E(\tilde{n}_j^2) = d_j \quad , \quad Var(\tilde{n}_j^2) = 2d_j \quad (2)$$

وبتطبيق النظرية في (١) نجد أن:

$$\tilde{n}_j = [E(\tilde{n}_j^2)]^{1/2} + \frac{1}{2}[\tilde{n}_j^2 - E(\tilde{n}_j^2)][E(\tilde{n}_j^2)]^{-1/2} - \frac{1}{8}[\tilde{n}_j^2 - E(\tilde{n}_j^2)]^2\,[E(\tilde{n}_j^2)]^{-3/2} + ... \quad (3)$$

وبأخذ توقع الطرفين لـ (3) نجد أن:

$$\begin{aligned} E(\tilde{n}_j) &= d_j^{1/2} + \frac{1}{2}E[\tilde{n}_j^2 - d_j]\,d_j^{-1/2} - \frac{1}{8}E[\tilde{n}_j^2 - d_j]^2\, d_j^{-3/2} + ... \\ &\approx [32\,d_j^2 - 8\,d_j - 5] / 32\,d_j\sqrt{d_j} \\ &= A_j \end{aligned}$$

بالمثل

$$\mathrm{Var}(\tilde{n}_j) = E(\tilde{n}_j^2) - [E(\tilde{n}_j)]^2 = E(\tilde{n}_j^2) - A_j^2$$
$$\approx d_j - \{[32\, d_j^2 - 8\, d_j - 5] / 32\, d_j \sqrt{d_j}\}^2$$
$$= B_j$$

مثال: إذا فرضنا أن $n_j^2 \sim \chi^2_{(5)}$ أحسب كل من:

$$E(\tilde{n}_j)\ ,\ \mathrm{Var}(\tilde{n}_j)$$

الحل: بما أن:

$$d_j = 5$$

من العلاقة (4) نجد أن:

$$E(\tilde{n}_j) \approx [32\, d_j^2 - 8\, d_j - 5] / 32\, d_j \sqrt{d_j}$$
$$= 2.1103 = A_j$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{n}_j) = d_j - A_j^2$$
$$= 5 - (2.1103)^2 = 0.547$$

ملحق(١٠): رسم الدوال الثنائية Graphical Representation of Bivariate Functions

إذا فرضنا أن الدالة Z دالة في المتغيران X,Y أو بعبارة أخرى:

$$Z = f(X, Y) \qquad (1)$$

ولرسم الدالة Z يتطلب وجود ثلاثة محاور dimensions (محور يمثل المتغير X، ومحور يمثل المتغير Y، ومحور يمثل المتغير Z).

وعادةً الرسم في ثلاثة محاور أو أكثر (في حالة وجود دوال في أكثر من متغيران) ورسم الدالة الثنائية في ثلاثة محاور يكون فيه صعوبة لغير المتخصصين [144] حيث تمثل الدالة الثنائية بسطح Surface، ولكن يمكن أستخدام محورين فقط لرسم الدالة الثنائية بإتباع الخطوات التالية:

١- تحديد الفترة التي يقع فيها كل من المتغيرين X,Y وبالتالي Z.

٢- بأفتراض قيمة معينة لأحد المتغيرات وليكن $Y = 0$ فتصبح:

$$Z = f(X \mid Y = 0) \qquad (2)$$

وبالتالي أفتراض قيم معينة لـ X يتم حساب القيم المناظرة لها لـ Z عند $Y = 0$، ورسم المنحنى $f(X \mid Y = 0)$.

٣- بأفتراض قيمة معينة للمتغير الآخر $X = 0$ فتصبح الدالة:

$$Z = f(Y \mid X = 0) \qquad (3)$$

وبالتالي أفتراض قيم معينة لـ Y يتم حساب القيم المناظرة لها لـ Z عندما $X = 0$، ورسم المنحنى $f(Y \mid X = 0)$.

٤- تكرار الخطوة (٢) عند قيم مختلفة لـ Y ورسم الدالة Z في هذه الحالات فنحصل على منحنيات متوازية لـ $f(X \mid Y)$.

٥- تكرار الخطوة (٣) عند قيم مختلفة لـ X ورسم الدالة Z في هذه الحالات فنحصل على منحنيات متوازية لـ $f(Y \mid X)$.

وسوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال التالي.

مثال (١): أعتبر الدالة الثنائية التالية:

$$Z = f(X, Y) = 16 - X^2 - Y^2 \quad , \quad 0 \le X \le 5 \quad , \quad 0 \le Y \le 5$$

١- إذا فرضنا أن $Y = 0$ فأن:

$$Z = f(X \mid Y = 0) = 16 - X^2$$

٢- وبأفتراض قيم معينة لـ X وحساب القيم Z المناظرة لها كما هو في الجدول التالي.

جدول (١)

X	0	1	2	3	4
Z	16	15	12	7	0

وبتحديد قيم Z المناظرة لقيم X كما هو موضح في الشكل التالي:

٣- كذلك بأفتراض أن $X = 0$ فتكون:

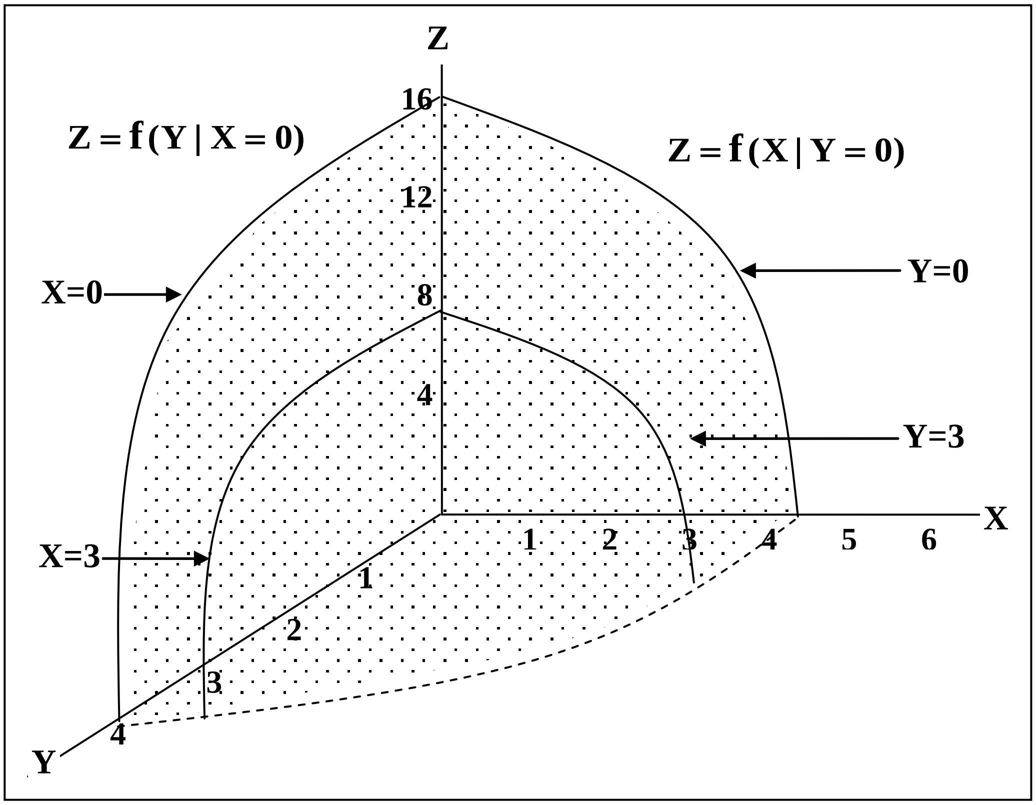
$$Z = f(Y \mid X = 0) = 16 - Y^2 \qquad (4)$$

وبأفتراض قيم معينة لـ Y وحساب قيم Z المناظرة لها في (4) كما هو في الجدول التالي.

جدول (٢)

Y	0	1	2	3	4
Z	16	15	12	7	0

وبتحديد قيم Z المناظرة لقيم Y – على المحورين Y,Z كما هو موضح بشكل (١).



شكل (١): الشكل الجزئي لمنحنى الدالة $Z = f(X, Y) = 16 - X^2 - Y^2$

٤- وبأفتراض قيم مختلفة لـ Y ورسم $Z = f(X \mid Y)$ تكون جميع هذه المنحنيات موازية لـ $Z = f(X \mid Y = 0)$ بالمثل بالنسبة للقيم المختلفة لــ X ورسم $Z = f(Y \mid X)$ تكون جميعها موازية لـ $Z = f(Y \mid X = 0)$ ، والشكل التالي يوضح المنحنيات المتوازية.

المصطلحات

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
	A	
absolute priority	٣٤٠	الأولوية المطلقة
acceptable level of achievement of an objective	٣٣٧	المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام
achievement function	٣٤٠	دالة الانجاز
active and positive approaches	٢٠	الأسلوب الإيجابي والأسلوب السلبي
adaptive programming approach	٣٠	أسلوب البرمجة التوائمية
approximate probability distributions	٤٠	التوزيعات الأحتمالية التقريبية
approximate techniques	٤٠	أساليب التقريب
aspiration level	٣٣١، ٣٣٤، ٣٣٧	المستوى المرجو تحقيقه
	B	
balancing return and risk	٤٠٩	التوازن بين العائد والمخاطر
basic concepts	٣٣٧	مفاهيم اساسية
best alternative	٢٢	أفضل بديل

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
competitive and conflecting objectives	٣٣٤	أهداف متعارضة ومتنافسة
concave	٣٠٢	مقعرة
conclusion of process	٢٢	النتيجة النهائية لعملية
conditional cumulative function	١٠٧	دالة التوزيع التراكمية الشرطية
conditional probability (density) function	١٠٧	دالة الأحتمال (أو كثافة الأحتمال) الشرطية
conflicting constraints	٣٣١	قيود متعارضة
constants	٢٢، ٣٧٣	قيم (مقادير) ثابته
constraints	٣٣٩	القيود
continuous random variables	١٤٧	متغيرات عشوائية متصلة
continuous variables	٤٨، ١١٦، ١٢٣	متغيرات متصلة
control variables	٢٢	المتغيرات التحكمية
convert	٢١٦	تحويل
convex	٣٠١، ٣١٢، ٣١٣	محدبة
convex sets	٤٠	الفئات المحدبة
covariance	٢٣١	التغاير
cumulative distributed function	٣٢، ٥١	دالة التوزيع التراكمية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
	D	
decision	٢٢	القرار
decision making process	٢٢	عملية صناعة القرار
decision's rules	٢٩٣	القواعد القرارية
decision problems under risk	٢٧	المشاكل القرارية فى ظل المخاطرة
degree of freedom	٨٤	درجات حرية
density function	٣٢	دالة كثافة الإحتمال
dependent variable	٤٩	المتغير التابع
determinant	١٢٤	محدد
deterministic LP model	٢٤	نموذج برمجة خطية يقينى
deterministic model	٢٢، ٣٠	نموذج يقينى
deterministic problems	٢٢، ٢٨	المشاكل اليقينية
deviational variables	٣٣٧	المتغيرات الانحرافية
discrete random variable	٥١، ١٧٦	المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل)
discrete uniform distribution	٥٨	التوزيع المنتظم المتقطع
domain	٤٩	نطاق

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
	E	
الحل الكفأ	٣١٩	**efficient solution**
قيود تتصف بالمرونة (القيود المرنة)	٣٣٢، ٣٣٩	**elastic constraints**
الفئة الخالية	١٢٢	**empty set**
بيئة صناعة القرار	٢٢	**environment decision making**
قيد يقينى مكافئ	٣٣	**equivalent deterministic constraint**
نموذج برمجة يقيني مكافئ	١٤٣، ١٤٧	**equivalent deterministic programming model**
القيمة المتوقعة (التوقع)	٥٣، ٥٥، ٢٩٥	**expectation**
معيار القيمة المتوقعة	٢٩٣، ٢٩٥	**expected value criterion**
الإحتمال التجريبى	٥٠	**experimental probability**
التوزيع الأسي	١٥٣، ٢٦٣	**Exponential distribution**
	F	
إدارة المخاطر المالية	٣٩	**financial risk management**
المشتقات الجزئية الأولى	١٢٤	**first partial derivatives**
الأولوية الأولي	٣٤٠	**first priority**
صياغة المشكلة	٣٤١	**formulation problem**

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
functions and inverse functions	٤٠	الدوال والدوال العكسية
	G	
Gamma distribution	٧٢	توزيع جاما
Gaussian distribution	٣٩	توزيع جاوس
general model	٣٤٨	النموذج العام
Geometric distribution	٥٨، ١٨٥	التوزيع الهندسي
Geometric programming	٤١	البرمجة الهندسية
goal	٣٣٧، ٣٣٩، ٣٤٨، ٣٥٠	الهدف
goal formulation	٣٣٨	صياغة الهدف
goal programming (GP)	٣٧، ٤١	برمجة الهدف
goal programming technique	٣٣١	أسلوب برمجة الهدف
graphical solution method	٣٥٠	طريقة الحل البيانى
	I	
independent variable	٤٩	المتغير المستقل
integer programming	٢١٤	البرمجة الصحيحة
items	٤٨	العناصر (أو الوحدات)
iterative approach	٣٥٨	الأسلوب التكراري

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
	J	
joint chance-constraints	٣٩	القيود الأحتمالية المشتركة
joint continuous density function	١٠٢	دالة كثافة الأحتمال المتصلة المشتركة
joint cumulative distribution function	١٠٢	دالة التوزيع التراكمية المشتركة
joint discrete probability function	١٠٢	دالة الأحتمال المتقطعة المشتركة
joint probability distributions	١٠٢	التوزيعات الاحتمالية المشتركة
	K	
known probability distributions	٢٦	توزيعات إحتمالية معلومة
	L	
lexicographically minimization	٣٦٦	التصغير وفقاً للأولويات
limited possibilities	٢٢	أمكانيات محددة
linear goal programming technique	٣٣٥	أسلوب برمجة الهدف الخطية
linear programming (LP)	٤١	البرمجة الخطية

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
	M	
دوال التوزيع التراكمية الهامشية	١٠٦	**marginal cumulative distribution functions**
الدالة الهامشية	١٢٣	**marginal function**
دوال كثافة الأحتمال الهامشية	١٠٥	**marginal probability density functions**
الصياغة الرياضية	٣٣	**mathematical form**
نموذج البرمجة الرياضية	٢٩	**mathematical programming model**
قاعدة رياضية	٤٩	**mathematical rule**
النقط العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات	٤٠	**maximum and minimum points**
معيار تعظيم دالة الأمكان	٢٩٤، ٣٠٥	**maximum likelihood criterion**
معيار تصغير التباين	٢٩٤، ٣٠٠	**minimum variance criterion**
طريقة السمبلكس المعدلة	٣٤٩	**modified simplex method**
الدالة المولدة للعزم	٥٤	**moment generation function**
دالة متزايدة بالتواتر	٣٨١	**monotonic increasing function**
برمجة تعدد الأهداف	٤١	**multi-objective programming**

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
أكثر من هدف	٣٣١، ٣٣٤	**multi-objectives**
أسلوب البرمجة متعددة المراحل	٣٠	**multi-stage programming approach**
	N	
التوزيع الأسى السالب	٧٢	**Negative exponential distribution**
توزيع χ^2 غير المركزى	٧٢، ٢٤٧	**Non-central chi-square distribution**
العزم غير المركزي	٥٢	**Non-central moments**
البرمجة غير الخطية	٤١	**Nonlinear programming (Non-LP)**
التوزيعات الأحتمالية اللامعلمية (غير المعلمية)	٤١	**Nonparametric probability distributions**
أسلوب البرمجة اللامعلمية	٣٠	**Nonparametric programming approach**
التوزيع المعتاد (الطبيعى)	٣٨، ٧٢، ١٦٢،٢٣٦	**Normal distribution**
	O	
الهدف العام	٣٣١، ٣٣٧، ٣٣٩، ٣٥٠، ٣٨٥، ٣٩٠	**objective**
واحد – لواحد	١١٨، ١٢٣	**one-to-one**
القواعد القرارية المثلى	٣٧	**optimal decision's rules**

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
optimum limits criterion	٣٠٧	معيار الحدود المثلى
optimum limits objective function criterion	٢٩٤	معيار الحدود المثلى لدالة الهدف
outcomes	٤٨	نتائج
outcomes space	٤٨	فراغ النتائج
over-achievement	٣٣٨	المقدار الأكبر عن إنجاز الهدف
overtime	٣٤٤	زمن التشغيل الإضافي
	P	
parameter	١٩، ٢٢	معلمة
parametric probability distributions	٤٠	التوزيعات الأحتمالية المعلمية
penalty functions	٣٩	دوال المخاطرة
Poisson distribution	٥٨، ١٩٦	توزيع بواسون
preemptive priorities	٣٣٩	الأولويات المرتبة
priori probability distributions of the parameters	٢٠	التوزيعات الأحتمالية القبلية للمعلمات
probabilistic constraints	٣٧٥	القيود الأحتمالية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
probabilistic decision problems	٢٦	مشاكل قرارية إحتمالية
probabilistic deviational variables	٣٨	المتغيرات الأنحرافية الأحتمالية
probabilistic goals	٣٧٤، ٣٧٥	الأهداف الأحتمالية
probabilistic goal's set	٣٧٥	فئة الأهداف الأحتمالية
probabilistic model	٣٠	النموذج الإحتمالى
probabilistic non-linear programming model	١٤٦	نموذج البرمجة الأحتمالية غير الخطي
probabilistic problems	٢٨	المشاكل الأحتمالية
probabilistic programming (PP) techniques	٢٦	أساليب البرمجة الأحتمالية
probabilistic sensitivity analysis	٣٠	تحليل الحساسية الأحتمالي
probabilistic systems	٣١٥	الأنظمة الأحتمالية
Probability	٣٠٥	أحتمال
probability distributions	٢٧	التوزيعات الأحتمالية
probability function	٥١	دالة الأحتمال
probability generating function	٧١، ٩٢	الدالة المولدة للاحتمالات

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
probability space	٤٨	فراغ الأحتمال
problems under uncertainty	٢٨	مشاكل في ظروف عدم التأكد
production systems	٣١٥	أنظمة الإنتاج
	Q	
quadratic function	٣٠١	دالة تربيعية
queue systems	٣١٥	أنظمة الصفوف
	R	
random deviational variables	٣٧٣، ٣٧٦	المتغيرات الأنحرافية العشوائية
random event	٤٩	الحدث العشوائى
random experiment	٤٨	التجربة العشوائية
random samples	٤١	العينات العشوائية
random variables	١٩، ٢٢، ٢٣، ٤٠، ٤٨	متغيرات عشوائية
range	٤٩	المدى
relationships	٤٨، ٤٩	العلاقات
relatively general statement	٣٣٧	عبارة عامة نسبياً

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
reliability analysis	٣٧	تحليل الصلاحية
reliability measures	١٨٥، ٢٩٤، ٣١٥	مقاييس (مؤشرات) الصلاحية
reliability programming	٢٠، ٢٩٤، ٣١٥	برمجة الصلاحية
reliability theory	٣١٥	نظرية الصلاحية
rigid constraints	٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١	القيود الصارمة
risk	٢٧، ٣١، ٣٣، ٣٧	المخاطرة
risk programming approaches	٢٩، ٣٧	أساليب برمجة المخاطرة
	S	
sample	٤٨	العينة
sampling space	٤٨	فراغ المعاينة
saving accounts	٤٠٩	حسابات أدخار
sensitivity analysis	٢٣	تحليل الحساسية
sequential (iterative) solution method	٣٤٩، ٣٥٨	طريقة الحل المتتالي
set of decision's rules	٣١	فئة القواعد القرارية
simulation techniques	٢٧	أساليب المحاكاة
some optimality properties	٣١	بعض خصائص الأمثلية

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
بعض التحويلات	١١٦	**some transformations**
فراغ	٢٥	**space**
حالة خاصة	٢٥	**special case**
التوزيع المعتاد القياسي	٧٢	**standard normal distribution**
التقدير الإحصائي	٤١	**statistical estimation**
المجتمع الإحصائى	٤٨	**statistical population**
التحويلات الأحصائية	٣١، ٤١	**statistical transformations**
نموذج برمجة خطية عشوائية	٢٤	**stochastic LP model**
نموذج عشوائي	١٩، ٢٣	**stochastic model**
المشاكل العشوائية	١٩، ٢٣، ٢٨	**stochastic problems**
العملية العشوائية	٤٠	**stochastic process**
البرمجة العشوائية	٢٣	**stochastic programming**
الأختلافات العشوائية	٢٩	**stochastic variations**
مستقلة عشوائيا	١٠٣	**stochastically independent**
شديدة التقعر	٢١٦	**strictly concave**
المخاطرة الذاتية	٢٠	**subjective risk**
عدم التأكد الذاتي	٢٠	**subjective uncertainty**

المصطلح باللغة العربية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
فئة جزئية	٤٨، ٤٩	**subset**
	T	
الأساليب	٢٩	**techniques**
أختبارات الفروض	٤١	**testing of hypothesis**
التوزيع العمري	٣١٥	**the age distribution**
نظريات	٢٩، ٢٢٣	**Theories (Theorems)**
مستوى المأمونية	٣٣، ٣٨، ١٤٤، ٣١٦	**tolerance measure**
التحويلات	٣٠٧	**transformations**
أسلوب البرمجة الأحتمالية الانتقالية	٣٠	**transition probability programming approach**
أسلوب البرمجة الانتقالية	٣٠	**transition programming approach**
	U	
المشاكل القرارية غير المعينة	٢٧	**uncertainty decision problems**
متغيرات عشوائية غير مرتبطة	١٣٢	**uncorrelated random variables**
المقدار الأقل من إنجاز الهدف	٣٣٨	**under-achievement**

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح باللغة العربية
uniform or rectangular distribution	٧٢، ١٤٧، ١٧٧	التوزيع المنتظم (أو المستطيل)
units	٤٨	الوحدات
unknown decisions variables	٣١٧	متغيرات قرارية غير معلومة
unknown probability distributions	٢٧	توزيعات إحتمالية غير معلومة
unsolvable linear prog. Problems	٣٣١	مشاكل برمجة خطية غير قابلة للحل
	V	
variable	٤٨	المتغير
variance	٥٣، ٥٥	تباين
violation measure	٣٣	مقياس عدم تحقق القيد (أو الهدف)
	W	
weighted chi-square distributed random variables	٢٢٥	متغيرات عشوائية تتبع توزيع χ^2 المرجح

المراجع

أولاً: المراجع العربية

[١] سيد احمد (١٩٩١): "برمجة الهدف الاحتمالية في صيانة وأصلاح أنظمة الطياران" رسالة ماجستير، قسم بحوث العمليات وعلوم الحاسب، معهد الدراسات الإحصائية، جامعة القاهرة.

[٢] سيد رمضان (٢٠٠١): "برمجة تعدد الأهداف الأحتمالية لتطوير بعض أنظمة الصفوف لبواسون وتطبيقاتها في قطاع التعليم" رسالة دكتوراه، قسم الإحصاء، كلية التجارة، جامعة بنها.

[٣] عبدالفتاح قنديل (٢٠١٣): "أساليب وفنون التنبؤ بين النظرية والتطبيق" الجزئين الأول والثاني، مكتبة عبدالله الديب، القاهرة.

[٤] عبدالله الهلباوي (٢٠٠٢): "مقدمة في نظرية الإحصاء – الجزء الأول" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة.

[٥] عفاف الدش (١٩٩٩): " نماذج الأنحدار " مكتبة عين شمس، شارع القصر العينى، القاهرة.

[٦] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الإحصاء التطبيقي" الجزء الأول: "الإحصاء الوصفي" الطبعة السابعة، جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة

[٧] عفاف الدش (٢٠٠٩): " الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية " المكتبة الأكاديمية بالدقي، القاهرة.

[٨] عفاف الدش (٢٠١٢): "بحوث العمليات وأتخاذ القرارات" الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[٩] عفاف الدش (٢٠١٣): "الإحصاء التطبيقي" الجزء الثاني: "الإستدلال الإحصائي" الطبعة الخامسة، جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي، جامعة حلوان، القاهرة

[١٠] عفاف الدش (٢٠١٣): "بحوث العمليات وأتخاذ القرارات" الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف" المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة

[١١] عفاف الدش وآخرون (٢٠٠٨): "أستخدام الحزم الجاهزة: **SPSS – Maple – Tora**" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.

[١٢] على الحفناوي (١٩٩١): "طرق التجزئ لبرمجة الهدف اليقينية والأحتمالية" رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة القاهرة.

[١٣] فاطمة الزهراء (٢٠٠٤): "نموذج أحتمالي متعدد الأهداف لحل مشكلة النقل" رسالة ماجستير، قسم بحوث العمليات وعلوم الحاسب، معهد الدراسات الإحصائية، جامعة القاهرة.

[١٤] نجوى البحيري (٢٠٠٣): "البرمجة الاحتمالية لتقدير خط الفقر ومؤشراته" رسالة ماجستير ، قسم الإحصاء، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة القاهرة.

ثانياً: المراجع الأجنبية

[15] Abdel Aty, S. (1954): "Approximate Formula for the Percentage Points and Probability Integral of the non-central χ^2 Distribution" Biometrika, 41, 538-540.

[16] Ahmed, S. and Shapiro, A. (2008): "Solving Chance- Constrained Stochastic Programs Via Sampling and Integer Programming" H. Milton Stewart School of Industrial & Systems Engineering.

[17] Ahmet, U. and Other (2007): "Multi-objective Optimization with Cross Entropy Method: Stochastic Learning with Clustered Pareto Fronts" IEEE, PP 3065.

[18] Alvin, C. (2000): "Linear Models in Statistics" John Wiley & Son's, INC., New York.

[19] Armand, P. and Maliver, C. (1991): "Determination of the Efficient Set in Multi-objective Linear Programming" Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 70, No. 3.

[20] Arthanari, T. and Dodge, Y. (1993): "Mathematical Programming Statistics" John & Son's, INC., New York.

[21] Avriel, A. and Williams, A. (1970): "Complementary Geometric Programming" SIAM J. Appl. Math., Vol. 19, No. 1.

[22] Avriel, M., Dembo, R. and Passy. U. (1975): "Solution of Generalized Geometric Programs" International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9.

[23] Bagai, I. and Rao, P. (1995): "Kernal Type Density Estimates for Positive Valued Random Variables" the Indian Journal of Statistics, Series A, 57, 56-67.

[24] Bawa, V. S. (1973): "An Chance-Constrained Programming Problems with Joint Constraints", Mang. Sci., Vol. 19, No. 11, PP 1326-1331.

[25] Beightler, C. and Phillip, D. (1976): "Applied Geometric Programming" John Wiley & Son's, INC., New York.

[26] Belaid, Abdelaziz and Davide (2012): "The Stochastic Goal Programming Model: Theory and Applications" J. of Multi-Cri. Dec. An., 19: 185-200.

[27] Bhaskar, K. and McName, P. (1983): "Multiple Objectives in Accounting and Finance" J. of Business, Finance and Accounting PP 595-621.

[28] **Bhattacharya (2009): "A Chance-Constrained Goal Programming Model for the Advertising Planning Problem" Europ. J. of apl. Res., Vol. 192, PP. 382-395.**

[29] **Blau, G. and Wilde, J. (1969): "Generalized Polynomial Programming" the Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol, 47, No. 3.**

[30] **Box, B. (1954): "Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the one-way Classification", Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, No. 2.**

[31] **Bradley, G. and Smith, K. (1999): "Calculus" Second Edition, Prentice Hall, New York.**

[32] **Branda, M. (2011): "Stochastic Programming Problems with Generalized Integrated Chance- Constraints" J. of Optimization. April 21.**

[33] **Chang and Wang (1996): "Solid Waste Management System Analysis Multi-objective Mixed Integer Programming" J. of Mang., Vol. 48, PP. 17-43.**

[34] **Chang and Wang (1997): "A Goal Programming Approach for Multi-objective Optimal Planning of**

an Integrated Solid Waste Management System" Waste Management Research, Vol. 15, PP. 1-14.

[35] Charnes, A. and Cooper, W. (1959): "Chance-Constrained Programming" Mang. SC., Vol. 6, No. 1.

[36] Charnes, A. and Cooper, W. (1961): "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming" Vol. 1, John Wiley & Son's, INC., New York.

[37] Charnes, A. and Cooper, W. (1963): Deterministic Equivalent for Optimizing and Statisticing under Chance-Constraints" O. R., Vol. 11, No. 1.

[38] Charnes, A. and Cooper, W. (1967): "Some Special P-Models in Chance-Constrained Programming" Mang. Sci., Vol. 14, No. 3.

[39] Charnes, A. and Cooper, W. (1969): "Deterministic Equivalent for Optimizing and Statisticing under Chance-Constraints in Economic Models, Estimation and Risk Programming" Essay in Honor of G. Tintner, Springer Verlage Berlin, Heidelberg, New York.

[40] Charnes, A. and Kirby, M. (1966): "Optimal Decision Rules for E-Model of Chance-Constrained Programming" Cahiers Due Centre d'Etudes de Recherché Operationnelle, Vol. 8, No. 1.

[41] Charnes, A., Cooper, W. and Ferguson (1955): "Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming" Mang. SC., Vol. 1, No. 2.

[42] Charnes, A., Cooper, W. and Symonds, G. (1958): "Cost Horizons and Certainty Equivalent: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil" Mang. SC., Vol. 4, No. 3.

[43] Charnes, Cooper, Karwan and Wallace (1979): "A Chance-Constrained Goal Programming Model to Evaluate Response Resources for Marine Pollution Disasters" J. Env. Econ. Man. 6, PP. 244-274, 5a.

[44] Charnes, Cooper, Kirby and Raike (1972): "Selected Recent Developments in Chance–Constrained Programming" The 41st National Meeting of ORSA in New Orleans.

[45] Contini, G. (1968): "Stochastic Approach to Goal Programming" O. R., PP 576-586.

[46] Dantzing, G. (1955): "Linear Programming under Uncertainty" Mang. Sci. Vol. 1, No. 3 and 4.

[47] Dantzing, G. (1966): "Linear Programming and Extensions" Princeton University Press, Princeton.

[48] David, F. and Kendall, M. (1949): "Tables of Symmetric Functions – Part I" Biometrika, Vol. 36.

[49] De, P.K., Acharyam, D. and Sahu, K.C. (1982): "A Chance-Constrained Goal Programming Model for Capital budgeting" J. Apns. Res. Soc. 33, PP. 635-638.

[50] Duffin, R., Peterson, E. and Zener (1967): "Geometric Programming Theory and Application" John Wiley & Son's, INC., New York.

[51] El-Dash, A. (1984): "Chance-Constrained and Nonlinear Goal Programming", Ph.D. Thesis, Applied Math. Dept., North Wales Univ. U.K.D.

[52] El-Dash, A. (1988): "Geometric Programming and Cyclic Aircraft Maintenance Flying System" The Egyptian computer Journal, ISSR, Cairo Univ., Vol. 16, PP 42-59.

[53] El-Dash, A. (1989): "Stochastic Goal Programming (SGP) and Agricultural Sector of Under Developed Countries" Proceedings of ORMA Conference, Vol. 1, PP 340-363.

[54] El-Dash, A. (1989): "The Reliability Measures of Probabilistic Multi-objective Programming" Proceeding of O.R. Conference North Wales University, Bangor, U. K. D.

[55] El-Dash, A. (1989): "Two Probabilistic Models for Solving An Inventory Oxygen Problem" Journal of Opl. Res. Soc., Vol. 40, No. 11 U. K. D. PP 961-969.

[56] El-Dash, A. and Abo (2013): "Samulation Study for Non-parametric (M/G/K):(FcFs/∞/∞) Queuing Models" the Egyptian Statistical Journal, ISSR, Cairo Univ.

[57] El-Dash, A. and Abo, E. (2013): "Nonparametric (M/G/1): (FcFs/∞/∞) Queuing System" the Egyptian Journal, ISSR, Cairo Univ.

[58] El-Dash, A. and Bayomi, M. (1992): "Sequential Duality Method for Solving Polynomial Goal Programming Problems" The Egyptian Computer Sci. Journal, ISSR, Cairo Univ., Vol. 20, No. 1, PP 12-38.

[59] El-Dash, A. and El-Shair, S. (1994): "Probablistic Goal Prog. Models with Different Parameterd Exponentially Distributed Coefficients" the Annual International Conference of Statistics, Computer Sciences and Operations Research, Part (V), PP 36-53.

[60] El-Dash, A. and El-Shair, S. (1995): "Probabilistic Multi-objective Prog. Problems with Mixed Exponen-

tially Distributed Coefficients" the 20th International Conference for Statistics, Computer Science, Its Scientific Applications, Cairo Univ., PP 315-332.

[61] El-Dash, A. and Hughes, J. (1984): "Optimizing the Distribution of Foreign Trade Between Parts and Trading Centers" International Seminar, Journal of The Math. of Multi-objective Optimization CISM, Undine, Italy, Page 1-10.

[62] El-Dash, A. and Others (1993): "Lagrangian Analysis for Multi-objective Decision Making Problems" The 18th International Conference for Statistics, Computer Sci., Scientific & Social Applications, Tanta Univ., PP 297-310.

[63] El-Dash, A., Bakry, I. and El-Araby, S. (1988): "The Optimum Distribution of Rockets" the Eleventh Annual International Operations Research Conference, Faculty of Engineering, Zagazig Univ., Vol. 11, PP 73-80.

[64] El-Dash, A., Farag, I. and El-Sherif, A. (1991): "Stochastic Goal Programming for Repair & Maintenance of Flying System" Proceeding of the 16th International Conference for Statistics, Computer Science, Social and Demographic Research, Ain Shams Univ., Vol. 1, PP 345-366.

[65] El-Dash, A., Kandil, A. and Grigis, F. (1996): "The Probability Distribution of A Recalling Level of the Dependent & Independent Events" The Annual Internation Conference on Statistics, Computer Science and Operation Research, ISSR, Cairo Univ., PP 28-47.

[66] El-Maghraby, S. (1958): "An Approach to Linear Prog. Under Uncertainty" O. R. Vol. 7, PP 208-2016

[67] Engau, A. and Wiecek, M. (2005): "Exact Generation of Epsilon Efficient Solution in Multiple-Objective Programming" MSC. Thesis, Dept. of Mathematical Sciences, Clemson University, South Carolina, USA.

[68] Fortson, J. and Dince, R. (1977): "An Application of Goal Programming To Management of A Country Bank" Journal of Bank Research, PP 311-319.

[69] Geletu, A. (2012): "Chance-Constrained Optimization Applications, Properte's and Numerical Issues" I I Menau, University of Technology, Dept. of Simulation and Optimal Processes (SOP).

[70] Geletu, A. and Others (2012): "Advances and Application of Chance-Constrained Approaches to Systems Optimization under Uncertainly" Journal of Sys. Sc.

[71] Girgis, N., El-Dash, A. and Hamid, R. (1986): "Two-Stages Goal Programming Approach" The 21st Annual International Conference in Statistics, Computer Science Information and Operation Research, Vol. 4, ISSR, Cairo Univ., PP 1-16.

[72] Girgis, N., El-Dash, A. and Hamid, R. (1987): "A Sequential Penalty Algorizhm for Solving Nonlinear Goal Programs" The 21st International Conference for Statistics, Computer Science, Social and Demographic Research, Ain Shams Univ. PP 289-297.

[73] Girgis, N., El-Dash, A. and Mahmoud, Z. (1993): "A Parametric Analysis for Probabilistic Lexicographic Linear Goal Programming Problems" Scientific Journal of Commercial Sciences, Faculty of Commerce, Banha, Vol.13, No.1, PP 1-25.

[74] Goodman, N. (2013): "The Principles and Practice of Probability Prog." January 23-25, ACM 978-4503, Rome, Italy.

[75] Gupta, P. and Hira, D. (2007): "Operation Research" S. Chand & Company LTD, New Delhi – 110055.

[76] Gutjahr, W. and Others (2013): "Stochastic Multiobjective Optimization: A Survey on Non-Scalarizing Methods" Annals of O. R. Journal, Special Volume.

[77] Hansotia, B. (1980): "Stochastic Linear Programs with Simple Recourse: The Equivalent Deterministic Convex Program for the Normal, Exponential and Erlang Cases" Noval Research Logistics Quarterly, Vol. 27.

[78] Henrion, R. and Strugarek, C. (2008): "Convexity of Chance Constraints with Independent Random Variables" Comp. Optim. Applic. 41, PP 262.

[79] Heras and Aguado (1999a): "Stochastic Goal Programming with Recourse" Revista de la 1aeal Academia, de Ciencia Exactas, Fisicasy Natural es (España) 92 (4): 409-414.

[80] Heras and Aguado (1999b): "Stochastic Goal Programming" Central European, J. of O.R. 7(3): 139-158.

[81] Ignizio, J. (1976): "Goal Programming and Extensions" Mass Heath (Lexington Books), New York.

[82] Ignizio, J. (1978): "Goal Programming: A Tool for Multi-objective Analysis" Journal of the Apl. R. Society, Vol. 29, II, PP 1109.

[83] Ignizio, J. (1982): "Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems" Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 07632.

[84] Ijiri, Y. (1965): "Management Goals and Accounting for Control" Chicago: Rand-McNally.

[85] Johnson, N. and Kotz, S. (1970): "Continuous Univariate Distributions" 1, 2, Houghton Mifflin Company, Boston.

[86] Johnson, N. T. and Person, E. S. (1969): "Tables of Percentage Points of non-central χ^2" Biometrika, Vol. 56, No. 2, PP. 255.

[87] Joiner, C. and Drake, A. (1983): "Government Planning and Budgeting With Multi-Objective Models" Omega, 11, PP 57-66.

[88] Kall, P. and Wallace, S. (2003): "Stochastic Programming" Second Edition, John Wiley & Son's.

[89] Kelley, I. (1960): "the Cutting Plane Method For Solving Convex Programs", Journal Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 8, No. 4.

[90] Kendall, M. and Stuart, A. (1977): "The Advanced Theory of Statistics" Vol. 1, Charles Griffin & Company Limited, London.

[91] Kendall, M. and Stuart, A. (1979): "The Advanced Theory of Statistics" Vol. 2, Charles Griffin & Company Limited, London.

[92] Kendall, M. and Stuart, A. (1983): "The Advanced Theory of Statistics" Vol. 3, Charles Griffin & Company Limited, London.

[93] Keown, A. (1978): "A Chance–Constrained Goal Programming Model For Bank Liquidity Management", Decision Sciences, January, PP 93-106.

[94] Keown, A. and Martin, J. (1977): "A Chance–Constrained Goal Programming Model For Working Capital Management" The Engineering Economist, Vol. 22, No. 3.

[95] Keown, A. and Taylor, I. (1980): "Chance–Constrained Integer Goal Programming Model for Capital Budgeting in the Production Area" Journal Apl. Res. Soc., Vol. 31, PP 579.

[96] Keown, A.J. (1978): "A Chance–Constrained Goal Programming Model for Bank Liquidity" Mang. Dec. Sci., 9 , PP.93-106.

[97] Keown, Bernard and Taylor (1980): "A Chance-Constrained Integer Goal Programming Model for Capital budgeting in the Production Area" Apl. Res. Soc., Vol.31.

[98] Kibzun, A. and Kan, Y. (1996): "Stochastic Programming

Problems with Probability and Quantile Functions" John Wiley.

[99] Kohler, H. (1994): "Statistic for Business and Economics" Third Edition, Harper Collins, College Publisher, New York.

[100] Lancaster (1969): "The Chi-Squared Distribution", John Wiley, INC., London.

[101] Lapin, L. (1993): "Statistics for Modern Business Decisions" The Dryden Press, London.

[102] Lapin, L. (1994): "Quantitative Methods for Business Decisions: with Cases" The Dryden Press, London.

[103] Lee, M.S. and Alson, D.L. (1985): "A Gradient Algorithm for Chance-Constrained Nonlinear Goal Programming" Eurp. J. Opl. Res., 22, PP. 359-369.

[104] Lin, W. (1980): "A Survey of Goal Programming Applications" Omega, Vol. 8, No. 1.

[105] Linderoth, J. (2003): "Chance-Constrained Programming" IE 495-Lecture 22, April 21.

[106] Marler R. and Arora, J. (2004): "Survey of Multi- Objective Optimization Method for Engineering" Struct Multidisc Optim, 26, PP.369-395.

[107] Marti, K. (2005): "Stochastic Optimization Methods" Springer, New York.

[108] Martinez, A. and Aguodo, A. (1998): "Stochastic Goal Programming with Recourse" Rev. R. Acad. Cien. Exact. Fis. Nat. (ESP), Vol. 92, No. 4, PP 409.

[109] Medhi, J. (1984): "Stochastic Processes" Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[110] Milan, Z. (1982): "Multiple Criteria Decision Making" M.c Graw – Hill Book Company, New York.

[111] Ming-Lung Hung and Other (2006): "A Novel Multi-Objective Programming Approach Dealing With Qualitative and Quantitative Objectives for Environmental Management" Ecological Economics 56, PP 584-593.

[112] Mital, K. (1977): "Optimization Methods In Operations Research and System Analysis" Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[113] Mood, A., Grayhill, F. and Boes, D. (1974): "Introduction to the Theory of Statistics" Third Edition, Internation Student Edition.

[114] Naslund, B. (1967): "Decision Under Risk: Economic Applications of Chance-Constrained Program-

ming" The Economic Research Institute, Stockholm School of Economics.

[115] Nita, H., Ravi, M. and Hardik, S. (2007): "Operations Research" Prentice – Hall of India, New Delhi-110001.

[116] Nunamaker, T. and Truitt (1987): "Rationing Discretionary Economic Resources: A Multi-Objective Approach" Decision Sciences Journal, PP 524-534.

[117] Olson, D. and Swenseth, S. (1987): "A Linear Approximation for Chance-Constrained Programming" Journal of O. R. Society PP 261.

[118] Patnaik. P. (1949): "The Non-Central χ^2 Distribution and their Applications" Biometrika, 36, PP 202-231.

[119] Pearson, E. (1959): "Note on an Approximation to the Distribution of Non-Central χ^2" Biometrika, 46, PP 364.

[120] Press, S. (1966): "Linear Combinations of non-central Chi-Squared Variates" The Annals of Math. Stat. 37, 2, PP. 480-487.

[121] Rakes, T.R. and Reeves, G.P. (1985): "Selecting Tolerances in Chance-Constrained Programming Approach" J. Apns. Res. Soc. 22, PP. 359-369.

[122] Ramadan, H. (1987): "A Sequential Approach for Solving Probabilistic Goal Programming Problems" Ph.D. Thesis, Statistics Dept., Faculty of Economic & Political Science, Cairo University.

[123] Rangoaga, M. (2009): "A Decision Support System for Multi-objective Programming Problems" Msc. Thesis, University of South Africa.

[124] Rao, S. (1978): "Optimization: Theory and Applications" Second Edition, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[125] Ravindran, A., Phillips, D. and Soiberg, J. (2006): "Operations Research: Principles and Practice" Second Edition, Wiley, India.

[126] Richard, B. (1982) : "Operations Research" Schoum's Outline Series- Theory and Problems, M.c Graw – Hill, Book Company, New York.

[127] Rometo, C. (1991): "Handbook of Issues in Goal Programming" Pergamon Press, Oxford.

[128] Ronald, L. (1998): "Optimization in Operations Research" Prentic Hall, New York.

[129] Rupesh, Prem, Pradeep (2008): "A Goal Programming

Model for Paper Recycling System" Omega, Vol. 36, PP.405-417.

[130] Sankaran, M. (1959): "An the non-Central Chi-Squared Distribution" Biometrika, 46, PP. 235-237.

[131] Sankaran, M. (1963): "Approximations the non-Central Chi-Squared Distribution" Biometrika, 50, PP. 199-204.

[132] Scniederjons, S. (1995): "Goal Programming Methodology and Applications" Kluwer Publishers, Boston.

[133] Sengupta, J., Tintner, G. and Millhan, C. (1963): "An Some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications" Mang. Sci. Vol. 10, No. 1.

[134] Sengupta, J. (1969): "Distribution Problems in Stochastic and Chance-Constrained Programming in Economic Models Estimation" in Honor of Tintner, Springer, Verlag, New York.

[135] Sengupta, J. and Fox, K. (1969): "Optimization Techniques in Quantitative Economic Models" North – Holland Publishing Company, London.

[136] Sengupta, J. and Gruver, G. (1969): "A Linear Reliability Analysis in Programming with Chance-

Constraints" The Swedish Journal of Economics.

[137] Sengupta, J. (1970): " A Generalization of Some Distribution Aspects of Chance-Constrained Linear Programming" Int. Economic Review, Vol. 11, No. 2.

[138] Sengupta, J. (1970): "An the Active Approach of Stochastic Linear Programming" Matrika, Vol. 15, PP 59-70.

[139] Sengupta, J. (1971): "A System Reliability Approach to Linear Programming Unternehmensforschung, Vol. 15, PP 112-129.

[140] Sengupta, J. (1972): "Chance-Constrained Linear Programming with Chi-Square Type Deviates" Mang. Sci., Vol. 14, No. 3.

[141] Sengupta, J. (1972): "Stochastic Programming Methods and Applications" North Holland Publishing Company, Amsterdam.

[142] Sengupta, J. and Tintner, G. (1971): "A Review of Stochastic Linear Programming" Rev. of the Inter. Stat. Inst. Vol. 39.

[143] Sheskin, D. (2000): "Handbook of Parametric and Non-

parametric Statistical Procedures" 2^{nd} Edition, Chapman & Hall, New York.

[144] Smith, M. (2007):"Calculus" Third Edition, Mc Graw – Hill Higher Education, New York.

[145] Spahr, R. and Hebert, I. (1987): "A Non-Linear Goal Programming Approach to Risk Analysis in Capital Budgeting" Advances In Mathematical Programming and Financial Planning, Vol. 1, PP 45-57.

[146] Stadler, W. (1988): "Fundamentals of Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences" PP 1-25, New York, Plenum Press.

[147] Stewer, R. (1986): "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications" John Wiley & Son's, New York.

[148] Taha, H. (1997): "Operation Research: An Introduction", Prentice Hall, International, INC.

[149] Tintner, G. and Sengupta, J. (1972): "Stochastic Economics: Stochastic Processes, Control and Programming" Academic Press, New York.

[150] Vajda, S. (1972): "Probabilistic Programming" Academic Press, New York.

[151] Vira, C. and Yacov, Y. (1983): "Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology" Series Volume 8.

[152] Vlasta, K. (1999): "Stochastic Programming Approach to Multi-objective Optimization Problems with Random Element" Academy of Sciences of the Czech Republic.

[153] Wagner, H. (1975): "Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions" Second Edition, Prentice Hall International Edition, London.

[154] Walkup, D. and Wets, J. (1970): "Stochastic Programs with Recourse: Special Forms" Proceedings of Princeton Symposium on Mathematical Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[155] Wets, J. (1966): "Programming Under Uncertainty: the Equivalent Convex Program" Journal SIAM Appl. Math., Vol. 14, No. 1.

[156] Wets, J. (1972): "Characterization Theorems for Stochastic Programs" Mathematical Programming Journal, No. 2, PP 166-175.

[157] Wikipedia, The Free Encyclopedia (2014): "Non-Central Chi-Squared Distribution".

[158] Yadavalli, V. and Other (2007): "Reliability Stochastic Optimization for an N-Stage Series System with M-Chance Constraints" South African Journal of Science103, November/December.

[159] Yu, P. (1974b) "Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions on Decision Problems With Multi-objectives" Journal of Optimization Theory and Applications14, PP 319-377.

كتب للمؤلفة

- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات – الجزء الثالث: "البرمجة الأحتمالية" (سنة ٢٠١٥م)- المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير - الدقي – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات – الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف" (سنة ٢٠١٣م)- المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير - الدقي – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات – الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" (سنة ٢٠١٢م)- المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير - الدقي – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية (سنة ٢٠٠٩م) – المكتبة الأكاديمية– شارع التحرير - الدقي – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- استخدام الحزم الجاهزة SPSS – Maple – TORA (سنة ٢٠٠٨م) – بالاشتراك مع آخرين - جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الثاني: "الإستدلال الإحصائي" (سنة ٢٠٠٦م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الأول: "الإحصاء الوصفي" (سنة ٢٠٠٠م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- رياضيات الاستثمار (سنة ٢٠٠٠م) - جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- الرياضيات وصناعة القرارات (سنة ١٩٩٦م) – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني – القاهرة – جمهورية مصر العربية.
- نماذج الانحدار (سنة ١٩٩٠م) - مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني– القاهرة – جمهورية مصر العربية.