برمجة تعدد الأهداف

الطبعة الأولى

بحوث العمليات وأتخاذ القرارات

الأساليب - التطبيق - أستخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثانى

البرمجة متعددة الأهداف

Multi-objective Programming

الطبعة الأولى

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء - رئيس قسم الرياضة
والإحصاء التطبيقى ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً
كلية التجارة وإدارة الأعمال - جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية - شارع التحرير بالدقى - القاهرة

١٤٣٤ هـ / ٢٠١٣ م

بحوث العمليات وأتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – أستخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثاني

البرمجة متعددة الأهداف

Multi-objective Programming

الطبعة الأولي

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

توزيع

المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير بالدقي – القاهرة

١٤٣٤هـ / ٢٠١٣م

بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – أستخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الثاني

البرمجة متعددة الأهداف

الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٣م

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي
ووكيل الكلية للدراسات العليا سابقاً
كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

الطبعة الأولي: سنة ١٤٣٤هـ/٢٠١٣م – الموزع – المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة.

رقم الإيداع: ٧٣٢٣ / ٢٠١٣

الترقيم الدولي: ٦-٥١٢-٠-٩٠ -٩٧٧ -٨ -٩٧

الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف"

الطبعة الأولي: سنة١٩٨٧– الناشر – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني – القاهرة.

رقم الإيداع: ٨٨٨٧ / ١٩٨٧

الترقيم الدولي: ٠-٠١١٣-٠٧-٩٧٧

الطبعة الثانية:

رقم الإيداع: ٢٠١٢/٣٥٧٣

الترقيم الدولي:١-٥٥٠-٧١٦-٩٧٧-٩٧٨

بسم الله الرحمن الرحيم

{ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاء مَاء فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَداً رَّابِياً وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاء حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِّثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاء وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآيه ١٧)

الفهرس

الموضوع	الصفحة

مقدمة

تعتبر أساليب البرمجة الرياضية Mathematical programming techniques وتسمى أيضاً بأساليب الأمثلية optimization techniques من أهم أساليب بحوث العمليات، ويرجع ذلك لأهميتها التطبيقية كذلك لأهميتها بالنسبة لأساليب بحوث العمليات الأخرى. وتعتبر أساليب برمجة تعدد الأهداف Multi-objective programming فئة جزئية subset من أساليب البرمجة الرياضية.

ويرجع أصطلاح ومفهوم "برمجة تعدد الأهداف" للمرة الأولى إلى سنة ١٩٥٠ عندما نشر كل من Kuhn-Tucker أسلوب تعظيم المتجه vector maximization technique. ومن هذا التاريخ بدأ التفكير والبحث بفلسفة تعدد الأهداف كواقع أعم من التفكير والبحث بفلسفة الهدف الواحد single-objective، وكان ذلك ضرورة حتمية لتطور الأنظمة والمشاكل ذات الحجم الكبير، مما أدى إلى ظهور المشاكل القرارية decision's problems متعددة الأهداف. ومنذ ذلك التاريخ وتوالت الأبحاث النظرية والتطبيقية في هذا المجال، ولكن التطبيق على نطاق واسع بدأ بعد تقديم كل من March and Simon سنة ١٩٥٨ مفهوم البدائل (الحلول) المرضية satisfactory alternatives في وجود تعدد الأهداف، حيث يصبح مفهوم الحل الأمثل optimal solution بالنسبة للمشاكل متعددة الأهداف مفهوم ضبابي murky concept وبصفة خاصة في حالة وجود أهداف متعارضة conflecting objectives.

ولكن تعتبر البداية الحقيقية لأستخدام وتطوير أساليب برمجة تعدد الأهداف في بداية الستينيات من القرن الماضي عند البدء في تنفيذ برنامج الفضاء الأمريكي أبولو Saturn/Apollo program عندما واجه عالم الأتصالات Ignizio بعض المشاكل

في تصميم نظام الاتصالات الهوائية التي يجب أن تحقق عدد من الأهداف المتعارضة. وتوالت بعد ذلك العديد من الدراسات في تطوير الأساليب أو التطبيق في القطاعات المختلفة.

ونظراً لأهمية أساليب بحوث العمليات والتطور العظيم والمستمر في أساليبها المختلفة، كذلك تطبيقاتها على نطاق واسع في القطاعات والعلوم المختلفة: البنوك، الإدارة، الاتصالات، الاقتصاد، ... الخ – كذلك العجز الشديد في المكتبة العربية بالنسبة للكتابات العلمية بصفة عامة وبالنسبة لبحوث العمليات بصفة خاصة – مما دفعني لكتابة ونشر الجزء الثاني من كتاب "**بحوث العمليات واتخاذ القرارات**". حيث يتكون الكتاب من ثلاثة أجزاء:–

- الجزء الأول تحت عنوان: "**البرمجة وحيدة الهدف**"
- الجزء الثاني تحت عنوان: "**البرمجة متعددة الأهداف**"
- الجزء الثالث تحت عنوان: "**البرمجة الاحتمالية**"

والأجزاء الثلاثة تصاعدية بمعنى أن تناول الجزء الثاني يتطلب ضرورة الإلمام بالموضوعات بالجزء الأول، كذلك يتطلب تناول الجزء الثالث ضرورة الإلمام بالموضوعات بالجزئيين الأول والثاني أولاً. ويحتوى هذا الجزء على ثمانية أبواب:

الباب الحادي عشر تحت عنوان: برمجة تعدد الأهداف

يتناول هذا الباب نبذة تاريخية عن أساليب برمجة تعدد الأهداف وأهميتها، كذلك يتناول عديد من المشاكل متعددة الأهداف وكيفية صياغتها في شكل نماذج برمجة متعددة الأهداف. ثم عرض بسيط لأهم أساليب برمجة تعدد الأهداف، هذا بالإضافة إلى تقديم أهم المتطلبات الأساسية لتناول الموضوعات بهذا الجزء من الكتاب.

الباب الثاني عشر تحت عنوان: طرق الحلول الكفأ (حلول باريتو المثلى)

ويتناول هذا الباب بعض التعريفات الأساسية لتناول بعض طرق الحل لنماذج البرمجة متعددة الأهداف ومن أهمها طريقة الأوزان الترجيحية weighting method، طريقة الأولويات prioritizing (ranking) method، وطريقة التدرج Hierarchical method بالإضافة إلى تقديم مجموعة متنوعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب الثالث عشر تحت عنوان: مشاكل برمجة الهدف

ويتناول هذا الباب المفاهيم الأساسية لبرمجة الهدف Goal programming، كذلك كيفية صياغة المشكلة متعددة الأهداف كنموذج برمجة هدف بالإضافة إلى مجموعة متنوعة من الأمثلة التطبيقية والتمرينات المتنوعة.

الباب الرابع عشر تحت عنوان: برمجة الهدف الخطية

ويتناول هذا الباب نماذج برمجة الهدف الخطية والطرق المختلفة لحلها: طريقة الحل البياني، طريقة السمبلكس المعدلة Modified Simplex Method، طريقة الحلول المتتابعة Sequential solutions method، بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة المتنوعة ومجموعة من التمرينات المختلفة.

الباب الخامس عشر تحت عنوان: تحليل الحساسية في برمجة الهدف الخطية

ويتناول هذا الباب أهمية تحليل الحساسية بالنسبة لنماذج برمجة الهدف الخطية. كذلك يتناول بالتفصيل تأثير التغيرات في المعاملات الترجيحية

Weighting factors، والتغيرات في المستويات المرجوة Aspiration levels للأهـداف، والتغيـر فـي بعـض المعلمـات parameters. كـذلك يتضمن الباب مجموعة متنوعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب السادس عشر تحت عنوان: برمجة الهدف غير الخطية

ويتناول هذا الباب نماذج برمجة الهدف غير الخطية من حيث الصياغة ثم يقدم الطرق المختلفة لحل النماذج غير الخطية: طريقة التقريب الخطي Linear Approximation's method، وطـريقـة الحلـول المتتـابعـة Sequential Solutions method. بالإضافة إلى تقديم الخوارزميات لهذه الطرق كذلك مجموعة متنوعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب السابع عشر تحت عنوان: مشاكل النقل والتخصيص متعددة الأهداف

ويتنـاول هـذا البـاب مـشكلتي النقـل والتخـصيص كمـشاكل برمجـة متعـددة الأهداف، وكيفية تحويلها إلى نماذج برمجة هدف (خطية أو غير خطية) وتقديم أفضل حلول توافقية لها بأستخــدام الطــرق المقــدمة في البابيــن ١٤، ١٦. كذلك يتضمن الباب مجموعة متنوعة من الأمثلة بالإضافة إلى مجموعة من التمرينات المختلفة.

الباب الثامن عشر تحت عنوان: البرمجة الرياضية وتحليل الانحدار

ويتناول هذا الباب العلاقة التبادلية بين أساليب البرمجة الرياضية وأساليب الاستدلال الإحصائيstatistical inference techniques. حيث يتناول مشكلة أيجاد أفضل تقديرات لمعلمات نماذج الانحدار الإحصائية بأستخدام معايير مختلفة، من خلال عرض مشاكل التقديرات كمشاكل برمجة رياضية

وحلها بأستخدام طرق الحل لمشاكل البرمجة الرياضية ومنها: طريقة المربعات الصغرىLeast squares method، وطريقة المربعات الصغرى المقيدة Restricted least squares method، وطريقة الإمكان الأكبر Maximum likelihood method. كذلك يتناول الباب مجموعة من الأمثلة المتنوعة ومجموعة من التمرينات المختلفة.

بالإضافة إلى الأبواب السابقة فإن هذا الجزء يتضمن قائمة باللغة العربية والإنجليزية لأهم المصطلحات الواردة بهذا الجزء من الكتاب، بالإضافة إلى قائمة متنوعة من المراجع العربية والأجنبية المتخصصة.

وأخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجد الباحث العربي في هذا الجزء لبنه من لبنات البناء،عسى أن تجد من المتخصصين العرب من يقدم إسهاماته في هذا العلم.

والله ولى التوفيق

المؤلفة

أ.د عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات والإحصاء

كلية التجارة – جامعة حلوان

الباب الحادى عشر
برمجة تعدد الأهداف
Multi-objective Programming (MOP)

(١١-١) رؤية تاريخية   **A Historical perspective**

(١١-٢) مشاكل برمجة تعدد الأهداف   **Multi-objective Programming problems (MOPP)**

(١١-٣) بناء النموذج   **Structure of the Model**

(١١-٤) أساليب حل مشاكل برمجة تعدد الأهداف
Solution's Techniques for MOPP

(١١-٥) متطلبات أساسية   **Basic Prerequisites**

(١١-٦) تمرينات   **Exercises**

(١١- ١) رؤية تاريخية A Historical perspective

منذ نشر طريقة السمبلكس simplex method سنة ١٩٤٧ التى قدمها Dantzing لحل مشاكل البرمجة الخطية على نطاق واسع ، وتكونت العديد من المدارس العلمية لتطوير وتطبيق أسلوب البرمجة الخطية [18].

ومن أهم المدارس التى تم تكوينها المدرسة العلمية التى كونها كل من Kuhn and Tucker – حيث قدما سنة ١٩٥٠ أسلوب تعظيم المتجه Vector maximization technique لحل مشاكل البرمجة غير الخطية متعددة الأهداف Nonlinear multi-objective programming problems [92]. وتعتبر هذه المرة الأولى لأستخدام مفهوم وأصطلاح برمجة تعدد الأهداف Multi objective programming [86, 79].

وفى نفس التوقيت تقريبا قام كل من Charnes and Cooper بتطوير نموذج تعظيم المتجه vector-maximum model الذى قدماه Kuhn and Tucker بهدف توفيق منحنى للإنحدار وسميت الطريقة التى قدماها بطريقة الانحدار المقيد method of constrained regressions [15, 45, 46].

ومنذ سنة ١٩٥٠ وبدأ التفكير والبحث بفلسفة تعدد الأهداف Multi-objective كواقع أعم من التفكير والبحث بفلسفة الهدف الواحد Single objective. أو بعبارة أخرى أصبح التفكير والدراسة لمشاكل البرمجة (خطية أو غير خطية) فى ظل وجود فئة set من الأهداف، كل عنصر فى هذه الفئة يمثل هدف objective من أهداف المشكلة. وبالتالي تصبح مشكلة البرمجة وحيدة الهدف حالة خاصة من مشكلة تعدد الأهداف حيث تكون فئة الأهداف فى هذه الحالة مكونة من عنصر واحد فقط.

وفى سنة ١٩٥٨ تطورت هذه الفلسفة من خلال إقرار الفروض التى قدمها كل من March and Simon [74]. والتي مؤداها :"معظم القرارات الإنسانية سواء على مستوى الدولة أو المؤسسة أو على المستوى الشخصى أيضاً تهتم بإختيار البدائل المرضية Satisfactory alternatives ، وذلك نظراً لوجود التعارض في بعض الإمكانيات أو الأهداف، وفى حالات استثنائية exceptional cases فقط (الحالات التى لا توجد بها أى تعارض فى الإمكانيات أو الأهداف) يكون الإهتمام بإختيار البدائل المثلى optimal alternatives ".

ومن هذا التاريخ كون كل من Charles and Cooper مدرسة تهتم بتناول العديد من المشاكل الصناعية التى يمكن صياغتها فى شكل نماذج برمجة خطية ولكن غير قابله للحل باستخدام أساليب حل مشاكل البرمجة الخطية وذلك لوجود التعارض، وأطلقا عليها أسم "مشاكل خطية غير قابلة للحل unsolvable linear Programming Problems" حيث يوجد بعض القيود الهيكلية المتعارضة conflecting constraints ، كذلك وجود أكثر من هدف Multi-objective بعضها متعارضة ومتنافسة أيضا conflecting and competitive objectives ، وسوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الباب الثالث عشر.

وفى سنة ١٩٦١ قدما كل من Charles and Cooper للمرة الأولى أسلوب برمجة الهدف الخطية linear goal programming technique [15] الذي يتناول المشاكل متعددة الأهداف للحصول على أفضل حلول توافقية best compromise solutions (أي أفضل بدائل مرضية التى سبق وأن تناولها كل من March and Simon سنة ١٩٥٨ [18, 53]).

ولكن تعتبر الأهمية الحقيقية لأستخدام وتطوير الأساليب المختلفة التى تتناول مشاكل برمجة تعدد الأهداف منذ بداية الستينيات من القرن الماضي عند تنفيذ برنامج الفضاء الأمريكى أبولو The Saturn / Apollo Program [51]. عندما واجه العالم Ignizio بعض المشاكل فى تصميم نظم الاتصالات الهوائية التي يجب أن تحقق عدد من الأهداف المتعارضة conflecting objectives. حيث أمكن صياغة هذه المشاكل فى صورة نماذج برمجة غير خطية متعددة الأهداف المتعارضة والمعقدة أيضاً، حيث أمكنه بالإشتراك مع آخرين [45, 53] من إستخدام أسلوب برمجة الهدف الذى قدماه Charles and Cooper في حل النماذج المعقدة. وكانت النتائج التى تم الحصول عليها فى تنفيذ برنامج أبولو ناجحة مما أدى إلى تطوير وإتساع نطاق أستخدام أسلوب برمجة الهدف goal programming approach .

فى سنة ١٩٦٥ قدم Ijiri لأول مرة تعريف مفهوم الأولويات المرتبة Preemptive Priorities فى أسلوب برمجة الهدف. حيث أعتبر أن الهدف (أو المعيار) المرتبط بالأولوية رقم (j) أهم من الهدف (أو المعيار) المرتبط بالأولوية (j+1) حيث يوجد لدينا عدد K من الأهداف (أو المعايير) أى $j=1,2,..,K$. ووفقاً لهذا المفهوم تم صياغة المتجة الترتيبى ordered vector لدوال الإنجاز (دالة الإنجاز هي الدالة (أو المعيار) التي تقيس مدى تحقق الهدف) فى وضع الصياغة "التصغير وفقاً لأولويات Lexicographic minimum of ordered vector" [56] كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فى الباب الثالث عشر.

فى سنة ١٩٦٨ قدم Contini أسلوب برمجة الهدف العشوائية stochastic goal programming approach [16, 24] حيث تناول المشاكل ذات المعلمات العشوائية ووجود أهداف متعددة.

وفى سنة ١٩٧٦ قدم كل من Dauer and Krueger أسلوب تكراري iterative approach لحل المشاكل متعددة الأهداف الخطية وغير الخطية سواء للحصول على حلول مثلى بديلة إذا أمكن ذلك، أو الحصول على أفضل حلول توافقية [19,20] . وكان لهذا الأسلوب أهمية بالغة فى حل مشاكل تعدد الأهداف ذات الحجم الكبير وعلى نطاق واسع لأمكانية أستخدام حزم البرامج الجاهزة الموجودة لحل مشاكل الأمثلية وحيدة الهدف فى حل المشاكل متعددة الأهداف بأستخدام الأسلوب التكرارى.

فى سنة ١٩٧٢ نشر Lee كتاب تحت عنوان: "Goal Programming for Decision Analyses" [71] تناول معظم التطبيقات الإجتماعية والإنسانية لأسلوب برمجة الهدف، كذلك قدم فكرة يمكن بأستخدامها أستخدام طريقة السمبلكس الجدولية لحل مشاكل برمجة الهدف الخطية.

فى سنة ١٩٧٦ نشر Ignizio كتاب تحت عنوان "Goal Programming and Extensions" حيث قدم للمرة الأولى طريقة السمبلكس المعدلة من خلال تصميم الجدول متعدد الجوانب، وتعتبر هذه الطريقة تطوير لفكرة Lee كذلك قدم بعض الطرق لحل مشاكل برمجة الهدف غير الخطية nonlinear goal programming problems [53].

ثم قدم فى سنة ١٩٨٢ مرجع تحت عنوان: "Linear Programming in Single & Multiple-objective Systems" حيث تناول بعض الأساليب الحديثة فى دراسة المشاكل متعددة الأهداف بصفة عامة وبرمجة الهدف بصفة خاصة مثل [55]:

- أسلوب فئة الحلول الكفأ Set of efficient Solution Approach
- أسلوب البرمجة المشوشة Fizzy Programming Approach

وفى سنة ١٩٨٠ قدم Markowski النظرية الثنائية Duality Theory لبرمجة الهدف الخطية [75] مما أدى إلى التوسع فى دراسة تحليل الحساسية لنماذج برمجة الهدف مع التوسع فى إستخدام التحليل فى التطبيقات الإقتصادية والصناعية [31].

فى سنة ١٩٨٤ قدمت El-Dash أسلوب برمجة الهدف الأحتمالية Probabilistic Goal Programming Approach لدراسة وحل المشاكل متعددة الأهداف التى تتضمن معلمات عبارة عن متغيرات عشوائية لها توزيعات احتمالية معروفة [24] ثم قدمت بالاشتراك مع آخرين العديد من التطبيقات لهذا الأسلوب فى التخزين [27]، النقل [30,5]، الإنتاج [32,15]، التخصيص [26]، التعليم [110]، وقطاعات أخرى [30,31,33,34,35].

ونظرا لأن معظم المشاكل الفعلية الإجتماعية، الإقتصادية، السياسية، الصناعية، ...... الخ تندرج تحت المشاكل التى يهدف متخذ القرار فيها إلى الحصول على أفضل حلول توافقية لها، لذلك أستخدمت أساليب برمجة الهدف goal programming approaches على نطاق واسع فى حل العديد من المشاكل المالية والإدارية فى القطاعات المالية والبنوك [103,94,104] كذلك فى المراقبة المالية والتخطيط المالى [72,68,50] ، كذلك فى التخطيط للقطاعات الكيمائية والطبية والبيئية [9,22,80,104].

(١١-٢) مشاكل برمجة تعدد الأهداف
Multi-Objective Programming Problems (MOPP)

وكما ذكرنا فى الفصل السابق، أنه بإنتهاء الحرب العالمية الثانية ومع بداية النصف الثانى من القرن العشرين أخذ فى تطبيق أساليب بحوث العمليات فى حل كثير من المشاكل الفعلية فى معظم القطاعات وعلى نطاق واسع.

ونظراً لكبر حجم هذه المشاكل وتعقدها وتنوع مكوناتها مما أدى إلى تعدد الأهداف objectives أو المعايير criteria التى يرغب متخذ القرار فى تحقيقها [101,88]. أو بعبارة أخرى إمكانية صياغة المشاكل كنماذج برمجة (خطية أو غير خطية) متعددة الأهداف بدلاً من وجود هدف واحد [79,101,92].

(١١-٢-١) بعض الأمثلة لتعدد الأهداف

وفيما يلى سوف نعطى بعض الأمثلة التطبيقية لمشاكل تعدد الأهداف التي يمكن صياغة كل منها فى صورة نموذج برمجة متعددة الأهداف [92]:

مشكلة(١): مشكلة جدولة تكرير البترول

Oil Refinery Scheduling Problem

بالنسبة لمشكلة جدولة تكرير البترول يمكن صياغتها كمشكلة برمجة متعددة الأهداف ، حيث يمكن أن يرغب متخذ القرار فى تحقيق الأهداف التالية:

(١) تقليل التكاليف   Min. (Cost)

(٢) تقليل كمية البترول الخام المستورد   Min. (Imported crude)

(٣) تقليل الإنحرافات عن حالة الطلب فى السوق
Min. (Deviations from Demand State)

(٤) تقليل حدوث اشتعال للغازات　　Min. (Flaring of Gases)

وفى ظل هذه الأهداف يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة متعددة الأهداف.

مشكلة (٢): مشكلة تخطيط الإنتاج　　Production Planning Problem

وفـى القطاعـات الإنتاجيـة يمكـن صـياغة مـشكلة تحديـد حجـم الإنتـاج الأمثـل كنموذج برمجة متعددة الأهداف حيث يرغب متخذ القرار فى تحقيق الأهداف التالية:

(١) تعظيم العائد الصافى الكلى　　Max. (Total net Revenue)

(٢) تعظيم أقل صافى عائد فى أى فترة
Max. (Minimum Net Revenue in Any Period)

(٣) تقليل الوقت الإضافي للعمل　　Min. (Overtime)

(٤) تقليل الطلبات المتأخرة　　Min. (Back orders)

(٥) تقليل حجم المخزون من البضائع النهائية
Min. (Finished Goods Inventory)

مشكلة (٣): مشكلة تكوين حافظة الأوراق المالية
Portfolio Selection Problem

فـى المؤسـسات الماليـة والبنـوك تكـون مـشكلة الحـصول علـى التـشكيل (أو التكوين) الأمثل لحافظة الأوراق المالية من المشاكل الهامة، حيث يرغب متخذ القرار فى تحقيق الأهداف التالية:

(١) تعظيم العائد　　Max. (Return)

(٢) تقليل المخاطرة　　Min. (Risk)

(٣) تعظيم الحصص　　Max. (Dividends)

(٤) تصغير الأختلافات عن أهداف تنوع الحافظة
Min. (Deviations from Diversification Goals)

مشكلة (٤): مشكلة تحديد الموازنة الرأسمالية

Capital Budgeting Problem

عند تحديد القيم المثلى لعناصر الموازنة الرأسمالية فى المؤسسات والهيئات، يكون لدى متخذ القرار عدة أهداف منها الأهداف التالية:

(١) تعظيم صافى القيمة الحالية Max. (Net Present Value)

(٢) تصغير المتطلبات الاستثمارية الرأسمالية
Min. (Capital Investment Requirements)

(٣) تقليل نفقات التشغيل السنوية
Min. (Annual Operating Expenses)

(٤) تعظيم الاستثمارات فى المشروعات المرتبطة بحماية البيئة
Max. (Investment in Projects Related To Environmental Protection)

مشكلة (٥): مشكلة النقل Transportation Problem

بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية كأن يتم حل مشكلة النقل على أساس وجود هدف (أو معيار) واحد هو تصغير تكلفة النقل. ولكن بعد تقديم أسلوب برمجة تعدد الأهداف، أصبح فى إمكانية متخذ القرار تحقيق عدة أهداف معاً، وعلى سبيل المثال:

(١) تقليل التكاليف Min. (Cost)

(٢) تقليل المخاطرة Min. (Risk)

(٣) تقليل متوسط زمن النقل للعملاء ذات الأولوية
Min. (Average Shipping time to priority customers)

ومما سبق يتضح أن تعدد الأهداف لدى متخذ القرار ثم العمل على تحقيقها بأستخدام أساليب حل مشاكل برمجة تعدد الأهداف كما سوف نوضح ذلك فى الأبواب التالية يعطى رؤية كمية واضحة ذات أبعاد متعددة لمتخذ القرار (أنظر الباب الأول بمرجع [٤]).

(١١-٢-٢) مكونات نموذج برمجة تعدد الأهداف

نموذج برمجة تعدد الأهداف هو الصياغة الرياضية mathematical form للمتغيرات (أو العناصر) السائدة للمشكلة والتي تسمى في نماذج البرمجة بشكل عامه بالمتغيرات القراريه decision's variables أى المتغيرات المطلوب أتخاذ قرارات بشأنها أى تحديد قيمها المثلى بالإضافة إلى المتغيرات التحكمية (المعلمات Parameters) أى المتغيرات التى تعكس العوامل المؤثرة فى المشكلة وخارج نطاق تحكم متخذ القرار. كذلك يتكون النموذج من العلاقات بين المتغيرات القراريه والتحكمية وعادة تسمى بالقيود الهيكلية، كذلك يتكون النموذج من عدد من الأهداف (المعايير) حيث يتمثل كل هدف منها فى شكل دالة فى المتغيرات القراريه والتحكمية التي يرغب متخذ القرار في تعظيمها (أو تصغيرها) وفقاً لأولويات، حيث يتم ترتيب هذه الأهداف وفقا لأولوياتها.

مما سبق يمكن تحديد مكونات نموذج البرمجة متعددة الأهداف على النحو التالى:-

- متغيرات قراريه وعادة يرمز لها بالرمز X_j بحيث $j=1,2,....,n$. إذا كان لدينا عدد (n) من المتغيرات القراريه أو نرمز لها بالرمز X حيث X متجة من الترتيب $(n\times1)$.
- معلمات Parameters وهى المتغيرات التحكمية control variables وعادةً تعتبر معطيات لمتخذ القرار.

- قيود هيكلية فى شكل متباينات أو معادلات، الطرف الأيسر لكل قيد عبارة عن دالـة فى المتغيرات القراريـه، فإذا كان لدينا عدد m من القيود فأن القيد رقم (i) يصبح على النحو:

$$g_i(X) \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i \quad , \quad i = 1,2,....,m \qquad (11.\ 1)$$

حيث $g_i(X)$ دالة فى المتغيرات القراريه X .

- الأهداف Objectives وهى عبارة عن دوال فى المتغيرات القراريه. فإذا كان لدينا عدد k من الأهداف فأن الهدف رقم (t) يأخذ الشكل التالى:

$$\text{Max.(or Min.)}\ Z_t = f_t(X) \quad , \quad t = 1,2,....,k \qquad (11.2)$$

ويلاحظ أنـه عنـدما $K = 1$ فـإن النمـوذج يـصبح نمـوذج برمجـة وحيـدة الهـدف Single Objective Programming Model.

- أولويات Priorities للأهداف، عادة يكون الهدف رقم $(t-1)$ أهم من الهدف رقم (t)بحث $t = 2,3,.....,k$. وبالتالي يكون للهدف رقم (1) أولويه (أهمية) عن الهدف رقم (2)، والهدف (2) يكون لـه أهميه أو أولويه عن الهدف (3)، وهكذا. وفى بعض الكتابات يشير إلى ذلك على النحو التالى [71]:

$$\text{Max.(or Min.)}\ Z_{t-1} >> \text{Max.(or Min.)}\ Z_t \quad , \quad t = 2,..,k \quad (11.3)$$

حيث يشير الرمز (<<) أن الهدف فى الطرف الأيسر أهم من الهدف فى الطرف الأيمن فى العلاقة (11.3).

ومما سبق فأن نموذج برمجة تعدد الأهداف يصبح على النحو التالى:

$$\text{Max.(or Min.) } Z_t = f_t(X) \qquad , \quad t = 1,2,....,k$$

$$\text{S.T.} \qquad g_i(X) \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i \qquad , \quad i = 1,2,....,m$$

بحيث: $X = [x_1, x_2, ..., x_n]'$

<u>ملحوظة</u>: عندما تكون جميع الدوال $f_t(X)$, $g_i(X)$ حيث $i = 1,2,...,m$ ، $t = 1,2,...k$ دوال خطية يكون النموذج نموذج برمجة خطية متعددة الأهداف Multi-Objective Linear Programming Model، وفى حالة وجود دالة واحدة على الأقل من الدوال $f_t(X)$, $g_i(X)$ دالة غير خطية يكون النموذج نموذج برمجة غير خطية متعدد الأهداف Multi-Objective Nonlinear Programming Model.

وفى الفصل التالى سوف نقدم كيفية صياغة المشاكل متعددة الأهداف كنماذج برمجة متعدد الأهداف من خلال العديد من الأمثلة التطبيقية التالية.

(١١-٣) بناء النموذج Structure Of The Model

فى هذا الفصل سوف نوضح كيفية بناء نماذج البرمجة متعددة الأهداف من خلال مجموعة من الأمثلة التطبيقية فى القطاعات الإنتاجية أو الخدمية [17,42].

مثال (١١-١): مشكلة تخطيط الإنتاج

إذا اعتبرنا شركة لتصنيع ثلاثة أنواع من الأجهزة الإلكترونية A,B,C من خلال خطى أنتاج منفصلين I , Π . والجدول التالى يوضح الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج فى كل خط إنتاج، كذلك الزمن المتاح بالساعات خلال الشهر لكل خط . بالإضافة إلى ربح الوحدة من كل منتج. كذلك تكلفة الفرصة الضائعة لبيع الوحدة الواحدة (بمعنى وجود طلب في السوق ولكن لا يمكن تحقيقه).

جدول (١١-١): متطلبات الإنتاج

المنتج / خط الإنتاج	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة بالساعة			ساعات التشغيل الشهرية المتاحة
	A	B	C	
I	2	3	1	600
Π	1	5	4	450
ربح الوحدة بالجنيه	200	300	250	
تكلفة الفرصة الضائعة للوحدة بالجنية	20	40	30	

كذلك تتطلب الوحدة الواحدة من كل نوع A,B,C عدد 2,5,3 وحدة على الترتيب من أحد مستلزمات الإنتاج والمتاح من هذا المستلزم 2000 وحدة فى الشهر القادم. كذلك أفادة إدارة التسويق أن حجم الطلب المتوقع من كل نوع في السوق الشهر القادم لا يزيد عن 200,150,120 على الترتيب.

ويرغب متخذ القرار فى تحديد عدد الوحدات التى يجب أنتاجها من كل نوع لطرحها فى السوق الشهر القادم بحيث تحقق الأهداف التالية وفقا لترتيبها:

١. تعظيم الربح.
٢. تقليل تكلفة التخزين الشهرية.
٣. تصغير النقص فى العجز عن تغطية طلب السوق.

والمطلوب: صياغة المشكلة كنموذج برمجة متعدد الأهداف.

الحل: لصياغة المشكلة كنموذج برمجة متعددة الأهداف نتبع الخطوات التالية:

١- المتغيرات القراريه: نفرض أن x_1, x_2, x_3 تشير إلى عدد الوحدات التى يجب أنتاجها من A,B,C على الترتيب بحيث $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

٢- القيود:

القيد الخاص بساعات التشغيل فى الخط I ← $2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 600$

القيد الخاص بساعات التشغيل فى الخط Π ← $1x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 450$

القيد الخاص بمستلزم الإنتاج ← $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 2000$

قيود الطلب فى السوق $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 150 \\ x_3 \leq 120 \end{array} \right.$

٣- الأهداف:

١. تعظيم الربح:

$$\text{Max. } Z_1 = 200\,x_1 + 300\,x_2 + 250\,x_3$$

٢. تقليل النقص فى العجز عن تغطية طلب السوق:

$$\begin{aligned}\text{Min. } Z_2 &= 20(200 - x_1) + 40(150 - x_2) + 30(120 - x_3) \\ &= 13600 - (20x_1 + 40x_2 + 30x_3)\end{aligned}$$

ويصبح النموذج على النحو التالى: أوجد x_1, x_2, x_3 التى تحقق

$$\text{Max. } Z_1 = 200\,x_1 + 300\,x_2 + 250\,x_3$$

$$\begin{aligned}\text{Min. } Z_2 &= 20(200 - x_1) + 40(150 - x_2) + 30(120 - x_3) \\ &= 13600 - (20x_1 + 40x_2 + 30x_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{S.T.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 600 \\ & 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 450 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 2000 \\ & x_1 \le 200 \\ & x_2 \le 150 \\ & x_3 \le 120 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{aligned}$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة خطية متعدد الأهداف. وسوف نوضح فى الباب التالي الطرق المختلفة لحل هذا النموذج.

مثال (١١–٢): مشكلة تحديد الموازنة التخطيطية فى البنوك التجارية

إذا اعتبرنا أحد البنوك التجارية Commercial bank ، وترغب إدارة البنك فى تحقيق أفضل موازنة تخطيطية أو بعبارة أخرى تحديد حجم المبالغ المخصصة فى كل بند من بنود الإستثمار التى يحددها البنك. حيث تعتبر الموازنة التخطيطية خلال فترة معينة أفضل موازنة من وجهه نظر متخذ القرار عندما تحقق التوازن بين العائد والمخاطرة Balancing Return and Risk [92]. علما بأن المتاح للبنك على النحو التالي:

- 50 مليون جنيه رأس مال Capital،
- 500 مليون جنيه حسابات جارية Checking Accounts،
- 200 مليون جنيه حسابات إدخارية Saving Accounts.

ويرغب البنك فى تحديد المبالغ المثلى التى يجب تخصيصها فى كل بند من البنود الإستثمارية التالية:

١. المبالغ النقدية Cash، وسوف نرمز لها بالرمز x_1.
٢. المبالغ المخصصة للإستثمارات قصيرة الأجل، وسوف نرمز لها بالرمز x_2.
٣. المبالغ المخصصة للإستثمارات خلال الفترة (5-1) سنوات، وسوف نرمز لها بالرمز x_3.
٤. المبالغ المخصصة للإستثمارات خلال الفترة (10-5) سنوات، وسوف نرمز لها بالرمز x_4.
٥. المبالغ المخصصة للإستثمارات طويلة الأجل (فترة أكبر من 10 سنوات)، وسوف نرمز لها بالرمز x_5.

٦. المبالغ المخصصة للقروض فى شكل أقساط Installment Loans، وسوف نرمز لها بالرمز x_6 .

٧. المبالغ المخصصة للقروض التجارية Commercial Loans، وسوف نرمز لها بالرمز x_7.

والجدول التالى يوضح النسب المالية (العمود رقم (3) إلى العمود رقم (5)) التي يحققها كل بند من بنود الإستثمار المذكورة والمترتبة على الاستثمار متمثلة في:

١- معدل العائد Return Rate.　　٢- نسبة السيولة Liquid Part المطلوبة للبند.

٣- نسبة المشاركة فى رأس المال Required Capital

كذلك وجود أو عدم وجود مخاطرة (العمود رقم(6)).

جدول (١١-٢): يوضح النسب المالية والمخاطرة المناظرة لكل مخصص.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
j	نوع المخصص ورمزه	معدل العائد %	نسبة السيولة %	نسبة المشاركة فى رأس المال %	وجود أو عدم وجود مخاطر
1	المبالغ النقدية x_1	0.0	100.0	0.0	لا يوجد
2	إستثمار قصير الأجل x_2	4.0	99.5	0.5	لا يوجد
3	إستثمار (1-5) x_3	4.5	96.0	4.0	لا يوجد
4	إستثمار (5-10) x_4	5.5	90.0	5.0	لا يوجد
5	إستثمار (+ 10) x_5	7.0	85.0	7.5	لا يوجد
6	قروض أقساط x_6	10.5	0.0	10.0	يوجد
7	قروض تجارية x_7	9.2	0.0	10.0	يوجد

وتخضع سياسة البنك للقيود التالية:

القيد الأول: أن يكون مجموع المخصصات مساوى للمبالغ المتاحة للبنك من رأس المال، والحسابات الجارية، والحسابات الإدخارية.

القيد الثاني: يجب أن تزيد المبالغ النقدية عن نسبة 15% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 5% من الحسابات الإدخارية.

القيد الثالث: إجمالى نسب السيولة من المخصصات يجب أن تزيد عن نسبة 40% من الحسابات الجارية بالإضافة إلى نسبة 30% من الحسابات الادخارية.

القيد الرابع: يجب أن يزيد المبلغ لكل مخصص عن نسبة 3% من إجمالى المبالغ المتاحة.

القيد الخامس: يجب أن تزيد القروض التجارية عن نسبة 45% من إجمالى المبالغ المتاحة.

وترغب إدارة البنك فى تحديد المبلغ المخصص لكل بند بحيث تحقق الأهداف التالية:

الهدف الأول : تعظيم العائد من المخصصات .

الهدف الثاني: تصغير مجموع نسب المشاركة في رأس المال للمخصصات إلى رأس مال البنك.

الهدف الثالث: تصغير نسبة المخصصات للبنود التي يوجد بها مخاطرة إلى رأس مال البنك.

والمطلوب: صياغة المشكلة كنموذج برمجة متعدد الأهداف.

الحل: المتغيرات القرارية: المتغيرات $X_1 - X_7$ كما هو موضح في الجدول السابق.

القيود: يمكن صياغة القيود على النحو التالى:

القيد الأول:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_6 = (50 + 500 + 200) \longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{7} x_j = 750 \qquad (1)$$

القيد الثاني:

$$x_1 \geq 0.15(500) + 0.05(200) \longrightarrow x_1 \geq 85.00 \qquad (2)$$

القيد الثالث:

$$1.00\,x_1 + 0.995\,x_2 + 0.96\,x_3 + 0.90\,x_4 + 0.85\,x_5 \geq$$

$$0.40(500) + 0.30(200) \longrightarrow$$

$$1.00\,x_1 + 0.995\,x_2 + 0.96\,x_3 + 0.90\,x_4 + 0.85\,x_5 \geq 80.00 \qquad (3)$$

القيد (القيود) الرابع:

$$x_j \geq 0.03(50 + 500 + 200) \longrightarrow x_j \geq 22.50 \quad , \quad j = 1,2,..,7 \qquad (4)$$

القيد الخامس:

$$x_7 \geq 0.45(50 + 500 + 200) \longrightarrow x_7 \geq 337.50 \qquad (5)$$

الأهداف

الهدف الأول:

$$Max.Z_1 = 0.04\,x_2 + 0.045\,x_3 + 0.055\,x_4 + 0.07\,x_5 +$$

$$0.105\,x_6 + 0.092\,x_7 \qquad (6)$$

الهدف الثاني:

$$\text{Min.}Z_2 = \frac{1}{50}\{0.005\,x_2 + 0.004\,x_3 + 0.05\,x_4 + 0.075\,x_5 + 0.10\,x_6 + 0.10\,x_7\} \qquad (7)$$

الهدف الثالث:

$$\text{Min.}\,Z_3 = \frac{1}{50}\{x_6 + x_7\} \qquad (8)$$

ويصبح نموذج تعدد الأهداف على النحو التالى:

أوجد x_j ، $j = 1,2,\ldots,7$ التى تجعل

$$\text{Max.}Z_1 = 0.04\,x_2 + 0.045\,x_3 + 0.055\,x_4 + 0.07\,x_5 + 0.105\,x_6 + 0.092\,x_7$$

$$\text{Min.}Z_2 = \frac{1}{50}\{0.005\,x_2 + 0.004\,x_3 + 0.05\,x_4 + 0.075\,x_5 + 0.10\,x_6 + 0.10\,x_7\}$$

$$\text{Min.}\,Z_3 = \frac{1}{50}\{x_6 + x_7\}$$

$$\text{S.T.}\quad \sum_{j=1}^{7} x_j = 750\ ,\quad x_1 \geq 85.00\ ,\quad x_7 \geq 337.5$$

$$1.00\,x_1 + 0.995\,x_2 + 0.96\,x_3 + 0.90\,x_4 + 0.85\,x_5 \geq 80.00$$

$$x_j \geq 22.50 \qquad , \qquad j = 1,2,..,6$$

$$x_j \geq 0 \qquad , \qquad j = 1,2,..,7$$

ملحوظة: ١- النموذج أعلاه نموذج برمجة خطية متعددة الأهداف.

٢- الأهداف (8-6) أهداف ذات أولويات حيث:

$$\text{Max. } Z_1 >> \text{Min. } Z_2 >> \text{Min. } Z_3$$

٣- كذلك نجد أن الهدف (6) يتعارض مع الهدفين (8),(7).

<u>مثال (١١-٣):</u> مشكلة التخصيص متعددة الأهداف

أعلنت أحدى شركات التنقيب عن المواد المشعة عن وجود 4 وظائف خالية في 4 مواقع مختلفة للتنقيب فتقدم لهذه الوظائف 4 مهندسين من المتخصصين.

والجدول التالي يوضح تكلفة المهندس رقم (i) في الموقع (j) وسوف نشير لها بالرمز C_{ij} كذلك يوضح احتمال حدوث المخاطرة المترتبة على شغل المهندس رقم (i) للوظيفة في الموقع (j)، وسوف نرمز لها بالرمز α_{ij} حيث $0 < \alpha_{ij} < 1$ لجميع قيم i , j

جدول (١١-٣): يوضح تكلفة ومخاطرة شغل المهندس i الوظيفة بالموقع j.

رقم الموقع (j) / رقم المهندس (i)	التكلفة C_{ij} المخاطرة α_{ij}	j =1	j =2	j =3	j =4
(1)	C_{1j} α_{1j}	10000 0.05	15000 0.30	24000 0.40	11000 0.25
(2)	C_{2j} α_{2j}	12000 0.10	17000 0.30	20000 0.40	15000 0.20
(3)	C_{3j} α_{3j}	15000 0.15	20000 0.30	18000 0.25	20.000 0.30
(4)	C_{4j} α_{4j}	13000 0.10	15000 0.15	17000 0.25	25000 0.50

ويرغب متخذ القرار في تحديد المهندس (i) المخصص للوظيفة (j) بحيث:

- الهدف الأول: تقليل التكاليف الكلية إلى أقل ما يمكن.
- الهدف الثاني: تقليل مستوى المخاطرة.

الحل: تعتير المشكلة أعلاه مشكلة تخصيص [20] ولكن وجود هدفين بدلاً من هدف واحد، ويمكن صياغتها على النحو التالي:

- المتغيرات القرارية: إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى شغل المهندس رقم (i) الوظيفة بالموقع رقم (j) فإن:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا شغل المهندس (i) الوظيفة بالموقع (j)} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- القيود: ١- قيود متعلقة بالمهندسين:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = 1 \qquad , \qquad i = 1,2,3,4$$

٢- قيود متعلقة بالوظيفة في الموقع:

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = 1 \qquad , \qquad j = 1,2,3,4$$

- الأهداف: ١- الهدف الأول وهو تصغير التكاليف

$$\begin{aligned} \text{Min.} Z_1 &= \sum_{i}\sum_{j} C_{ij}\, X_{ij} \\ &= 10000\, X_{11} + 15000\, X_{12} + 24000\, X_{13} + 11000\, X_{14} \\ &\quad + 12000\, X_{21} + 17000\, X_{22} + 20000\, X_{23} + 15000\, X_{24} \\ &\quad + 15000\, X_{31} + 20000\, X_{32} + 18000\, X_{33} + 20000\, X_{34} \\ &\quad + 13000\, X_{41} + 15000\, X_{42} + 17000\, X_{43} + 25000\, X_{44} \end{aligned}$$

٢- الهدف الثاني وهو تصغير المخاطرة

$$\text{Min.}Z_2 = \prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{4}(\alpha_{ij})^{X_{ij}}$$

$$= \{(0.05)^{X_{11}}\,(0.30)^{X_{12}}\,(0.40)^{X_{13}}\,(0.25)^{X_{14}}\}\{(0.10)^{X_{21}}\,(0.30)^{X_{22}}$$
$$(0.40)^{X_{23}}\,(0.20)^{X_{24}}\}\{(0.15)^{X_{31}}\,(0.30)^{X_{32}}\,(0.25)^{X_{33}}$$
$$(0.30)^{X_{34}}\}\{(0.10)^{X_{41}}\,(0.15)^{X_{42}}\,(0.25)^{X_{43}}\,(0.50)^{X_{44}}\}$$

ويصبح نموذج التخصيص نموذج برمجة متعددة الأهداف على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij} ، $j=1,2,3,4 \quad , \quad i=1,2,3,4$ التي تجعل:

$$\text{Min.}Z_1 = 10000\,X_{11} + 15000\,X_{12} + ... + 25000\,X_{44} \qquad (1)$$

$$\text{Min.}Z_2 = \{(0.05)^{X_{11}}...(0.25)^{X_{14}}\}...\{(0.10)^{X_{41}}...(0.50)^{X_{44}}\} \qquad (2)$$

$$\text{S.T.} \quad \left.\begin{aligned}
X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}&=1\\
X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}&=1\\
X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}&=1\\
X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}&=1\\
X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}&=1\\
X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}&=1\\
X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}&=1\\
X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}&=1
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ أو } 1 \quad , \quad i=1,2,3,4 \quad , \quad j=1,2,3,4 \qquad (4)$$

ملاحظات: ١- النموذج أعلاه (4)-(1) نموذج برمجة غير خطية متعددة الأهداف حيث أن دالة الهدف الثانية Z_2 دالة غير خطية في المتغيرات القرارية X_{ij}. وبالتالي يمكن إيجاد الحل الأمثل باستخدام طرق البرمجة غير الخطية متعددة الأهداف كما سوف نوضح ذلك في الفصل (١٢-٣).

٢- رغم أن النموذج (4)-(1) نموذج برمجة غير خطية ولكن يمكن تحويله إلى نموذج برمجة خطية عن طريق التحويلة التالية:

$$Z_2 = \prod_i \prod_j (\alpha_{ij})^{X_{ij}} \tag{5}$$

بأخذ ln لطرفي (5) نجد أن:

$$\ln Z_2 = \sum_i \sum_j X_{ij}\ (\ln \alpha_{ij})$$

$$Z_2' = \sum_i \sum_j (\ln \alpha_{ij})\ X_{ij}$$

$$= (-2.9957)\ X_{11} + (-1.2040)\ X_{12} + \ldots.. + (-0.6932)\ X_{44}$$

ويصبح الهدف الثاني $\text{Min.}Z_2'$ بدلاً من $\text{Min.}Z_2$ ويصبح النموذج بعد التحويل نموذج برمجة خطية متعدد الأهداف يمكن حله باستخدام أساليب الحل المقدمة في الباب الثاني عشر، أو باستخدام أسلوب برمجة الهدف في الباب الرابع عشر. وبعد الحصول على القيمة المثلي لـ Z_2' فإنه يمكن الحصول على القيمة المثلي لـ Z_2 من العلاقة:

$$Z_2 = e^{Z_2'} \tag{6}$$

٣- ممكن أن يكون الهدف الثاني تعظيم مقياس المؤمونيه Tolerance Measure [24] بدلاً من تصغير المخاطرة. ويصبح الهدف الثاني على النحو:

$$Max.Z_3 = \prod_i \prod_j (1-\alpha_{ij})^{X_{ij}} \qquad (7)$$

ويمكن تحويل Z_3 في هذه الحالة إلى دالة خطية أيضاً على النحو التالي:

$$\ln Z_3 = \sum_i \sum_j X_{ij} \, (\ln(1-\alpha_{ij})) \qquad (8)$$

مثال (١١-٤): مشكلة النقل متعددة الأهداف

الجدول التالي يوضح متوسط تكلفة نقل الوحدة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الإستهلاك (j) وسوف نرمز لها بالرمز C_{ij} بالجنيه، كذلك يوضح متوسط زمن نقل الوحدة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الإستهلاك (j) وسوف نرمز له بالرمز t_{ij} بالأيام، كذلك يوضح الكميات المتاحة لدى كل مركز إنتاج وسوف نرمز للكميات المتاحة للمركز (i) بالرمز S_i، كذلك الكميات المطلوبة لمراكز الإستهلاك (j) بالرمز D_j.

جدول (١١-٤)

(i) \ (j)		(1)	(2)	(3)	S_i
(1)	C_{1j} t_{1j}	20 5	15 4	10 15	15,000
(2)	C_{2j} t_{2j}	12 8	17 3	13 10	65,000
(3)	C_{3j} t_{3j}	9 10	11 2	14 8	70,000
D_j		50,000	60,000	40,000	150,000

ويرغب متخذ القرار في تحديد الكميات التي يجب نقلها من كل مركز إنتاج إلى كل مركز استهلاك بحيث يحقق الأهداف التالية:

١- تقليل تكاليف النقل. ٢- تقليل الزمن الذي يستغرقه نقل البضائع.

الحل: • المتغيرات القرارية: إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى الكميات التي يجب نقلها من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الإستهلاك (j)، $X_{ij} \geq 0$

• القيود: ١- القيود المرتبطة بالكميات المتاحة:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = S_i \qquad , \quad i = 1,2,3 \longrightarrow$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 15{,}000$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 65{,}000$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 70{,}000$$

٢- القيود المرتبطة بمراكز الاستهلاك:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = D_j \qquad , \quad j = 1,2,3 \longrightarrow$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50{,}000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 60{,}000$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40{,}000$$

• الأهداف: ١- الهدف الأول: تقليل تكاليف النقل

$$\text{Min.}Z_1 = 20\,X_{11} + 15\,X_{12} + 10\,X_{13} + 12\,X_{21} + 17\,X_{22} + 13\,X_{23} + 9\,X_{31} + 11\,X_{32} + 14\,X_{33}$$

٢- الهدف الثاني: تقليل زمن النقل

$$\begin{aligned} Min.Z_2 = {} & 5\,X_{11} + 4\,X_{12} + 15\,X_{13} + 8\,X_{21} + 3\,X_{22} \\ & + 10\,X_{23} + 10\,X_{31} + 2\,X_{32} + 8\,X_{33} \end{aligned}$$

ويصبح نموذج النقل متعدد الأهداف على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij}، $i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,3$ التي تجعل

$$Min.Z_1 = 20\,X_{11} + 15\,X_{12} + \ldots\ldots\ldots + 14\,X_{33}$$

$$Min.Z_2 = 5\,X_{11} + 4\,X_{12} + 15X_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 8\,X_{33}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \qquad & X_{11} + X_{12} + X_{13} = 15{,}000 \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} = 65{,}000 \\ & X_{31} + X_{32} + X_{33} = 70{,}000 \\ & X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50{,}000 \\ & X_{12} + X_{22} + X_{32} = 60{,}000 \\ & X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40{,}000 \\ & X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$$

والنموذج أعلاه نموذج نقل متعدد الأهداف يمكن حله بأستخدام طريقة الأولويات المقدمة في الباب الثاني عشر. كذلك يمكن حلة باستخدام أسلوب برمجة الهدف المقدم في الباب الرابع عشر.

(١١-٤) أساليب حل مشاكل برمجة تعدد الأهداف

Solution's Techniques for (MOPP)

وكما ذكرنا في الفصل الأول، أنه منذ سنة ١٩٥٠ وبدأ التفكير والبحث بفلسفة تعدد الأهداف كواقع أعم من التفكير والبحث بفلسفة الهدف الواحد. ومن هذا التاريخ وبدأ تقديم العديد من الأساليب المختلفة لحل المشاكل متعددة الأهداف.

ومما هو جدير بالذكر أنه بالنسبة لمشاكل البرمجة متعددة الأهداف لا يوجد حل أمثل مطلق global optimum solution بمعنى الحصول على القيم المثلى المطلقة global optimum values لجميع الأهداف المتعددة في نفس الوقت [101,92]. ولكن يمكن الحصول على قيم مثلى مطلقة لبعض الأهداف (وقد لا توجد) وأخرى قيم مثلى نسبية للأهداف الأخرى بأستخدام بعض الطرق التي تعتمد على الأولويات.

وتخضع الأساليب التي قدمت لحل مشاكل برمجة تعدد الأهداف لمعايير تختلف من أسلوب لآخر. ويمكن تصنيف الأساليب التي قدمت لحل مشاكل برمجة تعدد الأهداف وفقاً للمعيار المتبع والأسلوب الرياضي المستخدم وخصائص الحل الذي يتم الحصول عليه إلى أربعة أساليب [55]:

- أسلوب الأوزان الترجيحية أو المنفعة Weighting or Utility Approach
- أسلوب الحلول الكفء
Efficient Solutions (or Generating) Approach
- أسلوب الترتيب أو الأولويات Prioritizing (or Ranking) Approach
- أسلوب برمجة الهدف Goal Programming Approach

ويتضمن كل أسلوب العديد من الطرق Methods المختلفة بحيث تتوائم كل منها مع خصائص المشكلة محل الحل [79].

ومما هو جدير بالذكر أن جميع طرق حل مشاكل البرمجة متعددة الأهداف (خطية أو غير خطية) والتي تنتمي إلى الأساليب المذكورة أعلاه تبني على واحد على الأقل من الفكرتين التاليتين [24,55,84]:-

(١) تحويل دوال الأهداف إلى دالة هدف واحدة، ثم حل المشكلة كمشكلة برمجة وحيدة الهدف. وتنتمي هذه الطرق إلي أسلوب الأوزان الترجيحية وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل (١٢-٢) بالباب التالي.

(٢) حل المشكلة متعددة الأهداف على مراحل متتالية (عددها يساوي عدد الأولويات التي تتضمن الأهداف objectives) وتنتمي هذه الطرق إلي أسلوب الأولويات أو أسلوب برمجة الهدف، وفي كل مرحلة يتم حل مشكلة وحيدة الهدف ويأخذ هذا الحل ويوضع هذا الحل الأمثل كقيد على المشكلة في المرحلة التالية لها. وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصلين (١٢-٣)، (١٢-٤) بالباب التالي.

وكما ذكرنا في الفصل (١١-١) أنه منذ سنة ١٩٥٨ ميزا كل من March and Simon بين نوعين من مشاكل البرمجة متعددة الأهداف [74]:

<u>النوع الأول</u>: وفيه تكون جميع الأهداف للمشكلة غير متعارضة non-conflicting objectives أو بعبارة أخرى فئة تقاطع intersection set الأهداف فئة غير خالية non-empty set، بالإضافة أنه لا يوجد تعارض بين القيود أو بعبارة أخرى فئة الحلول الممكنة feasible solutions set فئة غير خالية أيضاً [٣]. وهذا النوع من المشاكل يعتبر حالات أستثنائية exceptional cases – وفي هذه الحالات يكون من الممكن لمتخذ القرار تحديد البدائل المثلى optimal alternatives للحل وكما ذكرنا سابقاً توجد طرق مختلفة لحل هذا النوع من المشاكل، سوف تقدم في الباب التالي بعض أهم هذه الطرق بالتفصيل:

- طريقة الأوزان الترجيحية Weighting Method
- طريقة الأولويات
Prioritizing (Ranking or Lexicographic) Method
- طريقة التدرج Hierarchical Method

<u>النوع الثاني</u>: وفيه ممكن أن تكون بعض القيود (أو كلها) قيود متعارضة conflicting constraints أي أن فئة الحلول الممكنة تكون فئة خالية empty set ، وكذلك وجود تعارض بين الأهداف، أو بعبارة أخرى قد تكون فئة الأهداف (أو فراغ الأهداف objective space) فئة خالية أيضاً، ولكن تتصف هذه القيود وكذلك الأهداف بالمرونة elastic constraints and objectives. وهذا النوع من المشاكل يمثل معظم المشاكل الإنسانية (اقتصادية، اجتماعية، سياسية، .... الخ) وبالنسبة لهذا النوع من المشاكل يرغب متخذ القرار في تحديد البدائل المرضية satisfactory alternatives أو بعبارة أخرى أفضل حلول توافقيةbest compromise solutions.

ويعتبر أسلوب برمجة الهدف goal programming technique من أهم الأساليب لحل هذا النوع من المشاكل. ونظراً لأتساع دائرة وجود هذا النوع من المشاكل لذلك سوف نتناول بالتفصيل أسلوب برمجة الهدف لحل مشاكل برمجة تعدد الأهداف مـن حيـث الصيـاغـة والطـرق المختلفـة لحـل مشاكـل بـرمجـة الهـدف goal programming methods في الأبواب (17)−(13).

ومما سبق فإنه يمكن تقسيم مشاكل برمجة تعدد الأهداف إلى مشاكل مرنة تندرج تحت النوع الثاني ومشاكل غير مرنة تندرج تحت النوع الأول.

(١١-٥) متطلبات أساسية Basic Prerequisites

هذا الجزء هو الجزء الثاني من كتاب "بحوث العمليات وأتخاذ القرارات" حيث تناول الجزء الأول [1] البرمجة وحيدة الهدف وبالتالي فهذا الجزء يعتبر أستكمال للجزء الأول. وفيما يلي سوف نحدد بأختصار بعض الموضوعات الهامة important topics في كل من بحوث العمليات ، الرياضيات ، حزم البرامج الجاهزة التي يجب الألمام بها المامُ جيد حتى يمكن فهم وتطبيق أساليب برمجة تعدد الأهداف المقدمة في هذا الجزء.

أولاً: بعض الموضوعات في بحوث العمليات

- صناعة القرار Decision Making
- البرمجة الخطية Linear Programming
- البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming
- طريقة لأجرانج Lagrange Method
- طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson's Method
- مشكلة النقل Transportation Problem
- مشكلة التخصيص Assignment Problem

ثانياً: بعض الموضوعات في الرياضيات

- الفئات والدوال الرياضية Sets and Mathematical Functions

---

[1] عفاف الدش (٢٠١٢): "بحوث العمليات وإتخاذ القرارات – الجزء الأول : البرمجة وحيدة الهدف" المكتبة الأكاديمية بالدقي، جمهورية مصر العربية.

- المصفوفات والمتجهات Matrices and Vectors
- الفئات والتوليفات المحدبة Convex Sets and Combinations
- الجبر الخطي Linear Algebra
- أساليب التفاضل والتكامل

ثالثاً: بعض الموضوعات في نظرية الإحصاء

- التقديرات وخصائصها
- نماذج الانحدار
- أسلوب المربعات الصغرى
- أسلوب الإمكان الأكبر

رابعاً: البرامج الجاهزة Packages

ولحسن الحظ فإنه يمكن أستخدام حزم البرامج الجاهزة التي صممت لحل مشاكل البرمجة وحيدة الهدف single objective في حل مشاكل البرمجة متعددة الأهداف.

وفي هذا الجزء سوف نستخدم حزمة TORA ، وحزمة Maple 11 لحل مشاكل برمجة تعدد الأهداف [٣].

(١١-٦) تمرينات Exercises

(١١-١) تكلم بأختصار عن أساليب برمجة تعدد الأهداف من حيث:

١- النشأة. ٢- التطور التاريخي.

٣- أنواع المشاكل متعددة الأهداف.

(١١-٢) متى ظهر أول مرة تعبير تعدد الأهداف، وفيما أستخدم؟

(١١-٣) ما هو المشروع الذي يمثل أول بداية حقيقية لاستخدام برمجة تعدد الأهداف، ومتى؟

(١١-٤) أعطى بعض الأمثلة للمشاكل متعددة الأهداف.

(١١-٥) تكلم بأختصار عن الفرق بين المشاكل المرنة والمشاكل غير المرنة، مع أعطاء بعض الأمثلة لذلك.

(١١-٦) ما العلاقة بين البرمجة وحيدة الهدف وبرمجة تعدد الأهداف؟

(١١-٧) ما هى الأفكار التي بنيت عليها أساليب حل المشاكل متعددة الأهداف؟

(١١-٨) تقوم أحدى الشركات الصناعية بأنتاج نوعين من المنتجات A,B. وترغب الشركة في تحديد عدد الوحدات التي يجب أنتاجها يومياً من كل نوع بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن، بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع المرور على ثلاثة خطوط مختلفة للأنتاج I , II , III على الترتيب. والجدول التالي يوضح الزمن اليومي المتاح للتشغيل في كل خط، كذلك الزمن المطلوب لأنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع، وربح الوحدة الواحدة.

جدول (١١-٦)

خط الإنتاج	الزمن المطلوب لكل وحدة في كل خط بالدقائق		الوقت المتاح للتشغيل يومياً بالدقائق
	A	B	
I	2	1	600
II	3	5	540
III	1	6	660
ربح الوحدة	5	8	

فإذا كان كل خط يتطلب تكلفة للصيانة بحيث يتطلب الخط الأول تكلفة صيانة 100 جنيه بعد إنتاج كل 50 وحدة، والخط الثاني 150 جنيه بعد إنتاج 100 وحدة، كذلك يتطلب الخط الثالث تكلفة صيانة 2000 جنيه لكل 200 وحدة.

والمطلوب: تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B بحيث تحقق الشركة الأهداف التالية:

١- تعظيم الربح الكلي.

٢- تصغير التكلفة الأجمالية للصيانة.

أبنى نموذج برمجة متعددة الأهداف يمكن من تحديد العدد الأمثل من الوحدات المنتجة من A, B.

(١١-٩) في أحدى المدن الجامعية، يرغب المسئول عن التغذية للطلاب في تحديد كميات المواد الغذائية في الوجبة، بحيث تتكون الوجبة للطالب من ثلاثة مواد غذائية خضروات (A_1) ونشويات (A_2) ولحوم (A_3) ، حيث تحتوي كل مادة من المواد A_1, A_2, A_3 على أربع عناصر ضرورية هي البروتين (B_1) والكالسيوم (B_2)

والألياف (B_3) والفيتامينات (B_4). والجدول التالي يوضح الكميات الموجودة من كل عنصر في الكيلوجرام الواحد من كل مادة غذائية.

جدول (١١-٧)

العناصر / المواد	نسبة العنصر في الوحدة الواحدة من المادة				متوسط سعر الكيلوجرام بالجنية
	بروتين B_1	كالسيوم B_2	ألياف B_3	فيتامينات B_4	
A_1 خضروات	0.020	0.05	0.50	0.03	5
A_2 نشويات	0.030	0.05	0.04	0.01	6
A_3 لحوم	0.50	0.10	0.25	0.02	75

فإذا فرضنا أن الوجبة التي تعطى للطالب تتطلب الحصول على الأقل 0.250 كيلوجرام بروتين ، 0.180 كيلوجرام كالسيوم ، 0.80 كيلوجرام ألياف.

وتصبح مشكلة مسئول التغذية تحديد الكميات التي يجب أن تحتويها الوجبة من الخضروات (A_1) والنشويات (A_2) واللحوم (A_3) بحيث يحقق الأهداف التالية:

١- يكون متوسط التكلفة للوجبة أقل ما يمكن.

٢- تعظيم كمية البروتين والفيتامينات في الوجبة.

والمطلوب: صياغة المشكلة كنموذج برمجة تعدد الأهداف.

(١١-١٠) تقوم أحدى شركات صناعة الأثاث الخشبي ومن ضمن منتجاتها تصنيع الترابيزات والكراسي من نفس نوع الخشب وبنفس أنواع العمالة.

والجدول التالي يوضح كمية الأخشاب المتاحة وعدد ساعات العمل المتاحة شهرياً وربح الشركة من الترابيزة الواحدة والكرسي الواحد بالجنية، كذلك المساحة المطلوبة لتخزين الوحدة بالمتر المربع.

جدول (١١-٨)

الكميات المتاحة	متطلبات الوحدة الواحدة من كل منتج		متطلبات الإنتاج
	كرسي	ترابيزة	
5000	4	7	A_1 ألواح الخشب (بالمتر المربع)
350	8	5	A_2 ساعات العمل
	250	500	الربح بالجنيه
	1.00	2.00	مساحة التخزين (بالمتر المربع)

فإذا كانت نسبة عدد الترابيزات المطلوبة إلى عدد الكراسي المطلوب واحد إلى ست على الترتيب.

المطلوب: كون نموذج برمجة متعددة الأهداف بحيث يحقق الأهداف التالية:

١- تعظيم الربح.

٢- تصغير مساحة التخزين.

بحيث يتم تحديد العدد الأمثل من الترابيزات والكراسي.

الباب الثاني عشر

طرق الحلول الكفأ (حلول باريتو المثلى)

Efficient (Pareto Optimal) Solutions Methods

(١٢-١) تعريفات أساسية	Basic Definitions
(١٢-٢) طريقة الأوزان الترجيحية	Weighting Method
(١٢-٣) طريقة الأولويات	Prioritizing (Ranking or Lexicographic) Method
(١٢-٤) طريقة التدرج	Hierarchical Method
(١٢-٥) تمرينات	Exercises

(١٢-١) تعريفات أساسية Basic Definitions

في هذا الفصل سوف نقدم ثلاثة طرق لحل نماذج برمجة تعدد الأهداف (خطية وغير خطية أيضاً) ويسمى الحل (أو الحلول) بالنسبة لمشاكل برمجة تعدد الأهداف بالحلول الكفأ. ولعرض هذه الطرق فإن ذلك يتطلب أولاً تقديم بعض التعريفات والنظريات، سوف نقدمها في الفصل التالي.

إذا اعتبرنا مشكلة برمجة تعدد الأهداف في شكل "مشكلة أمثلية المتجه" vector optimization problem (VOP) على النحو التالي:

$$\text{Max. } F(X) = [f_1(X), f_2(X), ..., f_t(X), ..., f_K(X)] \qquad (12.1)$$

$$\text{S.T.} \qquad g_i(X) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,.....,m \qquad (12.2)$$

حيث كل دالة من الدول $f_t(X)$ ، $g_i(X)$ دالة حقيقية real valued function لجميع قيم $t = 1,2,....,k$, $i = 1,2,....,m$ ، $X = [X_1 , X_2 , X_2]^\backslash$.

وبالنسبة للمشاكل متعددة الأهداف فأن فراغ الحل (أو فراغ القرار decision's space) أو ما تسمى بفئة الحلول الممكنة Solution's space وعادة نرمز له بالرمز S يناظره فراغ آخر للأهداف (أو المعايير) objectives (criterion) space وسوف نرمز له بالرمز F. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٢-١)</u> أعتبر المشكلة التالية [101,105]:

$$\text{Max.} f_1(X) = X_1 - X_2$$

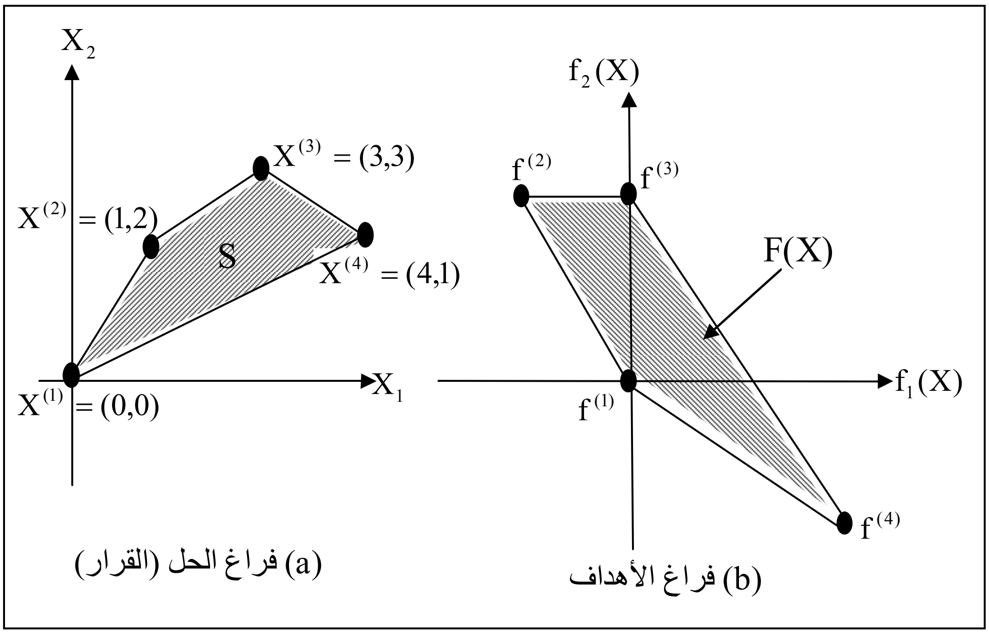
$$\text{Max.} f_2(X) = -X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1, X_2 \in S$$

حيث تأخذ الفئة S الشكل الموضح في الشكل التالي (a).

والشكل يوضح منطقة الحلول الممكنة (فراغ الحل)S ومنطقة الأهداف المناظرة فراغ الأهداف F.

شكل (١٢-١)



حيث يشتمل فراغ الأهداف F المتجهات المناظرة لنقط الحلول الممكنة في الفئة S. فنجد أن النقطة $f^{(i)}$ في فراغ الأهداف تناظر النقطة $X^{(i)}$ في فراغ الحل حيث $i = 1,2,3,4$،

ويصبح مفهوم الحل الأمثل optimal solution مفهوم ضبابي murky concept [92] في حالة وجود تعدد الأهداف (أكثر من هدف واحد) ، فقد يكون الحل حل أمثل لهدف ما ولكن قد يكون غير أمثل لهدف آخر. وبالتالي في هذه الحالة أي حالة تعدد الأهداف يكون لدينا فراغ للأهداف objectives space يتم البحث فيه

عن أفضل (أكفأ) متجه من المتجهات الكفأ. وتصبح المشكلة تحديد النقط X^* في فراغ الحلول الممكنة S في (12.2) (حيث فراغ الحلول الممكنة فئة غير خالية) التي تناظر أفضل (أكفأ) متجهات $f(X^*)$ في فراغ الأهداف F – وتسمى هذه النقط X^* بالحلول الكفأ efficient solutions أو بحلول باريتو* المثلى Pareto optimal solutions أو الحلول غير الدنيا noninferior solutions وبأستخدام هذه النقط الكفأ يمكن تحديد الحل الأمثل [79,99,101].

ومما هو جدير بالذكر أنه في حالة وجود أهداف متعارضة conflicting objectives في (12.1) فإن فراغ الأهداف objectives space أي فئة تقاطع الأهداف تعتبر فئة خالية empty set ، وبالتالي فإنه لا يوجد حل كفأ (أو حل باريتو الأمثل) [87]. ولكن في حالة عدم تعارض الأهداف unconflicting objectives في (12.1) فإنه في هذه الحالة يوجد حلول كفأ للمشكلة (12.2)–(12.1).

ولدراسة طرق الحصول على الحلول الكفأ (أو حلول باريتو المثلى) لمشكلة برمجة تعدد الأهداف (في حالة عدم تعارض الأهداف) في الفصول التالية فإن ذلك يتطلب الألمام ببعض التعريفات الأساسية الهامة. وفيما يلي سوف نقدم أهم هذه التعريفات المرتبطة بطرق حل مشاكل برمجة تعدد الأهداف.

تعريف (١٢-١): يقال أن القيد رقم (i) أي القيد $g_i(X) \le 0$ قيد فعال active constraint في النقطة X^* حيث $X^* \in S$ (S فئة الحلول الممكنة) إذا كان [6]:

$$g_i(X^*) = 0 \qquad (12.3)$$

* Pareto نسبة إلى عالم الاقتصاد Pareto.

<u>تعريف (١٢-٢)</u>: تسمى الدالة $K(X)$ دالة محدبة convex function إذا كان:

$$K(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda K(X_1) + (1-\lambda)K(X_2) \qquad (12.4)$$

حيث $X_1, X_2 \in S$ ، $0 \le \lambda \le 1$ [٤].

<u>تعريف (١٢-٣)</u>: إذا أعتبرنا النموذج (12.2)-(12.1) بحيث فئة الحلول الممكنة للقيود $g_i(X) \le 0,\ i = 1,2,...,m$ فئة محدبة convex set (أنظر تعريف (٨-٤) صفحة ٣٤٩ بالجزء الأول من الكتاب) ، كذلك كل دالة من دوال الأهداف $f_j(X)$ ، $j = 1,2,...,k$ دالة محدبة أيضاً، فإنه يقال أن النموذج (12.2)-(12.1) نموذج محدب متعدد الأهداف Convex (MOP) Model (CMOP) [87].

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على هذا النوع من المشاكل أي المشاكل متعددة الأهداف المحدبة (CMOPP).

<u>تعريف (١٢-٤)</u>: إذا اعتبرنا المشكلة (12.2)-(12.1) ، بحيث S تشير إلى منطقة (فراغ) الحلول الممكنة، كذلك النقطتين $X^{(1)}, X^{(2)}$ بحيث $X^{(1)}, X^{(2)} \in S$ ، فإنه يقال أن النقطة $X^{(1)}$ تسود النقطة $X^{(2)}$ dominates إذا وإذا فقط [105,101]:

$$F(X^{(1)}) \ge F(X^{(2)}) \quad , \quad F(X^{(1)}) \ne F(X^{(2)}) \qquad (12.5)$$

بمعنى أنه يوجد على الأقل عنصر واحد في المتجه $F(X^{(1)})$ أكبر من العناصر المناظرة في المتجه $F(X^{(2)})$. ويسمى الحل $F(X^{(1)})$ بالحل السائد dominant solution.

<u>تعريف (١٢-٥)</u>: إذا اعتبرنا المشكلة (12.2)-(12.1)، والنقطة X^*، بحيث $X^* \in S$ تسمى نقطة حل كفأ efficient solution point أو حل باريتو الأمثل Pareto optimal solution إذا لم توجد أي نقطة حل أخرى X ، $X \in S$ بحيث [87]:

$$F(X) \geq F(X^*) \qquad (12.6)$$

ملحوظة: في حالة إذا كان المطلوب تصغير متجه الأهداف $Min. F(X)$ فإن النقطة X^* تكون نقطة حل كفأ إذا لم توجد أي نقطة أخرى X، بحيث $X \in S$ بحيث [105]:

$$F(X) \leq F(X^*) \qquad (12.7)$$

وكما ذكرنا سابقاً أن النقط الكفأ تساعد على تحديد أفضل حلول ممكنة best feasible solutions [92, page 379].

ونظراً لأهمية النقط الكفأ efficient points في حل مشاكل برمجة تعدد الأهداف فقد قدمت العديد من الدراسات لكيفية تحديد النقط الكفأ لنماذج برمجة تعدد الأهداف سواء كانت خطية أو غير خطية [76,64,70]. ولذلك سوف نوضح في المثال التالي كيفية تحديد النقاط الكفأ بيانياً بالنسبة لنموذج برمجة خطية متعدد الأهداف (في حالة وجود متغيرين قراريين ووجود هدفين أيضاً).

مثال (١٢-٢) أعتبر نموذج برمجة تعدد الأهداف التالي [92]:

$$Max. Z_1 = 3X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$Max. Z_2 = -X_1 + 2X_2 \qquad (2)$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 \leq 4 \qquad (3)$$

$$0 \leq X_1 \leq 3 \qquad (4)$$

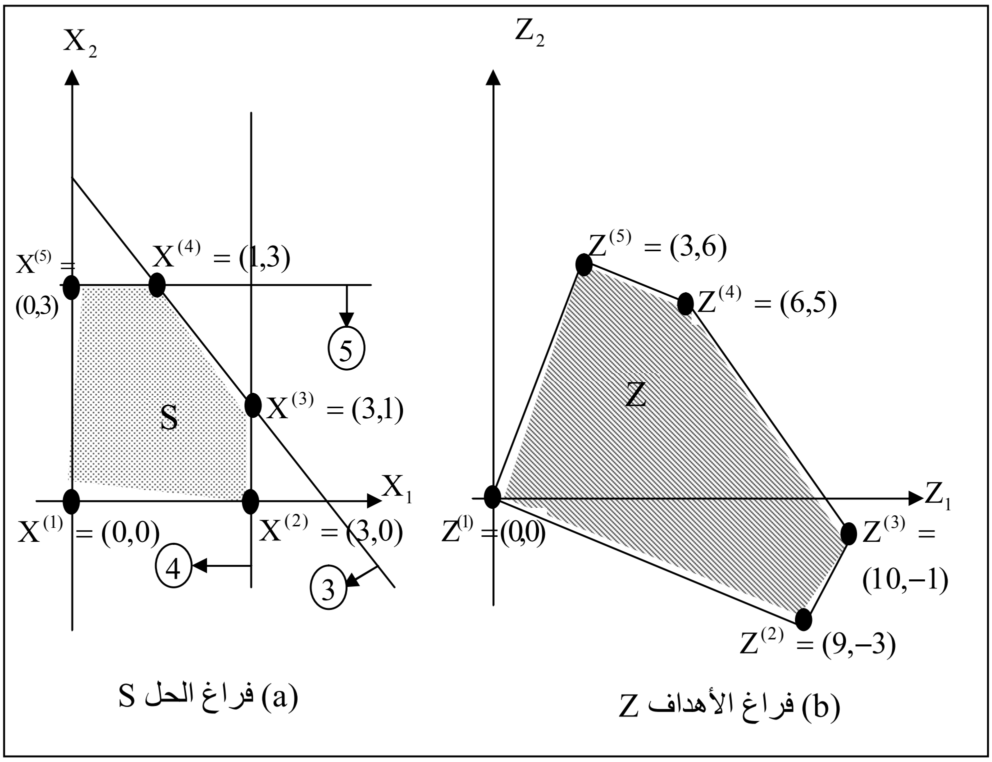
$$0 \leq X_2 \leq 3 \qquad (5)$$

ومن الشكل التالي نجد فئة الحلول الممكنة (فراغ الحل) S كما في شكل (a) وفراغ الأهداف Z objectives space المناظر لفراغ الحل S كما في شكل (b) حيث

يلاحظ أن فراغ الأهداف فراغ محدب يتم تحديده عن طريق تحديد المتجهات $Z^{(S)}$ المناظرة للنقط الطرفية لفئة الحلول الممكنة S على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} X^{(1)}=(0,0)\,,\,X^{(2)}=(3,0)\,,\,X^{(3)}=(3,1)\,,\,X^{(4)}=(1,4)\,,\,X^{(5)}=(0,3) \\ Z^{(1)}=(0,0),\,Z^{(2)}=(9,-3),\,Z^{(3)}=(10,-1),\,Z^{(4)}=(6,5),\,Z^{(5)}=(3,6) \end{array}\right\}(6)$$

شكل (١٢-٢): يوضح فراغ الحل S وفراغ الأهداف المناظر Z



ومن الشكل يتضح أن أفضل نقط كفأ هى:

$$X^{(4)}=(1,3)\longrightarrow Z^{(4)}=(6,5)$$

$$X^{(5)}=(0,3)\longrightarrow Z^{(5)}=(3,6)$$

ملحوظة: يتم أستبعاد المتجهات $Z^{(3)} = (10,-1)$ ، $Z^{(2)} = (9,-3)$ المناظرة للنقط الطرفية (3,0) ، (3,1) حيث لا ينطبق عليها تعريف النقط الكفأ في هذا المثال.

وفي الفصل التالي سوف نوضح أنه يمكن الحصول على النقط الكفأ التي تم تحديدها بيانياً جبرياً بأستخدام طريقة الأوزان الترجيحية كما سوف نوضح ذلك في المثال (١٢-٣) التالي.

نظرية (١٢-١): إذا أعتبرنا نموذج تعدد الأهداف نموذج محدب (CMOP) فأن حل باريتو الأمثل النسبي locally pareto optimal solution يكون أيضاً حل باريتو الأمثل المطلق globally pareto optimal solution.

الأثبات: أنظر مرجع [87, page 6].

وفي الفصول التالية سوف نقدم بعض الطرق لتحديد النقط (الحلول) الكفأ للنموذج متعدد الأهداف.

(١٢-٢) طريقة الأوزان الترجيحية Weighting Method

طريقة الأوزان الترجيحية تعتمد على تحويل مشكلة البرمجة متعددة الأهداف في (12.1)-(12.2) إلى مشكلة برمجة وحيدة الهدف single objective ثم حلها بأحدى طرق حل مشاكل البرمجة وحيدة الهدف المناسبة [٤،102,84,81]. ويتم ذلك بتحويل دوال الأهداف وعددها K إلى دالة هدف واحدة ويصبح النموذج المحول على النحو التالي [105]:

أوجد قيم $X_1, X_2, ..., X_n$ التي تجعل:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max. } F(X,W) = \sum_{t=1}^{k} W_t \; f_t(X) \\ &\text{S.T.} \qquad g_i(X) \le 0 \qquad , \quad i = 1,2,.....,m \end{aligned}\right\} \quad (12.8)$$

حيث W_t تشير إلى الوزن الترجيحي للهدف رقم (t).

ملحوظة: ١- ممكن أن يكون المطلوب تصغير الأهداف وبالتالي تصبح دالة الهدف في (12.8) على النحو $\text{Min. } F(X,W)$.

٢- قيم الأوزان W_t تعكس الأهمية (الأولوية) النسبية للهدف بالنسبة للأهداف الأخرى.

<u>نظرية (١٢-٢)</u>: إذا أعتبرنا النقطة X^* تشير إلى الحل الأمثل للنموذج وحيد الهدف (12.8) عند أوزان ترجيحية معطاه W_j ، $j = 1,2,....,k$ فإن النقطة X^* تمثل نقطة حل كفأ للنموذج متعدد الأهداف (VOP) في (12.1)-(12.2) إذا توافر أحد الشرطين التاليين [105,111,112]:

١- أن تكون الأوزان W_j بحيث $W_t > 0$ ، لجميع قيم $t = 1,2,....,k$ [23].

٢- أن تكون X^* حل وحيد unique solution للنموذج (12.8) (حيث أن X^* ممكن أن تكون حل غير وحيد في حالة النماذج غير الخطية).

الإثبات: أنظر [105, page 134].

وفيما يلي سوف نتناول أهم خصائص طريقة الأوزان الترجيحية

أولاً: طريقة الأوزان الترجيحية تتيح إجراء عملية واحدة بالنسبة لجميع الأهداف أما عملية تصغير .Min أو تعظيم .Max ولا تتيح إجراء عملية معينة لبعض الأهداف وعملية أخرى لباقي الأهداف (إلا في بعض الحالات الخاصة التي يمكن تحويل عملية إلى أخرى).

ثانياً: وكما ذكرنا سابقاً أننا في هذا الباب سوف نتناول فقط نماذج برمجة تعدد الأهداف المحدبة (CMOP) وحتى يظل النموذج المحول وحيد الهدف في (12.8) يحقق شرط التحدب وكذلك الشرط (١) في النظرية السابقة فإنه يتم افتراض أن الأوزان الترجيحية W_t بحيث تحقق الشروط التالية:

$$0 < W_t < 1 \quad , \quad t = 1,2,....,k \quad , \quad \sum_{t=1}^{K} W_t = 1 \qquad (12.9)$$

ثالثاً: وبحل النموذج وحيد الهدف (12.8) عند القيم المختلفة للأوزان W (W متجه من الترتيب $1 \times K$) فإنه يمكن توليد عدد مناظر للقيم المختلفة لـ W من الحلول الكفأ efficient solutions للنموذج المتعدد الأهداف (VOP) في (12.2)-(12.1).

ووفقاً لشروط كون توكر Kuhn-Tucker [٤،67] فإن الحل الأمثل المطلق للمشكلة (12.9)-(12.8) يكون مناظر للقيم المثلى للأوزان الترجيحية W_t ، $t = 1,2,....,k$ كما سوف نوضح ذلك في الأمثلة التالية.

نظرية (١٢-٣): إذا كانت الدالة $f_t(X)$ دالة خطية فإن:

$$\text{Max.}\, f_t(X) = -\text{Min.}\, f_t(X) \quad , \quad t = 1,2,....,k \qquad (12.10)$$

الإثبات: أنظر المرجع [102, page 31].

وتعتبر هذه النظرية ذات أهمية عندما تكون الأهداف خليط من عمليات التعظيم والتصغير في بعض الحالات الخاصة.

مثال (١٢-٣): أعتبر نموذج تعدد الأهداف في مثال (١٢-٢) بأستخدام طريقة الأوزان الترجيحية حدد نقاط الحلول الكفأ للنموذج.

الحل: بفحص النموذج (5)-(1) في مثال (١٢-٢) نجد أن دوال الأهداف في (2)-(1) دوال خطية وبالتالي فهي دوال محدبة convex ، كذلك فئة القيود (5)-(3) فئة محدبة أيضاً، وبالتالي فإن النموذج (5)-(1) نموذج محدب (CMOP). وبأفتراض أن W_1, W_2 هي الأوزان الترجيحية للأهداف وبالتالي يمكن تحويل النموذج إلى نموذج وحيد الهدف على النحو التالي:

$$\text{Max.}F(W,X) = W_1(3X_1 + X_2) + W_2(-X_1 + 2X_2) \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 \le 4 \qquad (7)$$

$$0 \le X_1 \le 3 \qquad (8)$$

$$0 \le X_2 \le 3 \qquad (9)$$

$$0 < W_1, W_2 < 1 \qquad (10)$$

وبافتراض قيم مختلفة لـ W_1, W_2 بحيث $0 < W_1, W_2 < 1$ فإنه يمكن حل النموذج (10)−(6) بأستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث – الجزء الأول من هذا الكتاب [٤]) والحصول على الحل الأمثل X^*.

والجدول التالي يوضح الحلول المثلي للنموذج (10)−(6) عند القيم المختلفة لـ W_1, W_2 ، حيث تمثل هذه الحلول بعض نقاط الحلول الكفأ للنموذج (5)−(1).

جدول (١٢−١): يوضح فئة الحلول المثلى للنموذج المحول (10)−(6)
والحلول الكفأ للنموذج الأصلي (5)−(1).

w_1	w_2	X_1^*	X_2^*	$F(W,X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$
0.001	0.999	0	3	6	3	6
0.01	0.99	0	3	5.97	3	6
0.10	0.90	0	3	5.70	3	6
0.20	0.80	0	3	5.64	3	6
0.30	0.70	1	3	5.30	6	5
0.40	0.60	1	3	5.4	6	5
0.50	0.50	3	1	4	10	-1
0.60	0.40	3	1	5.6	10	-1
0.70	0.30	3	1	6.7	10	-1
0.80	0.20	3	1	7.0	10	-1
0.90	0.10	3	1	8.9	10	-1
0.95	0.05	3	1	9.45	10	-1

ملحوظة: نقط الحلول الكفأ في الجدول هي نفس النقط الكفأ التي تم الحصول عليها بيانياً في مثال (١٢-٢).

مثال (١٢-٤): أوجد بعض الحلول الكفأ (حلول باريتو المثلى) للمشكلة التالية ووضح ذلك بيانياً.

$$\text{Max.} f_1(X) = 3X_1 + X_2 \qquad (1)$$

$$\text{Max.} f_2(X) = X_1 - 2X_2 \qquad (2)$$

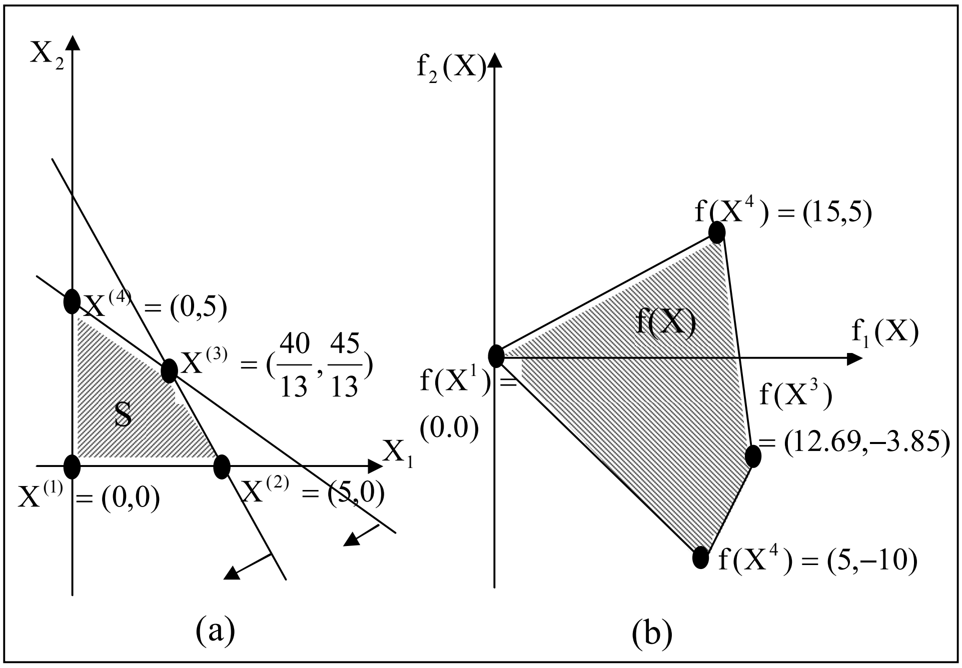
$$\text{S.T.} \quad X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (3)$$

$$9X_1 + 5X_2 \le 45 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

الحل:

شكل (١٢-٣): يوضح فراغ القرار في (a) وفراغ الأهداف في (b)



الشكل (١٢-٣) في (a)، يوضح فئة الحلول الممكنة S كذلك الشكل (b) يوضح فراغ الأهداف المناظر للفراغ S. ونظراً لأن الأهداف تعظيم من الرسم يتضح أن نقطة الحل الكفأ هي النقطة $(X_1^* = 5\ ,\ X_2^* = 0\ ,\ f(X^*) = (15,5))$. وفيما يلي سوف نوضح أنه يمكن الحصول على نفس الحل جبرياً بأستخدام طريقة الأوزان الترجيحية. فبفحص النموذج أعلاه نجد أن دوال الأهداف (2)-(1) دوال خطية وبالتالي فهي دوال محدبة ، كذلك نجد أن القيود (5)-(2) قيود خطية أي قيود محدبة أيضاً. وبالتالي فإنه النموذج (5)-(1) نموذج (CMOP) – وبأفتراض أن W_1, W_2 التى تمثل الأوزان الترجيحية للأهداف فإنه يمكن تحويل النموذج (5)-(1) متعدد الأهداف إلى نموذج خطى وحيد الهدف على النحو التالي:

$$\text{Max.}F(W,X) = W_1(3X_1 + X_2) + W_2(X_1 - 2X_2) \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (7)$$

$$9X_1 + 5X_2 \le 45 \qquad (8)$$

$$X_1, X_2 \ge 0\ ,\ 0 < W_1, W_2 < 1\ ,\ W_1 + W_2 = 1 \quad (9)$$

وبافتراض قيم مختلفة لـ W_1, W_2 ، $0 < W_1, W_2 < 1$ فإنه يمكن حل النموذج (9)-(6) باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث – الجزء الأول من هذا الكتاب) والحصول على الحل الأمثل X^*.

والجدول التالي يوضح الحلول المثلي للنموذج (9)-(6) عند القيم المختلفة المعطاه لـ W_1, W_2 ، والتى تعتبر حلول كفأ للنموذج (5)-(1) أيضاً.

جدول (١٢-٢): يوضح فئة بعض الحلول المثلى للنموذج المحول والتى تعتبر الحلول كفأ للنموذج الأصلي.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
w_1	w_2	X_1^*	X_2^*	$F(W,X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$
0.001	0.999	5	0	5	15	5
0.01	0.99	5	0	5.1	15	5
0.09	0.91	5	0	5.9	15	5
0.10	0.90	5	0	6.0	15	5
0.20	0.80	5	0	7.0	15	5
0.30	0.70	5	0	8.0	15	5
0.40	0.60	5	0	9.0	15	5
0.50	0.50	5	0	10.0	15	5
0.60	0.40	5	0	11.0	15	5
0.70	0.30	5	0	12.0	15	5
0.80	0.20	5	0	13.0	15	5
0.90	0.10	5	0	18.0	15	5

ومن الجدول نجد أن حلول باريتو المثلى النسبية (الحلول الكفأ) متساوية $(X_1^*=5\ ,\ X_2^*=0\ ,\ f_1(X^*)=15\ ,\ f_2(X^*)=5)$ وهو يعتبر حل بريتو الأمثل المطلق أيضاً وفقاً للنظرية (١٢-١).

مثال (١٢-٥): أوجد بعض الحلول الكفأ (حلول باريتو المثلى) للمشكلة التالية:

$$Min.f_1(X) = 5X_1 + 2X_2 \quad (1)$$
$$Max.f_2(X) = X_1 - X_2 \quad (2)$$
$$S.T. \quad 10X_1 + 5X_2 \geq 50 \quad (3)$$
$$8X_1 + 10X_2 \leq 80 \quad (4)$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \quad (5)$$

ثم حدد أفضل حل من بين هذه الحلول.

الحل: ١- بما أن الهدف (2) تعظيم الدالة $f_2(X)$ فإنه باستخدام العلاقة (12.10) يمكن تحويله إلى $Min.(-f_2(X))$.

٢- إذا فرضنا أن w_1, w_2 تشير إلى الأوزان الترجيحية للهدف الأول والثاني على الترتيب.

٣- بتحويل النموذج (5)-(1) إلى نموذج وحيد الهدف على النحو التالي:

$$Min.F(W, X) = w_1(5X_1 + 2X_2) - w_2(X_1 - X_2) \quad (6)$$
$$S.T. \quad 10X_1 + 5X_2 \geq 50 \quad (7)$$
$$8X_1 + 10X_2 \leq 80 \quad (8)$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ , \ 0 < w_1, w_2 < 1 \ , w_1 + w_2 = 1 \quad (9)$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة خطية وبأفتراض قيم مختلفة للأوزان w_j ، $0 < w_j < 1$ ، فإنه يمكن حل النموذج باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث- في الجزء الأول من هذا الكتاب) والحصول على الحلول الكفأ X^*.

والجدول التالي يوضح الحلول المثلي للنموذج (9)-(6) عند القيم المختلفة لـ W_j ، والتي تمثل حلول كفأ للنموذج (5)-(1) أيضاً.

جدول (١٢-٣): يوضح فئة بعض الحلول المثلى للنموذج المحول والحلول الكفأ للنموذج الأصلي.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
W_1	W_2	X_1^*	X_2^*	$F(W,X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$
0.001	0.999	10	8	-9.9	50	10
0.01	0.99	10	0	-9.4	50	10
0.09	0.91	10	0	-4.6	50	10
0.10	0.90	10	0	-4.0	50	10
0.20	0.80	5	0	1.0	25	5
0.30	0.70	5	0	4.0	25	5
0.40	0.60	5	0	7.0	25	5
0.50	0.50	5	0	10	25	5
0.60	0.40	5	0	13	25	5
0.70	0.30	5	0	13	25	5
0.80	0.20	1.67	6.67	18.33	21.69	-5.00
0.90	0.10	1.67	6.67	20	21.69	-5.00

ومن الجدول يتضح أن أفضل حلول هي:

$$(X_1^* = 10 \ , \ X_2^* = 8 \ , \ f_1(X^*) = 50 \ , \ f_2(X^*) = 10)$$

$$(X_1^* = 5 \ , \ X_2^* = 0 \ , \ f_1(X^*) = 25 \ , \ f_2(X^*) = 5)$$

مثال (١٢-٦): أعتبر نموذج (VOP) غير الخطي على النحو التالي [105]:

$$\text{Min.}f_1(X) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \qquad (1)$$

$$\text{Min.}f_2(X) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2 \qquad (2)$$

$$\text{Min.}f_3(X) = (X_1 - 4)^2 + (X_2 - 2)^2 \qquad (3)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (4)$$

$$X_2 \le 4 \qquad (5)$$

$$-X_1 \le 0 \qquad (6)$$

$$-X_2 \le 0 \qquad (7)$$

والمطلوب: أوجد بعض نقط الحلول الكفأ.

الحل: ١- بفحص دوال الأهداف (3)-(1) نجد أنها دوال محدبة convex (أنظر تعريف (١٢-٢)).

٢- كذلك نجد أن القيود (7)-(4) قيود خطية أي قيود محدبة أيضاً.

٣- من (١) ، (٢) نجد أن النموذج (7)-(1) نموذج برمجة غير خطية ولكنه نموذج محدب (CMOP) أيضاً.

٤- يمكن تحويله إلى نموذج وحيد الهدف محدب أيضاً على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\text{Min.}F(W,X) &= W_1[(X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2] + W_2[(X_1 - 2)^2 + \\ &\quad (X_2 - 3)^2] + W_3[(X_1 - 4)^2 + (X_2 - 2)^2] \\ &= (X_1^2 + X_2^2) - (2W_1 + 4W_2 + 8W_3)X_1 - (2W_1 + \\ &\quad 6W_2 + 4W_3)X_2 + (2W_1 + 13W_2 + 20W_3) \qquad (8)\end{aligned}$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (9)$$

$$X_2 \le 4 \quad (10)$$

$$-X_1 \le 0 \quad (11)$$

$$-X_2 \le 0 \quad (12)$$

حيث: $W_1 + W_2 + W_3 = 1$

٥- النموذج (12)-(8) نموذج وحيد الهدف وهو نموذج محدب أيضاً يمكن الحصول على الحل الأمثل المطلق له global minimum solution على النحو التالي (أنظر الفصل (٩-٥) بالجزء الأول من هذا الكتاب [٤]):

أ- نحول النموذج (12)-(8) المقيد إلى نموذج غير مقيد وذلك بتحويل القيود إلى متساويات بإضافة المتغيرات المكملة $S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_4^2$ ثم تكوين دالة لأجرانج $L(W,X,\lambda)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} L(W,X,\lambda) = \{ & X_1^2 + X_2^2 - (2W_1 + 4W_2 + 8W_3)X_1 - (2W_1 + \\ & 6W_2 + 4W_3)X_2 + (2W_1 + 13W_2 + 20W_3)\} - \\ & \lambda_1(X_1 + 2X_2 - 10 + S_1^2) - \lambda_2(X_2 - 4 + S_2^2) - \\ & \lambda_3(-X_1 + S_3^2) - \lambda_4(-X_2 + S_4^2) \end{aligned}$$

وبأستخدام شروط Kuhn-Tuker نحصل على نقطة النهاية الصغرى المطلقة للدالة $L(W,X,\lambda)$ عند القيم المختلفة للمتجهات W وهي نفس الحل الأمثل المطلق للنموذج (12)-(8) والموضحة في الجدول التالي.

٥- وبما أن حلول النموذج (12)-(8) عند القيم المختلفة لـ W_j تعتبر نقطة حلول كفأ للنموذج متعدد الأهداف (7)-(1) عند قيم معينة للأوزان W_j، $0 < W_j < 1$ ، وبالتالي يمكن توليد بعض الحلول الكفأ للنموذج (7)-(1) بالتعويض ببعض القيم

المختلفة للأوزان W_j كما هو موضح في الجدول التالي (يمكن أستخدام حزمة Maple للحصول على الحلول المولدة أنظر الفصل (٩-٦) بالجزء الأول من هذا الكتاب [٤]).

جدول (١٢-٤): يوضح فئة بعض الحلول المثلى للنموذج وحيد الهدف والحلول الكفأ المناظرة لها للنموذج الأصلي.

w_1	w_2	w_3	X_1^*	X_2^*	$F(W,X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$
0.1	0.4	0.5	2.9	2.3	1.7	5.3	1.3	1.3
0.2	0.3	0.5	2.8	2.1	2.05	4.45	1.45	1.45
0.3	0.2	0.5	2.7	1.9	2.3	3.7	1.7	1.7
0.4	0.1	0.5	2.6	1.7	2.45	3.05	2.05	2.05
0.5	0.1	0.4	2.3	1.6	2.45	2.05	2.05	3.05

مثال (١٢-٧): بأستخدام طريقة الأوزان الترجيحية أوجد بعض الحلول الكفأ (حلول باريتو المثلى) للنموذج التالي:

$$\text{Max.}f_1(X) = -X_1^2 - X_2^2 + 2X_1 + 2X_2 - 2 \qquad (1)$$

$$\text{Max.}f_2(X) = -X_1^2 - X_2^2 + 8X_1 + 2X_2 - 17 \qquad (2)$$

$$\text{S.T.} \qquad 12X_1 + 5X_2 \le 60 \qquad (3)$$

$$X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (4)$$

$$-X_1 \le 0 \quad , \quad -X_2 \le 0 \qquad (5)$$

الحل: ١- بفحص دوال الأهداف (2)-(1) نجد أنها دوال مقعرة concave functions كذلك نجد أن القيود (5)-(3) تمثل قيود محدبة convex constraints (حيث أنها قيود خطية).

٢- وبتحويل النموذج (5)-(1) إلى نموذج وحيد الهدف على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max.}F(W,X) &= W_1(-X_1^2 - X_2^2 + 2X_1 + 2X_2 - 2) + \\ & W_2(-X_1^2 - X_2^2 + 8X_1 + 2X_2 - 17) \\ &= -(X_1^2 + X_2^2) + 2(W_1 + 4W_2)X_1 + 2X_2 - \\ & (2W_1 + 17W_2) \qquad (6) \end{aligned}$$

$$\text{S.T.} \quad 12X_1 + 5X_2 \le 60 \qquad (7)$$

$$X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (8)$$

$$-X_1 \le 0 \quad , \quad -X_2 \le 0 \qquad (9)$$

حيث $0 < W_1, W_2 < 1 \quad ، \quad W_1 + W_2 = 1$

وبما أن الدالة $F(W,X)$ دالة مقعرة concave والهدف تعظيم فإنه يمكن الحصول على الحل الأمثل المطلق لها عند قيم معينة لـ W_1, W_2.

٣- نكون دالة لأجرانج $L(W,X,\lambda)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} L(W,X,\lambda) &= -(X_1^2 + X_2^2) + 2(W_1 + 4W_2)X_1 + 2X_2 - (2W_1 + 17W_2) \\ & - \lambda_1(12X_1 + 5X_2 + S_1^2 - 60) - \lambda_2(X_1 + 2X_2 + S_2^2 - 10) \\ & - \lambda_3(-X_1 + S_3^2) - \lambda_4(-X_2 + S_4^2) \qquad (10) \end{aligned}$$

٤- وباستخدام شروط كون - توكر نحصل على نقطة النهاية العظمى للدالة $L(W,X,\lambda)$ في (10) ، وهو نفس الحل الأمثل المطلق للنموذج (9)-(6).

٥- وبما أن حل النموذج (9)-(6) يعتبر نقطة حل كفأ للنموذج (4)-(1) المتعدد الأهداف عند قيم معينة للأوزان W_1, W_2 ، وبالتالي يمكن توليد بعض الحلول

الكفأ للنموذج (4)−(1) بالتعويض ببعض القيم المختلفة W_1, W_2 (يمكن أيضاً استخدام حزمة Maple − أنظر الفصل (٩−٦) بالجزء الأول من الكتاب).

والجدول التالي يوضح نقط الحلول الكفأ للنموذج متعدد الأهداف (4)−(1).

جدول (١٢−٥): يوضح فئة بعض الحلول المثلى للنموذج وحيد الهدف والحلول الكفأ المناظرة لها للنموذج الأصلي.

w_1	w_2	X_1^*	X_2^*	$F(W, X^*)$	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$
0.01	0.99	3.97	1	-0.09	-8.82	-0.0009
0.1	0.9	3.7	1	-0.81	-7.29	-0.09
0.2	0.8	3.4	1	-1.44	-5.76	-0.36
0.3	0.7	3.1	1	-1.89	-4.41	-0.81
0.4	0.6	2.8	1	-2.16	-3.24	-1.44
0.5	0.5	2.5	1	-2.25	-2.25	-2.25
0.6	0.4	2.2	1	-2.16	-1.44	-3.24

ومما سبق يتضح أن طريقة الأوزان الترجيحية تعتمد على الأوزان الترجيحية W_j ، حيث $j = 1,2,...,k$ التي تعكس الأهمية النسبية لكل هدف.

ولكن بالنسبة للمشاكل التطبيقية فإنه تواجه متخذ القرار كيف يمكن تحديد قيم الأوزان الترجيحية، ولكن نظراً لوجود برامج الحزم الجاهزة فإنه يمكن أستخدامها لتوليد عدد مناسب من الحلول الكفأ وعرضها على متخذ القرار حيث تمكنه من:

١− تحديد القيم المناسبة للأوزان W_j .

٢− إجراء تحليل لحساسية الحل بالنسبة للأوزان الترجيحية.

(١٢-٣) طريقة الأولويات Prioritizing (Ranking or Lexicographic) Method

وتتلخص هذه الطريقة في تحويل نموذج البرمجة متعدد الأهداف (VOP) في (12.1)-(12.2) إلى عدد K (حيث K تشير إلى عدد الأهداف) من النماذج الجزئية وحيدة الهدف بعد ترتيب الأهداف وفقاً لأولوياتها priorities ، حيث يعتبر الهدف $f_t(X)$ أهم من الهدف $f_{t+1}(X)$ ، بحيث $t=1,2,....,k$ ويرمز لها على النحو $f_t(X) >> f_{t+1}(X)$ وتقرأ "الهدف $f_t(X)$ أهم من الهدف $f_{t+1}(X)$" . وبالتالي يعاد صياغة النموذج متعدد الأهداف على النحو التالي [55]:

$$\text{Lexicographic Max. } F(X) = [f_1(X), f_2(X), .., f_t(X), .., f_k(X)] \quad (12.11)$$

$$\text{S.T.} \qquad g_i(X) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,.....,m \quad (12.12)$$

حيث يشير الأصطلاح .Lexicographic Max إلى (أيجاد النهاية العظمى للدوال $f_t(X)$ وفقاً لأولوياتها. كذلك ممكن أن تكون العملية في (12.11) عملية تصغير $\text{Lexic. Min. } F(X)$). فإذا أشرنا إلى النموذج وحيد الهدف رقم (t) بالرمز Mt فإن هذه الطريقة تعتبر أن:

$$(M1) \subseteq (M2) \subseteq ...... \subseteq (Mk) \qquad (12.13)$$

كما سوف نوضح ذلك في خطوات الخوارزم التالي:

<u>**خوارزم (١٢-١):**</u> الخطوة (١) ١- نكون النموذج وحيد الهدف المناظر للهدف ذو الأولوية الأولى على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max. } f_1(X) & \\ \text{S.T.} \quad g_i(X) \le 0 & , \quad i = 1,2,.....,m \end{array}\right\} \quad (M1)$$

٢- يتم حل النموذج $(M1)$ بطريقة مناسبة (وفقاً لخصائص النموذج) ونحصل على الحل الأمثل له وليكن $X^{(1)}$.

الخطوة (٢): ١- نكون النموذج وحيد الهدف المناظر للهدف ذو الأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max. } f_2(X) & \\ \text{S.T.} \quad f_1(X) = f_1(X^{(1)}) & \\ \qquad g_i(X) \le 0 & , \quad i = 1,2,.....,m \end{array}\right\} \quad (M2)$$

وهنا نلاحظ أن الحل الأمثل للنموذج $(M1)$ في $X^{(1)}$ وضع كقيد في النموذج $(M2)$ بحيث أن حل النموذج $(M2)$ لا يغير قيمة دالة الهدف $f_1(X^{(1)})$ أو بعبارة أخرى أصبح الحل $f(X^{(1)})$ قيد على النموذج الجزئي الثاني.

٢- يتم حل النموذج $(M2)$ بطريقة مناسبة ونحصل على الحل الأمثل وليكن $X^{(2)}$.

وهكذا بالنسبة للنماذج الأخرى $(M3)$، $(M4)$،.... إلى النموذج $(M(k-1))$.

الخطوة (K): ١- نكون النموذج وحيد الهدف المناظر للهدف ذو الأولوية K (الأولوية الأقل) على النحو:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max. } f_k(X) & \\ \text{S.T.} \quad f_t(X) = f_t(X^{(t)}) & , \quad t = 1,2,...,k-1 \\ \qquad g_i(X) \le 0 & , \quad i = 1,2,.....,m \end{array}\right\} \quad (Mk)$$

٢- يتم حل النموذج (Mk) بطريقة مناسبة ونحصل على الحل الأمثل وليكن $X^{(k)}$.

ويكون الحل $X^{(k)}$ هو حل النموذج متعدد الأهداف (12.12)–(12.11) وفقاً للأولويات.

ملحوظة: تعتبر الحلول المثلى $f_1(X^{(1)}), f_2(X^{(2)}), \ldots\ldots, f_{k-1}(X^{(k-1)})$ قيود على النموذج (Mk) وبالتالي الحل الأمثل للنموذج (Mk) لا يؤثر على القيم المثلى للأهداف $f_1(X^{(1)}), f_2(X^{(2)}), \ldots\ldots, f_{k-1}(X^{(k-1)})$.

ومما سبق يمكن أعادة كتابة النماذج الجزئية بشكل عام على النحو التالي:

$$\text{Max. } f_t(X) \qquad (12.14)$$

$$\text{S.T.} \quad f_{t-1}(X) = f_{t-1}(X^{(t-1)}) \;,\; t = 2,\ldots,k-1 \qquad (12.15)$$

$$g_i(X) \le 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,m \qquad (12.16)$$

وسوف نوضح هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية.

<u>مثال (١٢-٨)</u>: أعتبر النموذج في مثال (١٢-٢) على النحو:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max.} f_1(X) = 3X_1 + X_2 \\ \text{Max.} f_2(X) = X_1 - 2X_2 \\ \quad \text{S.T.} \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 \\ \qquad\qquad\quad 9X_1 + 5X_2 \le 45 \\ \qquad\qquad\quad X_1, X_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

فإذا أعتبرنا $f_1(X) >> f_2(X)$ بالتالي فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lexic.Max.} f(X) = \{(3X_1 + X_2), (X_1 - 2X_2)\} \\ \quad \text{S.T.} \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 \\ \qquad\qquad\quad 9X_1 + 5X_2 \le 45 \\ \qquad\qquad\quad X_1, X_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

الحل: الخطوة (١): ١- نكون النموذج ذو الأولوية الأولى:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max.}f_1(X) = 3X_1 + X_2 \\ \text{S.T.} \quad X_1 + 2X_2 \le 10 \\ \qquad 9X_1 + 5X_2 \le 45 \\ \qquad X_1, X_2 \ge 0 \end{array}\right\} (M1)$$

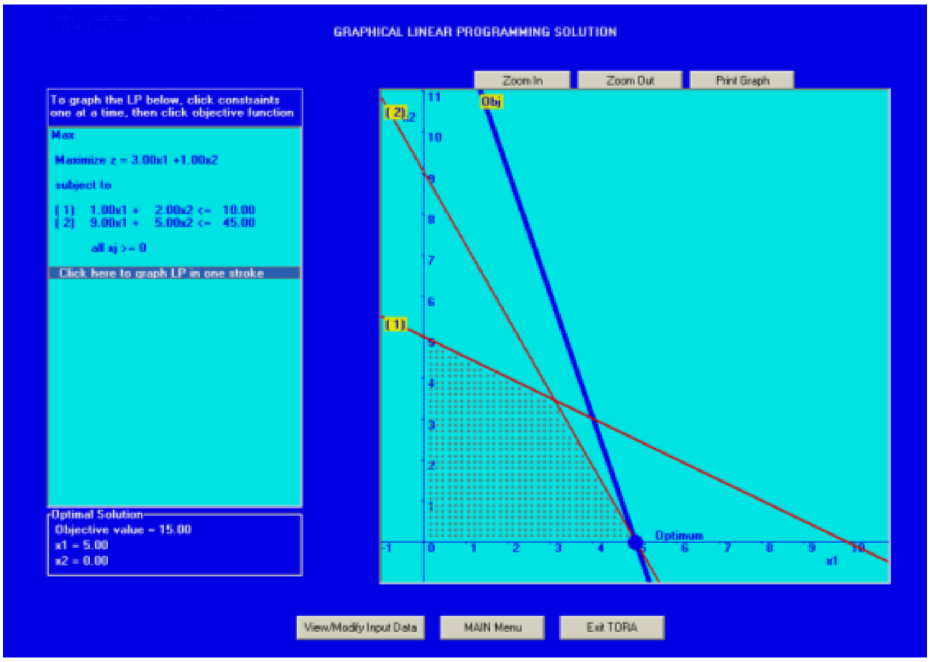
٢- ونلاحظ النموذج (M1) نموذج برمجة خطية يمكن حله بيانياً أو باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث بالجزء الأول من الكتاب [٤]).

فنحصل على الحل الأمثل:

$$X^{(1)} = (X_1 = 5.0 \;\; , \;\; X_2 = 0.0 \;\; , \;\; f_1(X^{(1)}) = 15)$$

كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (١٢-٤) يوضح الحل الأمثل للنموذج (M1)



الخطوة (٢): ١- نكون النموذج ذو الأولوية الثانية على النحو التالي:

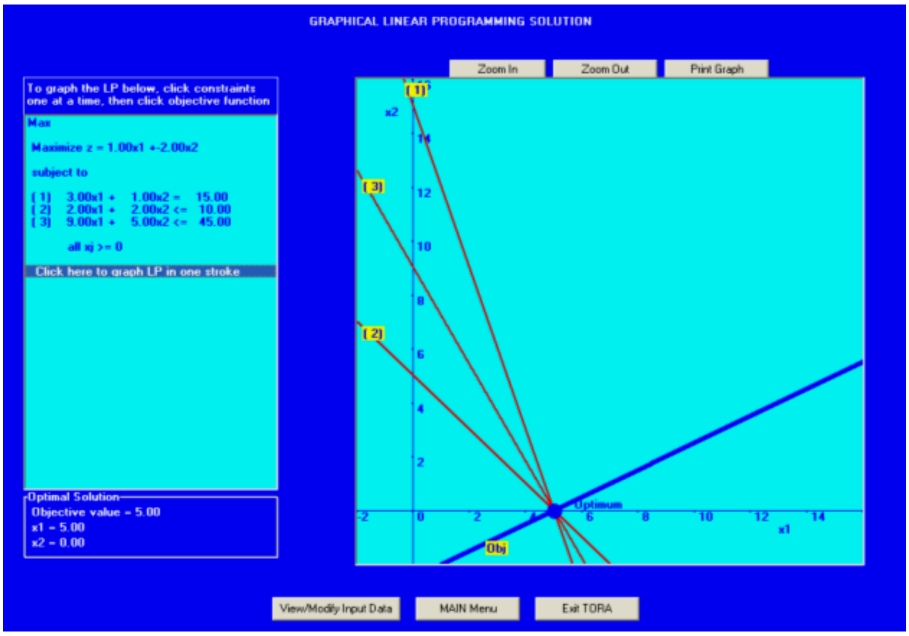
$$\left.\begin{aligned} & \text{Max.}f_2(X) = X_1 - 2X_2 \\ & \text{S.T.} \qquad 3X_1 + X_2 = 15 \\ & \qquad\qquad X_1 + 2X_2 \le 10 \\ & \qquad\qquad 9X_1 + 5X_2 \le 45 \\ & \qquad\qquad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (M2)$$

٢- النموذج $(M2)$ نموذج برمجة خطية أيضاً يمكن حله بيانياً أو باستخدام طريقة السمبلكس - فنحصل على الحل الأمثل:

$$X^{(2)} = (X_1 = 5.0 \quad , \quad X_2 = 0.0 \quad , \quad f_2(X^{(2)}) = 5)$$

كما هو موضح في الشكل (١٢-٥).

شكل (١٢-٥) يوضح الحل الأمثل للنموذج $(M2)$



ومما سبق يتضح أن الحل الأمثل X^* لنموذج تعدد الأهداف (2) على النحو التالي:

$$X^* = (X_1 = 5.0 \quad , \quad X_2 = 0.0 \quad , \quad f_1(X) = 15 \quad , \quad f_2(X) = 5)$$

<u>مثال (١٢-٩):</u>أعتبر نموذج برمجة تعدد الأهداف التالي بحيث $f_1(X) >> f_2(X)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max.} f_1(X) = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 \\ \text{Min.} f_2(X) = 3X_1 + 2X_3 \\ \quad \text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 = 7 \\ \qquad\qquad\quad 2X_1 - 5X_2 + X_3 \geq 10 \\ \qquad\qquad\quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

الحل: ١- النموذج الجزئي ذو الأولوية الأولي على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max.} f_1(X) = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 \\ \quad \text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 = 7 \\ \qquad\qquad\quad 2X_1 - 5X_2 + X_3 \geq 10 \\ \qquad\qquad\quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (M1)$$

ونلاحظ أن النموذج $(M1)$ نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث بالجزء الأول من الكتاب [٤]). وممكن استخدام حزمة TORA.

فنحصل على الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X^{(1)} = (X_1 = 6.43 \ , \ X_2 = 0.57 \quad , \ X_3 = 0 \quad , \ f_1(X^{(1)}) = 14.57)$$

وملحق (١) يوضح الخطوات التفصيلية للحل باستخدام حزمة TORA.

٢- نكون النموذج الجزئي ذو الأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.} f_2(X) = 3X_1 + 2X_3 \\ \text{S.T.} \quad 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 14.57 \\ \quad X_1 + X_2 + X_3 = 7 \\ \quad 2X_1 - 5X_2 + X_3 \geq 10 \\ \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (M2)$$

وبحل النموذج الجزئي $(M2)$باستخدام طريقة السمبلكس أيضاً نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$X^{(2)} = (X_1 = 6.43 \ , \ X_2 = 0.57 \ , \ X_3 = 0 \ , \ f_2(X^{(2)}) = 19.29)$$

وملحق (١) يوضح الخطوات التفصيلية للحل باستخدام حزمة TORA.

ويكون حل نموذج تعدد الأهداف (١) على النحو التالي:

$$X_1^* = 6.43 \quad , \quad X_2^* = 0.57 \quad , \quad X_3^* = 0 ,$$
$$f_1(X^*) = 14.57 \ , \quad f_2(X^*) = 20.43$$

ملحوظة: ونلاحظ أن من مميزات هذه الطريقة للحل تمكن من أستخدام عملية التعظيم .Max لبعض النماذج الجزئية وعملية التصغير .Min لبعض النماذج الجزئية الأخرى

<u>مثال (١٢-١٠)</u>: أعتبر نموذج برمجة تعدد الأهداف مثال (١٢-٤) على النحو حيث $f_1(X) >> f_2(X) >> f_3(X)$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.} f_1(X) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ \text{Min.} f_2(X) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2 \\ \text{Min.} f_3(X) = (X_1 - 4)^2 + (X_2 - 2)^2 \\ \text{S.T.} \quad X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ \quad X_2 \leq 4 \\ \quad -X_1 \leq 0 \ , \ -X_2 \leq 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

الحل: الخطوة (١) ١- نكون النموذج الجزئي المناظر للأولوية الأولي على النحو:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min.} f_1(X) = (X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 & \\ \text{S.T.} \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 & \\ \qquad\quad X_2 \le 4 & \\ \qquad\quad -X_1 \le 0 \ , \ -X_2 \le 0 & \end{array}\right\} \quad (M1)$$

٢- والنموذج $(M1)$ نموذج برمجة غير خطية ولكنه نموذج محدب convex ويمكن حله باستخدام طريقة لأجرانج (أنظر الباب التاسع بالجزء الأول من هذا الكتاب[٤]). نجد أن الحل الأمثل للنموذج $(M1)$ على النحو التالي:

$$X^{(1)} = (X_1 = 1 \ , \ X_2 = 1 \ , \ f_1(X^{(1)}) = 0)$$

الخطوة (٢): ١- نكون النموذج الجزئي الثاني $(M2)$ وفقاً للأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min.} f_2(X) = (X_1-2)^2 + (X_2-3)^2 & \\ \text{S.T.} \qquad (X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 = 0 & \\ \qquad\quad X_1 + 2X_2 \le 10 & \\ \qquad\quad X_2 \le 4 & \\ \qquad\quad -X_1 \le 0 \ , \ -X_2 \le 0 & \end{array}\right\} \quad (M2)$$

٢- والنموذج $(M2)$ نموذج برمجة غير خطية أيضاً كذلك يعتبر نموذج convex أيضاً. ويمكن حله أيضاً باستخدام طريقة لأجرانج. ونجد أن الحل الأمثل للنموذج $(M2)$ على النحو التالي:

$$X^{(2)} = (X_1 = 1 \ , \ X_2 = 1 \ , \ f_2(X^{(2)}) = 5)$$

الخطوة (٣): ١- نكون النموذج الجزئي الثالث $(M3)$على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min.}f_3(X) = (X_1-4)^2 + (X_2-2)^2 & \\ \text{S.T.} \qquad (X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 = 0 & \\ \qquad (X_1-2)^2 + (X_2-3)^2 = 5 & \\ \qquad X_1 + 2X_2 \le 10 & \\ \qquad X_2 \le 4 & \\ \qquad -X_1 \le 0 \quad , -X_2 \le 0 & \end{array}\right\} \quad (M3)$$

والنموذج الجزئي (M3) نموذج برمجة غير خطية محدب أيضاً يمكن حله باستخدام طريقة لأجرانج أيضاً. ويكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X^{(3)} = (X_1 = 1 \ , \ X_2 = 1 \ , \ f_3(X^{(3)}) = 10)$$

وبالتالي يكون حل نموذج برمجة تعدد الأهداف (1) على النحو التالي:

$$X_1^* = 1 \ , \ X_2^* = 1 \ , \ f_1(X) = 0 \ , \ f_2(X) = 5 \ , \ f_3(X) = 10$$

وملحق (٢): يوضح الحل للنماذج الجزئية السابقة بأستخدام حزمة Maple. (أنظر الفصل (٩-٦) بالجزء الأول من الكتاب [٤]).

مثال (١٢-١١): باستخدام طريقة الأولويات أوجد حل نموذج برمجة تعدد الأهداف التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max.}f_1(X) = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ \text{Min.}f_2(X) = (X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 \\ \text{S.T.} \qquad X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30 \\ \qquad X_1 - 5X_2 - 6X_3 \le 40 \\ \qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

الحل: ١- نكون النموذج الجزئي الأول (M1) على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} Max.f_1(X) = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ S.T. \quad X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30 \\ \quad X_1 - 5X_2 - 6X_3 \le 40 \\ \quad X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{array}\right\} \quad (M1)$$

ونلاحظ أن النموذج الجزئي $(M1)$ نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث بالجزء الأول من الكتاب [١]). فنحصل على الحل الأمثل التالي:

$$X^{(1)} = (X_1 = 30 \ , \ X_2 = 0 \ , \ X_3 = 0 \ , \ f_1(X^{(1)}) = 150)$$

الخطوات التفصيلية للحل بملحق رقم (٣).

٢- نكون النموذج الجزئي الثاني $(M2)$ على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} Min.f_2(X) = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\ \qquad = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1 - 2X_2 + 2 \\ S.T. \quad 5X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 150 \\ \quad X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30 \\ \quad X_1 - 5X_2 - 6X_3 \le 40 \\ \quad X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{array}\right\} \quad (M2)$$

ونلاحظ أن النموذج $(M2)$ نموذج محدب يمكن حله باستخدام طريقة لأجرانج (أنظر الباب التاسع بالجزء الأول من الكتاب [٤]) فيكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X^{(2)} = (X_1 = 30 \ , \ X_2 = 0 \ , \ X_3 = 0 \ , \ f_2(X^{(2)}) = 842)$$

أنظر ملحق (٣).

ومما سبق يتضح أن حل النموذج متعدد الأهداف (1) على النحو التالي:

$$X_1^* = 30 \ , \ X_2^* = 0 \ , \ X_3^* = 0, \ f_1(X^*) = 150 \ , \ f_2(X^*) = 842$$

(١٢-٤) طريقة التدرج Hierarchical Method

في كثير من المشاكل التطبيقية التي يمكن صياغتها في شكل نماذج برمجة متعدد الأهداف، ووفقاً لأولويات يقوم بتحديدها متخذ القرار كما في النموذج (12.16)-(12.14) ولكن في بعض الحالات مثل الحالتين التاليتين:

١- تكون بعض الأهداف متعارضة conffecting objectives مع بعضها.

٢- يرغب متخذ القرار في التضحية بنسبة معينة من قيمة دالة هدف ما (أو الأهداف) ذو الأولوية الأهم لتحسين الحل في قيمة بعض أو كل قيم دوال الأهداف ذات الأولويات الأقل.

في هذه الحالات يتم تحويل مجموعة القيود (12.15) المرتبطة بالأهداف إلى القيود التالية [76,99]:

$$f_j(X)=\left(1+\frac{\delta_j}{100}\right)f_j(X^*) \quad , \ j=1,2,3....,k \qquad (12.17)$$

حيث δ_j تشير إلى النسبة المئوية المطلوب التضحية بها من الهدف ذو الأولوية (j) لتحسين قيم دوال الأهداف ذو الأولويات $(j+1)$ أو $(j+2)$ ...... إلى الأولوية (K) ، إذا كان الهدف ذو الأولوية (j) إجراء عملية تصغير Minimization. أما إذا كان الهدف (j) إجراء عملية تعظيم Maximization فيصبح القيد (12.17) على النحو التالي:

$$f_j(X)=\left(1-\frac{\delta_j}{100}\right)f_j(X^*) \quad , \ j=1,2,3....,k \qquad (12.18)$$

ومن أهم مزايا هذه الطريقة أنها تعطى تحليل لحساسية الحل X^* لتغير القيمة المثلى للهدف (أو الأهداف) بنسبة معينة لتحسين القيم المثلى للأهداف ذو الأهمية الأقل.

وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١٢-١٢): تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات A , B بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج المرور على خطين للإنتاج، والجدول التالي يوضح الساعات المتاحة على كل خط كذلك تكلفة الوحدة بالجنية.

جدول (١٢-٦): يوضح متطلبات الإنتاج

عدد ساعات التشغيل المتاحة	الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة		خط الإنتاج
	B	A	
أقل من أو تساوى1800	2	3	I
أكبر من أو تساوى1500	5	3	II
	8	5	التكلفة بالجنية

فإذا كان الطلب في السوق على النوع A لا يقل عن 250 وحدة ويرغب متخذ القرار في صياغة المشكلة كنموذج برمجة متعدد الأهداف بحيث يتم تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

١- إنتاج أكبر عدد من الوحدات من A , B.

٢- تصغير التكاليف الكلية.

٣- دراسة تصغير أكبر عدد من الوحدات المنتجة بنسبة 10% على التكاليف الكلية.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B على الترتيب – ويصبح النموذج متعدد الأهداف على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 التي تحقق:

$$\begin{aligned} &\text{Max.} f_1(X) = X_1 + X_2 && (1)\\ &\text{Min.} f_2(X) = 5X_1 + 8X_2 && (2)\\ &\text{S.T.} \quad 3X_1 + 2X_2 \le 1800 && (3)\\ &\qquad\quad 3X_1 + 5X_2 \ge 1500 && (4)\\ &\qquad\quad X_1 \ge 250 && (5)\\ &\qquad\quad X_1, X_2 \ge 0 && (6) \end{aligned}$$

<u>أولاً</u>: باستخدام طريقة الأولويات

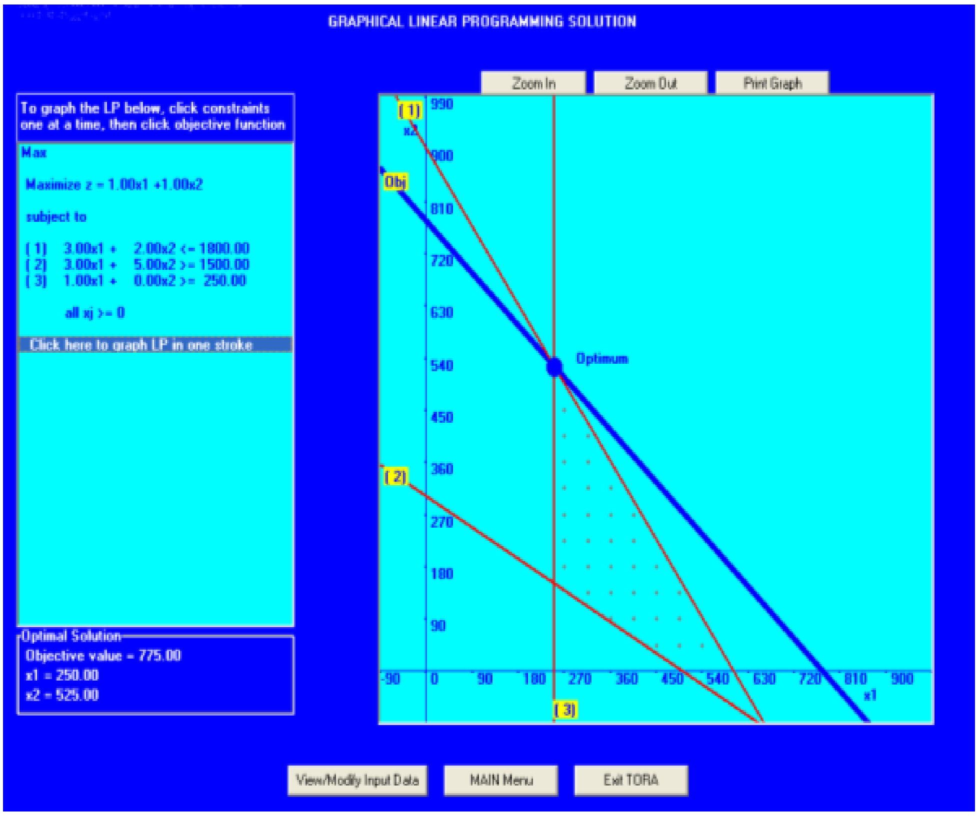
$$\left.\begin{aligned} &\text{Max.} f_1(X) = X_1 + X_2\\ &\text{S.T.} \quad 3X_1 + 2X_2 \le 1800\\ &\qquad\quad 3X_1 + 5X_2 \ge 1500\\ &\qquad\quad X_1 \ge 250\\ &\qquad\quad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (M1)$$

ونلاحظ أن النموذج $(M1)$ نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث بالجزء الأول من الكتاب [٤]). فيكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X^{(1)} = (X_1 = 250 \;\;,\;\; X_2 = 525 \;\;,\;\; f_1(X^{(1)}) = 775) \qquad (1)$$

كما هو موضح بالشكل التالي:

شكل (١٢-٦) الحل الأمثل للنموذج (M1)



ثانياً: النموذج الجزئي (M2)

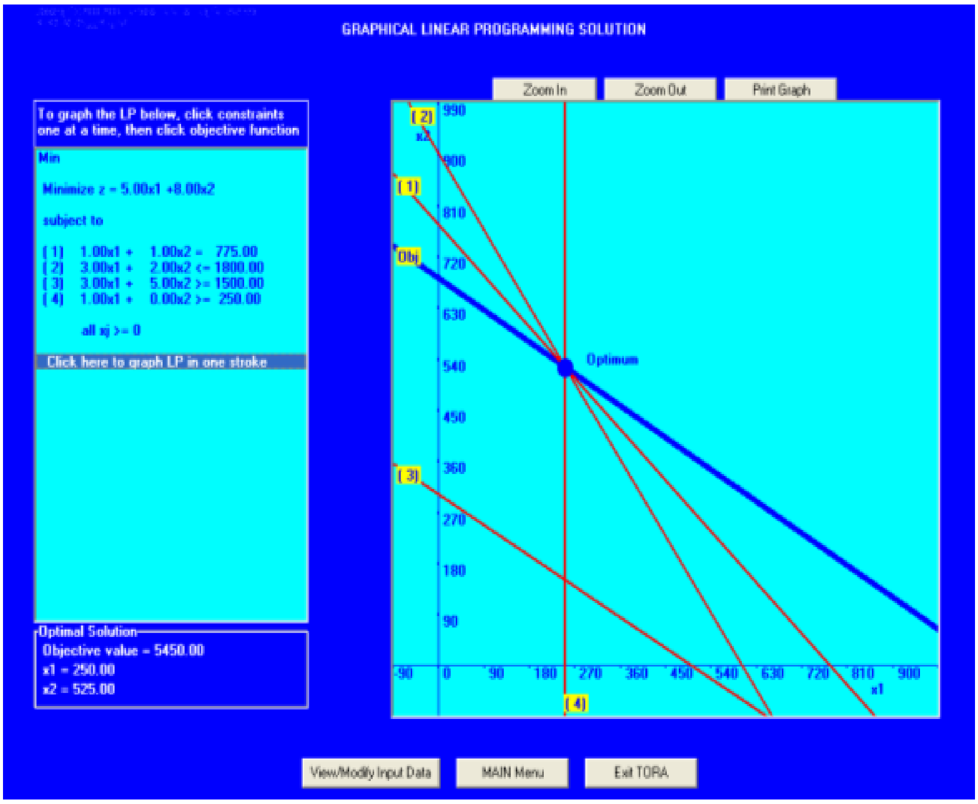
$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{Min.} f_2(X) = 5X_1 + 8X_2 & \\
\text{S.T.} & X_1 + X_2 = 775 \\
& 3X_1 + 2X_2 \le 1800 \\
& 3X_1 + 5X_2 \ge 1500 \\
& X_1 \ge 250 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{array}\right\} \quad (M2)
$$

ونلاحظ أن النموذج (M2) نموذج برمجة خطية أيضاً يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس – ويكون الحل الأمثل له على النحو التالي:

$$X^{(2)} = (X_1 = 250 \ , \ X_2 = 525 \ , \ f_2(X^{(2)}) = 5450) \qquad (2)$$

كما هو موضح في الشكل التالي

شكل (١٢-٧) الحل الأمثل للنموذج (M2)



ويكون حل النموذج متعدد الأهداف على النحو:

$$X_1^* = 250 \ , X_2^* = 525 \ , \ f_1(X^*) = 775 \ , \ f_2(X^*) = 5450 \qquad (3)$$

ثالثاً: إذا تم تصغير $f_1(X^{(1)})$ بنسبة 10% ، فإن:

$$\delta_1\, f_1(X^{(1)}) = \frac{10}{100}(775) \approx 78$$ وحدة

وبالتالي يصبح عدد الوحدات المرضي لمتخذ القرار:

$$= \left(1 - \frac{10}{100}\right) f_1(X^{(1)}) = 697$$ وحدة

ويصبح النموذج $(M2)$ بعد تخفيض قيمة دالة الهدف في الأولوية الأولي على النحو:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min.} f_2(X) = 5X_1 + 8X_2 & \\ \text{S.T.} & X_1 + X_2 = 697 \\ & 3X_1 + 2X_2 \le 1800 \\ & 3X_1 + 5X_2 \ge 1500 \\ & X_1 \ge 250 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{array}\right\} \quad (M2)'$$

وبحل $(M2)'$ نجد أن الحل الأمثل على النحو:

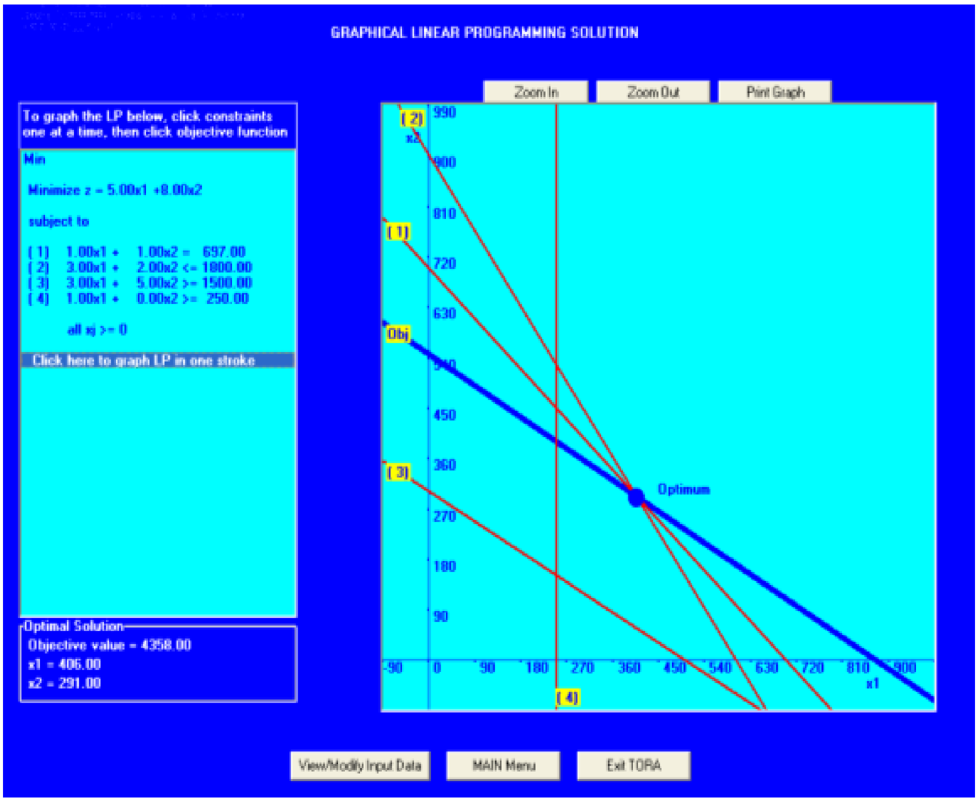
$$X^{(3)} = (X_1 = 406\ ,\ X_2 = 291\ ,\ f_3(X^{(3)}) = 4359) \qquad (4)$$

كما هو موضح في الشكل التالي (١٢-٨).

ويكون حل النموذج المتعدد الأهداف في هذه الحالة:

$$X_1^* = 406\ , X_2^* = 291,\ f_1(X^*) = 697\ ,\ f_2(X^*) = 4359 \qquad (5)$$

شكل (١٢-٨) الحل الأمثل للنموذج (M2)[1]



من (3) ، (5) نجد أن تخفيض قيمة دالة الهدف المثلى في الأولوية الأولي بنسبة 10% أدى إلى تخفيض التكاليف في الأولوية الثانية بمقدار 1091 جنيه $(5450-4359=1091)$.

(١٢-٥) تمرينات Exercises

(١٢-١): أعتبر نماذج البرمجة الخطية متعددة الأهداف التالية:

$$\begin{aligned}
&(1)\ Max.Z_1 = X_1 + 2X_2 \\
&\quad Max.Z_2 = X_1 \\
&\quad S.T. \quad X_1 - 2X_2 \le 2 \\
&\quad\quad X_1 + 2X_2 \le 12 \\
&\quad\quad 2X_1 + X_2 \le 9 \\
&\quad\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2)\ Min.Z_1 = 5X_1 - X_2 \\
&\quad Min.Z_2 = X_1 + 4X_2 \\
&\quad S.T. \quad -5X_1 + 2X_2 \le 10 \\
&\quad\quad X_1 + X_2 \ge 3 \\
&\quad\quad X_1 + 2X_2 \ge 4 \\
&\quad\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(3)\ Max.Z_1 = 6X_1 + 4X_2 \\
&\quad Max.Z_2 = X_2 \\
&\quad S.T. \quad 3X_1 + 2X_2 \le 12 \\
&\quad\quad X_1 + 2X_2 \le 10 \\
&\quad\quad X_1 \le 3 \\
&\quad\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(4)\ Min.Z_1 = 2X_1 + 4X_2 \\
&\quad Min.Z_2 = X_1 - X_2 \\
&\quad S.T. \quad 3X_1 + 2X_2 \ge 6 \\
&\quad\quad -X_1 + X_2 \le 3 \\
&\quad\quad X_1 \le 5 \\
&\quad\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

المطلوب: بالنسبة لكل نموذج من النماذج أعلاه

١- وضح بيانياً فراغ الحلول الممكنة ووضح النقط الطرفية الممكنة.

٢- وضح بيانياً فراغ الأهدف المناظر لفراغ الحلول الممكنة، ثم وضح متجهات الأهداف بفراغ الأهداف المناظرة للنقط الطرفية بفراغ الحل.

٣- من(٢) وضح بيانياً وجود تعارف بين الهدف الأول والثاني بالنموذج رقم(2).

٤- باستخدام طريقة الأوزان الترجيحية أوجد فئة بعض الحلول الكفأ للنموذج.

٥- باستخدام طريقة الأولويات أوجد حل النموذج – ثم قارن بين الحل باستخدام طريقة الأوزان في (٤) بالحل بطريقة الأولويات.

٦- باستخدام طريقة التدرج أوجد حل النموذج في حالة التضحية بنسبة 5% من القيمة المثلى للهدف ذو الأولوية الأولى لتحسين القيمة للهدف الثاني.

(١٢-٢):باستخدام طريقة الأوزان الترجيحية أوجد حل كل نموذج من النماذج التالية:

$$
\begin{aligned}
(1)\ & \text{Min.}Z_1 = 22X_1 + 8X_2 + 13X_3 \\
& \text{Max.}Z_2 = 3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \\
& \text{S.T.} \quad 5X_1 + 4X_2 + 2X_3 \le 6 \\
& \qquad X_1 + X_2 + X_3 \ge 1 \\
& \qquad X_1, X_2, X_3 = 0 \ \text{أو}\ 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ & \text{Max.}Z_1 = 4X_1 + 10X_2 + X_3 \\
& \text{Max.}Z_2 = 2X_1 + X_2 - X_3 \\
& \text{Max.}Z_3 = X_2 + X_3 \\
& \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 \le 18 \\
& \qquad 2X_1 + X_3 \le 9 \\
& \qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ & \text{Min.}Z_1 = X_2 \\
& \text{Max.}Z_2 = 5X_1 + 3X_2 \\
& \text{S.T.} \quad 2X_1 + 3X_2 \ge 6 \\
& \qquad X_1 \le 5 \\
& \qquad -X_1 + X_2 \le 2 \\
& \qquad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$(4)\ \text{Max}.Z_1 = 4X_1 + \ln X_2 + X_3 + \ln X_3$$
$$\text{Max}.Z_2 = X_1^2 + 9X_2^2 - X_1X_2$$
$$\text{S.T.}\quad X_1 + X_2 + X_3 \le 10$$
$$4X_2 + X_3 \ge 6$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$(5)\ \text{Max}.Z_1 = X_1X_2\, e^{X_3}$$
$$\text{Max}.Z_2 = 7X_1 + 4X_2$$
$$\text{Max}.Z_3 = X_1 - X_2$$
$$\text{S.T.}\quad X_1 + X_2 \le 15$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \le 20$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$(6)\ \text{Max}.Z_1 = 17X_1 - 2X_2$$
$$\text{Min}.Z_2 = 90X_2 + 97X_3$$
$$\text{S.T.}\quad X_1 + X_2 + X_3 = 100$$
$$40X_1 + 40X_2 - 20X_3 \ge 8$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

(١٢-٣): أوجد الحل لكل نموذج من النماذج التالية بأستخدام طريقتي الأوزان الترجيحية وطريقة الأولويات، ثم عقب على النتائج.

$$(1)\ \text{Max}.Z_1 = X_2$$
$$\text{Max}.Z_2 = 0.5X_1 + 0.2X_2 + 0.8X_3$$
$$\text{S.T.}\quad X_1 + 1.25X_2 + 1.25X_3 = 294$$
$$X_1 \ge 24 \quad , \quad X_2 \ge 0 \quad , \quad X_3 \ge 50$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \text{Min.}Z_1 &= 15X_{11} + 15X_{12} + 25X_{21} + \\
&\quad 25X_{23} + 30X_{32} + 30X_{33} \\
\text{Max.}Z_2 &= 7X_{11} + 8X_{12} + 10X_{21} + 6X_{23} + \\
&\quad 10X_{32} + 10X_{33} \\
\text{S.T.}\quad & X_{11} + X_{12} \le 500 \\
& X_{21} + X_{23} \le 630 \\
& X_{32} + X_{33} \le 710 \\
& X_{11} + X_{21} = 440 \\
& X_{12} + X_{32} = 520 \\
& X_{23} + X_{33} = 380 \\
& X_{ij} \ge 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \ , \ j = 1,2,3
\end{aligned}
$$

الباب الثالث عشر

مشاكل برمجة الهدف

Goal Programming (GP) Problems

(١٣-١) مفاهيم أساسية	Basic Concepts
(١٣-٢) صياغة المشكلة	Formulation Problem
(١٣-٣) النموذج العام	General Model
(١٣-٤) أمثلة تطبيقية	Applied Examples
(١٣-٥) تمرينات	Exercises

(١٣-١) مفاهيم أساسية Basic Concepts

في الفصل (١١-٤) بالباب الحادي عشر ذكرنا أن كل من March and Simon سنة ١٩٥٨ ميزا بين نوعين من مشاكل تعدد الأهداف.

النوع الأول يتناول المشاكل التي لا يوجد فيها أهداف متعارضة non-conflicting objectives أو قيود متعارضة non-conflicting constrains وهذا النوع من المشاكل يعتبر حالات أستثنائية exceptional cases، وبالنسبة لهذه المشاكل يمكن الحصول على الحلول الكفأ لها أو ما تسمى بحلول باريتو المثلى والتي يمكن لمتخذ القرار تحديد أفضل حل منها من وجهه نظره. وفي الباب السابق تم تناول بعض الطرق التي يمكن أستخدامها لحل هذا النوع من المشاكل.

ولكن النوع الآخر من المشاكل حيث توجد بعض الأهداف المتعارضة conflicting objectives أو بعض القيود المتعارضة أيضاً. وهذا النوع من المشاكل يمثل معظم المشاكل التطبيقية، حيث يرغب متخذ القرار في الحصول على أفضل حلول توافقية best compromise solutions. وهذا النوع من المشاكل تم تناوله بقوة منذ برنامج أبولو في بداية السيتينيات من القرن الماضي [51] حيث أستخدام في حل هذا النوع من المشاكل أسلوب برمجة الهدف Goal Programming (GP) Technique الذي قدماه كل من Charles and Cooper سنة ١٩٦١ لحل مشاكل البرمجة الخطية التي يوجد بها بعض القيود المتعارضة conflicting constraints والتي سميت بمشاكل البرمجة الخطية غير القابلة للحل unsolvable linear programming problems. ثم أستخدام هذا الأسلوب وتطور لحل مشاكل برمجة تعدد الأهداف في حالة وجود بعض الأهداف المتعارضة أو بعض القيود المتعارضة أو كلاهما، ولكن مع أتصاف هذه المشاكل أيضاً بالمرونة elastic Problems كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في هذا الباب والأبواب التالية.

ولدراسة أسلوب برمجة الهدف بالتفصيل فإن ذلك يتطلب الإلمام أولاً ببعض المفاهيم الأساسية التي سوف نتناولها فيما يلي:

(١) القيود المتعارضة: يقال أن القيود متعارضة إذا كانت فئة الحلول الممكنة فئة خالية empty set بمعنى أنه لا توجد نقط (أو نقطة واحدة) تحقق جميع القيود في نفس الوقت، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (١٣-١): تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات البديلة A,B ، بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من A أربعون دقيقة والوحدة من B ثلاثون دقيقة وزمن التشغيل المتاح في اليوم 20 ساعة، فإذا كان الطلب في السوق على A,B معاً لا يقل عن 50 وحدة يومياً. وإذا كان ربح الوحدة من A يساوي 35 جنيه ومن B يساوى 40 جنيه. ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من A,B بحيث يكون ربحه أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- وضح بيانياً أن القيود الهيكلية متعارضة.

الحل: ١- إذا فرضنا ان X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A,B على الترتيب فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 التي تجعل:

$$\text{Max.}Z = 35X_1 + 40X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 40X_1 + 30X_2 \leq 1200 \qquad (2)$$

$$X_1 + X_2 \geq 50 \qquad (3)$$

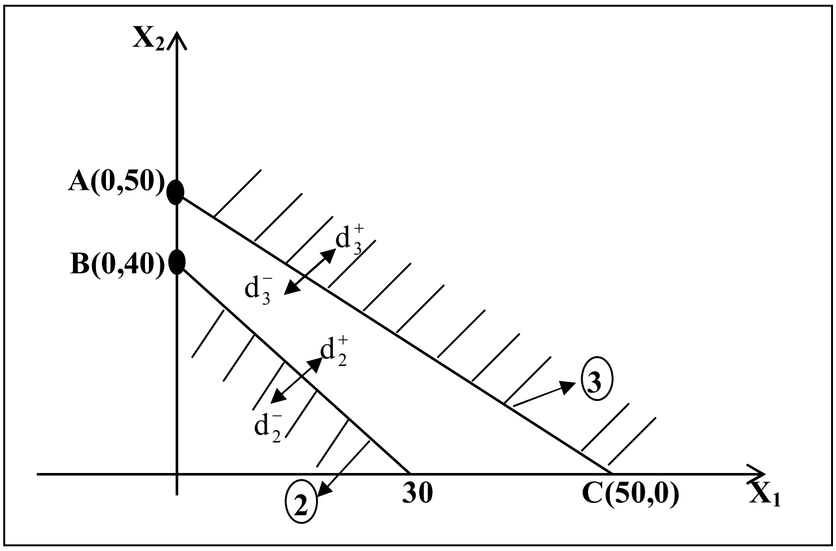
$$X_1 , X_2 \geq 0 \qquad (4)$$

٢- وبرسم قيود النموذج السابق (4)-(1) نجد أن القيدين (3),(2) قيود متعارضة وبالتالي منطقة الحلول الممكنة فئة خالية ϕ وبالتالي لا يمكن أستخدام طرق الحل للنموذج الخطي. حيث تشير كل من d_i^-, d_i^+ ، $i = 2,3$ إلى الأنحراف عن تحقيق القيد i حيث:

$$d_1^- = \{1200 - (40X_1 + 30X_2)\} \quad , \quad d_1^+ = \{40X_1 + 30X_2 - 1200\}$$

$$d_2^- = \{50 - (X_1 + X_2)\} \qquad , \qquad d_2^+ = \{(X_1 + X_2) - 50\}$$

شكل (١٣-١): يوضح القيود المتعارضة



ولكن بأستخدام أسلوب برمجة الهدف الخطية يمكن بأستخدامه الحصول على أفضل حل توافقي لهذا النوع من المشاكل كما سوف نوضح ذلك في الباب التالي.

ولكن من الرسم نجد أن أفضل حل توافقي

$$\left.\begin{array}{ll} (X^*_1 = 0 \ , \ X^*_2 = 40 \ , \ Z^* = 1600) & \\ (X^*_1 = 0 \ , \ X^*_2 = 50 \ , \ Z^* = 2000) & \text{أو} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

وهذا عند النقطة B(0,40) حيث نجد أن هذا الحل يحقق القيد (2) ولا يحقق القيد (3) ولكن يكون أقرب ما يمكن من تحقيق القيد (3) حيث نجد أن النقطة B(0,40) تمثل أقرب نقطة لتحقيق القيد (3). أو عند النقطة A(0,50) حيث نجد أن الحل يحقق القيد (3) ولا يحقق القيد (2) ولكن يكون أقرب ما يمكن من تحقيق القيد (2) عند النقطة A(0,50) أيضاً.

(٢) القيد المرن: في حالة وجود القيود المتعارضة فإنه يقال أن القيد قيد مرن elastic constraint إذا أمكن (أو كان مقبول لمتخذ القرار) أحداث تغير في طرفة الأيمن أو بعبارة أخرى هو القيد الذي يمكن عدم تحقيقه في الحل إلا بعد أجراء تغير في الطرف الأيمن للقيد. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٣-٢)</u>: إذا اعتبرنا المثال السابق حيث القيدين (3),(2) قيود متعارضة نجد أن أفضل حل توافقى في (6) في حالتين الأولى يمكن قبوله فقط في حالة إذا كان القيد (3) قيد مرن، بمعنى أمكانية عدم تحقيقه في الشكل $X_1 + X_2 \geq 50$ ولكن يمكن تحقيقه في الشكل $X_1 + X_2 \geq 40$ أي أمكانية تغير الطرف الأيمن للقيد من (50) إلى (40). والحالة الثانية إذا كان القيد (2) قيد مرن بمعنى أمكانية عدم تحقيقه على النحو $40X_1 + 30X_2 \leq 1200$ إلا بعد تغير الطرف الأيمن للقيد من (1200) إلى (1500).

(٣) الهدف العام objective: الهدف العام هو عبارة عامة نسبياً relatively general statement تعكس رغبة متخذ القرار. ففي البرمجة الخطية مثلاً تكون رغبة متخذ القرار تعظيم دالة الربح او تصغير دالة التكاليف حيث تكون دالة الربح أو دالة التكلفة دوال خطية في المتغيرات القرارية [68,56].

(٤) **المستوى المرجو تحقيقه aspiration level:** هو قيمة معينة مقترنه برغبه متخذ القرار أو هو المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام acceptable level of achievement of an objective [55].

(٥) **الهدف goal:** الهدف عبارة تعكس رغبة متخذ القرار ولكنها مقترنه بالمستوى المرجو تحقيقه. وبهذا المفهوم للهدف goal يتطلب أن يكون لمتخذ القرار رؤية للمستوى المرجو تحقيقه وليس رغبة فقط [52,71].

(٦) **المتغيرات الانحرافية deviational variables:** يرتبط بالطرف الأيسر لكل هدف goal (وليكون الهدف رقم i) متغيرين أنحرافيين يشار إليهما بـ d_i^-, d_i^+ وهما عبارة عن الفرق بين المستوى المرجو تحقيقه (b_i) وما يتم تحقيقه فعلاً. وعادة قد يكون ما تم تحقيقه للهدف G_i مساوي للمستوى المرجو b_i في هذه الحالة يكون $d_i^- = d_i^+ = 0$. كذلك في حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أقل من المستوى المرجو في هذه الحالة يكون $d_i^- > 0$ ، $d_i^+ = 0$ ، بالمثل في حالة إذا كان ما يتم تحقيقه أكبر من المستوى المرجو في هذه الحالة يكون $d_i^+ > 0$ ، $d_i^- = 0$ ، وبالتالي فإن في جميع الحالات تكون $d_i^-, d_i^+ \geq 0$ كذلك وجود قيمة موجبة لأحداهما سواء d_i^- أو d_i^+ يؤدي إلى أن تكون قيمة المتغير الأخرى تساوي صفر أو بعبارة أخرى دائما حاصل ضرب d_i^- فى d_i^+ يساوى صفر أى أن :

$$d_i^- * d_i^+ = 0 \qquad (13.1)$$

حيث يسمى المتغير d_i^- بالمقدار الأقل من إنجاز الهدف under-achievement (أي الفرق بين المستوى المرجو وما يتم تحقيقه) كذلك يسمى المتغير d_i^+ بالمقدار الأكبر عن إنجاز الهدف over-achievement (أي الفرق بين ما يتم تحقيقه والمستوى المرجو).

مثال (١٣-٣): أعتبر مثال (١٣-١) نجد أن المتغيرات الأنحرافية موضحة في شكل (١٣-١) حيث نجد أنه بالنسبة للقيد الثاني المتغيرات الانحرافية $d_2^- = d_2^+ = 0$ ، أما بالنسبة للقيد الثالث فإن $(10 = 40 - 50)$ $d_3^- = 10$ ، $d_3^+ = 0$ في الحالة الأولى، وفي الحالة الثانية نجد أن $d_3^- = d_3^+ = 0$ ، $d_2^- = 0, d_2^+ = 300$.

(٧) صياغة الهدف goal formulation: إذا اعتبرنا الدالة $f_i(x)$ تشير إلى دالة الهدف العام رقم (i)، X متجه بحيث $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ تشير إلى المتغيرات القرارية، b_i تشير إلى المستوى المرجو تحقيقه المرتبط بالدالة $f_i(x)$.

في هذه الحالة يكون لدينا ثلاث أمكانيات لصياغة الهدف G_i على النحو التالي :[55]

1) $f_i(x) \le b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ لا تزيد عن b_i

2) $f_i(x) \ge b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ لا تقل عن b_i

3) $f_i(x) = b_i$

أي القيمة المحققة لـ $f_i(x)$ تساوي b_i

والجدول التالي يوضح صياغة الهدف رقم (i)

جدول (١٣-١): يوضح الحالات المختلفة لصياغة الهدف

المتغيرات الانحرافية التي يجب تصغيرها	صياغة الهدف في أسلوب برمجة الهدف	Goal
(13.2) d_i^+	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	1) $f_i(x) \le b_i$
(13.3) d_i^-	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	2) $f_i(x) \ge b_i$
(13.4) $(d_i^- + d_i^+)$	$G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i$	3) $f_i(x) = b_i$

وسوف نوضح في الفصول التالية أنه في المشاكل التي يتم صياغتها في شكل نموذج برمجة هدف فإنه يتم تحويل الأهداف العامة objectives والقيود constraints إلى أهداف goals.

(٨) الأولويات المرتبة preemptive priorities: وبالنسبة للمشاكل متعددة الأهداف أو المشاكل ذات القيود المتعارضة فأن أستخدام أسلوب برمجة الهدف يتطلب من متخذ القرار ضرورة ترتيب أهدافه وفقاً لأولوياتها [71].

(٩) القيود constraints: في البرمجة الخطية لأبد أن يحقق الحل الأمثل جميع القيود كذلك بالنسبة لمشاكل برمجة تعدد الأهداف التي تم تناولها في البابين الحادي عشر والثاني عشر السابقين. وهذا يعني عدم وجود قيود متعارضة. أما بالنسبة لأسلوب برمجة الهدف نميز بين نوعين من القيود، قيود لأبد أن تتحقق في الحل النهائي للمشكلة وهي ما تسمي بالقيود الصارمة rigid constraints ويوجد نوع آخر من القيود لا تتحقق في الحل النهائي ولكن يكون عدم تحققها أقل ما يمكن وسبق أن عرفناها بالقيود المرنة elastic constraints. وفي أسلوب برمجة الهدف يتم تحويل القيود (الصارمة والمرنة) إلى أهداف goals وذلك بأضافة المتغيرات الانحرافية [71,55,101].

(١٠) الأولوية المطلقة absolute priority: في العديد من المشاكل يرغب متخذ القرار في تحقيق القيود الصارمة rigid constraints وفي هذه الحالة يتم تمثيل هذه القيود في الهدف ذو الأولوية الأولي first priority وتسمي في هذه الحالة الأولوية الأولى بالأولوية المطلقة كما سوف نوضح في الأمثلة بالفصل التالي [55,54].

(١١) متجه الإنجاز achievement function: هو عبارة عن متجه يتضمن عدة أهداف أو معايير حيث يمثل كل منها دالة في المتغيرات الأنحرافية d^-, d^+ حيث كل عنصر فيه يمثل دالة تقيس مدى إنجاز الأهداف goals وذلك وفقاً لأولويات، فإذا أشرنا لهذا المتجه بالرمز a فإن:

$$a = [a_1, a_2, a_3, ..., a_k] \qquad (13.5)$$

حيث تعتبر الدالة a_{j-1} أهم من الدالة a_j حيث $j = 2,3,...,k$. حيث أن كل دالة من الدوال a_j دالة في بعض (أوكل) المتغيرات الانحرافية d_i^-, d_i^+، حيث $i = 1,2,...,m$، $j = 2,3,...,k$ [51,54]. وفي أسلوب برمجة الهدف يكون المتاح فقط أجراء عملية تصغير عناصر المتجه a وفقاً لأولوياتها Lexicographic minimum a.

(١٢) أفضل حل توافقي best compromise solution: هو الحل الذي يتم الحصول عليه بأستخدام أسلوب برمجة الهدف وهو يمثل أفضل حل توافقي كما سوف نوضح ذلك في الفصول التالية [55,71].

وفيما يلي سوف نوضح هذه المفاهيم من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٣-٤)</u>: تقوم إحدى المصانع بإنتاج نوعين من المنتجات A,B بحيث يتطلب الإنتاج من A,B نوعين من مستلزمات الإنتاج I,II والجدول التالي يوضح الوحدات المطلوبة من مستلزمات الإنتاج لإنتاج الوحدة الواحدة من A أو B كذلك ربح الوحدة من كل منتج بالإضافة إلى الزمن المطلوب إنتاج الوحدة.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية:

(أ) تعظيم الربح من A,B ، إذا كان متخذ القرار يتطلع أن يزيد الربح عن 100,000 جنيه.

(ب)تصغير الزمن المطلوب للإنتاج، بحيث لا يزيد زمن الإنتاج عن 500ساعة.

جدول (١٣-٢)

الكمية المتاحة من مستلزمات الإنتاج	متطلبات الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج B	متطلبات الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج A	مستلزمات الإنتاج
1200	40	30	I
50	1	2	II
	50	30	ربح الوحدة الواحدة
	20	15	زمن إنتاج الوحدة بالدقائق

المطلوب: ١-صياغة المشكلة في شكل نموذج (VOP) مع توضيح تعارض الأهداف.

٢- أعادة صياغة الأهداف العامة objectives إلى أهداف goals - مع تحديد المستويات المرجوة.

٣- تحويل القيود الهيكلية إلى أهداف goals مع تحديد الأولوية المطلقة.

٤- صياغة متجه الأنجاز achievement functions.

الحل: ١- يمكن صياغة المشكلة كمشكلة برمجة خطية متعددة الأهداف على النحو التالي:

إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A,B على الترتيب فتصبح المشكلة على النحو التالي: أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$Max.Z_1 = 30X_1 + 50X_2 \quad (1)$$
$$Min.Z_2 = 15X_1 + 20X_2 \quad (2)$$
$$S.T. \quad 30X_1 + 40X_2 \le 1200 \quad (3)$$
$$2X_1 + X_2 \le 50 \quad (4)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0 \quad (5)$$

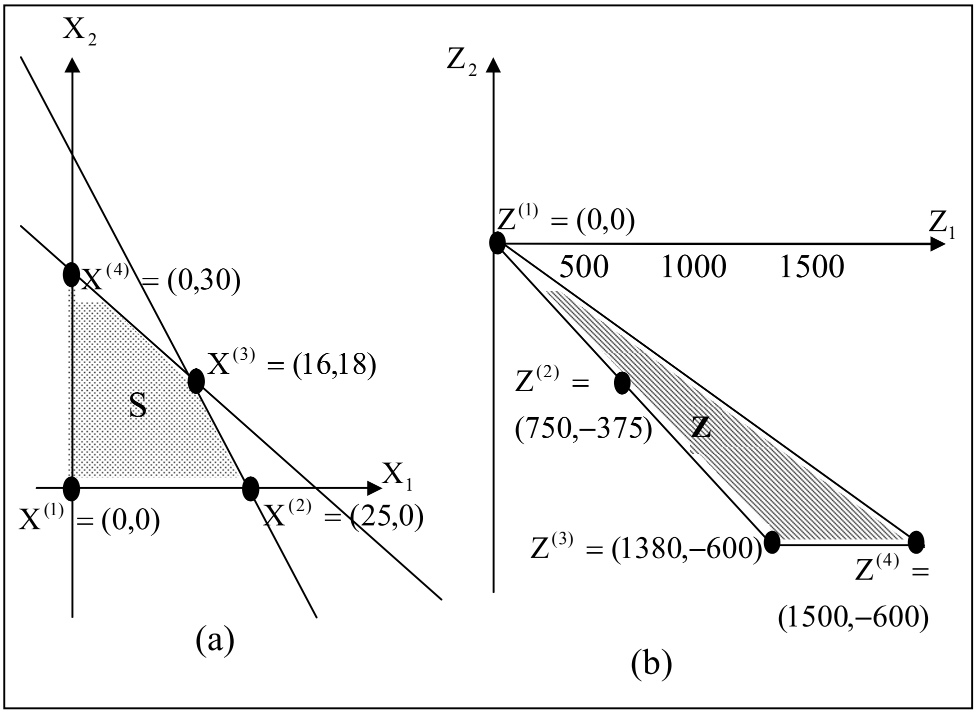
ولصياغة المشكلة في شكل نموذج (VOP) حيث يتيح النموذج أجراء عملية واحدة maximization أو minimization لذلك سوف نحول الهدف (2) إلى عملية .Max (أنظر نظرية (١٢-٣)). ويصبح نموذج (VOP) المناظر للنموذج (5)-(1) على النحو:

$$\text{Max.}Z = \{(30X_1 + 50X_2), (-15X_1 - 20X_2)\} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & 30X_1 + 40X_2 \le 1200 \\ & 2X_1 + X_2 \le 50 \\ & Z_1, Z_2, X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

والشكل التالي يوضح فراغ الحلول الممكنة S في (a) كذلك فراغ الأهداف Z للأهداف في (6) في الشكل (b).

شكل (١٣-٢): يوضح فراغ الحل S في (a) وفراغ الأهداف Z في (b)



من شكل (b) يتضح أن الهدف العام (1) يتعارض مع الهدف العام (2) ، حيث أن Z_2 لا تأخذ إلا قيم سالبة. أو بعبارة أخرى جميع النقط الكفأ نقط غير ممكنة نتيجة تعارض الأهداف.

٢- بما أن المستوى المرجو للهدف (1) يزيد أو يساوي 100,000جنيه والهدف (2) يقل أو يساوي 60,000 دقيقة. أو بعبارة أخرى:

$$30X_1 + 50X_2 \geq 100,000$$
$$15X_1 + 20X_2 \leq 60,000$$

ثم التحويل إلى أهداف goals بإضافة المتغيرات الأنحرافية على النحو التالي:

$$G_1: 30X_1 + 50X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000 \longrightarrow \text{Min.}(d_1^-) \qquad \textbf{(7)}$$
$$G_2: 15X_1 + 20X_2 + d_2^- - d_2^+ = 60,000 \longrightarrow \text{Min.}(d_2^+) \qquad \textbf{(8)}$$

٣- يمكن تحويل القيود الهيكلية (4),(3) إلى أهداف بإضافة المتغيرات الأنحرافية d^-, d^+ على النحو التالي:

$$G_3: 30X_1 + 4X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1200 \longrightarrow \text{Min.}(d_3^+) \qquad \textbf{(9)}$$
$$G_4: 2X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 50 \longrightarrow \text{Min.}(d_4^+) \qquad \textbf{(10)}$$

وتصبح الأولوية المطلقة (الأولى) أو أول عنصرا في متجه الأنجاز على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = (d_3^+ + d_4^+) \qquad (11)$$

٤- ويصبح متجه الأنجاز على النحو التالي:

$$\text{Lexicographically Min. } a = \{(d_3^+ + d_4^+), (d_1^-), (d_2^+)\} \qquad (12)$$

وفي الفصل التالي سوف نقدم بالتفصيل كيفية صياغة المشاكل متعددة الأهداف إلى نماذج برمجة هدف goal programming models من خلال تقديم بعض الأمثلة التطبيقية وصياغتها في صورة نماذج برمجة هدف.

(١٣-٢) صياغة المشكلة Formulation Problem

في الفصل السابق تناولنا بعض أهم المفاهيم الأساسية المستخدمة في دراسة أسلوب برمجة الهدف. وفي هذا الفصل سوف نوضح هذه المفاهيم من خلال صياغة بعض المشاكل في الأمثلة التالية.

مثال (١٣-٥) تقوم أحدى شركات إنتاج دهانات الحوائط بإنتاج نوعين A,B من الدهانات معبأة في وحدات الوحدة الواحدة جالوت من المنتج. ويدخل في إنتاج كل وحدة من B أو A، ثلاثة أنواع من المواد الكيمائية I,II,III والجدول التالي يوضح احتياج الوحدة الواحدة من B أو A من كل مادة كيمائية I,II,III كذلك الكميات المتاحة من المواد الكيمائية بالكيلوجرام كذلك ربح الوحدة من B او A.

جدول (١٣-٣)

ربح الجالوت الواحد بالجنيه	الكميات المطلوبة من كل مادة كيمائية لإنتاج الوحدة الواحدة من B أو A			نوع المنتج
	III	II	I	
80	1	4	4	A
100	0	2	5	B
	6	48	80	الكميات المتاحة يومياً بالكيلوجرام

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات المنتجة يومياً من B أو A التي تحقق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) لا يمكن زيادة المواد الكيماوئية المتاحة يومياً، (أو بعبارة أخرى القيود المرتبطة بالمواد الكيماوئية المتاحة يومياً تمثل قيود صارمة Rigid Constraints).

(٢) الربح اليومي من B أو A لا يقل عن 1000 جنيه.

(٣) تقليل استخدام المادة الكيمائية III بقدر الإمكان.

(٤) تقليل العدد الإجمالي للجالونات من B أو A معاً لظروف النقل أو مساحات التخزين، بحيث يرى متخذ القرار أن المستوى المرجو لتحقيقه يساوي 10جالونات يومياً.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B على الترتيب. وفيما يلي سوف نوضح كيفية صياغة هذه المشكلة في نموذج برمجة هدف خطي على النحو التالي:

١) من الجدول السابق نجد أنه بالنسبة للمواد الكيمائية القيود التالية يمكن تحويلها إلى أهداف Goals على النحو التالي:

$$4X_1 + 5X_2 \le 80 \longrightarrow G_1 : 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 \le 48 \longrightarrow G_2 : 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \qquad (2)$$

$$X_1 \le 6 \longrightarrow G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6 \qquad (3)$$

وبما أن الأولوية الأولى لمتخذ القرار هو تحقيق القيود بالتالي فإن دالة الهدف العام المرتبطة بهذه الأولوية تصبح على النحو التالي:

$$\text{Min.}a_1 = g_1(d^-, d^+) = (d_1^+ + d_2^+ + d_3^+) \qquad (4)$$

حيث تشير d^-, d^+ إلى متجه المتغيرات الأنحرافية السالبة (d^-) ومتجه المتغيرات الأنحرافية الموجبة (d^+) على الترتيب

٢) بما أن الهدف والأولوية الثاني هو تحقيق ربح لا يقل عن 1000جنيه:

$$80X_1 + 100X_2 \geq 1000 \longrightarrow G_4 : 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000$$

وبالتالي يصبح الهدف الثاني بدالة الإنجاز (متجه الإنجاز) على النحو:

$$\text{Min.}a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_4^+ \qquad (5)$$

٣) وبما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو أستخدام أقل ما يمكن من المادة الكيمائية III:

$$\text{Min.}a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_3^+ \qquad (6)$$

٤) وبما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تقليل عدد الجالونات، فيصبح الهدف:

$$G_5 : X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10 \longrightarrow$$

$$\text{Min.}a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^+ \qquad (7)$$

مما سبق نجد ان متجه الإنجاز يصبح على النحو التالي:

$$\text{Lexicographically Minimize } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$= \{g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), g_3(d^-, d^+), g_4(d^-, d^+)\} \qquad (8)$$

حيث d^- متجه المتغيرات الانحرافية السالبة، d^+ متجه المتغيرات الانحرافية الموجبة. ومن (8)-(1) نجد ان نموذج برمجة الهدف تصبح على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_4^+), (d_3^+), (d_5^+)\}$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$$

$$G_2: 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48$$

$$G_3: X_1 + d_3^- - d_3^+ = 6$$

$$G_4: 80X_1 + 100X_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000$$

$$G_5: X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 10$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$(d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , i = 1,2,3,4,5$$

مثال (١٣-٦) تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات A,B من خلال ثلاثة ماكينات I,II,III والجدول التالي يوضح الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من A,B في كل ماكينة كذلك الزمن الشهري المتاح لتشغيل كل ماكينة في الشهر.

جدول (١٣-٤): يوضح متطلبات الإنتاج والتكلفة وثمن البيع للوحدات المنتجة

ثمن بيع الوحدة بالجنية	الزمن المطلوب بالساعة لإنتاج الوحدة الواحدة			المنتج
	III	II	I	
500	8	3	3	A
750	10	6	4	B
	700	620	500	الزمن المتاح بالساعة
	90	70	50	تكلفة الساعة الواحدة في كل ماكينة بالجنية

فإذا كان الطلب الشهري على المنتج A لا تقل عن 250 وحدة ومن B لا تزيد عن 400 وحدة. ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

(١) تحقيق الطلب في السوق.

(٢) تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات I,II,III بحيث لا تزيد عن 10000 ساعة.

(٣) تصغير زمن التشغيل الإضافي Overtime بأستخدام الماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة.

(٤) تعظيم إيرادات بيع الوحدات من A,B بحيث تزيد عن 125,000 جنيه.

والمطلوب صياغة المشكلة أعلاه كمشكلة برمجة هدف.

الحل: إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من المنتج i حيث $i=1,2$ بأستخدام الماكينة j حيث $j=1,2,3$ ، $X_{ij}\geq 0$.

من الجدول ووفقاً للأولويات المطلوب تحقيقها نجد أن:

١- $X_{11}+X_{12}+X_{13}\geq 250 \longrightarrow$

$$G_1: X_{11}+X_{12}+X_{13}+d_1^- - d_1^+ = 250 \qquad (1)$$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}\leq 400 \longrightarrow$

$$G_2: X_{21}+X_{22}+X_{23}+d_2^- - d_2^+ = 400 \qquad (2)$$

$$\text{Min.}a_1 = g_1(d^-,d^+) = (d_1^+ + d_2^+) \qquad (3)$$

٢- وبما أن الهدف ذو الأولوية الثانية هو تصغير تكلفة التشغيل بالنسبة للماكينات الثلاثة بالتالي فإن:

$$50(3X_{11}+4X_{21})+70(3X_{12}+6X_{22})+90(8X_{13}+10X_{23})\leq 10,000$$
$$\longrightarrow$$

$$G_3: 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10,000 \quad (4)$$

$$Min.a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^+ \quad (5)$$

٣- وبما أن الهدف ذو الأولوية الثالثة هو تصغير الزمن الإضافي للماكينة II بحيث لا يزيد عن 80 ساعة فأن:

$$3X_{12} + 6X_{22} \le 620 \longrightarrow G_4: 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620 \quad (6)$$

وبما أن d_4^+ تشير إلى ساعات التشغيل الإضافية بالتالي فإن:

$$d_4^+ \le 80 \longrightarrow G_5: d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80 \quad (7)$$

$$Min.a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_{41}^+ \quad (8)$$

٤- وبما أن الهدف ذو الأولوية الرابعة هو تعظيم الإيرادات بحيث تزيد عن 125,000 جنية فأن:

$$500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \ge 125,000 \longrightarrow$$
$$G_6: 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + d_5^- - d_5^+ = 125,000 \quad (9)$$

$$Min.a_4 = g_4(d^-, d^+) = d_5^- \quad (10)$$

ومن (10)-(1) نجد أن نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_{ij} بحيث $i = 1,2 \ , \ j = 1,2,3$ التي تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$= \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^+), (d_{41}^+), (d_5^+)\}$$

S.T. $\quad G_1 : X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 250$

$$G_2 : X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 400$$

$$G_3 : 150X_{11} + 200X_{21} + 210X_{12} + 420X_{22} + 720X_{13} + 900X_{23} + d_3^- - d_3^+ = 10{,}000$$

$$G_4 : 3X_{12} + 6X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 620$$

$$G_5 : d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 80$$

$$G_6 : 500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 750(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + d_5^- - d_5^+ = 125{,}000$$

$$G_7 : 3X_{11} + 4X_{21} + d_6^- - d_6^+ = 500$$

$$G_8 : 8X_{13} + 10X_{23} + d_7^- - d_7^+ = 700$$

$$X_{ij}, d_i^-, d_i^+, d_{41}^-, d_{41}^+ \geq 0$$

$$(d_i^-)(d_i^+) = 0 \quad , \; (d_{41}^-)(d_{41}^+) = 0 \; , \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

(١٣-٣) النموذج العام General Model

من الفصل السابق يمكن تلخيص خطوات بناء نموذج برمجة الهدف في الخطوات التالية [71,55]:

(١) تحديد المتغيرات القرارية X_j ، حيث $j=1,2,\ldots,n$.

(٢) تحديد الأهداف العامة objectives وفقاً لترتيبها ثم تحويلها إلى أهداف goals بإضافة المتغيرات الأنحرافية والمستويات المرجوة المناظرة لكل هدف على النحو $f_t(X)+d_t^- - d_t^+ = b_t$ بحيث $t=1,2,\ldots,k$.

(٣) تحديد القيود الهيكلية ثم تحويلها إلى أهداف بإضافة المتغيرات الأنحرافية بحيث $f_i(X)+d_i^- - d_i^+ = b_i$ بحيث $i=1,2,\ldots,m$.

(٤) تحديد دوال الأنجاز المناظرة للأهداف $g_t(d^-,d^+)$ ثم تكوين متجه الأنجاز $\{g_1(d^-,d^+),\ldots\ldots,g_k(d^-,d^+)\}$.

ويصبح النموذج العام لبرمجة الهدف على النحو التالي.

أوجد X_j بحيث $j=1,2,\ldots,n$ التي تجعل:

$$\text{Lexi. Min. } a=\{g_1(d^-,d^+),g_2(d^-,d^+),\ldots,g_k(d^-,d^+)\} \qquad (7.6)$$

$$\text{S.T.}\quad G_t: f_i(x)+d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad t=1,2,\ldots,T$$

$$X_j,d_i^-,d_i^+ \ge 0 \;\; , \;\; (d_i^-)(d_i^+)=0 \;\; , i=1,2,..,m\, , j=1,2,\ldots,n \quad (7.8)$$

خصائص النموذج: ١- متجه الأنجاز a كل عنصر فيه عبارة عن دالة في المتغيرات الأنحرافية d^-,d^+ فقط حيث تتم عملية واحدة لعناصر المتجه a وهي عملية تصغير فقط.

٢- يوجد عدد k من الأولويات مرتبطة بعدد أكبر من k من الأهداف Goals. حيث أن الدوال $g_t(d^-,d^+)$ ، $t=1,2,...,k$ دوال في المتغيرات الإنحرافيه d^-,d^+ فقط.

٣- يصبح عدد المتغيرات في النموذج $(n+2m)$ حيث n تشير إلى عدد المتغيرات القرارية، $2m$ تشير إلى عدد المتغيرات الأنحرافية d^-,d^+.

٤- عندما تكون دوال الإنجاز $g_t(d^-,d^+)$ ، $t=1,2,...,k$ دوال خطية وكل هدف من الأهداف G_i ، $i=1,2,...,m$ خطية أيضاً فإن النموذج يصبح نموذج برمجة هدف خطية (LGP). وبالتالي فإنه يمكن تطويع طريقة السمبلكس لحل هذا النموذج. ويوجد طريقتين لتطويع طريقة السمبلكس لحل نماذج برمجة الهدف الخطية هما:-

١) طريقة السمبلكس المعدلة Modified Simplex Method [9,6]

٢) طريقة الحل المتتابعة Sequential (Iterative) Solutions Method[5,6]

وفي حالة تضمن المشكلة متغيرين قراريين فقط فإنه يمكن حلها بيانياً أو بإحدى الطريقتين المذكورتين أعلاه أيضاً. وسوف نتناول بالتفصيل الطرق المختلفة لحل نماذج برمجة الهدف الخطية في الباب التالي.

وعندما يكون بعض (أو كل) دوال الإنجاز $g_t(d^-,d^+)$ ، $t=1,2,...,k$ ، أو بعض (أو كل) دوال الطرف الأيسر للأهداف G_i دوال غير خطية فأن النموذج يصبح نموذج برمجة هدف غير خطية (Non-LGP) كذلك فإنه أمكن أستخدام وتطويع بعض طرق حل مشاكل البرمجة غير الخطية وحيدة الهدف لحل هذا النوع من المشاكل [41,42,6]. وسوف نتناول بعض هذه المشاكل وطرق الحل في الباب السادس عشر.

(١٣-٤) أمثلة تطبيقية Applied Examples

في هذا الفصل سوف نقدم بعض المشاكل التطبيقية التي يمكن صياغتها كنماذج برمجة هدف بحيث تمكن الباحثين ومتخذى القرارات من أمكانية تناول كثير من المشاكل في القطاعات المختلفة بأسلوب برمجة الهدف.

تطبيق(١): تخطيط الإنتاج

إذا اعتبرنا أحد المؤسسات الصناعية التي تنتج ثلاثة أنواع من المنتجات الإلكترونية A_1,A_2,A_3 من خلال مركزين من مراكز الإنتاج B_1,B_2 تشترك في إنتاج المنتجات الثلاثة A_1,A_2,A_3. والجدول التالي يوضح عدد ساعات التشغيل المطلوبة لكل وحدة من كل منتج كذلك عدد ساعات التشغيل العادية المتاحة في كل مركز بالإضافة إلى التكلفة الشهرية لتخزين الوحدة من كل منتج وربح الوحدة الواحدة أيضاً.

جدول (١٣-٥): يوضح مستلزمات الإنتاج

مراكز الإنتاج	المنتجات			ساعات التشغيل الشهرية العادية
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	2	240
B_2	1	1	3	200
التكلفة الشهرية لتخزين الوحدة بالجنية	20	30	50	
ربح الوحدة بالجنية	300	500	1000	

وقد قدرت متوسط تكلفة ساعة التشغيل في كل مركز من المراكز B_1, B_2 فكانت 180 , 120 جنيه على الترتيب. كذلك تنبأ قسم التسويق بأن الطلب في السوق الشهر القادم على المنتجات A_1, A_2, A_3 تساوي 100 , 300 , 500 وحدة من المنتجات الثلاثة على الترتيب.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل منتج بحيث يحقق الأهداف goals التالية وفقاً لترتيبها (أولوياتها):

١- أن تكون تكلفة التخزين الشهرية لا تزيد عن 5000 جنيه.

٢- تغطية الطلب في السوق من المنتجات الثلاثة.

٣- تجنب عدم التشغيل العادي في مراكز الإنتاج (توافر ساعات تشغيل عادية دون تشغيل المراكز).

٤- أن يكون الزمن الأضافي للتشغيل overtime في المركز الأول لا يزيد عن 40 ساعة.

٥- إذا أفادت إدارة التسويق أنه يمكن تصدير المنتج A_1 لذا توصي بأن يكون حجم المنتج من النوع A_1 أكبر من حجم المنتج من النوعين A_2, A_3 معاً.

٦- أن تكون تكلفة التشغيل أقل ما يمكن.

الحل: يمكن صياغة هذه المشكلة كنموذج برمجة هدف على النحو التالي:

(١) إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A_1, A_2, A_3 على الترتيب بحيث $X_1, X_2, X_3 \geq 0$.

(٢) بما ان الأولوية الأولى مرتبطة بتكلفة التخزين بالتالي فإنه يمكن صياغة هذا الهدف على النحو التالي:

$$20X_1 + 30X_2 + 50X_3 \le 5000 \longrightarrow$$
$$G_1 : 20X_1 + 30X_2 + 50X_3 + d_1^- - d_1^+ = 5000 \longrightarrow \min.(d_1^+) \quad (1)$$

وتصبح دالة الإنجاز $g_1(d^-, d^+) = d_1^+$

وبما أن الأولوية الثانية مرتبطة بحجم الإنتاج من كل نوع فإن:

$$X_1 = 500 \longrightarrow G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 500 \longrightarrow \min.(d_2^- + d_2^+) \quad (2)$$
$$X_2 = 300 \longrightarrow G_3 : X_2 + d_3^- - d_3^+ = 300 \longrightarrow \min.(d_3^- + d_3^+) \quad (3)$$
$$X_3 = 100 \longrightarrow G_4 : X_3 + d_4^- - d_4^+ = 100 \longrightarrow \min.(d_4^- + d_4^+) \quad (4)$$

وتصبح دالة الأنجاز على النحو:

$$g_2(d^-, d^+) = (d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+)$$

(٣) الأولوية الثالثة تجنب عدم التشغيل العادي (عدم التشغيل العادي لمراكز الإنتاج)

$$1X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 240 \longrightarrow$$
$$G_5 : X_1 + 2X_2 + 2X_3 + d_5^- - d_5^+ = 240 \longrightarrow \min.(d_5^-) \quad (5)$$
$$1X_1 + 1X_2 + 3X_3 = 200 \longrightarrow$$
$$G_6 : X_1 + X_2 + 3X_3 + d_6^- - d_6^+ = 200 \longrightarrow \min.(d_6^-) \quad (6)$$

من (6),(5) تصبح دالة الأنجاز على النحو: $g_3(d^-, d^+) = (d_5^- + d_6^-)$

(٤) الأولوية الرابعة بالنسبة لزمن التشغيل الأضافي، وبما أن ساعات التشغيل الإضافية هي (d_5^+, d_6^+) في المركزين B_1, B_2 على الترتيب بالتالي فإن دالة الأنجاز على النحو:

$$d_5^+ + d_6^+ \le 40 \longrightarrow G_7 : d_5^+ + d_6^+ + d_{51}^- - d_{51}^+ = 40$$
$$\longrightarrow \min.(d_{51}^+) \qquad (7)$$

وتصبح دالة الأنجاز: $g_4(d^-, d^+) = d_{51}^+$

(٥) الأولوية الخامسة (والأخيرة) بالنسبة للكمية المنتجة

$$X_1 \ge (X_2 + X_3) \longrightarrow$$
$$G_8 : X_1 - (X_2 + X_3) + d_7^- - d_7^+ = 0 \longrightarrow \min.(d_7^-) \qquad (8)$$

وتصبح دالة الأنجاز: $g_5(d^-, d^+) = d_7^-$

(٦) إذا فرضنا أن متخذ القرار يرغب في تصغير تكلفة التشغيل أو بعبارة أخرى:

$$\min.\ 180(X_1 + X_2 + 2X_3) + 120(X_1 + X_2 + 3X_3)$$

فإذا فرضنا أن المستوى المرجو للتكاليف 5000 او أقل فأن:

$$G_9 : 180(X_1 + X_2 + 2X_3) + 120(X_1 + X_2 + 3X_3) +$$
$$d_8^- - d_8^+ = 5000 \longrightarrow \min.(d_8^+) \qquad (9)$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي: أوجد X_1, X_2, X_3 بحيث

$$\text{lexic. } a = \{(d_1^+), (d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+),$$
$$(d_5^- + d_6^-), (d_{51}^+), (d_7^-), (d_8^+)\}$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 20X_1 + 30X_2 + 50X_3 + d_1^- - d_1^+ = 5000$$
$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 500$$
$$G_3 : X_2 + d_3^- - d_3^+ = 300$$
$$G_4 : X_3 + d_4^- - d_4^+ = 100$$

$$G_5 : X_1 + 2X_2 + 2X_3 + d_5^- - d_5^+ = 240$$

$$G_6 : X_1 + X_2 + 3X_3 + d_6^- - d_6^+ = 200$$

$$G_7 : d_5^+ + d_6^+ + d_{51}^- - d_{51}^+ = 40$$

$$G_8 : X_1 - (X_2 + X_3) + d_7^- - d_7^+ = 0$$

$$G_9 : 180(X_1 + X_2 + 2X_3) + 120(X_1 + X_2 + 3X_3) + d_8^- - d_8^+ = 5000$$

$$d^- , d^+ , X \geq 0 \quad , \quad d_i^- * d_i^+ = 0$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطية يمكن حله بأستخدام طريقة السمبلكس المعدلة التي سوف تقدم في الفصل (١٤-٣) أو بأستخدام طريقة الحلول التتابعية والتي سوف تقدم في الفصل (١٤-٤) بالباب التالي أيضاً.

تطبيق (٢): تحديد معدلات الضرائب

في أحدى الدول ترغب الدولة في عام ما في تغير معدلات الضرائب على بعض البنود: العقارات، السيارات، المواد الغذائية، المواد الكيمائية، البنزين حيث تم تقدير قيمة هذه البنود في هذا العام على النحو التالي:

- العقارات بما يكافئ 900 مليون جنيه.
- السيارات بما يكافئ 800 مليون جنيه.
- مواد غذائية وادوية بما يكافئ 500 مليون جنيه.
- مواد كيميائية بما يكافي 300 مليون جنيه.
- بنزين بما يكافئ 12 مليون لتراً.

وترغب الدولة في تحديد معدلات الضريبة على كل بند بحيث تحقق الآتي:

١- لا تقل الأيرادات المتحصلة من جميع البنوك عن 600 مليون جنيه.

٢- لا تزيد أيرادات الضرائب المتحصلة من المواد الغذائية والأدوية عن 15% من جملة المتحصل من الضرائب الكلية.

٣- لا تقل أيرادات الضرائب المتحصلة على العقارات والسيارات عن 60% من أيرادات الضرائب الكلية.

٤- لا تزيد أيرادات الضرائب على المواد الكيماوية عن 15% من اجمالي الأيرادات المتحصلة.

٥- لا يزيد سعر لتر البنزين عن 5 قروش عن السعر الحالي.

الحل: إذا فرضنا أن:

X_1 : تشير إلى معدل (أو النسبة المئوية %) الضريبة على العقارات

X_2 : تشير إلى معدل (أو النسبة المئوية %) الضريبة على السيارات

X_3 : تشير إلى معدل (أو النسبة المئوية %) الضريبة على المواد الغذائية والأدوية

X_4 : تشير إلى معدل (أو النسبة المئوية %) الضريبة على الكيماويات

X_5 : تشير إلى مقدار الزيادة في سعر لتر البنزين(مقدار الضريبة على اللتر الواحد)

١- بما أن الهدف الأول للدولة تحقيق ما لا يقل عن 600 مليون جنيه بالتالي فإن:

$$900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.12X_5 \geq 600 \longrightarrow$$

$$G_1 : 900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.12X_5$$
$$+ d_1^- - d_1^+ = 600 \longrightarrow \quad \min.(d_1^-) \qquad (1)$$

حيث d_1^-, d_1^+ تشير إلى مقدار النقص أو الزيادة التي يتم تحصلها عن 600 مليون جنيه على الترتيب.

٢- الهدف الثاني:

$$500X_3 \le 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) \longrightarrow$$

$$G_2 : 500X_3 - 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_2^- - d_2^+ = 0 \longrightarrow \min.(d_2^+) \qquad (2)$$

حيث d_2^-, d_2^+ تشير إلى مقدار النقص والزياددة في الأيراد المتحصل من المواد الغذائية بالنسبة للحصيلة.

٣- الهدف الثالث:

$$900X_1 + 800X_2 \ge 0.60(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) \longrightarrow$$

$$G_3 : 900X_1 + 800X_2 - 0.60(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_3^- - d_3^+ = 0 \longrightarrow \min.(d_3^-) \qquad (3)$$

حيث d_3^-, d_3^+ تشير إلى النقص والزيادة في الأيرادات المتحصلة من السيارات بالنسبة للحصيلة الكلية.

٤- الهدف الرابع:

$$300X_4 \le 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) \longrightarrow$$

$$G_4 : 300X_4 - 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_4^- - d_4^+ = 0 \longrightarrow \min.(d_4^+) \qquad (4)$$

٥- الهدف الخامس:

$$X_5 \le 5 \longrightarrow G_5 : X_5 + d_5^- - d_5^+ = 5 \longrightarrow \min.(d_5^+) \qquad (5)$$

حيث d_5^-, d_5^+ تشير إلى النقص في ضريبة اللتر الواحد أو الزيادة عن 5 قروش على التوالي.

من (5)-(1) يصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 التي تجعل

$$\text{lexic. min. } a = \{d_1^-, d_2^+, d_3^-, d_4^+, d_5^+\}$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.12X_5 + d_1^- - d_1^+ = 600$$

$$G_2 : 500X_3 - 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_2^- - d_2^+ = 0$$

$$G_3 : 900X_1 + 800X_2 - 0.60(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_3^- - d_3^+ = 0$$

$$G_4 : 300X_4 - 0.15(900X_1 + 800X_2 + 500X_3 + 300X_4 + 0.15X_5) + d_4^- - d_4^+ = 0$$

$$G_5 : X_5 + d_5^- - d_5^+ = 5$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,3 \quad , \quad i = 1,2,3,4,5$$

ملاحظة: ١- المشكلة أعلاه تم صياغتها كنموذج برمجة هدف للآتي:

أ) القيود التي ترغب الدولة في تحقيقها هنا تعتبر قيود مرنة تم تحويلها إلى أهداف goals.

٢- النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطية يمكن باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة أو طريقة الحلول المتتابعة اللتين سوف نتناولهما في الباب التالي.

تطبيق (٣): توزيع الاستثمارات

أعتبر مثال (١١-٢) بالباب الحادي عشر فأنه يمكن تحويل نموذج برمجة تعدد الأهداف (MOP) إلى نموذج برمجة هدف (GP) على النحو التالي:

١- إذا فرضنا أن مستوى العائد المرجو يزيد عن 500 مليون (مثلاً). فان الهدف العام الأول يمكن تحويله إلى هدف على النحو التالي:

$$G_1 : 0.04X_2 + 0.045X_3 + 0.055X_4 + 0.07X_5 + 0.105X_6$$
$$0.092X_7 + d_1^- - d_1^+ = 500$$

حيث d_1^-, d_1^+ تشير إلى النقص والزيادة في العائد على الترتيب عن 500 مليون

وبالتالي: $\min.(d_1^-)$

٢- إذا فرضنا أن المستوى المرجو لنسبة المشاركة في رأسالمال يساوي 5% (مثلاً). فان:

$$G_2 : 0.001X_2 + 0.00008X_3 + 0.0010X_4 + 0.0015X_5 +$$
$$0.005X_6 + 0.0020X_7 + d_2^- - d_2^+ = 0.05$$

حيث d_2^-, d_2^+ تشير إلى النقص والزيادة في نسبة المشاركة عن 5%

وبالتالي: $\min.(d_2^+)$

٣- إذا فرضنا أن المستوى المرجو لنسبة المخاطرة 0.5% (مثلاً). فان:

$$G_3 : 0.02X_6 + 0.02X_7 + d_3^- - d_3^+ = 0.005$$

حيث تشير d_3^-, d_3^+ إلى النقص والزيادة في نسبة المخاطرة.

وبالتالي: $\min.(d_3^+)$

٤- يمكن تحويل القيود من (5)-(1) إلى أهداف على النحو التالي:

$$G_4 : \sum_{j=1}^{7} X_j + d_4^- - d_4^+ = 750 \longrightarrow \min.(d_4^- + d_4^+)$$

$$G_5 : X_1 + d_5^- - d_5^+ = 85.00 \longrightarrow \min.(d_5^-)$$

$$G_6 : 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4 +$$
$$0.85X_5 + d_6^- - d_6^+ = 600 \longrightarrow \min.(d_6^-)$$

$$G_{7\text{-}13} : X_j + d_{j^\backslash}^- - d_{j^\backslash}^+ = 22.5 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,7$$
$$\longrightarrow \min.\left(\sum_{j^\backslash=7}^{13} d_{j^\backslash}^-\right)$$

وبما أن الأهداف من $(G_4 - G_{13})$ كانت في الأصل قيود لذلك فأنه في هذه الحالة تكون الأولوية المطلقة تحقيق $G_4 - G_{13}$ على النحو التالي:

$$g_1(d^-, d^+) = (d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_6^6 + d_7^- + d_8^- + d_9^- +$$
$$d_{10}^- + + d_{11}^- + d_{12}^- + d_{13}^-)$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_j ، $j = 1,2,\ldots,7$ التي تجعل:

$$\text{lexic.}\min.\ a = \{(d_4^+ + \sum_{j^\backslash=4}^{13} d_{j^\backslash}^-), (d_1^-), (d_2^+), (d_3^+)\}$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 0.04X_2 + 0.045X_3 + 0.055X_4 + 0.07X_5 +$$
$$0.105X_6 + 0.092X_7 + d_1^- - d_1^+ = 500$$

$$G_2 : 0.001X_2 + 0.00008X_3 + 0.0010X_4 + 0.0015X_5 +$$
$$0.005X_6 + 0.0020X_7 + d_2^- - d_2^+ = 0.05$$

$$G_3 : 0.02X_6 + 0.02X_7 + d_3^- - d_3^+ = 0.005$$

$$G_4 : \sum_{j=1}^{7} X_j + d_4^- - d_4^+ = 750$$

$$G_5 : X_1 + d_5^- - d_5^+ = 85.00$$

$$G_6 : 1.00X_1 + 0.995X_2 + 0.96X_3 + 0.90X_4 + \\ 0.85X_5 + d_6^- - d_6^+ = 600$$

$$G_{7\text{-}13} : X_j + d_{j\backslash}^- - d_{j\backslash}^+ = 22.5 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,7$$

$$d^- , d^+ , X \geq 0$$

(١٣–٥) تمرينات Exercises

(١٣–١) وضح أهم الاختلافات بين مفهوم الهدف العام Objective والهدفGoal.

(١٣–٢) ما هي الفروق الأساسية بين المتغيرات الانحرافية d^-, d^+ في أسلوب برمجة الهدف والمتغيرات المكملة والمصطنعة في أسلوب البرمجة الخطية.

(١٣–٣) لماذا حاصل ضرب المتغيرات الإنحرافية d_i^-, d_i^+ فى أسلوب برمجة الهدف يساوى صفر أى أن:

$$(d_i^-) \cdot (d_i^+) = 0$$

في أسلوب برمجة الهدف.

(١٣–٤) لماذا يستخدم مفهوم "التصغير وفقاً للأولويات Lexicographically Minimization" في أسلوب برمجة الهدف بدلاً من استخدام "تعظيم أو تصغير Maximization أو Minimization" في أسلوب البرمجة الخطية.

(١٣–٥) تقوم أحدى الشركات بإنتاج المنتجين A,B والجدول التالي يوضح الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة (في التصنيع، والتجميع، والاختبار) ، كذلك الزمن المتاح في كل مرحلة للإنتاج وتكلفة الساعة الواحدة في الأسبوع.

وترغب الشركة في تحديد عدد الوحدات من A,B بحيث تحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

(أ) تصغير الزمن الفائض في التصنيع أو التجميع أو الاختبار.

(ب) تحقيق ربح أسبوعي لا يقل عن 10,000 جنيه أسبوعياً.

(ج) بيع أكبر عدد ممكن من الوحدات المنتجة.

(د) تصغير ساعات الزمن الإضافي في التشغيل (تصنيع، تجميع، اختبار).

جدول (١٣-٦)

ثمن بيع الوحدة بالجنية	زمن الإنتاج بالساعة			المنتج
	اختبار	تجميع	تصنيع	
3000	3	5	20	A
2000	1	3	12	B
	20	100	120	تكلفة الساعة الواحدة بالجنية
	50	120	240	عدد الساعات المتاحة أسبوعياً

(١٣-٦) ينتج مصنع ثلاث أنواع من المنتجات A , B , C ، ربح الوحدة الواحدة 20 , 15 , 10 جنيه على الترتيب.

فإذا كانت الوحدة الواحدة من A,B,C تتطلب 7,5,8 ساعات عمل على الترتيب، والمتاح من ساعات التشغيل أسبوعياً يساوي 350ساعة أسبوعياً. كذلك يوجد أمكانية استخدام ساعات عمل إضافية بحيث لا تزيد عن 30 ساعة أسبوعياً، حيث يؤدي استخدام الزمن الإضافي إلى انخفاض ربح الوحدة من كل نوع بجنيه واحد، كذلك لا يقل الطلب الأسبوعي من إنتاج الأنواع الثلاثة عن 500 وحدة أسبوعياً.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات الأسبوعية من كل منتج بحيث يحقق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

أ- تعظيم الربح.

ب-تصغير الزمن الإضافي.

ج- تغطية الطلب في السوق.

(١٣-٧) تقوم أحدى شركات إنتاج العصائر المحفوظة بإنتاج الأنواع التالية I,II,III بحيث يدخل في إنتاج كل نوع المواد A,B,C بحيث سعر بيع الوحدة (الوحدة تساوي نصف كيلو جرام) 5,10,15 جنيه على الترتيب.

والجدول التالي يوضح الكميات المتاحة بالكيلو جرام من A,B,C في إنتاج الوحدة الواحدة من I,II,III والكميات المتاحة أيضاً.

جدول (١٣-٧)

الكميات المتاحة بالكيلوجرام	نسب المواد الداخلة في الوحدة الواحدة من I,II,III	المواد الداخلة
6000	أقل من 10% للمنتج II، أكثر من 50% لـ I	A
2000	أقل من 60% لـ III، أكثر من 20% لـ I	B
50	أقل من 50% لـ I، أكثر من 10% لـ II	C

المطلوب: ١- غير ممكن اللجوء إلى كميات إضافية من A أو B أو C واستغلال كل الكميات المتاحة.

٢- تعظيم الربح.

٣- أن يكون الإنتاج من I يمثل على الأقل 5000 وحدة.

الباب الرابع عشر

برمجة الهدف الخطية

Linear Goal Programming (LGP)

(١٤-١) نموذج برمجة الهدف الخطية	(LGP) Model
(١٤-٢) التحليل البياني	Graphical Analysis
(١٤-٣) طريقة السمبلكس المعدلة	Modified Simplex Method
(١٤-٤) طريقة الحلول المتتالية	Sequential (Iterative) Solutions Method
(١٤-٥) تمرينات	Exercises

(١٤-١) نموذج برمجة الهدف الخطية (LGP) Model

مما سبق يمكن القول أن نموذج برمجة الهدف الخطية يأخذ الشكل التالي:

أوجد X_j بحيث $j=1,2,...,n$ التي تجعل:

$$\text{Lexi. Min. } a=\{g_1(d^-,d^+),g_2(d^-,d^+),...,g_k(d^-,d^+)\} \quad (14.1)$$

$$\text{S.T. } G_i:\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j+d_i^- - d_i^+=b_i \quad , \quad i=1,2,...,m \quad (14.2)$$

$$X,d^-,d^+\geq 0 \quad , \quad d_i^- * d_i^+=0 \quad (14.3)$$

حيث $g_t(d^-,d^+)$ ، $t=1,2,...,k$ دوال خطية في المتغيرات d^-,d^+. كذلك X,d^-,d^+ تشير إلى متجه المتغيرات القرارية X ومتجه الأنحرافات السالبة d^- ومتجه الأنحرافات الموجبة d^+ على الترتيب.

وفي حالة وجود متغيرين قراريين فقط X_1,X_2 فأنه يمكن حل النموذج باستخدام التحليل البياني ولكن في حالة وجود أكثر من متغيرين قرارين فإنه يمكن حل النموذج باستخدام أحد الطريقتين التاليتين:

- **طريقة السمبلكس المعدلة**

وهي طريقة السمبلكس لحل نماذج البرمجة الخطية وحيدة الهدف بعد أجراء بعض التعديلات التي تأخذ في الأعتبار المتغيرات الإنحرافية وأولويات الأهداف العامة في متجه الإنجاز. كذلك وجود عملية واحدة فقط هي عملية التصغير.

- **طريقة الحلول المتتابعة**

وهي تعتمد على تجزئ النموذج إلى عدد K (عدد الأولويات) من النماذج الجزئية حيث يعتبر كل نموذج جزئي نموذج برمجة خطية وحيدة الهدف يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس (أنظر الباب الثالث من الجزء الأول من الكتاب [٤]).

(١٤-٢) التحليل البياني Graphical Analysis

في هذا الفصل سوف نقدم تحليل بياني لمشكلة برمجة الهدف الخطية التي تتضمن متغيرين قراريين على الأكثر بحيث يمكن الحصول على أفضل حل توافقي بيانياً،كذلك يهدف هذا الفصل إلى توضيح المفاهيم الأساسية لبرمجة الهدف بيانيا مثل:

(١) المتغيرات الانحرافية.

(٢) الأهداف المرتبطة بالمستويات المرجوة Goals.

(٣) الأهداف العامة Objectives وفقاً للأولويات.

(٤) أفضل حل توافقي.

وذلك من خلال الأمثلة التالية:

<u>مثال (١٤-١):</u> تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأثاث المكتبي الخشبي A,B من خلال خط إنتاج واحد بحيث تتطلب الوحدة الواحدة من المنتج A خمسة ساعات، والوحدة الواحدة من B أربعة ساعات في خط الإنتاج حيث أن المتاح أسبوعياً للخط 80 ساعة في الظروف العادية، كذلك ربح الوحدة من A يساوي 500 جنيه، ومن B يساوي 400 جنيه. كذلك إفادة إدارة التسويق أن الطلب الأسبوعي في السوق على المنتج B يزيد عن 30 وحدة أسبوعياً.

ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

(١) عدم اللجوء إلى زمن تشغيل أضافي على خط الإنتاج (ويصبح هذا الهدف ذو أولوية مطلقة أيضاً).

(٢) تحقيق ربح أسبوعي لا يقل عن 10,000 جنيه أسبوعياً.

(٣) إشباع الطلب في السوق من المنتج B.

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B على الترتيب فأنه يمكن صياغة المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+),(d_2^-),(d_3^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : 5X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \qquad (2)$$

$$G_2 : 500X_1 + 400X_2 + d_2^- - d_2^+ = 10{,}000 \qquad (3)$$

$$G_3 : X_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;,\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\quad i = 1,2,3 \qquad (5)$$

حيث تعرف المتغيرات الأنحرافية على النحو التالي:

d_1^- : زمن التشغيل الفائض (غير المستخدم) الأسبوعي على خط التشغيل

d_1^+ : زمن التشغيل الإضافي(الذي يزيد عن التشغيل العادي) الأسبوعي على

d_2^- : النقص في الربح المحقق عن 10,000 جنيه

d_2^+ : الزيادة في الربح المحقق عن 10,000 جنيه

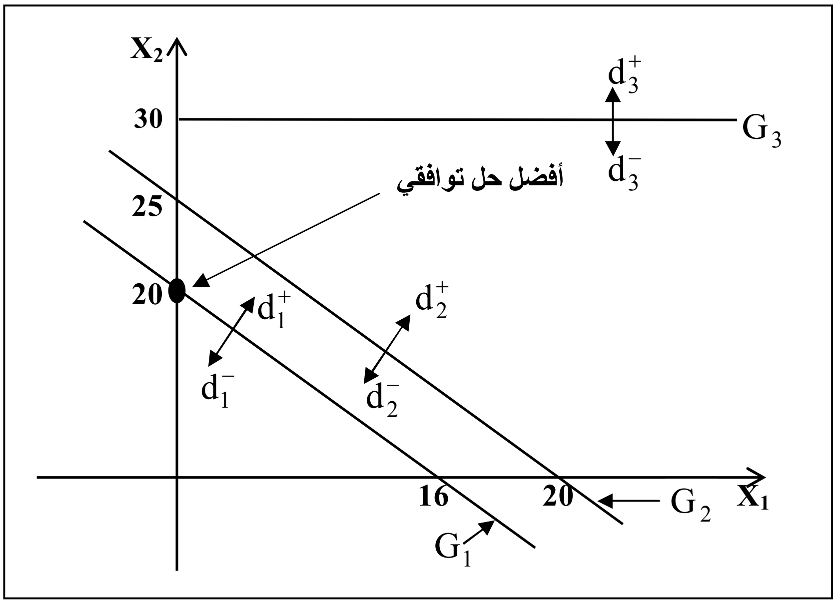
d_3^- : مقدار النقص في العرض من B عن الطلب

d_3^+ : مقدار الزيادة في العرض من B عن الطلب

والشكل التالي يوضح الأهداف G_i ، $i = 1,2,3$ في النموذج (5)−(1) فنجد أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} a^* = \{0,2000,10\} \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 20 \\ d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0 \;\; , \; d_2^{-*} = 2000 \; , \; d_2^{+*} = 0 \; , \; d_3^{-*} = 10 \; , \; d_3^{+*} = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

شكل (١٤-١)



والحل في (6) يفيد أنه في حالة الإنتاج فقط من المنتج B عدد 20 وحدة أي $X_2^* = 20$ وعدم إنتاج أي وحدة من A حيث $X_1^* = 0$ فإنه:

١- يتم تحقيق الهدف الأول بعدم أستخدام ساعات تشغيل إضافية ($d_1^+ = 0$).

٢- في ضوء (أو بأخذ الهدف الأول في الاعتبار) فإنه في هذه الحالة أقصى ربح يمكن تحقيقه يساوي 8000 أي بنقص يساوي2000 جنيه عن المستوى المرجو (حيث $d_5^{-*} = 2000$).

٣- الكمية التي يتم عرضها من B أي $X_2^* = 20$ تقل عن الطلب المتوقع في السوق بـ 10 وحدات (حيث $d_3^{-*} = 10$).

مثال (١٤-٢): أعتبر نموذج برمجة الهدف التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_3^+ + d_4^+), (d_1^+), (d_3^- + d_4^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : 4X_1 + 3X_2 + d_1^- - d_1^+ = 120 \qquad (2)$$

$$G_2 : 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 \qquad (3)$$

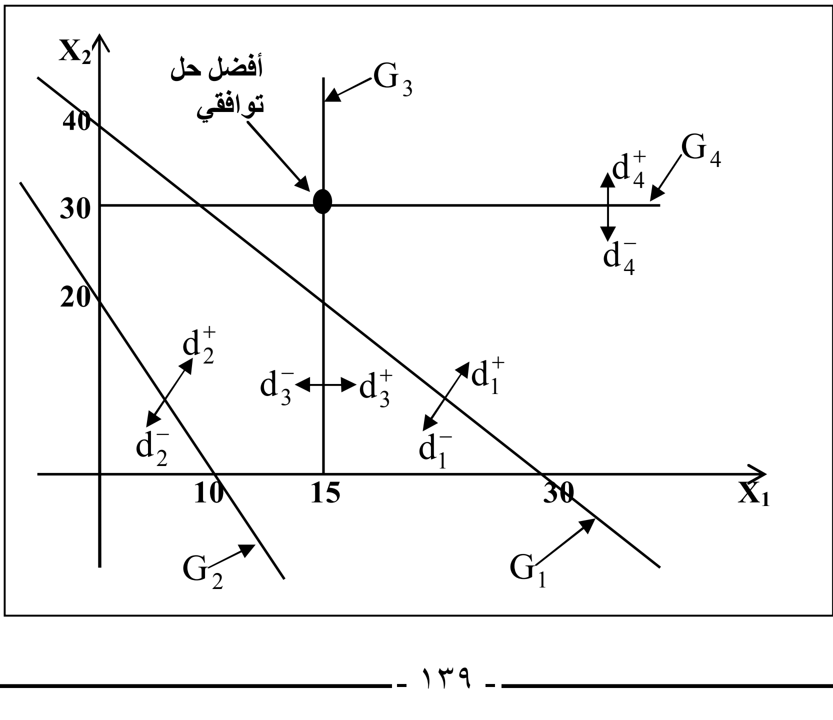
$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 15 \qquad (4)$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \qquad (5)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \;,\; (d_i^-)(d_i^+) = 0 \;,\; i = 1,2,3,4 \qquad (6)$$

الحل: برسم الأهداف $G_1 - G_4$ وتحديد اتجاه المتغيرات الأنحرافية d_i^-, d_i^+، $i = 1,2,3,4$ يمكن تحديد أفضل حل توافقي.

شكل (١٤-٢)



وأفضل حل توافقي للنموذج أعلاه على النحو التالي:

$$a^* = \{0,30,0\} \qquad , \qquad X_1^* = 15 \qquad , \; X_2^* = 30$$

$$d_1^{-*} = 0, d_1^{+*} = 30,\; d_2^{-*} = 0,\; d_2^{+*} = 40\,,\; d_3^{-*} = d_3^{+*} = 0,\; d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0$$

<u>مثال (١٤-٣)</u>: تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأدوات الكهربائية المنزلية A,B ، بحيث يدخل في إنتاج الوحدة الواحدة من A أو B مكون متاح منه 100 وحدة أسبوعياً، كذلك ربح الوحدة من A يساوي 500 جنيه ومن B يساوي 450 جنيه، فإذا كان الطلب في السوق على A لا يزيد عن 90 وحدة ومن B لا يزيد عن 80 وحدة.

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من المنتج A,B بحيث يكون ربحه الأسبوعي أكبر ما يمكن.

المطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- حل النموذج بيانياً وإيجاد الحل الأمثل.

٣- صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف.

٤- حل نموذج برمجة الهدف بيانياً.

٥- قارن بين الحل في (٢) ، والحل في (٤).

الحـل: إذا فرضنا أن X_1 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A في الأسبوع، كذلك X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من B في الأسبوع.

١- فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$Max.Z = 500X_1 + 450X_2 \quad (1)$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 \le 100 \quad (2)$$

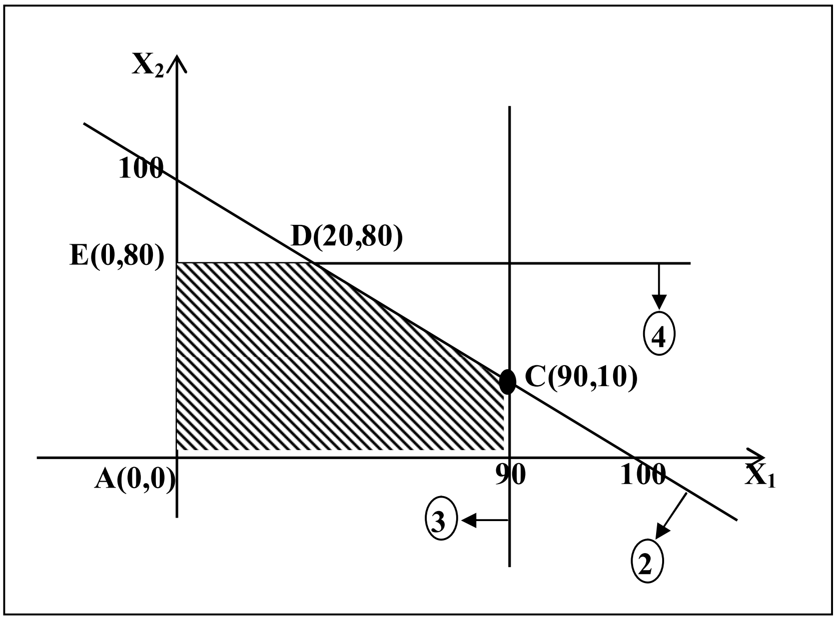
$$X_1 \le 90 \quad (3)$$

$$X_2 \le 80 \quad (4)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad (5)$$

٢- الشكل التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج (5)-(1):

شكل (٧-٥)



من الرسم يتضح أن الحل الأمثل:

$$Z^* = 49,500 \quad , \quad X_1^* = 90 \quad , \quad X_2^* = 10$$

٣- ويمكن صياغة المشكلة السابقة كنموذج برمجة هدف على النحو التالي:

إذا فرضنا أن المستوى المرجو للربح 100,000جنيه مثلاً. وبالتالي يمكن تحويل الهدف العام في (1) إلى هدف مقترن بالمستوى المرجو وإضافة المتغيرات الانحرافية على النحو التالي:

$$G_1 : 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000$$

وبما أن القيود (4)−(2) يجب تحقيقها في شكل قيود أي تعتبر قيود صارمة، بتحويلها إلى أهداف

$$G_2 : X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80$$

ويصبح الهدف ذو الأولوية الأولي على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+)\}$$

ويصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+), (d_1^-)\} \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : 500X_1 + 450X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100,000 \qquad (7)$$

$$G_2 : X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \qquad (8)$$

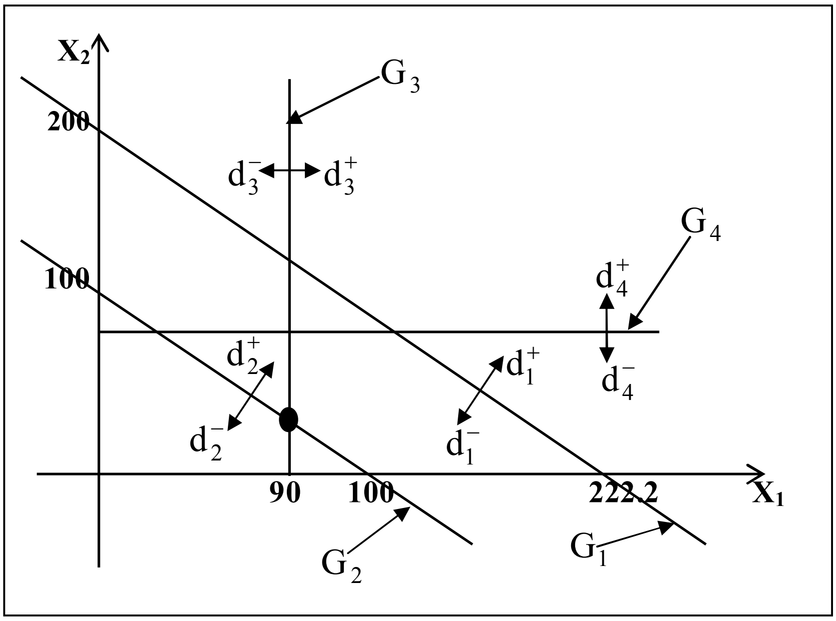
$$G_3 : X_1 + d_3^- - d_3^+ = 90 \qquad (9)$$

$$G_4 : X_2 + d_4^- - d_4^+ = 80 \qquad (10)$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (d_i^-)(d_i^+) = 0 \,,\, i = 1,2,3,4 \qquad (11)$$

٤− والشكل التالي يوضح النموذج (11)−(6)

شكل (٧-٦)



ومن الرسم يتضح أن أفضل حل توافقي هو:

$$a^* = \{0,50,500\} \quad , \; X_1^* = 90 \quad , \; X_2^* = 10 \quad , \; Z^* = 49,500$$

٥- من (٢) ، (٤) يتضح أن الحل الأمثل باستخدام البرمجة الخطية هو نفس الحل باستخدام برمجة الهدف $(X_1^* = 90 \; , \; X_2^* = 10)$ – وهذا يوضح كفاءة وشمولية أسلوب برمجة الهدف.

(١٤-٣) طريقة السمبلكس المعدلة Modified Simple Method

إذا ما قارنا نموذج برمجة الهدف الخطي LGP بنموذج البرمجة الخطية LP نلاحظ التالي:

بالنسبة لنموذج LP يوجد معيار واحد يرغب متخذ القرار في تحقيقه متمثل في دالة هدف خطية يتم إجراء عملية تعظيمmaximization أو تصغير minimization تحت مجموعة من القيود الخطية وشروط عدم السالبية.

أما بالنسبة لنموذج LGP فيوجد عدة معايير متمثله في عدد K من الدوال الخطية في المتغيرات الإنحرافية يتم إجراء عملية تصغير minimization فقط لكل منها وفقاً لأولويات تحت مجموعة من القيود الخطية وقيود عدم السالبية أيضاً.

لذا في سنة ١٩٧٢ قرر Sang Lee أنه يمكن تطوير طريقة السمبلكس الجدولية (أنظر الباب الثالث – بالجزء الأول من الكتاب [٤]) لحل نموذج برمجة الهدف الخطية حيث يتم استبدال الصف Z الممثل لدالة الهدف في النموذج LP في جدول السمبلكس بمصفوفة مكونة من K من الصفوف كل صف Z_K يمثل دالة الهدف ذو الأولوية K [71].

وفي سنة ١٩٧٦ طور Ignizio فكرة Lee من خلال تقديم الجدول متعدد الجوانب multi-stub table وبأستخدام هذا الجدول تمكن من وضع أهم التعديلات على طريقة السمبلكس بحيث تأخذ في الأعتبارات الأهداف وفقاً لأولوياتها وسمى هذه التعديلات بطريقة السمبلكس المعدلة ووضعها في خوارزم سوف نقدمه فيما يلي [52]. والجدول التالي يوضح الجدول متعدد الجوانب المبدئي.

جدول (١٤-١): جدول السمبلكس المبدئي (الجدول متعدد الجوانب)

			P_K	$w_{K,1}$	$w_{K,2}$	$\cdots$	$w_{K,j}$	$\cdots$	$w_{K,j+1}$	$\cdots$	$w_{K,j+m}$	الجانب العلوى
			:	:	:	:	:	:	:	:	:	top stub
الجانب الأيسر			:	:	:	:	:	:	:	:	:	
Left stub			P_2	$w_{2,1}$	$w_{2,2}$	$\cdots$	$w_{2,j}$	$\cdots$	$w_{2,j+1}$	$\cdots$	$w_{2,j+m}$	
			P_1	$w_{1,1}$	$w_{1,2}$	$\cdots$	$w_{1,j}$	$\cdots$	$w_{1,j+1}$	$\cdots$	$w_{1,j+m}$	
P_K	$\cdots$	P_1	V	X_1	X_2	$\cdots$	X_j	$\cdots$	d_1^+	$\cdots$	d_m^+	b
$u_{1,K}$	$\cdots$	$u_{1,1}$	d_1^-	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$\cdots$	$e_{1,j}$	$\cdots$	$e_{1,j+1}$	$\cdots$	$e_{1,j+m}$	b_1
:	:	:	d_2^-	$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$\cdots$	$e_{2,j}$	$\cdots$	$e_{2,j+1}$	$\cdots$	$e_{2,j+m}$	b_2
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$u_{m,K}$	$\cdots$	$u_{m,1}$	d_m^-	$e_{m,1}$	$e_{m,2}$	$\cdots$	$e_{m,j}$	$\cdots$	$e_{m,j+1}$	$\cdots$	$e_{m,j+m}$	b_m
الصفوف القياسية			P_1	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$\cdots$	$I_{1,j}$	$\cdots$	$I_{1,j+1}$	$\cdots$	$I_{1,j+m}$	a_1
Index rows			P_2	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$	$\cdots$	$I_{2,j}$	$\cdots$	$I_{2,j+1}$	$\cdots$	$I_{2,j+m}$	a_2
			:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
			P_K	$I_{K,1}$	$I_{K,2}$	$\cdots$	$I_{K,j}$	$\cdots$	$I_{K,j+1}$	$\cdots$	$I_{K,j+m}$	a_K

حيث:

P_K : تشير إلى مستوى الأولوية K priority level ، بحيث $K = 1,2,...,K$

V : تشير إلى المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل

d^- : تشير إلى المتغيرات الإنحرافية السالبة وهي تمثل المتغيرات الأساسية في الجدول الأول (المبدئي)

$e_{i,s}$: معامل المتغير غير الأساسي S ، في الصف i . أو بعبارة أخرى هو معامل المتغير غير الأساسي S في الهدف i ، أي في G_i،

$w_{k,s}$: المعامل (الوزن) النسبي weighting factor للمتغير غير الأساسي S في الأولوية K،

$u_{i,k}$: المعامل (الوزن) النسبي weighting factor للمتغير الأساسي i في الأولوية K،

$I_{k,s}$: الرقم القياسي index number للمتغير غير الأساسي S في الأولوية K،

a_k : مستوى أنجاز الهدف في الأولوية رقم K (أي العنصر رقم K في متجه الإنجاز).

ونجد أن جميع عناصر الجدول السابق يمكن الحصول عليها من النموذج LGP بأستثناء المصفوفة القياسية حيث يتم حساب عناصرها على النحو التالي:

$$I_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} (e_{i,s} \cdot u_{i,k}) - w_{k,s} \qquad (14.4)$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot u_{i,k}) \qquad (14.5)$$

وسوف نوضح حساب كل من $I_{k,s}$ ، a_k في المثال التالي.

مثال (١٤-٤) أوجد حل نموذج برمجة الهدف الخطية التالي:

$$\text{lexic.}\, Z = \{(4d_1^+ + 6d_2^+), (2d_3^-), (d_4^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ & G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ & G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 60 \end{aligned}$$

$$G_4 : X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12$$

$$X_j , d_i^- , d_i^+ \geq 0 \quad , \quad j = 1,2 \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

ومن النموذج أعلاه يمكن تكوين جدول طريقة السمبلكس المعدلة (الجدول المتعدد الجوانب) على النحو التالي:

جدول (١٤-٢): جدول السمبلكس المبدئي

الجانب الأيسر										الجانب العلوى
			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			d_1^-	1	1	-1				10
			d_2^-	1			-1			4
	2		d_3^-	5	3			-1		60
			d_4^-	1	1				-1	12
الصفوف القياسية			P_1	0	0	-4	-6			0
			P_2	10	6			-2		120
			P_3						-1	0

ملحوظة: الخلايا (الخانات) الفارغة في الجدول قيمة كل عنصر فيها يساوي صفر ولم تكتب للأختصار. وتبنى طريقة السمبلكس المعدلة على:

١- تكون المتغيرات الأساسية (الداخلة في الحل) في الجدول المبدئي هي المتغيرات الأنحرافية السالبة d^- في الأهداف goals.

٢- عند تحقيق الهدف ذو الأولوية K أي تصغير Z_K ، $K = 2,3,...,k$ بحيث لا يؤثر على الأنجاز السابق تحقيقه في الأهداف Z_{K-1} ، $K = 2,3,...,k-1$

وفيما يلي سوف نقدم خطوات تطبيق طريقة السمبلكس المعدله من خلال الخوارزم التالي.

خوارزم (١٤-١)

الخطوة (١): ١- نكون الجدول متعدد الجوانب المبدئي وتحديد العناصر $e_{i,s}$ ، $w_{k,s}$ ، $u_{i,k}$ من النموذج.

٢- حساب العناصر a_k ، $I_{k,s}$ من العلاقتين (14.4),(14.5).

الخطوة (٢): لأختبار شرط الأمثلية optimality condition يتم ذلك بفحص a_k فإذا كانت:

أ) $a_k = 0$ ننتقل إلى الخطوة (٦).

ب) فيما عدا ذلك نفحص القيم الموجبة في الصف القياسي المرتبط بالأولوية k (أي P_k) أو بعبارة أخرى فحص العناصر $I_{k,s}$ في الصف K ، ونختار منها أكبر قيمة موجبة بحيث لا يعلوها قيمة سالبة في الأولوية الأعلى $(k-1)$ في نفس العمود ، ولتكن هذه القيمة الموجبة في العمود S ، وفي حالة عدم وجود $I_{k,s}$ التي تحقق ذلك ننتقل إلى الخطوة (٦).

الخطوة (٣): لتحديد المتغير غير الأساسي الداخل entering variable وهو المتغير غير الأساسي في العمود s١.

الخطوة (٤): تحديد المتغير الخارج leaving (departing) variable وذلك عن طريق حساب النسبة L_i حيث:

$$L_i = b_i / e_{i,s\backslash} \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (14.6)$$

وتحديد أقل قيمة موجبة للنسبة L_i ولتكن مناظرة للصف $i\backslash$ (بعد أستبعاد النسب المناظرة للعناصر $e_{i,s\backslash}$ السالبة أو الصفرية). فيكون المتغير الخارج هو المتغير الأساسي بالصف $i\backslash$.

الخطوة (٥): أ- نكون جدول جديد ويتم أستبدال المتغير الأساسي في الصف $i\backslash$ بالمتغير غير الأساسي في العمود $s\backslash$. ويتم حساب b_i ، $e_{i,s}$ في هذا الجدول كما هو موضح في ب ، ج ، د ، هـ ، و ، ن على النحو التالي:

ب- بالصف $i\backslash$ في الجدول الجديد هو نفس العناصر في الصف $i\backslash$ في الجدول السابق بعد قسمة كل عنصر من عناصره على العنصر $e_{i\backslash,s\backslash}$ (العنصر المحوري) باستثناء العنصر $e_{i\backslash,s\backslash}$.

ج- العمود $s\backslash$ يتم قسمة كل عنصر من عناصره على $(-e_{i\backslash,s\backslash})$ باستثناء العنصر $e_{i\backslash,s\backslash}$.

د- العنصر $e_{i\backslash,s\backslash}$ يستبدل بمقلوبه $(1/e_{i\backslash,s\backslash})$

هـ- يتم حساب باقي العناصر في الجدول الحالي من الجدول السابق عن طريق عملية الدوران pivot process على النحو في العلاقتين التاليتين:

$$\hat{e}_{i,s} = e_{i,s} - \left[\frac{(e_{i,s})\,(e_{i,s\backslash})}{e_{i\backslash,s\backslash}} \right] \qquad (14.7)$$

$$\hat{b}_i = b_i - \left[\frac{(b_i)\,(e_{i,s\backslash})}{e_{i\backslash,s}} \right] \qquad (14.8)$$

و- وبالنسبة لحساب a_k ، $I_{k,s}$ يتم حسابهم من العلاقتين (14.5),(14.4).

ن- الرجوع للخطوة رقم (٢).

الخطوة (٦): الأنتقال إلى الأولوية $K = k + 1$ إذا كان $k < K$ يتم الأنتقال إلى الخطوة (٢) أما إذا كان $k = K$ فأننا نكون وصلنا إلى أفضل حل توافقي best compromise solution للمشكلة.

وسوف نوضح تطبيق خطوات الخوارزم من خلال الأمثلة التالية.

<u>مثال (١٤-٥)</u> إذا أعتبرنا المثال السابق (١٤-٤)

الخطوة (١): ١- نكون الجدول المبدئي كما في جدول (١٤-١) فنحصل على جدول (١٤-٢).

الخطوة (٢): إذا اعتبرنا $K = 1$ بالرجوع إلى الصف القياسي المناظر للأولوية الأولى P_1 نجد أن $a_1 = 0$ أي أننا وصلنا إلى القيمة المثلى للهدف ذو الأولوية الأولى حيث نلاحظ ان جميع العناصر في الصف القياسي المناظر لـ P_1 لا يوجد فيها أي عنصر موجب (أي جميعها صفر أو سالب). لذا ننتقل إلى الأولوية الثانية P_2 كما هو موضح في جدول (١٤-٣) التالي.

الخطوة (٣): من الجدول نجد أن الصف القياسي المناظر لـ P_2 يوجد به عناصر موجبة (يعلوها عناصر صفرية في P_1 وبالتالي إختيار أي عنصر منها لا يؤثر على قيمة مستوى الأنجاز في الأولوية الأولى أي لا يغير من $a_1^* = 0$) أكبرها قيمة فيهم تساوي (10) تناظر المتغير غير الأساسي X_1 وبالتالي يعتبر المتغير الداخل X_1.

جدول (١٤-٣): جدول السمبلكس المعدلة المناظرة لأنجاز الهدف ذو الأولوية الثانية

المتغير الداخل
(العمود المحوري)

			P_3						1		
			P_2								
			P_1			4	6				
P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			d_1^-	1	1	-1				10	10
			d_2^-	1			-1			4	(4)
	2		d_3^-	5	3			-1		60	12
			d_4^-	1	1				-1	12	12
			P_1	0	0	-4	-6			0	
			P_2	10	6			-2		120	

المتغير الخارج
(الصف المحوري)
العنصر المحوري

الخطوة (٤): يتم تحديد المتغير الخارج ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\frac{b_i}{e_{i,1}} = \left\{ \frac{10}{1}, \frac{4}{1}, \frac{60}{5}, \frac{12}{1} \right\}$$

أو بعبارة أخرى قسمة عناصر الطرف الأيمن (b) على عناصر العمود المحوري فيكون أقلها يساوي (4) ويكون المتغير الأساسي المناظر لها هو (d_2^-) وبالتالي يكون المتغير الخارج هو d_2^-.

الخطوة (٥): يتم بناء جدول جديد (جدول (١٤-٤)) على النحو التالي:

أ- سوف يعتبر المتغير X_1 متغير أساسي والمتغير d_2^- غير أساسي. ويتم حساب $e_{i,s}$, b_i , $I_{k,s}$ في الجدول التالي.

ب- يصبح العنصر المناظر للعنصر المحوري $e_{2,1}$ مقلوب العنصر المحوري أي يصبح $(1/e_{2,1})$.

ج- كذلك تصبح العناصر المناظرة لعناصر الصف المحورى (بأستثناء العنصر المناظر للعنصر المحوري) نفس العناصر بعد قسمة كل عنصر على العنصر المحوري $e_{2,1}$ (حيث $e_{2,1}=1$).

د- بالنسبة للعناصر المناظرة لعناصر العمود المحوري $e_{i,1}$ (بأستثناء العنصر المحوري $e_{2,1}$) هي نفس العناصر بعد قسمة كل عنصر منها على سالب العنصر المحوري أي $(-e_{2,1})$.

هـ- أما باقي العناصر $e_{i,s}$, b_i يتم حساب كل منهم من العلاقتين:

$$\hat{e}_{i,s} = e_{i,s} - \left[\frac{(e_{2,s})(e_{i,1})}{e_{2,1}}\right] \quad i \neq 2 \text{ , } s \neq 1$$

$$\hat{b}_i = b_i - \left[\frac{(b_2)(e_{i,1})}{e_{2,1}}\right]$$

كما هو موضح بجدول (١٤-٤) التالي.

و- يتم حساب $I_{k,s}$, a_k من العلاقتين التاليتين:

$$I_{k,s} = \sum_{i=1}^{m}(e_{i,s} \cdot u_{i,k}) - w_{k,s} \quad , \quad k = 1,2$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{m}(b_i \cdot u_{i,k})$$

كما هو موضح في الجدول (١٤-٤) أيضاً.

جدول (١٤-٤): جدول السمبلكس المعدلة المناظرة لأنجاز الهدف ذو الأولوية الثانية

المتغير الداخل

			P_3						1		
			P_2								
			P_1			4	6				
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			d_1^-	-1	1	-1	1			6	(6)
			X_1	1			-1			4	-
	2		d_3^-	-5	3		+5	-1		40	13.3
			d_4^-	1-	1		+1		-1	8	8
			P_1			-4	-6			0	
			P_2	-10	6		10	-2		80	

المتغير الخارج

العنصر المحوري

من الجدول يتضح أن $a_2 = 80$ وبالرجوع إلى الخطوة (٢) حيث $K = 2$ ، وبفحص العناصر في الصف القياسي المناظر لـ P_2 نجد أنه يوجد به عناصر موجبة وهذا يعنى أنه يمكن تحسين قيمة $a_2 = 80$. فنجد أن العناصر الموجبة في الصف القياسي P_2 ولا يعلوها عناصر سالبة هو (6) في العمود المناظر للمتغير غير الأساسي X_2 فيصبح X_2 هم المتغير الداخل ونكون جدول (١٤-٥). ومن الجدول نجد أن $a_2 = 44$ أي تحسنت قيمتها كذلك نجد أن عناصر الصف القياسي المناظر لـ P_2 سالبة أو أصفار، وبالتالي يتم الانتقال إلى الأولوية الثالثة والأخيرة بأضافة صف أخر إلى المصفوفة القياسية يمثل P_3 وحساب $I_{3,s}$ للعناصر المناظرة للصف P_3 كما هو موضح في جدول (١٤-٦) التالي.

جدول (١٤-٥): يوضح أجراء عملية الدوران الثانية بالنسبة للأولوية P_2

			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			X_2	-1	1	-1	1			6
			X_1	1			-1			4
	2		d_3^-	-2	-3	3	2	-1		22
			d_4^-		-1	1			-1	2
			P_1			-4	-6			0
			P_2		-6			-2		44

جدول (١٤-٦): يوضح إضافة الأولوية الثالثة إلى المصفوفة القياسية

			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			X_2	-1	1	-1	1			6
			X_1	1			-1			4
	2		d_3^-	-2	-3	3	2	-1		22
			d_4^-		-1	1			-1	2
			P_1			-4	-6			0
			P_2	-4	-6	6	4	-2		44
			P_3						-1	0

ومن الجدول يتضح أن $a_3 = 0$ وبالتالي يصبح هذا الحل هو الحل النهائي للمشكلة على النحو: $a^* = \{0,\ 44,\ 0\}\ ,\ X_1^* = 4\ ,\ X_2^* = 6$

<u>مثال (١٤-٦)</u> أوجد كل من X_1, X_2, X_3 التي تجعل

$$\text{lexic. } a = \{(2d_3^+ + d_4^+), (d_1^+), (2d_2^-), (d_3^- + 2d_4^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.}\quad & X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ & X_1 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\ & X_1 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ & X_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ & X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \\ & (d_i^-)\cdot(d_i^+) = 0 \quad , \ j = 1,2,3 \quad , \ i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

الحل:

جدول (١٤-٧): يوضح جدول السمبلكس المعدلة المناظرة لدالة الأنجاز ذو الأولوية P_1

				P_4								
				P_3								
				P_2				1				
				P_1						2	1	
P_4	P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	X_3	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
				d_1^-	1	1	1	-1				40
	2			d_2^-	1		1		-1			100
1				d_3^-	1					-1		30
2				d_4^-		1					-1	15
				P_1						-2	-1	0

١- من الجدول نجد أن $a_1^* = 0$ (حيث أن عناصر الصف القياسي المناظر لـ P_1 قيم سالبة أو اصفار).

٢- نكون الجدول التالي بأضافة صف مناظر للأولوية P_2 في المصفوفة القياسية على النحو الموضح في الجدول التالي.

جدول (١٤-٨): يوضح إضافة الصف القياسي المناظر لـ P_2

				P_4								
				P_3								
				P_2				1				
				P_1						2	1	
P_4	P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	X_3	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
				d_1^-	1	1	1	-1				40
	2			d_2^-	1		1		-1			100
1				d_3^-	1					-1		30
1				d_4^-		1					-1	15
				P_1						-2	-1	0
				P_2				-1				0

من الجدول نجد أن $a_2^* = 0$ ، وجميع العناصر المناظر لـ P_2 في المصفوفة القياسية أصفار أو سالبة. بالتالي ننتقل إلى تكوين الصف المناظر لـ P_3 في المصفوفة القياسية على النحو الموضح في الجدول التالي (جدول (١٤-٩)).

ومن جدول (١٤-٩) نجد أن $a_3^* = 200$ ومن الصف القياسي المناظر لـ P_3 نجد أنه ممكن دخول X_1 أو X_3 ، فأذا أخترنا X_1 كمتغير داخل وبقسمة عناصر

المتجه b على عناصر العمود المحوري نجد أن المتغير الخارج هو d_3^- ونكون الجدول التالي لتحسين a_3 على النحو في جدول (١٤-١٠).

من جدول (١٤-١٠) نجد أن $a_3 = 140$ أي تم تحسين قيمتها من $a_3 = 200$ إلى $a_3 = 140$ ولكن ما زال يوجد عنصر موجب في الصف P_3 في المصفوفة القياسية يناظر المتغير غير الأساسي X_3 وبالتالي يكون المتغير X_3 هو المتغير الداخل كذلك يعتبر d_1^- المتغير الخارج ونكون جدول (١٤-١١) التالي.

جدول (١٤-٩): يوضح إضافة الصف القياسي المناظر لـ P_3

				P_4									
				P_3									
				P_2				1					
				P_1						2	1		
P_4	P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	X_3	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
				d_1^-	1	1	1	-1				40	40
	2			d_2^-	1		1		-1			100	100
1				d_3^-	1					-1		30	30
1				d_4^-		1					-1	15	
				P_1						-2	-1	0	
				P_2				-1				0	
				P_3	2		2		-2			200	

جدول (١٤-١٠): يوضح تحسين دالة الأنجاز a_3

				P_4	1								
				P_3									
				P_2				1					
				P_1						2	1		
P_4	P_3	P_2	P_1	V	d_3^-	X_2	X_3	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
				d_1^-	-1	1	1	-1		1		10	(10)
	2			d_2^-	-1		1		-1	1		70	70
				X_1	1					-1		30	
2				d_4^-		1					-1	15	
				P_1						-2	-1	0	
				P_2				-1				0	
				P_3	-2		2		-2	2		140	

جدول (١٤-١١): يوضح تحسين دالة الأنجاز a_3

				P_4	1								
				P_3									
				P_2				1					
				P_1						2	1		
P_4	P_3	P_2	P_1	V	d_3^-	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
				X_3	-1	1	1	-1		1		10	10
	2			d_2^-		-1	-1	1	-1			70	
				X_1	1					-1		30	
2				d_4^-		1					-1	15	
				P_1						-2	-1	0	
				P_2				-1				0	
				P_3		-2	-2	2	-2			140	

من جدول (٤-١١) نجد أن أفضل قيمة للهدف ذو الأولوية الثالثة a^* حيث $a_3^* = 140$ أي لم يتم تحسين a_3 عن قيمتها في جدول (٤-١٠) ولكن توجد قيمة موجبة في الصف P_3 في المصفوفة القياسية مناظر للمتغير غير الأساسي d_1^+ تعلوه قيمة سالبة أعلاه في الصف القياسي المناظر لـ P_2 وهذا يعنى أن أفضل قيمة لـ a_3^* هي $a_3^* = 140$ ، وننتقل إلى الأولوية P_4 ونكون الجدول التالي.

جدول (١٤-١٢): يوضح تحسين دالة الأنجاز a_4

				P_4	1								
				P_3									
				P_2				1					
				P_1						2	1		
P_4	P_3	P_2	P_1	V	d_3^-	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
				X_3	-1	1	1	-1		1		10	—
	2			d_2^-		-1	-1	1	-1			70	
				X_1	1					-1		30	(30)
2				d_4^-		1					-1	15	
				P_1						-2	-1	0	
				P_2				-1				0	
				P_3		-2	-2	2	-2			140	
				P_4	-1	2					-2	30	

والجدول أعلاه يوضح أن أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$X_1^* = 30 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad X_3^* = 10 \quad , \quad d_2^{-*} = 70$$

$$d_4^{-*} = 15 \quad , \quad a^* = \{0 \quad 0 \quad 140 \quad 30\}$$

مثال (١٤-٧) أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{lexic. } a = \{(d_3^+ + d_4^+), (5d_1^- + 2d_2^-), (2d_1^+ + 3d_2^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & 8X_1 + 12X_2 + d_1^- - d_1^+ = 96 \\ & X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ & X_1 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ & X_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-)\cdot(d_i^+) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

الحل: نكون الجدول المبدئي لطريقة السمبلكس المعدلة على النحو التالي:

جدول (١٤-١٣): الجدول المبدئي لطريقة السمبلكس

المتغير الداخل

			P_3			2	3				
			P_2								
			P_1					1	1		
P_3	P_2	P_1	V	X_1	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
	5		d_1^-	8	12	-1				96	(8)
	2		d_2^-	1	2		-1			40	20
			d_3^-	1				-1		30	
			d_4^-		1				-1	15	15
			P_1					-1	-1	0	
			P_2	42	64					560	

المتغير الخارج

جدول (١٤-١٤)

المتغير الداخل

P_3	P_2	P_1	V	X_1	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			P_3								
			P_2		5						
			P_1					1	1		
P_3	P_2	P_1	V	X_1	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			X_2	8/12	1/12	-1/12				8	—
	2		d_2^-	-1/3	-2/12	1/6	-1			24	144
			d_3^-	1				-1		30	—
			d_4^-	-2/3	-1/12	1/12			-1	7	(84)
			P_1					-1	-1	0	
			P_2	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-64}{12}$	$\frac{2}{6}$	-2			48	

المتغير الخارج

جدول (١٤-١٥)

المتغير الداخل

P_3	P_2	P_1	V	X_1	d_1^-	d_4^-	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			P_3								
			P_2		5						
			P_1					1	1		
P_3	P_2	P_1	V	X_1	d_1^-	d_4^-	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			X_2			-1			-1	15	
	2		d_2^-	1		-2	-1		2	10	(10)
			d_3^-	1				-1		30	30
			d_1^+	-8	-1	12			-12	84	
			P_1					-1	-1	0	
			P_2	2	-5		-2		4	20	

المتغير الخارج

جدول (١٤-١٦)

			P_3				3				
			P_2	2	5						
			P_1					1	1		
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_4^-	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
			X_2			-1			-1	15	
			X_1	1		-2	-1		2	10	5
			d_3^-	-1		2	1	-1	-2	20	
2			d_1^+	8	-1	-4	-8		4	164	41
			P_1					-1	-1	0	
			P_2	-2	-5					0	
			P_3	16	-2	-8	-11		8	328	

ومن الجدول يتضح ان أفضل حل توافقي على النحو:

$$X_1^* = 10 \quad , \quad X_2^* = 15 \quad , \quad a^* = \{0 \ , \ 0 \ , \ 328\}$$

(١٤-٤) طريقة الحلول المتتالية Sequential (Iterative) Solutions Method

في سنة ١٩٧٦ قدم كل من Dauer and Krueger الأسلوب التكراري Iterative Approach لحل مشاكل برمجة الهدف الخطية وغير الخطية أيضاً [45,44]. ويمكن القول أن طريقة الحلول المتتابعة لمشاكل برمجة الهدف تناظر طريقة الأولويات في حل نماذج برمجة تعدد الأهداف التي تم تناولها في الباب الثاني عشر. وفي هذا الباب سوف نتناول طريقة الحلول المتتابعة بالنسبة لحل مشاكل برمجة الهدف الخطية فقط، أما بالنسبة لمشاكل برمجة الهدف غير الخطية فسوف نتناولها بالتفصيل في الباب السادس عشر.

إذا أعتبرنا نموذج برمجة الهدف المكون من k من الأولويات على النحو التالي (أنظر الفصل (١٤-١)):

أوجد X بحيث:

$$\text{Lexi. Min. } a = \{g_1(d^-,d^+), g_2(d^-,d^+), \dots, g_k(d^-,d^+)\} \qquad (14.9)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,t \quad (14.10)$$

$$X_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \ , j = 1,2,\dots,n \ , \ i = 1,2,\dots,m \quad (14.11)$$

حيث: $d^- = (d_1^-, \dots, d_m^-)^T \, , d^+ = (d_1^+, \dots, d_m^+)^T \, , X = (X_1, \dots, X_n)^T$

$g_t(d^-,d^+)$ ، دوال خطية في d^-, d^+.

ويمكن تلخيص طريقة الحلول المتتالية فى حالة اعتبار المشكلة (14.9)-(14.11) مكونة من k من المشاكل الجزئية وحيدة الهدف المتداخله، بمعنى إذا اعتبرنا الهدف العام $g_t(d^-,d^+)$ ذو الأولوية t فإن النموذج وحيد الهدف الجزئي المرتبط بالأولوية t

يأخذ في الاعتبار جميع المشاكل الجزئية السابقة ذات الأولويات الأهم من t وعددها $(t-1)$ بحيث $t=2,\dots,k$، ويكون أفضل حل توافقي للمشكلة (14.11)–(14.9) هو الحل للمشكلة الجزئية ذو الأولوية K (كذلك نشير إلى الأولوية K بالرمز P_k).

وفيما يلي سوف نوضح الخطوات المتتالية للحل باستخدام هذه الطريقة من خلال الخوارزم التالي:

خوارزم (١٤-٢)

الخطوة (١): ١- اعتبر المشكلة الجزئية ذو الأولوية الأولي:

$$\text{Min.}a_1 = g_1(d^-, d^+) \qquad (14.12)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1 \qquad (14.13)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (14.14)$$

٢- وبحل النموذج (14.14)–(14.12) باستخدام طريقة السمبلكس نحصل على الحل الأمثل وتكون قيمة دالة الهدف تساوى a_1^*.

الخطوة (٢): ١- اعتبر النموذج الجزئي الثاني أي الذي يمثل الأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\text{Min.}a_2 = g_2(d^-, d^+) \qquad (14.15)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \; i \in P_1, P_2 \qquad (14.16)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (14.17)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (14.18)$$

٢- وبحل النموذج (14.18)–(14.15) بطريقة السمبلكس نحصل على الحل الأمثل له وليكن a_2^*.

ويلاحظ أن النموذج الجزئي الثاني أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول، كذلك يضع الحل الأمثل للنموذج الجزئي الأول a_1^* كقيد في النموذج الثاني كما هو واضح في القيد (14.17).

الخطوة (٣): ١- اعتبر النموذج الجزئي الثالث أي الذي يمثل الأولوية الثالثة على النحو:

$$\text{Min.}a_3 = g_3(d^-, d^+) \qquad (14.19)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \ i \in P_1, P_2, P_3 \qquad (14.20)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (14.21)$$

$$g_2(d^-, d^+) = a_2^* \qquad (14.22)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (14.23)$$

٢- وبحل النموذج (14.23)-(14.19) نحصل على الحل a_3^*.

ويلاحظ أن النموذج الجزئي الثالث أعلاه يتضمن أهداف النموذج الأول، والثاني. كذلك يضع حل النموذجين الأول والثاني كقيود في (14.22),(14.21).

بالمثل يتم تكوين النماذج الجزئية المرتبطة بالأولويات $P_4, P_5, ..., P_{k-1}$.

الخطوة (k): ١- اعتبر النموذج الذي يمثل الأولوية الأخيرة P_k على النحو:

$$\text{Min.}a_k = g_k(d^-, d^+) \qquad (14.24)$$

$$\text{S.T.} \quad G_i : f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \ i \in P_1, P_2, ..., P_k \qquad (14.25)$$

$$g_j(d^-, d^+) = a_t^* \quad , \quad t = 1, 2, ..., k-1 \qquad (14.26)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (14.27)$$

٢- وبحل النموذج (14.27)-(14.42) نحصل على الحل a_k^*.

وسوف نوضح هذه الخطوات من خلال الأمثلة التالية.

ملاحظات: ١- حل النموذج الأخير (14.27)-(14.42) يمثل أفضل حل توافقي للنموذج الأصلي (14.11)-(14.9) – ويتضمن جميع الأهداف G_i لنموذج برمجة الهدف الأصلي.

٢- حل النموذج الجزئي t حيث $t = 2,3,...,k$ يتضمن أهداف النماذج الجزئية ذو الأولوية الأهم من t أي يأخذ فى الإعتبار النماذج الجزئية السابقة $(1,2,....,t-1)$.

٣- كل نموذج جزئي يتم حله باستخدام طريقة السمبلكس، حيث يمكن استخدام برامج الحزم الجاهزة وبصفة خاصة المشاكل ذات الحجم الكبير.

٤- بالنسبة للقيود (14.26) يمكن تحويلها إلى أهداف أيضاً بأضافة d_t^-, d_t^+ ، حيث $t = 1,2,.....,k-1$.

٥- تمكن طريقة الحل المتتالي متخذ القرار من:

أ- إجراء تعديلات فى الأولويات.

ب- إجراء تعديلات فى المستويات المرجوة.

<u>مثال (١٤-٧)</u>: أعتبر نموذج برمجة الهدف الخطي التالي [71]:

أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(2d_1^+ + 3d_2^+), (d_3^-), (d_4^+)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (2)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (3)$$

$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (4)$$

$$G_4 : X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (5)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (6)$$

باستخدام طريقة الحل المتتالية أوجد أفضل حل توافقي.

الحل:

الخطوة (١): ١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الأولي المرتبطة بالأولوية الأولى P_1 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a = g_1(d^-, d^+) = 2d_1^+ + 3d_2^+ \qquad (7)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (8)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (9)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (10)$$

٢- وبحل النموذج (10)-(7) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل:

$$a_1^* = 0,\ \ X_1 = 4,\ \ X_2 = 6,\ \ d_1^- = d_1^+ = 0,\ \ d_2^- = d_2^+ = 0 \quad (11)$$

الخطوة (٢): ١- سوف نعتبر المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية P_2 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) = d_3^- \qquad (12)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (13)$$

$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (14)$$

$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (15)$$

$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \qquad (16)$$

$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (17)$$

ملحوظة: بما أن $g_1(d^-, d^+) = a_1^* \longrightarrow 2d_1^+ + 3d_2^+ = 0$

٢- وبحل النموذج (17)-(12) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$a_2^* = d_3^- = 18 \;,\; X_1 = 4 \;,\; X_2 = 6 \;,\; d_1^- = d_1^+ = 0$$
$$d_2^- = d_2^+ = 0 \;,\; d_3^- = 18 \;,\; d_3^+ = 0 \qquad (18)$$

الخطوة (٣): ١- سوف نعتبر المشكلة الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة P_3 على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) = d_4^+ \qquad (19)$$
$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \qquad (20)$$
$$G_2 : X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \qquad (21)$$
$$G_3 : 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \qquad (22)$$
$$G_4 : X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \qquad (23)$$
$$2d_1^+ + 3d_2^+ = 0 \qquad (24)$$
$$d_3^- = 18 \qquad (25)$$
$$X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (26)$$

ملحوظة: بما أن $g_2(d^-, d^+) = a_2^* \longrightarrow d_3^- = 18$

٢- وبحل النموذج (26)-(19) باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن الحل الأمثل:

$$a_3^* = d_4^+ = 0 \;,\; X_1 = 4 \;,\; X_2 = 6 \;,\; d_1^- = d_1^+ = 0$$
$$d_2^- = d_2^+ = 0 \;,\; d_3^- = 18 \;,\; d_3^+ = 0 \;,\; d_4^- = d_4^+ = 0 \qquad (27)$$

ومن (27),(18),(11) نجد أن أفضل حل توافقي لنموذج برمجة الهدف (6)-(1) على النحو التالي:

$$a^* = \{0,18,0\} \quad , \quad X_1^* = 4 \quad , \quad X_2^* = 6 \quad , \quad d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0$$

$$d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad , \quad d_3^{-*} = 18 \quad , \quad d_3^{+*} = 0 \quad , \quad d_4^{-*} = d_4^{+*} = 0$$

<u>مثال (١٤-٨)</u>: اعتبر نموذج برمجة الهدف التالي:

أوجد X_1, X_2, X_3 بحيث:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^+), (d_3^-)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (2)$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \qquad (3)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \qquad (5)$$

الحل:

<u>الخطوة (١)</u>: ١- تكون المشكلة الجزئية المرتبطة بالأولوية الأولى على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = d_1^- \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \qquad X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad (8)$$

٢- وبحل النموذج (8)-(6) باستخدام طريقة السمبلكس نجد:

$$X_1 = 50, \quad X_2 = 0, \quad a_1^* = 0 \qquad (9)$$

<u>الخطوة (٢)</u>: ١- تكون المشكلة الجزئية الثانية المرتبطة بالأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_2 = d_2^+ \tag{10}$$
$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \tag{11}$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \tag{12}$$
$$d_1^- = 0 \tag{13}$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \tag{14}$$

٢- وبحل النموذج (14)-(10) نجد أن الحل

$$X_1 = 50, \quad X_2 = 0, \quad a_1^* = 0 \tag{15}$$

<u>الخطوة (٣):</u> ١- تكون المشكلة الجزئية الثالثة المرتبطة بالأولوية الثالثة على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_3 = d_3^- \tag{16}$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 100 \tag{17}$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 50 \tag{18}$$
$$4X_1 + 3X_2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 120 \tag{19}$$
$$d_1^- = 0 \quad , \quad d_2^+ = 0 \tag{20}$$
$$X_1, X_2, X_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \tag{21}$$

٢- وبحل النموذج (21)-(16) نحصل على الحل على النحو:

$$a^* = \{0,0,0\} \quad , \quad X_1^* = 23.33 \quad , \quad X_2^* = 0 \quad , \quad X_3^* = 26.67$$
$$d_1^{-*} = d_1^{+*} = 0 \quad , \quad d_2^{-*} = d_2^{+*} = 0 \quad , \quad d_3^{-*} = 0 \quad , \quad d_3^{+*} = 40$$

(١٤-٥) تمرينات Exercises

(١٤-١) أعتبر نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \text{a) Max. } & Z = 4X_1 + 3X_2 \\ \text{S.T. } & X_1 + X_2 \le 10 \\ & 3X_1 + 4X_2 \le 12 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Max. } & Z = 2X_1 + X_2 \\ \text{S.T. } & -X_1 + X_2 \le 10 \\ & 3X_1 + 6X_2 \ge 9 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المطلوب: ١- حل النماذج السابقة بيانياً باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

٢- حول كل نموذج من النماذج السابقة إلى نموذج برمجة هدف خطية مكافئ – ثم حل النموذج بيانياً.

٣- قارن بين الحل الأمثل في (١) وأفضل حل توافقي في (٢).

(١٤-٢) أعتبر نماذج برمجة الهدف التالية

$$\begin{aligned} \text{a) Lexi. Min. } a &= \{(d_1^+), (d_2^-), (d_3^-)\} \\ \text{S.T. } \quad & G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ & G_2 : 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 26 \\ & G_3 : -X_1 + 2X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ & X, d^-, d^+ \ge 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Lexi. Min. } a &= \{(d_1^+ + d_1^-), (d_2^-)\} \\ \text{S.T. } \quad & G_1 : X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ & G_2 : 3X_1 + 4X_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ & G_3 : 8X_1 + 10X_2 + d_3^- - d_3^+ = 300 \\ & X, d^-, d^+ \ge 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) Lexi. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^-), (d_4^+), (d_5^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & G_1: 4X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ & G_2: 4X_1 + 2X_2 + d_2^- - d_2^+ = 48 \\ & G_3: 80X_1 + 100X_2 + d_3^- - d_3^+ = 800 \\ & G_4: X_1 + d_4^- - d_4^+ = 6 \\ & G_5: X_1 + X_2 + d_5^- - d_5^+ = 7 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d) Lexi. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & G_1: X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ & G_2: 8X_1 + 10X_2 + d_2^- - d_2^+ = 300 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \ , \ (d_i^-)(d_i^+) = 0 \end{aligned}$$

المطلوب: ١- حل النماذج أعلاه بيانياً.

٢- حل النماذج أعلاه باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة.

٣- حل النماذج أعلاه باستخدام طريقة الحلول المتتابعة.

(١٤-٣) أعتبر مشاكل برمجة تعدد الأهداف التالية:

$$\begin{aligned} \text{1) Min. } & Z_1 = 5X_1 - X_2 \\ \text{Min. } & Z_2 = X_1 + 4X_2 \\ \text{S.T.} \quad & -5X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & X_1 + X_2 \geq 3 \\ & X_1 + 2X_2 \geq 4 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) Max. } & Z_1 = 6X_1 + 4X_2 \\ \text{Max. } & Z_2 = X_2 \\ \text{S.T.} \quad & 3X_1 + 2X_2 \leq 12 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & X_1 \leq 3 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3) Min. $Z_1 = 3X_1 + 5X_2 - X_3$

Max. $Z_2 = 11X_2 + 23X_3$

S.T. $8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \le 40$

$X_2 - X_3 \le 0$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

أفترض أن المستويات المرجوة $Z_1 = 20 \ , \ Z_2 = 100$

4) Max. $Z_1 = 17X_1 - 27X_2$

Min. $Z_2 = 90X_2 + 97X_3$

S.T. $X_1 + X_2 + X_3 = 100$

$40X_1 + 40X_2 - 20X_3 \ge 8$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

أفترض أن المستويات المرجوة $Z_1 = 500 \ , \ Z_2 = 5000$

5) Min. $Z_1 = 12X_1 + 34X_2 + 7X_3$

Max. $Z_2 = X_2 - X_3$

Max. $Z_3 = 10X_1 + 7X_3$

S.T. $5X_1 + 5X_2 + 15X_3 \le 90$

$X_2 \le 19$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

أفترض أن المستويات المرجوة $Z_1 = 600 \ , \ Z_2 = 20 \ , \ Z_3 = 180$

المطلوب: ١- حل النماذج أعلاه بأستخدام طريقة الأوزان الترجيحية.

٢- حول النماذج أعلاه إلى نماذج برمجة هدف خطية.

٣- حل النماذج المحولة بأستخدام طريقة السمبلكس المعدلة.

٤- حل النماذج المحولة بأستخدام طريقة الحلول المتتابعة.

٥- قارن بين الحلول في (١) بـ الحلول في (٣)، (٤).

(١٤-٤) أعتبر نماذج برمجة الهدف التالية من (١) -(٤) أوجد أفضل حل توافقي جبرياً ووضح ذلك بيانياً:

(١)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (2d_2^+ + d_3^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 - 10X_2 + d_1^- - d_1^+ = 70 \\ & 3X_1 + 5X_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ & 8X_1 + 6X_2 + d_3^- - d_3^+ = 120 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٢)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+), (d_2^-), (3d_1^- + d_3^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & -X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = -30 \\ & 5X_1 + 6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 80 \\ & X_2 + d_3^- - d_3^+ = 20 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٣)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_4^-), (d_1^- + 1.5d_2^-), (d_3^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + d_1^- - d_1^+ = 30 \\ & X_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \\ & 8X_1 + 12X_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \\ & X_1 + 2X_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(٤)

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_3^-), (d_4^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ & 2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 500 \\ & X_1 + d_3^- - d_3^+ = 300 \\ & 0.4X_1 + 0.3X_2 + d_4^- - d_4^+ = 240 \\ & X, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \end{aligned}$$

أعتبر مشاكل البرمجة الخطية التالية من (٥)-(٧):

أ- أوجد الحل الأمثل باستخدام البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس.

ب- أوجد نموذج برمجة الهدف الخطي المناظر في (٥) - ثم أوجد أفضل حل توافقي باستخدام طريقة الحل المتتالي.

ج- قارن بين حل كل مشكلة في (أ)،(ب).

(٥) أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\begin{aligned} & \text{Min.} Z = 2X_1 + 5X_2 \\ \text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 \geq 50 \\ & 3X_1 + 8X_2 \leq 240 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(٦)

$$\begin{aligned} & \text{Max.} Z = 5X_1 + X_2 + 3X_3 \\ \text{S.T.} \quad & 5X_1 - X_2 + X_3 \leq 100 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 84 \\ & X_1 + 5X_3 \leq 45 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(٧)

$$\begin{aligned}
\text{Max.}Z &= 7X_1 + 4X_2 + 12X_3 + X_4 \\
\text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 200 \\
& 2X_1 + X_2 - X_3 \leq 350 \\
& X_1 + 8X_4 \leq 200 \\
& X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}$$

الباب الخامس عشر

تحليل الحساسية في برمجة الهدف الخطية

Sensitivity Analysis in Linear Goal Programming

(١٥-١) أهمية تحليل الحساسية The Importance of Sensitivity Analysis

(١٥-٢) التغيرات في المعاملات الترجيحيه $(U_{i,k}\ ,W_{k,s})$ A Change in Weighting Factors

(١٥-٣) التغيرات في المستويات المرجوة للأهداف (b_i) A Change in Aspiration Levels of Goals

(١٥-٤) برمجة الهدف الخطية المعلمية Parametric Linear Goal Programming

(١٥-٥) تمرينات Exercises

(١٥-١) أهمية تحليل الحساسية The Importance of Sensitivity Analysis

في معظم المشاكل الفعلية تكون بيئة صناعة القرار بيئة متغيرة وليست بيئة ثابته وهذا يعنى أن معلمات parameters النموذج بالنسبة للمشاكل الفعلية لا تكون قيم ثابته ولكن يطرأ عليها تغيرات. وفي الأبواب السابقة تناولنا نماذج برمجة الهدف الخطية اليقينية deterministic LGP models أي النماذج التي تكون فيها المعلمات قيم ثابته ولكن ممكن أثناء حل النموذج أو بعد الحل حدوث تغيرات في بعض المعلمات parameters وفي هذه الحالة لأخذ هذه التغيرات في الأعتبار يمكن:

- أعادة صياغة reformulating النموذج وأعادة الحل resolving من نقطة البداية. وهذا يتطلب وقت وجهد.
- أو أستخدام أسلوب تحليل الحساسية sensitivity analysis لدراسة تأثير هذه التغيرات على الحل النهائي. وأستخدام هذا الأسلوب يمكننا البدء من الحل النهائي قبل أحداث التغيرات وبالتالي فأستخدام هذا الأسلوب قد يؤدي إلى توفير الوقت والجهد بالأضافة إلى تحديد مدى حساسية الحل لهذه التغيرات.

وفي هذا الباب سوف نتناول تحليل الحساسية في حالة حدوث تغييرات في:

- معاملات المتغيرات الأنحرافية في دوال الأنجاز $u_{i,k}, w_{k,s}$ في متجه الإنجاز (a).
- المستويات المرجوة b_i ، $i = 1,2,...,m$ (أي الطرف الأيمن للأهداف).
- إضافة هدف جديد.
- برمجة الهدف الخطية المعلمية.

(١٥-٢) التغيرات في المعاملات الترجيحية $(U_{i,k}\,,W_{k,s})$
A Change in Weighting Factors

وكما ذكرنا سابقاً أننا ندرس التغيرات الطارئة على الحل النهائي للمشكلة، وفي هذا الفصل سوف نتناول التغيرات التي تحدث على معاملات المتغيرات الأنحرافية في دوال الإنجاز $g_t(d^-,d^+)$ الموجوده في الحل basic variables والمتمثلة في $u_{i,k}$ كذلك المتغيرات التي تحدث لمعاملات المتغيرات الأنحرافية غير الموجودة في الحل nonbasic variables والمتمثلة في $w_{k,s}$، والتغيـرات في $u_{i,k}$، $w_{k,s}$ تـؤثـر علـى عناصر المصفوفة القياسية $I_{k,s}$ أو a_k أو كلاهما. كما سوف نوضح ذلك فيما يلي:

أولاً: التغيرات في $w_{k,s}$: إذا حدث تغير في المعامل $w_{k,s}$ (أي المعامل الترجيحي للمتغير غير الأساسي) وتم التغير من $w_{k,s}$ إلى $\hat{w}_{k,s}$، فأن هذا التغير سوف يؤدي إلى تغير $I_{k,s}$ لتصبح $\hat{I}_{k,s}$ على النحو التالي:

$$\hat{I}_{k,s}=\sum_{i-1}^{m}(u_{i,k}\cdot e_{i,s})-\hat{w}_{k,s} \qquad (15.1)$$

فإذا كانت $I_{k,s}$ في الحل النهائي قيمة أقل من أو تساوي صفر أي $I_{k,s}\le 0$ وبعد حدوث تغير أصبحت تساوي $\hat{I}_{k,s}$ فإذا كان:

أ- $0\ge \hat{I}_{k,s}$ ، فهذا يعني أن التغير لم يؤثر على الحل النهائي ويكون الحل الحالي ما زال هو أفضل حل توافقي.

ب- أما إذا كانت $0<\hat{I}_{k,s}$ ، بحيث أن العنصر الذي يعلوها مباشرة في العمود (أي في الأولوية الأعلى) قيمة غير سالبة فهذا يعنى أن التغير سوف يؤدي إلى تغير الحل النهائي ويتم استكمال الحل. وسوف نوضح في المثال التالي ذلك.

ثانياً: التغيرات في $u_{i,k}$: إذا حدث تغير في $u_{i,k}$ (أي المعامل الترجيحي للمتغيرات الأساسي) حيث تم التغير من $u_{i,k}$ إلى $\hat{u}_{i,k}$ فأن هذا التغير سوف يؤدي إلى تغير $I_{k,s}$ إلى $\hat{I}_{k,s}$ كذلك تغير a_k إلى $\hat{a}_k$ بحيث:

$$\hat{I}_{k,s} = \sum_{i-1}^{m} (\hat{u}_{i,k} \cdot e_{i,s}) - w_{k,s} \qquad (15.2)$$

$$\hat{a}_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot \hat{u}_{i,k}) \qquad (15.3)$$

ويمكن أن يؤدي هذا التغير إلى:

أ- تتغير a_k إلى $\hat{a}_k$ ، بحيث تكون $0 \geq \hat{I}_{k,s}$ فيكون الحل الحالي هو الحل النهائي مع استبدال a_k بـ $\hat{a}_k$.

ب- تتغير a_k إلى $\hat{a}_k$ ، بحيث تكون $0 < \hat{I}_{k,s}$ وأن يكون العنصر الذي يعلوها غير سالب، وفي هذه الحالة نستمر في الحل.

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (١٥-١) أوجد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{lexic. } a = \{(4d_1^+ + 6d_2^+), (d_1^- + 5d_3^- + 2d_4^+)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\
& X_1 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\
& 5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\
& X_1 + X_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \\
& X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d_i^-) \cdot (d_i^+) = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

المطلوب: ١- أوجد حل المشكلة بأستخدام طريقة السمبلكس المعدلة.

٢- إذا تم تغير معامل d_2^+ في P_1 من (6) إلى (1) ، حيث يمثل d_2^+ متغير غير أساسي في الحل النهائي.

٣- إذا تم تغير معامل d_3^- في P_2 من (5) إلى (2) ، حيث يمثل d_3^- متغير أساسي في الحل النهائي.

الحل: نكون الجدول المبدئي لطريقة السمبلكس المعدلة على النحو التالي:

جدول (١٥-١): الجدول المبدئي

		P_2						2		
المتغير الداخل		P_1			4	6				
P_2	P_1	V	X_1	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
1		d_1^-	1	1	-1				10	10
		d_2^-	1			-1			4	4
5		d_3^-	5	3			-1		56	11.5
		d_4^-	1	1				-1	12	12
المتغير الخارج		P_1			-4	-6			0	
		P_2	26	26	-1		-5	-2	180	

جدول (١٥-٢)

المتغير الداخل

P2	P1	V	d_2^-	X_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b	
		P_2						2		
		P_1			4	6				
1		d_1^-	-1	1	-1	1			6	6
		X_1	1			-1			4	
5		d_3^-	-5	3		5	-1		36	12
		d_4^-	-1	1		1		-1	8	8
		P_1			-4	-6			0	
		P_2	-26	16	-1	26	-5	-2	186	

المتغير الخارج

جدول (١٥-٣)

P2	P1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
		P_2		1				2	
		P_1			4	6			
		X_2	-1	1	-1	1			6
		X_1	1			-1			4
5		d_3^-	-2	-3	3	2	-1		18
		d_4^-		-1	1			-1	2
		P_1			-4	-6			0
		P_2	-10	-16	15	10	-5	-2	90

ومن الجدول السابق يعتبر أفضل حل توافقي على النحو التالي:

$$a_1^* = 0\ ,\ a_2^* = 90\ ,\ X_1^* = 4\ ,\ X_2^* = 6\ ,\ d_3^- = 18\ ,\ d_4^- = 2 \qquad (15.4)$$

٢- إذا حدث تغير المعامل الترجيحي لـ d_2^+ في دالة الأنجاز بالأولوية الأولى من (6) إلى (1) حيث d_2^+ متغير غير أساسي في الحل النهائي بجدول (١٥-٣)، حيث تغيرت $w_{1,4}$ من $w_{1,4} = 6$ إلى $\hat{w}_{1,4} = 1$ ، وبحساب $\hat{I}_{1,4}$ المناظرة نجد أن:

$$\hat{I}_{1,4} = \sum_{i-1}^{m} (u_{i,k} \cdot e_{i,s}) - \hat{w}_{k,s} = 0 - 1 = -1$$

أي $\hat{I}_{1,4}$ قيمة سالبة وبالتالي فأن تغير المعامل الترجيحى لـ d_2^+ من (6) إلى (1) لم يؤثر على الحل النهائي في (15.4).

جدول (١٥-٤): يوضح تأثير تغير $u_{3,2} = 5$ إلى $\hat{u}_{3,2} = 2$

		P_2		1				2	
		P_1			4	6			
P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
		X_2	-1	1	-1	1			6
		X_1	1			-1			4
2		d_3^-	-2	-3	3	2	-1		18
		d_4^-		-1	1			-1	2
		P_1			-4	-6			0
		P_2	-4	-7	6	4	-2	-4	36

٣- إذا تم تغير معامل d_3^- في P_2 من (5) إلى (2) ، حيث d_3^- يمثل متغير أساسي في الحل النهائي (أنظر جدول (١٥-٣)) أي تم تغير $u_{3,2} = 5$ إلى $\hat{u}_{3,2} = 2$ وبحساب كل من $\hat{I}_{2,5}$ ، $\hat{a}_2$ كما هو موضح في جدول (١٥-٤).

ومن الجدول يتضح أن التغير لم يؤثر على المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل أو قيمها ولكنه أثر فقط على قيمة دالة الإنجاز a_2 بحيث تغير $a_2 = 90$ إلى $\hat{a}_2 = 36$.

مما سبق يتضح أن:

١- التغير في بعض معاملات المتغيرات الإنحرافية في دوال الإنجاز لم يؤثر على الحل.

٢- التغير في بعض معاملات المتغيرات الإنحرافية في دوال الإنجاز قد لا يؤثر في الحل بالنسبة للمتغيرات الأساسية ولكن يؤثر في قيمة دوال الإنجاز.

(١٥-٣) التغيرات في المستويات المرجوة للأهداف

A Change in Aspiration Levels of Goals (b_i)

ولدراسة تأثير التغير في أحد العناصر b_i ، $i = 1,2,....,m$ على أفضل حل توافقي في الجدول الأخير، فأنه يجب أن نعرف أولاً مصفوفة التحويل transformation matrix [53, page 76] والتي سوف نشير لها بالرمز T. وفيما يلي سوف نوضح كيفية تكوين المصفوفة T.

إذا أعتبرنا الجدول متعدد المحاور (الجوانب) في الحل النهائي، فأن المصفوفة T تعرف على النحو التالي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} d_1^- & d_2^- & .... & d_m^- \end{array} \\ T_{m.m} = & \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & .... & e_{1,m} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & .... & e_{2,m} \\ : & : & .... & : \\ e_{m,1} & e_{m,2} & .... & e_{m,m} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (15.6)$$

حيث تتكون المصفوفة من أعمدة تمثل المتغيرات الأنحرافية السالبة (الموجودة في الحل في الجدول المبدئي) في الجدول النهائي سواء كانت المتغيرات الأنحرافية السالبة d_i^- متغيرات أساسية أو غير أساسية:

أ- إذا كانت متغيرات غير أساسية (غير موجودة في الحل) فأن الأعمدة الممثلة لها تأخذ مباشرةً من الجدول النهائي وتوضع في T.

ب- إذا كانت متغيرات أساسية (أي متغيرات موجودة في الحل) فأن كل عمود من أعمدتها عبارة عن أصفار باستثناء العنصر المناظر في الصف i فيؤخذ القيمة (1).

وسوف نوضح تكوين المصفوفة T من خلال الأمثلة التالية.

ملحوظة (١): المصفوفة T المناظرة للحل المبدئي (في الجدول متعدد المحاور المبدئي) وفقاً لما هو وارد بـ (ب) تعتبر مصفوفة الوحدة.

ملحوظة (٢): المصفوفة T هي معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في الحل النهائي (أنظر أشتقاق طريقة السمبلكس بالباب الثامن الجزء الأول من هذا الكتاب[٤]).

مثال (١٥-٢): أعتبر مثال (١٤-٣) حيث جدول الحل النهائي جدول (١٤-٦) على النحو التالي.

جدول (١٥-٥)

			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			X_2	-1	1	-1	1			6
			X_1				-1			4
	2		d_3^-		-3			-1		22
			d_4^-		-1				-1	2
			P_1			-4	-6			0
			P_2		-6			-2		44
			P_3						-1	0

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1^- & d_2^- & d_3^- & d_4^- \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \end{array}$$

<u>مثال (١٥-٣):</u> أعتبر مثال (١٤-٤) فنجد أن المصفوفة T على النحو التالي:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1^- & d_2^- & d_3^- & d_4^- \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \end{array}$$

والآن إذا حدث تغير في عناصر المتجه b بحيث أصبح b١ بدلاً من b فإن هذا التغير سوف يؤثر على قيم b_i، $i = 1,2,...,m$ في الحل النهائي وبالتالي يؤثر على مستويات الإنجاز a_t ، $t = 1,2,...,k$ فتتغير من a_t إلى $\hat{a}_t$ على النحو التالي:

$$\hat{b} = T \cdot b١ \qquad (15.7)$$

$$\hat{a}_t = \sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i \cdot u_{i,k} \qquad (15.8)$$

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٥-٤)</u> إذا أعتبرنا مثال (١٤-٣) – فإذا تغير المتجه b إلى المتجه b١ بحيث:

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix} \longrightarrow b\backslash = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix}$$

أي تغير العنصر b_1 من $b_1 = 10$ إلى $b_1 = 12$ وبما أن الحل النهائي في جدول (١٤-٦) كان على النحو:

$$X_1^* = 4 \;,\quad X_2^* = 6 \;,\quad d_3^{-*} = 22 \;,\quad d_4^{-*} = 2 \;,\quad a^* = \{0,\ 44,\ 0\}$$

فإذا تم تغير b إلى $b\backslash$ فأن قيم المتغيرات الأساسية في الحل النهائي تصبح $\hat{b}$ حيث:

$$X^* = \hat{b} = T \cdot b\backslash = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2^* \\ X_1^* \\ d_3^{-*} \\ d_4^{-*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويتضح أن تغير b_1 من (10) إلى (12) أدى إلى تغير قيم المتغيرات الأساسية في الحل النهائي من:

$$\begin{bmatrix} X_2^* & X_1^* & d_3^{-*} & d_4^{-*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 22 & 2 \end{bmatrix}$$

إلى:

$$\begin{bmatrix} X_2^* & X_1^* & d_3^{-*} & d_4^{-*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

كذلك تغير متجه الأنجاز من:

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 44 & 0 \end{bmatrix}$$

إلى:

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 32 & 0 \end{bmatrix}$$

ولكن مما هو جدير بالذكر أنه في كثير من الحالات أنه ينتج عن حدوث تغير في الطرف الأيمن من b إلى b\ قد يؤدي ذلك إلى وجود متغيرات أساسية بقيم سالبة، أي أدى التغير إلى حل غير ممكن infeasible solution وفي هذه الحالة يمكن توظيف خوارزم طريقة السمبلكس الثنائية ذو المحاور المتعددة multi-dimensional dual simplex algorithm الذي باستخدامه يمكن الحصول على حلول ممكنة (أي غير سالبة). وفيما يلي سوف نقدم هذا الخوارزم.

<u>خوارزم (١٥-١)</u>

ويسمى هذا الخوارزم للأختصار بخوارزم السمبلكس الثنائي dual simplex algorithm.

<u>الخطوة (١):</u> إذا أدى التغير في b إلى b\ إلى الحصول على عنصر أو أكثر في متجه الحل $\hat{b}$ بقيمة سالبة، نختار العنصر $\hat{b}_i$ الأقل قيمة باشارة سالبة ويكون المتغير الأساسي المناظر لهذا العنصر هو المتغير الخارج وليكن في الصف $(i^\backslash)$ ، وبذلك تم تحديد الصف المحورى.

<u>الخطوة (٢):</u> لتحديد المتغير الداخل نتبع ما يلي:

أ- يتم حساب المتجهات العمودية للنسب التالية:

$$R_s = [|I_{1,s} / e_{i\backslash,s}|, |I_{2,s} / e_{i\backslash,s}|, ..., |I_{k,s} / e_{i\backslash,s}|] \qquad (15.9)$$

حيث: s تشير إلى المتغيرات غير الأساسية في الحل بعد تغير b إلى b\ بحيث $e_{i\backslash,s} < 0$ (أي القسمة على العناصر السالبة فقط).

ب-يتم تحديد المتغير الداخل الذي يناظر أفضل متجه $R_{s\backslash}$ وهنا الأفضلية تعنى مدى تحقق الأولويات. فسلوك المتجه $R_{s\backslash}$ هنا يشابه سلوك متجه الأنجازات، فمثلاً إذا كان:

$$R_q = [3 \quad 0 \quad 1] \quad , \quad R_t = [0 \quad 5 \quad 6]$$

ووفقاً للأولويات يكون R_t أفضل من R_q.

ج- ووفقاً لتحديد أفضل R_s وليكن مناظر للمتغير غير الأساسي s فيكون المتغير s هو المتغير الداخل.

<u>الخطوة (٣):</u> بأستخدام الخوارزم لطريقة السمبلكس المعدلة خوارزم (١٤-١) في الباب السابق وتكوين جدول جديد لأستكمال الحل. وسوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٥-٥):</u> إذا أعتبرنا مثال (١٥-٤) بحيث تم تغير b إلى b\ على النحو التالي:

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix} \quad , \quad b\backslash = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix}$$

أي تم تغير العنصر b_1 من $b_1 = 10$ إلى $b_1 = 15$ وبما أن الحل النهائي في جدول (١٤-٦) كان على النحو:

$$X_2^* = 6\ ,\quad X_1^* = 4\ ,\quad d_3^{-*} = 22\ ,\quad d_4^{-*} = 2\ ,\quad a^* = \{0,\ 44,\ 0\}$$

فإذا تم تغير b إلى b\ فأن قيم المتغيرات الأساسية في الحل النهائي تصبح $\hat{b}$ على النحو:

$$X^* = \hat{b} = T \cdot b\backslash = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ويتضح أن تغير b إلى $b^{\backslash}$ أدى إلى أن تغير قيمة d_4^- من $d_4^- = 2$ إلى $d_4^- = -3$ أي قيمة غير متاحة infeasible value والجدول التالي يوضح ذلك.

جدول (١٥-٦)

			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			X_2	-1	1	-1	1			11
			X_1	1			-1			4
	2		d_3^-	-2	-3			-1		7
			d_4^-		-1				-1	-3
			P_1			-4	-6			0
			P_2	-4	-6			-2		14
			P_3						-1	0

ومن الجدول يتضح أن:

$$R_1 = \left\{ \left|\frac{0}{-1}\right| \; , \; \left|\frac{-6}{-1}\right| \; , \; \left|\frac{0}{-1}\right| \right\} = \{ 0 \; , \; 6 \; , \; 0 \} \qquad (1)$$

التي تمثل المتغير d_1^-، كذلك:

$$R_4 = \left\{ \left|\frac{0}{-1}\right| \; , \; \left|\frac{0}{-1}\right| \; , \; \left|\frac{-1}{-1}\right| \right\} = \{ 0 \; , \; 0 \; , \; 1 \} \qquad (2)$$

التي تمثل المتغير d_4^+

وبمقارنة R_1 بـ R_4 نجد أن R_4 تحقق أنجاز أفضل من R_1 وبالتالي فإن المتغير d_4^+ هو المتغير الداخل بدلاً من المتغير d_4^- ونكون الجدول التالي.

جدول (١٥-٧)

P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^-	b
			P_3							
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^-	b
			X_2	-1	1	-1	1			11
			X_1	1			-1			4
	2		d_3^-	-2	-3			-1		7
1			d_4^+		1				1	3
			P_1			-4	-6			0
			P_2	-4	-6			-2		14
			P_3		1				1	3

ومن الجدول يتضح أن أفضل حل توافقي على النحو:

$$X_2^* = 11 \; , \quad X_1^* = 4 \; , \quad d_3^{-*} = 7 \; , \quad d_4^{-*} = 4 \; , \quad a^* = \{ 0, \; 14, \; 3 \}$$

(١٥-٤) برمجة الهدف الخطية المعلمية Parametric Linear Goal Programming

في الفصلين السابقين تناولنا بشيء من التفصيل تأثير حدوث تغيرات منفصلة discrete changes في المعاملات الترجيحية للمتغيرات الأنحرافية في دوال الأنجاز أو التغيرات المنفصلة في المستويات المرجوة للأهداف (الطرف الأيمن للأهداف).

وفي هذا الفصل سوف نتناول دراسة الفترة التي يقع فيها التغير في معلمة أو اكثر من معالم نموذج برمجة الهدف الخطية بحيث تظل نقطة الحل الأمثل optimal solution (وهنا الحل المثل يعنى أفضل حل توافقي [53,55]) دون تغير مع أمكانية حدوث تغير في قيم عناصر متجه الأنجاز. وسوف تقتصر دراستنا في هذا الفصل على تحديد الفترة التي يحدث فيها تغير لكل من:

١- المعامل (أو المعاملات) الترجيحية للمتغيرات الأنحرافية في متجه الأنجاز.

٢- المستوى (أو المستويات) المرجوة تحقيقه بحيث يظل الحل حل أمثل.

أولاً التغير في معامل أو أكثر من المعاملات الترجيحية.

إذا فرضنا أن أحد المعاملات الترجيحية للمتغيرات الأنحرافية في دالة أو اكثر من دوال الأنجاز a_k ممكن أن يحدث له تغير دون أن يؤثر ذلك على نقطة الحل الأمثل مع أمكانية حدوث تغير في قيم عناصر متجه الأنجاز.

ويمكن تحديد الفترة التي يحدث فيها تغير في أحد المعاملات الترجيحية دون أن يؤثر ذلك على نقطة الحل الأمثل وذلك من خلال أحتفاظ عناصر الصف القياسي $I_{k,s}$ بشرط عدم الإيجابية أي بشرط:

$$I_{k,s} \leq 0 \qquad (15.10)$$

لجميع قيم k ، s.

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٥-٦)</u> إذا اعتبرنا مثال (١٤-٣) بحيث يرغب متخذ القرار تحديد الفترة التي يتغير فيها معامل d_3^- في دالة الأنجاز a_2 بحيث لا يتغير الحل الأمثل، أو بعبارة أخرى تتغير a_2 من $a_2 = 2d_3^-$ إلى $a_2 = (2+q)d_3^-$ ويكون المطلوب تحديد الفترة التي تقع فيها q بحيث لا يتغير الحل الأمثل.

إذا تم أستبدال المعامل الترجيحي لـ d_3^- في جدول الحل النهائي (أي أستبدال (2)) بـ $(2+q)$ كما هو موضح في الجدول التالي.

جدول (١٥-٨)

P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
			X_2	-1	1	-1	1			6
			X_1				-1			4
	2+q		d_3^-		-3			-1		22
			d_4^-		-1	1			-1	2
			P_1			-4	-6			0
			P_2		-2(2+q)	-3(2+q)	2(2+q)	-(2+q)		22(2+q)
			P_3						-1	0

وحتى يظل الحل الحالي حل أمثل فأنه لأبد أن:

$$I_{2,1} = -2(2+q) \le 0 \longrightarrow 2+q \ge 0 \longrightarrow q \ge -2 \quad (1)$$

$$I_{2,2} = -3(2+q) \le 0 \longrightarrow 2+q \ge 0 \longrightarrow q \ge -2 \quad (2)$$

$$I_{2,5} = -(2+q) \le 0 \longrightarrow 2+q \ge 0 \longrightarrow q \ge -2 \quad (3)$$

من (3)-(1) يتضح أن: $q \ge -2$

<u>مثال (١٥-٧)</u> أعتبر نموذج LGP التالي [55]:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^- + (1+q)d_4^-), (d_1^-)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\ & X_2 + d_2^- - d_2^+ = 35 \\ & -5X_1 + 3X_2 + d_3^- - d_3^+ = 220 \\ & X_1 - X_2 + d_4^- - d_4^+ = 60 \\ & X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad (d^-)\cdot(d^+) = 0 \end{aligned}$$

وبوضع $q = 0$ فأن الحل الأمثل للمشكلة يكون على النحو:

$$d_1^- = 20 \quad , \quad X_2 = 35 \quad , \quad d_3^- = 115 \quad , \quad d_4^- = 95$$

وبوضع معامل d_4^- في دالة الأنجاز a_2 يساوي $(1+q)$ بدلاً من (1) كما هو موضح بالجدول التالي:

وبفحص عناصر المتجه القياسي $I_{2,5}$ نجد أن:

$$(-4+q) \le 0 \longrightarrow q \le 4 \quad (1)$$

$$(-2+q) \le 0 \longrightarrow q \le 2 \quad (2)$$

$$(-1-q) \le 0 \longrightarrow q \ge -1 \quad (3)$$

من $(3)-(1)$ نجد ان:

$$-1 \le q \le 2$$

جدول (١٥-٩)

P_3	P_2	P_1	V	X_1	d_2^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	b
			P_3							
			P_2							
			P_1			1	1			
			d_1^-	1						20
			X_2		1					35
	1		d_3^-	-5	-3					115
	1+q		d_4^-	1	1					95
			P_1			-1	-1			0
			P_2	(-4+q)	(-2+q)		(2-q)	-1	(-1-q)	210+95q
			P_3	1		-1				20

<u>ثانياً: التغير في المستويات المرجوه تحقيقها</u> (b_i)

إذا حدث تغير في بعض قيم b_i ، $i = 1,2,...,m$ بحيث لا يؤثر ذلك على المتغيرات الأساسية في الحل النهائي ولكن يؤثر في قيمة كل متغير أساسي وبالتالي في قيم دوال الأنجاز. فأن حدود هذا التغير يكون مرتبط بأن تكون قيم المتغيرات الأساسية غير سالبة.

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (١٥-٨)</u> أعتبر مثال (١٤-٣) فأذا حدث تغير في b_2 من $b_2 = 4$ إلى $b_2 = 4 + q$. من جدول (١٤-٦) نجد أن مصفوفة التحويل T على النحو التالي:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أنه تم تغير المتجه b من:

$$b = [10 \quad 4 \quad 60 \quad 12]'$$

إلى:

$$b = [10 \quad 4+q \quad 60 \quad 12]'$$

فأن:

$$X^* = \hat{b} = T \cdot b' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4+q \\ 60 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6-q) \\ (4+q) \\ (22-2q) \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبما أن X^* متغيرات أساسية بالتالي فأن قيمة كل عنصر من عناصر المتجه X^* لأبد أن تكون غير سالبة على النحو:

$$(6-q) \geq 0 \longrightarrow q \leq 6 \qquad (1)$$

$$(4+q) \geq 0 \longrightarrow q \geq -4 \qquad (2)$$

$$(22-2q) \geq 0 \longrightarrow q \leq 11 \qquad (3)$$

من (3)−(1) تكون الفترة التي تقع فيها q على النحو:

$$-4 \le q \le 6$$

وفي هذه الحالة يمكن حساب قيم عناصر متجه الأنجاز على النحو:

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (\hat{b}_i \cdot u_{i,k})$$

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 44 - 4q \quad , \quad a_3 = 0$$

كما هو موضح بالجدول التالي.

جدول (١٥-١٠)

			P_3						1	
			P_2							
			P_1			4	6			
P_3	P_2	P_1	V	d_2^-	d_1^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	B
			X_2	-1	1	-1	1			6-q
			X_1				-1			4+q
	2		d_3^-	-2	-3	3	2	-1		22-2q
			d_4^-		-1	1			-1	2
			P_1			-4	-6			0
			P_2	-4	-6	6	4	-2		44-4q
			P_3						-1	0

(١٥–٥) تمرينات Exercises

(١٥–١) قارن بين تحليل الحساسية في البرمجة الخطية (الباب السادس) بالجزء الأول من هذا الكتاب [٤]) وبين تحليل الحساسية في برمجة الهدف الخطية.

(١٥–٢) أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+), (2d_2^+ + d_3^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 - 10X_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 - d \\ & 3X_1 + 5X_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 - 2d \\ & 8X_1 + 6X_2 + d_3^- - d_3^+ = 100 \\ & X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad (d^-)\cdot(d^+) = 0 \end{aligned}$$

حدد فئة السياسات المثلى optimal policies خلال الفترة التي تقع فيها d.

(١٥–٣) أعتبر نموذج برمجة الهدف الخطية التالي:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^-), (d_2^+), (d_3^- + 5d_4^-), (d_1^+)\}$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 100 \\ & X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 90 \\ & X_1 + d_3^- - d_3^+ = 80 \\ & X_2 + d_4^- - d_4^+ = 55 \\ & X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad (d^-)\cdot(d^+) = 0 \end{aligned}$$

باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة أوجد الحل الأمثل للنموذج (الأمثلية هنا تعني أفضل حل توافقي). وإذا تغير b_1 من $b_1 = 100$ إلى $b_1 = 120$ وضح تأثير هذا التغير على الحل الأمثل.

(١٥-٤) أعتبر النموذج أعلاه – إذا تم تغير متجه الطرف الأيمن من:

$$b = [100 \quad 90 \quad 80 \quad 55]'$$

إلى:

$$\hat{b} = [(100-q) \quad (90+q) \quad 80 \quad 55]'$$

حدد الفترة التي تقع فيها q بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل النهائي دون تغير (ولكن ممكن حدوث تغير في قيم هذه المتغيرات أو قيم a_k).

(١٥-٥) أعتبر النموذج في (١٥-٣) مع أستبدال متجه الأنجاز a بالمتجه $\hat{a}$ التالي:

$$\hat{a} = \{(d_1^-), (d_2^+), (q_1 d_3^- + q_2 d_4^-), (d_1^+)\}$$

حدد الفترة التي تقع فيها كل من q_1 ، q_2 بحيث لا تتغير نقطة الحل الأمثل (أي لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل النهائي – مع إمكانية تغير قيم هذه المتغيرات وقيم a_k أيضاً).

(١٥-٦) أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_2^+), (d_3^+), (d_4^- + d_4^+)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & X_1 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\
& X_2 + d_2^- - d_2^+ = 35 \\
& -5X_1 + 3X_2 - X_3 + d_3^- - d_3^+ = 220 \\
& X_1 - X_2 + d_4^- - d_4^+ = 60 \\
& X, d^-, d^+ \geq 0 \qquad , \quad (d^-)\cdot(d^+) = 0
\end{aligned}$$

١- بأستخدام طريقة السمبلكس المعدلة أوجد الحل الأمثل.

٢- إذا فرضنا أن المتغير X_2 متغير حقيقي. أوجد الحل الأمثل في هذه الحالة.

(١٥-٧) أعتبر النموذج في (١٥-٦) فإذا تم أستبدال متجه الأنجاز a بالمتجه $\hat{a}$ حيث:

$$\hat{a} = \{(q_1 d_1^- + q_2 d_2^+),(q_3 d_3^+),(d_4^- + d_4^+)\}$$

حدد الفترة التي تقع فيها كل من q_1 ، q_2 ، q_3 بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل النهائي دون تغير (ولكن ممكن تغير قيمة كل متغير من هذه المتغيرات وأيضاً a_k).

(١٥-٨) أعتبر النموذج في (١٥-٦) فإذا تم أستبدال المتجه b إلى b\ على النحو التالي:

$$b\backslash = [(20+q) \quad (35-q) \quad (220-q) \quad 60]^{\backslash}$$

حدد الفترة التي تقع فيها q بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل النهائي دون تغير (ولكن ممكن حدوث تغير في قيم هذه المتغيرات أو قيم a_k).

الباب السادس عشر

برمجة الهدف غير الخطية

Nonlinear Goal Programming
(Non-LGP)

(١٦-١) نموذج برمجة الهدف غير الخطي **Non-LGP Model**

(١٦-٢) تحويل الأهداف غير الخطية إلى خطية
Transformation Nonlinear Goals to Linear

(١٦-٣) طريقة التقريب الخطي **Linear Approximation's Method**

(١٦-٤) طريقة الحلول المتتابعة **Sequential Solution's Method**

(١٦-٥) تمرينات **Exercises**

(١٦–١) نموذج برمجة الهدف غير الخطي Non-LGP Model

في الأبواب الثلاثة السابقة ١٣ ، ١٤ ، ١٥ تناولنا بالتفصيل أسلوب برمجة الهدف الخطية من حيث كيفية صياغة نموذج برمجة الهدف الخطية والأساليب المختلفة لحل نموذج برمجة الهدف الخطي. ولكن معظم المشاكل الفعلية تكون العلاقات بين المتغيرات علاقات يمكن صياغتها في شكل دوال غير خطية nonlinear functions ، هذا بالإضافة إلى أن معظم نماذج برمجة الهدف الخطية الاحتمالية .probabilistic linear goal prog يتطلب حلها في كثير من الحالات إلى تحويلها إلى نماذج غير خطية [24].

مما سبق يتضح أهمية دراسة نماذج برمجة الهدف غير الخطية. ويأخذ نموذج برمجة الهدف غير الخطية الصياغة التالية:

أوجد قيم X التي تجعل:

$$\text{Lexic. Min. } a = \{g_1(d^-,d^+),\ldots,g_2(d^-,d^+),..,g_k(d^-,d^+)\} \qquad (16.1)$$

$$\text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (16.2)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d^-)(d^+) = 0 \qquad (16.3)$$

حيث توجد دالة واحدة على الأقل من الدوال $f_i(X)$ ، $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ دالة غير خطية في X، والدوال $g_t(d^-,d^+)$ ، $t = 1,2,\ldots\ldots,k$ دوال خطية في المتغيرات الأنحرافية d^-,d^+. وتمثل X,d^-,d^+ متجهات المتغيرات القرارية X والمتغيرات الأنحرافية السالبة d^- والأنحرافية الموجبة d^+ حيث:

$$X = [X_1, X_2, .., X_n]^\backslash, d^- = [d_1^-, d_2^-, \ldots, d_m^-]^\backslash, d^+ = [d_1^+, d_2^+, .., d_m^+]^\backslash \quad (16.4)$$

وفي هذا الباب سوف نتناول النماذج غير الخطية من حيث أساليب الحل. حيث يوجد أسلوبين للحل [53]:

<u>الأسلوب الأول</u>: ويعتمد على تقريب الدوال غير الخطية $f_i(X)$ إلى دوال خطية باستخدام مفكوك تيلور [٣] ثم حل النموذج الخطي باستخدام أحدى الطرق المقدمة في الباب الرابع عشر ومن أمثلة هذه الطرق طريقة Griffith and Stewart [71].

<u>الأسلوب الثاني</u>: وقدم هذا الأسلوب Dauer and Krueger سنة ١٩٧٧ – ويعتمد هذا الأسلوب على تجزئ نموذج برمجة الهدف غير الخطية إلى عدد k من النماذج الجزئية غير الخطية ولكل منها دالة هدف واحدة(أنظر طريقة الحلول المتتابعة بالفصل (١٤-٤)) على النحو التالي:

إذا اعتبرنا النموذج (61.3)-(16.1) حيث يتكون من k من الأولويات، كذلك P_t تشير إلى الأولوية رقم (t) حيث $t = 1,2,...,k$.

فيصبح النموذج الجزئي الأول على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_1 = g_1(d^-, d^+) \tag{16.5}$$

$$\text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i \in P_1 \tag{16.6}$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d^-)(d^+) = 0 \tag{16.7}$$

وبحل النموذج غير الخطي وحيد الهدف (16.7)-(16.5) والحصول على الحل الأمثل وليكن a^* ننتقل إلى النموذج الجزئي الثاني على النحو:

$$\text{Min. } a_2 = g_2(d^-, d^+) \tag{16.8}$$

$$\text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i \in P_1, P_2 \qquad (16.9)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (16.10)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d^-)(d^+) = 0 \qquad (16.11)$$

وبالمثل النموذج الجزئي الثالث:

$$\text{Min. } a_3 = g_3(d^-, d^+) \qquad (16.12)$$

$$\text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i \in P_1, P_2, P_3 \qquad (16.13)$$

$$g_1(d^-, d^+) = a_1^* \qquad (16.14)$$

$$g_2(d^-, d^+) = a_2^* \qquad (16.15)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d^-)(d^+) = 0 \qquad (16.16)$$

وهكذا بالمثل حتى نصل إلى النموذج الأخير ذو الأولوية k على النحو التالي:

$$\text{Min. } a_k = g_k(d^-, d^+) \qquad (16.17)$$

$$\text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (16.18)$$

$$g_t(d^-, d^+) = a_t^* \quad , \quad t \in P_1, P_2, \ldots, P_{k-1} \qquad (16.19)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad (d^-)(d^+) = 0 \qquad (16.20)$$

حيث يتم حل كل نموذج جزئي باستخدام أحدى طرق حل النموذج غير الخطي وحيد الهدف المناسب مثل طريقة لأجرانج مثلاً والتي سوف نقدمها في الفصل (١٦-٤).

ومما هو جدير بالذكر بأنه بالنسبة لهذا الأسلوب يمكن أستخدام أكثر من طريقة واحدة في حل النماذج الجزئية بحيث تكون الطريقة المستخدمة تتناسب مع خصائص النموذج الجزئي المراد حله وسوف نوضح ذلك في الفصل (١٦-٤).

ويتطلب دراسة هذا الباب الالمام الجيد بطرق حل النماذج غير الخطية وحيدة الهدف وخصائص هذه النماذج بالإضافة إلى خصائص الحل. والرجوع إلى البابين التاسع والعاشر بالجزء الأول من هذا الكتاب [٤].

(١٦-٢) تحويل الأهداف غير الخطية إلى خطية
Transformation Nonlinear Goals to Linear

في هذا الفصل سوف نوضح كيفية تحويل الهدف goal غير الخطي إلى خطي وذلك باستخدام مفكوك تيلور Taylor Series Expansion [٣] على النحو التالي. فإذا فرضنا أن:

$$y = f(X)$$

حيث $f(X)$ دالة في متغير واحد X فإن مفكوك تيلور عند النقطة X^0 على النحو:

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(X^0)}{k!}(X - X^0) \qquad (16.21)$$

ويكون تقريب تيلور الخطي على النحو التالي:

$$f(X) \approx f(X^0) + f^{(1)}(X^0)(X - X^0) \qquad (16.22)$$

حيث تشير $f^k(X^0)$ إلى قيمة مشتقة الدالة $f(X)$ من الترتيب (k) عند النقطة X^0

وعندما تكون X متجه حيث $X = [X_1, X_2, ..., X_n]'$ فأن [102]:

$$f(X) = f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0)H(X - X^0) + ... \qquad (16.23)$$

حيث $\nabla f(X^0)$ تشير إلى متجه المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(X)$ عند النقطة X^0 حيث:

$$\nabla f(X^0) = \left[\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial X_2}, ..., \frac{\partial f(X^0)}{\partial X_n}\right] \qquad (16.24)$$

كذلك تشير H إلى المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني للدالة $f(X)$ عندما تساوى قيم عناصر المتجه X قيم عناصر المتجه X^0 ويكون التقريب الخطي للدالة $f(X)$ في هذه الحالة على النحو التالي:

$$f(X) \approx f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) \qquad (16.25)$$

<u>مثال (١٦–١)</u> باستخدام مفكوك تيلور أوجد التقريب الخطي للدوال التالية:

i) $f(X) = e^{2X+5} \quad , \quad -3 < X < 3$

ii) $f(X) = e^{5X_1+7X_2} \quad , \quad -1 < X_1 < 1 \, , 0 < X_2 < 1$

iii) $f(X) = X_1 X_2 X_3 + 5 \quad , \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0$

الحل: إذا فرضنا أن

i) $X = X^{(0)} = -1.5$

$$f^{(1)}(X) = 2e^{2X+5} \longrightarrow f^{(1)}(X^0 = 1.5) = 2e^{2(-1.5)+5} = 2e^2 = 14.78$$

إذا فرضنا أن

ii) $X = X^{(0)} = [-0.8 \, , 0.5]'$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_1} = 5e^{5X_1+7X_2} \quad , \quad \frac{\partial f(X)}{\partial X_2} = 7e^{5X_1+7X_2}$$

$$\nabla f(X^0) = [3.033 \ , \ 4.246]$$

$$\begin{aligned} f(X) &\approx f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) \\ &= 6.69 + [3.033 \quad 4.246]\begin{bmatrix} (X_1 + 0.8) \\ (X_2 - 0.5) \end{bmatrix} \\ &= 6.69 + 3.033X_1 + 02.4264 + 4.246X_2 - 2.1230 \\ &= 6.993 + 3.033X_1 + 4.246X_2 \quad , -1 < X_1 < 1 \, , 0 < X_2 < 1 \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن

iii) $X^{(0)} = [1 \quad 2 \quad 1]'$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_1} &= X_2X_3 = (2)(1) = 2 \\
\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_2} &= X_1X_3 = (1)(1) = 1 \\
\frac{\partial f(X^0)}{\partial X_3} &= X_1X_2 = (1)(2) = 2
\end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\nabla f(X^0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f(X) &\approx f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) \\
&= 7 + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_1 - 1) \\ (X_2 - 2) \\ (X_3 - 1) \end{bmatrix} \\
&= 7 + 2(X_1 - 1) + (X_2 - 2) + 2(X_3 - 1) \\
&= 7 + 2X_1 - 2 + X_2 - 2 + 2X_3 - 2 \\
&= 1 + 2X_1 + X_2 + 2X_3 \quad , \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}$$

مثال (٢-١٦) باستخدام مفكوك تيلور حول الهدف G التالي غير الخطي إلى هدف خطى مع توضيح ذلك بيانياً.

$$G: \{(X_1 - 4)^2 + X_2^2\} + d_1^- - d_1^+ = 16 \quad , \quad 0 \leq X_1 , X_2 \leq 8 \qquad (1)$$

الحل: من (1) نجد أن الدالة غير الخطية $f(X)$ على النحو:

$$f(X) = \{(X_1 - 4)^2 + X_2^2\} \qquad (2)$$

فإذا أعتبرنا النقطة X^0 حيث $X^{(0)} = \{X_1 = 3 \ , \ X_2 = 3.87\}$ نقطة مبدئية فأنه يمكن تقريب الدالة $f(X)$ إلى دالة خطية باستخدام مفكوك تيلور على النحو التالي:

$$\nabla f(X^0) = [-2 \quad 7.47] \ , \ f(X^0) = 7.76 \longrightarrow$$

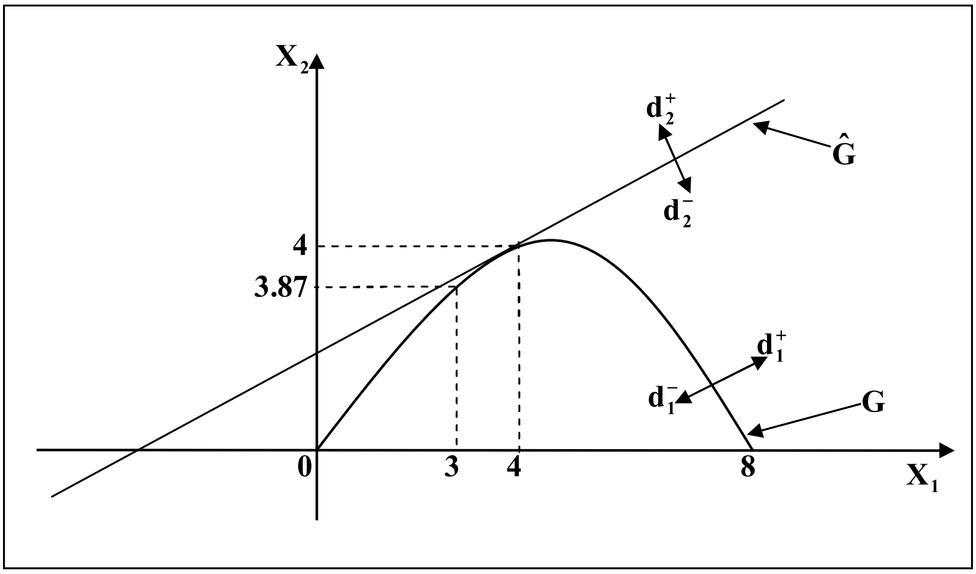
$$\begin{aligned} f(X) &\approx f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) \\ &= 15.98 + [-2 \quad 7.74]\begin{bmatrix} (X_1 - 3) \\ (X_2 - 3.87) \end{bmatrix} \\ &= -7.97 - 2X_1 + 7.74X_2 \qquad (3) \end{aligned}$$

وبالتعويض في (1) بـ (3) نجد أن التقريب الخطي للهدف G وسوف نشير إلى الهدف التقريبي بـ $\hat{G}$ على النحو التالي:

$$\hat{G} : \{-7.97 - 2X_1 + 7.74X_2\} + d_2^- - d_2^+ = 16 \longrightarrow$$

$$\hat{G} : -2X_1 + 7.74X_2 + d^- - d^+ = 23.97 \qquad (4)$$

شكل (١٦-١): يوضح الهدف غير الخطي G ، وتقريبه الخطي $\hat{G}$



وبالتالي باختلاف النقطة المبدئية التي يتم التقريب حولها سوف يختلف الهدف التقريبي $\hat{G}$.

ملاحظة: ١- النقطة $X^{(0)} = \{X_1 = 3 \ , \ X_2 = 3.87\}$ تقع على الخط (4) وبالتالي $d^- = d^+ = 0$.

٢- التقريب $\hat{G}$ في (4) تقريب خطي للدالة $f(X)$ في المنطقة المجاورة للنقطة X^0 the neighborhood of. والشكل السابق يوضح كل من G، $\hat{G}$.

(١٦-٣) طريقة التقريب الخطي Linear Approximation's Method

في هذا الفصل سوف نقدم طريقة التقريب الخطي لدوال الأهداف غير الخطية باستخدام مفكوك تيلور السابقة تقديمها في الفصل السابق.

وتعتمد هذه الطريقة على تحديد نقطة مبدئية $X^{(0)}$ وتقريب الأهداف غير الخطية عندها إلى خطية وحساب قيم عناصر المتجه (a) وليكن $a^{(0)}$ ثم حل النموذج الخطي المحول وليكن الحل $X^{(1)},a^{(1)}$ وتحديد الفرق بين $a^{(1)}$ ، $a^{(0)}$ وليكن $\in^{(1)}$ فإذا كان $a^{(1)}$ أفضل من $a^{(0)}$ لذلك سوف نعتبر النقطة $X^{(1)}$ نقطة حل مبدئية أفضل ويتم تحويل النموذج غير الخطي إلى خطى وتحديد $\in^{(2)}$، وهكذا يتم تكرار الأنتقال من نقطة حل مبدئية إلى أخرى أفضل إلى أن نحصل على أفضل حل توافقي للنموذج ويحدث ذلك فقط في حالة أمكانية الحصول على عدد وليكن S محدد من النقط التقاربية convergent points للحل $X^{(0)},X^{(1)},.....,X^{(S)}$ وتفشل هذه الطريقة في الحل عند عدم أمكانية الحصول على عدد محدد من النقط التقاربية $X^{(S)}$، $S=0,1,2,....$ [105] ويمكن الأستدلال على التقارب من خلال متجه المؤشرات $\in$.

وفيما يلي سوف نقدم الخطوات المتتالية للحل باستخدام هذه الطريقة من خلال الخوارزم التالي.

خوارزم (١٦-١)

خطوة (١): أعتبر نموذج برمجة الهدف غير الخطي (16.3)-(16.1)
- ثم ضع $S=0$.

خطوة (٢): نفترض نقطة حل مبدئية ملائمة متاحة suitable initial point $X^{(S)}$ وحساب عناصر المتجه $a^{(S)}$ عند النقطة $X^{(S)}$.

خطوة (٣): تقريب الأهداف غير الخطية إلى خطية عند النقطة $X^{(S)}$ ثم حل النموذج الخطي والحصول على الحل $(X^{(S+1)}, a^{(S+1)})$ ثم حساب المتجه $\in^{(S+1)}$ حيث يعتبر $\in^{(S+1)}$ متجه لقياس تحسن متجه الأنجاز measure of improvement:

$$\in^{(S+1)} = a^{(S+1)} - a^{(S)} \qquad (16.25)$$

خطوة (٤): أ- إذا كانت $\in^{(S+1)} < 0$ فأننا ننتقل إلى حل آخر أفضل بوضع النقطة المبدئية لتحويل النموذج غير الخطي إلى خطي بوضع $S = S + 1$ والانتقال إلى الخطوة (٣).

ب- في حالة إذا كان $\in^{(S+1)} \geq 0$ فإنه ينتهي الحل.

ملحوظة: يمكن أنتهاء الحل نتيجة للحصول على أفضل حل توافقي عندما $\in^{(S+1)} = 0$ أو ينتهي الحل نتيجة عدم التقارب وفي هذه الحالة تفشل الطريقة في الحل.

وفيما يلي سوف نوضح خطوات الحل من خلال المثال المقدم من Ignizio [53, page163] ليس بهدف توضيح خطوات الخوارزم المقدم فقط ولكن بهدف مقارنة طريقة الحل المقدمة بطريقة الحل باستخدام طريقة Griffith and Stewart المبنية على التحول الخطي للنموذج غير الخطي [71].

<u>مثال (١٦-٣)</u> أعتبر النموذج التالي:

$$\text{lexic.min.}\, a = \{(d_3^+), (2d_1^- + d_2^+)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 X_2 + d_1^- - d_1^+ = 16 \qquad (2)$$

$$G_2 : (X_1 - 3)^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 9 \qquad (3)$$

$$G_3 : X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \qquad (4)$$

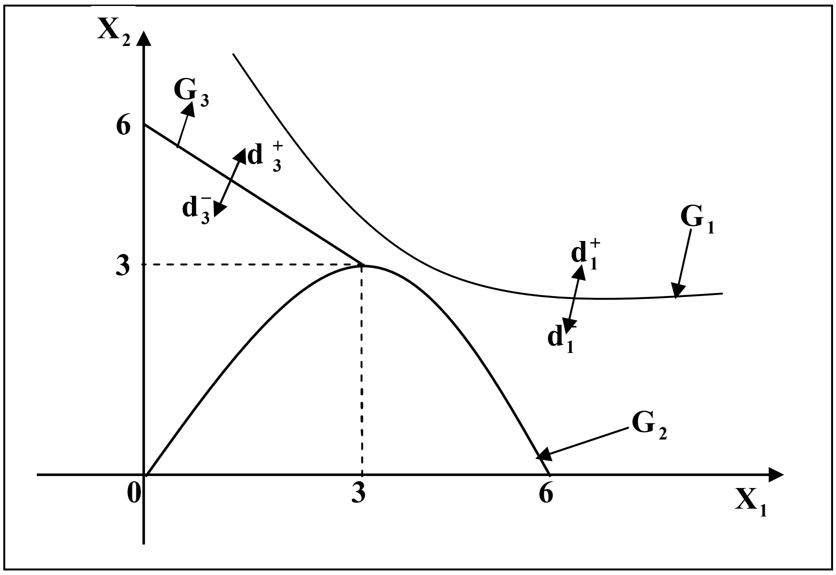
$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \qquad (5)$$

١- وضح بيانياً الأهداف G_1, G_2, G_3 موضحاً المتغيرات الأنحرافية.

٢- أعتبر النقطة $X^{(0)} = [5 \;,\; 5]$ ثم قرب الهدفين G_1, G_2 إلى أهداف خطية ثم حل النموذج باستخدام طريقة التقريب الخطي موضحاً خطوات الخوارزم السابق.

الحل: ١- الشكل التالي يوضح الأهداف $G_1 - G_3$ كذلك المتغيرات الأنحرافية

شكل (١٦-٣): يوضح بيانياً الأهداف كذلك يوضح الحل الأمثل.



خطوة (٢): عند النقطة $X^{(0)} = [5 \;,\; 5]$ أي $S = 0$ يتم تقريب الهدفين G_1, G_2 إلى $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ على النحو التالي:

$$\hat{G}_1 : 5X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 41 \qquad (6)$$

$$\hat{G}_2 : 4X_1 + 10X_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \qquad (7)$$

وبإحلال الأهداف التقريبية $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ محل G_1, G_2 في النموذج (5)-(1) يصبح النموذج المحول الخطي على النحو التالي:

عند النقطة $X^{(0)}$ بالتعويض في (4)-(2) نجد أن $a^{(0)} = [4 \quad 20]$.

خطوة (٣): بأحلال الأهداف الخطية التقريبية $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ بدلاً من G_1, G_2 في النموذج (5)-(1) يصبح النموذج التقريبي الخطي على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{lexic.min.}\, a = \{(d_3^+), (2d_1^- + d_2^+)\} \\ \text{S.T.} \quad 5X_1 + 5X_2 + d_1^- - d_1^+ = 41 \\ \qquad 4X_1 + 10X_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ \qquad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} \quad (M1)$$

وبحل النموذج $(M1)$ نجد أن الحل الأمثل $X^{(1)}$ على النحو التالي:

$$X^{(1)} = [1.7 \quad 4.3] \qquad , \qquad a^{(1)} = [0 \quad 22]$$

خطوة (٤): نحسب $\in$ حيث:

$$\in^{(1)} = a^{(1)} - a^{(0)} = [0 \quad 22][4 \quad 20] = [-4 \quad 2] \qquad (9)$$

من (9) يتضح أن نقطة الحل $X^{(1)}$ أفضل من النقطة $X^{(0)}$ حيث أننا حصلنا على القيمة المثلى للأولوية الأولى $a = 0$. لذلك

خطوة (٥): لذلك ننتقل إلى $S = 1$ بأعتبار النقطة $X^{(1)}$ نقطة حل مبدئية ويتم تحويل الأهداف غير الخطية G_1, G_2 عند هذه النقطة فنجد أن:

$$\hat{G}_1 : 4.3X_1 + 1.7X_2 + d_1^- - d_1^+ = 23.31 \qquad (10)$$

$$\hat{G}_2 : -2.6X_1 + 8.6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 21.38 \qquad (11)$$

الخطوة (٦): وعند النقطة $X^{(1)}$ يصبح النموذج المحول على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{lexic.min}.\, a = \{(d_3^+),(2d_1^- + d_2^+)\} \\ &\text{S.T.} \quad 4.3X_1 + 1.7X_2 + d_1^- - d_1^+ = 23.31 \\ &\qquad -2.6X_1 + 8.6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 21.38 \\ &\qquad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ &\qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}\right\} \quad (M2)$$

وبحل النموذج ($M2$) نحصل على الحل الأمثل $X^{(2)}$ على النحو التالي:

$$X^{(2)} = [2.7 \quad 3.3] \qquad , \quad a^{(2)} = [0 \quad 12.18]$$

وبحساب $\in$ نجد أن:

$$\in^{(2)} = a^{(2)} - a^{(1)} = [0 \quad 12.18][0 \quad 22] = [0 \quad -9.12] \qquad (12)$$

من (12) يتضح أن الحل $X^{(2)}$ أفضل من $X^{(1)}$ حيث تم تحسين قيم عناصر متجه الأنجاز (a). لذلك نعتبر أن النقطة $X^{(2)}$ نقطة حل مبدئية أفضل، وبأجراء تقريب الأهداف غير الخطية في النموذج (5)-(1) إلى خطية عند النقطة $X^{(2)}$ وبنفس الخطوات السابقة نكون النموذج المحول على النحو التالي:

الخطوة (٧):

$$\left.\begin{aligned} &\text{lexic.min}.\, a = \{(d_3^+),(2d_1^- + d_2^+)\} \\ &\text{S.T.} \quad 3.3X_1 + 2.7X_2 + d_1^- - d_1^+ = 24.91 \\ &\qquad -0.6X_1 + 6.6X_2 + d_2^- - d_2^+ = 18.21 \\ &\qquad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ &\qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}\right\} \quad (M3)$$

نجد أن الحل الأمثل على النحو:

$$X^{(3)} = [6 \quad 0] \qquad , \qquad a^{(3)} = [0 \quad 10.22]$$

كذلك بحساب مؤشر التحسين $\in$ حيث:

$$\in = a^{(3)} - a^{(2)} = [0 \quad 10.22][0 \quad 12.18] = [0 \quad -1.96] \qquad (13)$$

من (13) يتضح أن الحل $X^{(3)}$ أفضل من $X^{(2)}$ لذلك نستمر في الحل.

الخطوة (٨): يتم تقريب الأهداف (3),(2) في النموذج (5)-(1) عند النقطة $X^{(3)}$ – فيصبح النموذج المحول على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{lexic.min.}\, a = \{(d_3^+), (2d_1^- + d_2^+)\} \\ \text{S.T.} \quad 6X_2 + d_1^- - d_1^+ = 16 \\ \qquad 6X_1 + d_2^- - d_2^+ = 36 \\ \qquad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} \qquad (M4)$$

وبحل النموذج $(M4)$ نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X^{(4)} = [3.3 \quad 2.7] \qquad , \qquad a^{(4)} = [0 \quad 0] \qquad (14)$$

كذلك نجد أن:

$$\in = a^{(4)} - a^{(3)} = [0 \quad 0][0 \quad 10.22] = [0 \quad -10.22] \qquad (15)$$

من (15) يتضح أن نقطة الحل $X^{(4)}$ أفضل من نقطة الحل $X^{(3)}$.

من (14) يتضح أن $a^{(4)} = [0 \quad 0]$ أى أن نقطة الحل $X^{(4)}$ تعتبر أفضل حل توافقي للنموذج $(M4)$. ونظراً لأننا وصلنا إلى أفضل حل توافقي للنموذج $(M4)$ فأن الحل $X^{(4)}$ يعتبر أفضل حل تقريبي للنموذج غير الخطي (5)-(1) إذا بدأنا بالنقطة المبدئية $X^{(0)} = [5 \ , \ 5]$.

ملاحظات: ١- الحل التقريبي باستخدام النقطة المبدئية $[5 \;,\; 5] = X^{(0)}$ هو:

$$X^{(4)} = X_1 = 3.3 \approx 3 \qquad , \qquad X_2 = 2.7 \approx 3$$

علماً بأن أفضل حل توافقي غير تقريبي للنموذج (5)-(1) هو:

$$X_1^* = 3 \qquad , \qquad X_2^* = 3 \qquad (16)$$

كما هو موضح في الشكل السابق وفي هذه الحالة تكون قيم عناصر متجه الأنجاز (a) في (1) على النحو التالي:

$$a^* = [0 \quad 14] \qquad (17)$$

٢- في الفصل التالي (١٦-٤) سوف نوضح أنه يمكن الوصول إلى أفضل حل توافقي للنموذج غير الخطي (5)-(1) بدون التقريب.

٣- بمقارنة الحل التقريبي في $X^{(4)}$ للنموذج (15)-(1) بالخوارزم المقدم حيث تم الحصول على هذا الحل بعد أجراء أربع عمليات تكرارية iterations في التحويل إلى نماذج خطية بالحل باستخدام طريقة Griffith and Stewart method التي استخدامها Ignizio – نجد أنه باستخدام الخوارزم المقدم تم الوصول إلى الحل التقاربي convergent solution أسرع أو بعبارة أخرى تم الحصول على الحل $X^{(4)}$ في عدد تكرارات iterations أقل.

٤- جميع الحلول التقريبية تعتمد على نقطة البداية $X^{(0)}$ وفي كثير من الحالات عند عدم أختيار نقطة $X^{(0)}$ ملائمة قد لا يحدث تقارب ويفشل الخوارزم في الحصول على حل تقريبي مناسب.

<u>مثال (١٦-٤)</u> باستخدام طريقة التقريب الخطي حل النموذج التالي باعتبار أن النقطة $X^{(0)} = (X_1 = 1 \;,\; X_2 = 1)$

$$\text{lexic.min.}\,a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_2^+)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : X_1 + 2X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2 \qquad (2)$$

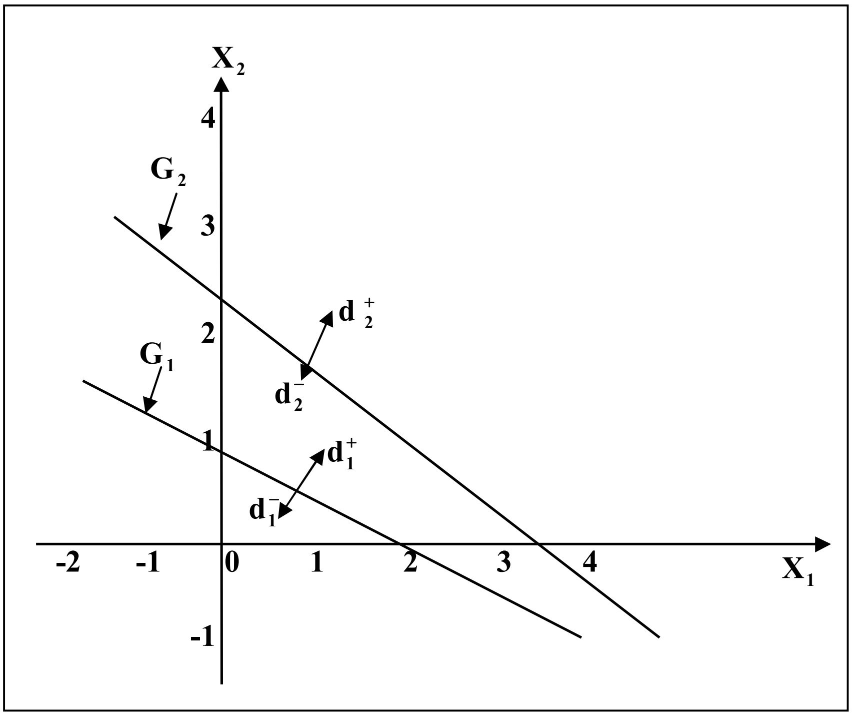
$$G_2 : e^{(2X_1+3X_2)} + d_2^- - d_2^+ = 1000 \qquad (3)$$

$$X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \qquad (4)$$

الحل: ١- بما أن $X_1^{(0)} = 1 \quad , \quad X_2^{(0)} = 1$ فأن قيم عناصر متجه الأنجاز:

$$a^{(0)} = [1 \quad 851.59]$$

شكل (١٦-٣): يوضح الأهداف والمتغيرات الأنحرافية



وبتقريب G_2 حول النقطة $X^{(0)}$ حيث $X^{(0)} = [1 \quad 1]$ فنجد أن:

$$\hat{G}_2 : 296.82X_1 + 445.23X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1593.64$$

ويصبح النموذج الخطي التقريبي على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{lexic.min}.\, a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_2^+)\} & \\ \text{S.T.} & X_1 + 2X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2 \\ & 296.82X_1 + 445.23X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1593.64 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} (M1)$$

وبحل النموذج $(M1)$ نحصل على الحل:

$$X^{(1)} = [2 \quad 0] \qquad , a^{(1)} = [0 \quad 0]$$

وبحساب مؤشر التحسين $\in$ نجد أن:

$$\in^{(1)} = a^{(1)} - a^{(0)} = [0 \quad 0][1 \quad 851.59] = [-1 \quad -851.59] \quad (5)$$

من (5) يتضح أننا أنتقلنا إلى حل أفضل لذلك سوف نعتبر $X^{(1)}$ نقطة حل مبدئية ونقوم بتقريب G_2 عند النقطة $X^{(1)}$ فيصبح على النحو التالي:

$$\hat{G}_2 : 109.2X_1 + 163.77X_2 + d_2^- - d_2^+ = 11.64$$

ويصبح النموذج المحول الثاني على النحو:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{lexic.min}.\, a = \{(d_1^- + d_1^+), (d_2^+)\} & \\ \text{S.T.} & X_1 + 2X_2 + d_1^- - d_1^+ = 2 \\ & 109.2X_1 + 163.77X_2 + d_2^- - d_2^+ = 11.64 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} (M2)$$

وبحل النموذج $(M2)$ نجد أن أفضل حل توافقي له على النحو التالي:

$$X^{(2)} = [0 \quad 1] \qquad , \; a^{(2)} = [0 \quad 152.13]$$

وبالتالي $\in^{(2)}$ على النحو:

$$\in^{(2)} = a^{(2)} - a^{(1)} = [0 \quad 152.13][0] = [0 \quad 152.13] \qquad (16)$$

من (16) يتضح أن $\in^{(2)} > 0$ وبالتالي ينتهي الحل ويكون أفضل حل توافقي للنموذج (1)-(4) هو $X^{(2)}$ حيث:

$$X^* = [2 \quad 0] \qquad , \qquad a^* = [0 \quad 0]$$

(١٦-٤) طريقة الحلول المتتابعة Sequential Solution's Method

كما ذكرنا في الباب الرابع عشر أن الأسلوب التكراري iterative approach الذي قدمه كل من Dauer and Krueger سنة ١٩٧٧ لحل نماذج برمجة الهدف سواء خطية أو غير خطية الذي يعتمد على تجزئ النموذج إلى عدد من النماذج الجزئية وحيدة الهدف عددها يساوي عدد الأولويات حيث يتم حل كل نموذج من النماذج الجزئية بالطريقة التي تتلائم معه وفقاً لخصائصه. ففي الفصل (١٦-١) تم حل النماذج الخطية الجزئية باستخدام طريقة السمبلكس.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بحل نماذج برمجة الهدف غير الخطية باستخدام أسلوب Dauer and Krueger من خلال الخوارزم التالي.

<u>خوارزم (١٦-٢)</u>

إذا أعتبرنا نموذج برمجة الهدف غير الخطي في (16.3)-(16.1).

خطوة (١): نعتبر النموذج الجزئي الأول المرتبط بالأولوية الأولى على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.}a_1 = g_1(d^-,d^+) \\ \text{S.T.}\quad f_i(X)+d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , \ i\in P_1 \\ \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^-\cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} \qquad (m.1)$$

وبحل النموذج بالطريقة الملائمة نفترض أن a_1^* هي الحل الأمثل.

خطوة (٢): نكون النموذج الجزئي الثاني المناظر للأولوية الثانية ويكون على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min.}a_2 = g_2(d^-, d^+) \\ \text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad, \; i \in P_1, P_2 \\ \qquad\quad g_1(d^-, d^+) = a_1^* \\ \qquad\quad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0\end{array}\right\} \qquad (m.2)$$

وبحل النموذج (m.2) بالطريقة المناسبة أيضاً نجد أن الحل الأمثل على النحو a_2^*. وبنفس الأسلوب نكون بأقي النماذج الجزئية إلى أن نصل إلى الأولوية الأخيرة k.

خطوة (k) نكون النموذج الجزئي رقم k المناظر للأولوية k فيكون على النحو:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min.}a_k = g_k(d^-, d^+) \\ \text{S.T.} \quad f_i(X) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad, \; i = 1,2,\ldots,m \\ \qquad\quad g_t(d^-, d^+) = a_t^* \quad , \; t = 1,2,\ldots,k \\ \qquad\quad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0\end{array}\right\} \qquad (m.k)$$

فيكون حل النموذج (m.k) هو أفضل حل توافقي للنموذج (16.3)-(16.1). وسوف نوضح خطوات الحل باستخدام الخوارزم من خلال الأمثلة التالية.

ويعتبر أستخدام هذه الطريقة في الحل أفضل من طريقة التقريب الخطي المقدمة في الفصل السابق للآتي:

أ- تعتمد طريقة التقريب الخطي على نقطة البداية $X^{(0)}$ وقد لا يحدث تقارب وفي هذه الحالة تفشل الطريقة في الحل. أما هذه الطريقة لا تعتمد على نقطة بداية.

ب- استخدام الأسلوب التكراري يتيح لمتخذ القرار أمكانية تحسين الهدف في أولوية ما عن أمكانية التضحية بنسبة ما من الأولويات السابقة لها. كما سوف نوضح في الأمثلة التالية.

ج- تتيح هذه الطريقة استخدام أكثر من طريقة في حل النماذج الجزئية وفقاً لخصائص كل نموذج جزئي كما سوف نوضح في الأمثلة التالية.

مثال (١٦-٥) أعتبر مثال (١٦-٣) بالفصل السابق - أوجد أفضل حل توافقي باستخدام خوارزم (١٦-٢).

الحل: بالرجوع إلى مثال (١٦-٣) نجد أن:

خطوة (١): نكون النموذج الجزئي الأول المناظر للأولوية الأولى على النحو:

$$\left.\begin{aligned} & \text{Min.}a_1 = \{(d_3^+)\} \\ & \text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ & \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{m.1})$$

ونلاحظ أن النموذج (m.1) نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس. وبحل النموذج نجد أنه يوجد عدد لا نهائي من قيم X_1, X_2 التي تقع على الخط $X_1 + X_2 = 6$ ويكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$a_1^* = 0$$

خطوة (٢): نكون النموذج الجزئي الثاني على النحو:

$$\left.\begin{aligned} & \text{Min.}a_2 = \{(2d_1^- + d_2^+)\} \\ & \text{S.T.} \quad X_1 X_2 + d_1^- - d_1^+ = 16 \\ & \qquad (X_1 - 3)^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 9 \\ & \qquad X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ & \qquad d_3^+ = 0 \\ & \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{m.2})$$

ونلاحظ أن النموذج (m.2) نموذج غير خطي – وسوف نقوم بحله باستخدام طريقة لأجرانج (أنظر الباب التاسع بالجزء الأول من هذا الكتاب [٤]) على النحو التالي:

أ- نكون دالة لأجرانج $L(X,\lambda)$ حيث:

$$\begin{aligned} L(X,\lambda) = 2d_1^- + d_2^+ + \lambda_1(16 - X_1X_2 - d_1^- + d_1^+) \\ + \lambda_2(9 - X_1^2 + 6X_1 - 9 - X_2^2 - d_2^- + d_2^+) \\ + \lambda_3(6 - X_1 - X_2 - d_3^- + d_3^+) + \lambda_4(0 - d_3^+) \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -X_2\lambda_1 - 2X_1\lambda_2 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -X_1\lambda_1 - 2X_2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_1^-} = 2 - \lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2^+} = 1 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_3^+} = \lambda_3 = 0 \longrightarrow \lambda_3 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 16 - X_1X_2 - d_1^- + d_1^+ = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -X_1^2 + 6X_1 - X_2^2 - d_2^- + d_2^+ = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 6 - X_1 - X_2 - d_3^- + d_3^+ = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -d_3^+ = 0 \longrightarrow d_3^+ = 0 \qquad (9)$$

وبحل المعادلات (9)-(1) نجد أن:

$$X_1^* = X_2^* = 3\,,\, d_1^{-^*} = 7\,,\, d_2^{+^*} = 0\,,\, d_3^{+^*} = 0\,,\, a_2^* = 14\,,\, a^* = [0 \quad 14] \quad (10)$$

ويعتبر الحل في (10) هو أفضل حل توافقي للنموذج غير الخطي.

<u>مثال (١٦-٦)</u>: أعتبر نموذج برمجة الهدف غير الخطي التالي:

$$\text{lexic.min}\,.\, a = \{(d_1^- + d_1^+)\,,\,(d_2^+)\} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 : (X_1 - 1)^3 - X_2^2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \qquad (2)$$

$$G_2 : X_1^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 9 \qquad (3)$$

$$X\,,d^-\,,d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \qquad (4)$$

١- وضح بيانياً كل من G_1, G_2.

٢- باستخدام طريقة الحلول المتتالية (أستخدم خوارزم (١٦-٢)) ثم قارن الحل

الحل: ١- شكل (١٦-٤) يوضح المتغيرات الأنحرافية بالهدفين G_1, G_2.

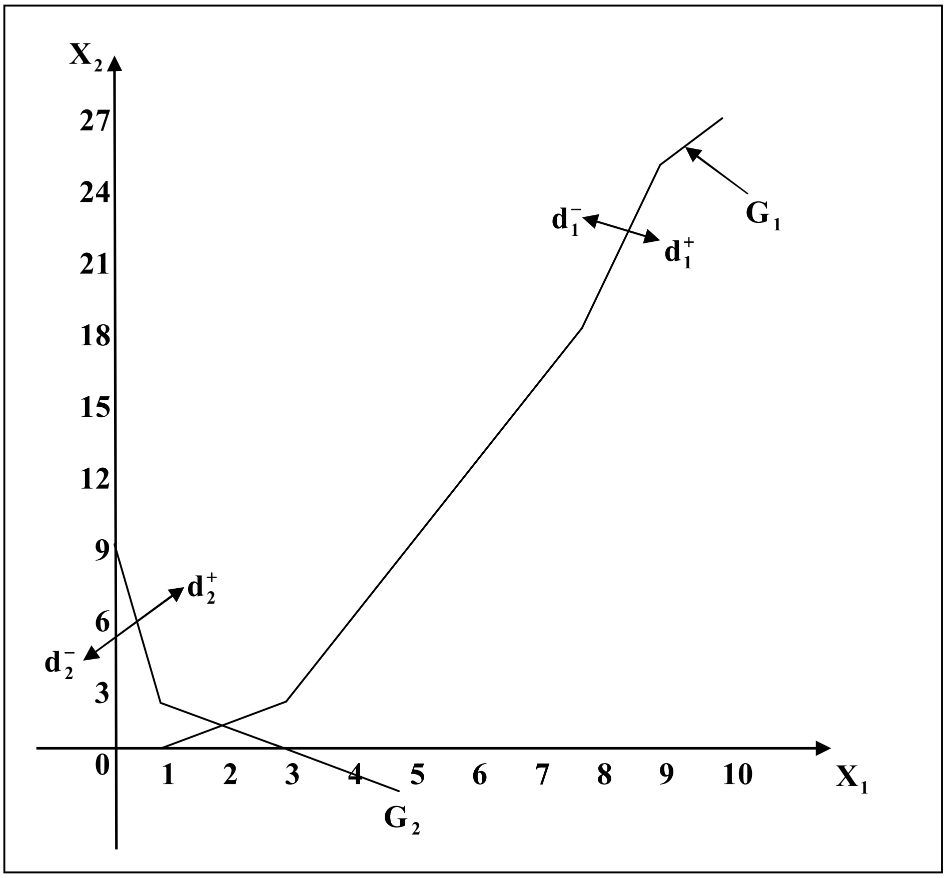
٢- باستخدام طريقة الحلول المتتالية: ١- نكون النموذج وحيد الهدف المرتبط بالأولوية الأولى على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.}a_1 = \{(d_1^- + d_1^+)\} \\ \text{S.T.} \quad G_1 : (X_1 - 1)^3 - X_2^2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ \qquad X\,,d^-\,,d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} \qquad (m.1)$$

وبأستخدام طريقة لأجرانج نجد أن حل النموذج الجزئي (m.1) على النحو:

$$X_1^{(1)} = 1 \quad , \quad X_2^{(1)} = 0 \quad , \quad a_1^* = 0 \qquad (5)$$

شكل (١٦-٤) يوضح الهدفين G_1, G_2



٢- نحون النموذج الجزئي الثاني المرتبط بالأولوية الثانية على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.}a_1 = \{(d_2^+)\} \\ \text{S.T.} \quad G_1 : (X_1 - 1)^3 - X_2^2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ \qquad G_2 : X_1^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 9 \\ \qquad d_1^- + d_1^+ = 0 \\ \qquad X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{array}\right\} \qquad (\text{m.2})$$

وباستخدام طريقة لأجرانج أيضاً نجد أن الحل الجزئي للنموذج (m.2) على النحو:

$$X_1^{(2)} = 2 \quad , \quad X_2^{(2)} = 1 \quad , \quad a_2^* = 0 \quad , \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

وحيث أن حل النموذج الجزئي الأخير يمثل حل النموذج غير الخطي (4)−(1) على النحو:

$$X_1^* = 2 \quad , \quad X_2^* = 1 \quad , \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(١٦-٥) تمرينات　　Exercises

(١٦-١) باستخدام طريقتي التقريب الخطي والحلول المتتالية حل كل نموذج من النماذج التالية ثم قارن بين الحلين، مع توضيح الأهداف G بيانياً.

$$\text{a) Lexic.Min } .a = \{(d_1^+ + d_1^-),(d_2^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & (X_1-2)^3 - X_2^2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ & X_1^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) Lexic.Min } .a = \{(d_1^- + d_2^+),(d_3^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & -X_1 + d_1^- - d_1^+ = 2 \\ & X_1^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ & 6X_1^2 + 3X_2^2 + d_3^- - d_3^+ = 0 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) Lexic } .a = \{(d_2^+ + d_3^+),(d_1^+)\}$$
$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & -X_1^2 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ & -1.5X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 1 \\ & X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\ & X, d^-, d^+ \geq 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \end{aligned}$$

(١٦-٢) باستخدام طريقة الحلول المتتالية أوجد حل النموذج التالي:

$$\text{Lexic.Min.a} = \{(d_1^+ + d_2^+),(d_3^-)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.}\quad & 0.1X_1 + \beta(0.02)X_2 + \beta(0.003)X_3 + d_1^- - d_1^+ = 1.0 \\
& 1.0X_1 + \beta(0.2)X_2 + \beta(0.3)X_3 + d_2^- - d_2^+ = 20.0 \\
& [1.0 - 0.8\exp(-X_1/1.5)] + [0.95 - 0.7\exp(-X_2/2.5)]^\beta \\
& + [1.0 - 0.6\exp(-X_3/3.5)]^\beta + d_3^- - d_3^+ = 1.0 \\
& X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0 \\
& \text{For}\quad \beta = 1 \text{ و } 4
\end{aligned}$$

(١٦-٣) أستخدم طريقة التقريب الخطي لحل النموذج في (١٦-٢) مع مقارنة الحلين.

(١٦-٤) حل كل من النماذج التالية:

a) $\text{Lexic.Min .a} = \{(d_2^+ + d_2^-),(d_1^+)\}$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.}\quad & 3\exp(2X_1) + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\
& X_1^2 + X_2^2 + d_2^- - d_2^+ = 49 \\
& X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0
\end{aligned}$$

b) $\text{Lexic.Min .a} = \{(d_3^- + d_3^+),(d_1^+ + d_2^+)\}$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.}\quad & 5\ln(X_1 + X_2) - X_3^2 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\
& \exp(2X_1 + X_2) + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 15 \\
& X_1 + X_2 + X_3 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\
& X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0
\end{aligned}$$

c) $\text{Lexic.Min .a} = \{(d_3^- + d_3^+),(d_1^+ + d_2^+)\}$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.}\quad & 2\exp(X_1 + X_2 + 2X_3) + X_2 + X_3 + d_1^- - d_1^+ = 25 \\
& X_1^2 + X_2^2 + X_3 + d_2^- - d_2^+ = 21 \\
& X_3 + d_3^- - d_3^+ = 61 \\
& X, d^-, d^+ \ge 0 \quad , \quad d^- \cdot d^+ = 0
\end{aligned}$$

الباب السابع عشر

مشكلة النقل والتخصيص متعددة الأهداف

Multi-objective Transportation and Assignment Problems

(١٧-١) مقدمة Introduction

تعتبر مشكلتي النقل (وأحياناً تسمى مشكلة التوزيع distribution problem) والتخصيص من أهم تطبيقات أسلوب البرمجة الخطية. ولكن نظراً لوجود خصائص معينة لهذا النوع من المشاكل فقط قدمت العديد من الخوارزميات التي تعتمد جميعها على طريقة السمبلكس لحل هذا النوع من المشاكل. كذلك صممت برامج حاسب computer programs لهذه الخوارزميات [21,25,55] كما سبق تقديم ذلك في البابين الرابع والخامس من الجزء الأول من هذا الكتاب [٤].

ولكن مع ظهور أساليب برمجة تعدد الأهداف ومع تعقد عملية صناعة القرار، فأصبح لدى متخذ القرار العديد من المعايير (الأهداف) التي يرغب في تحقيقها وفقاً لأولويات. ولكن نظراً لتعارض هذه الأهداف في معظم المشاكل بالإضافة أن هذه المشاكل تتسم أيضاً بالمرونة، لذلك سوف نتناول مشكلتي النقل والتخصيص باستخدام أسلوب برمجة الهدف goal programming.

وفي الفصول التالية سوف نقدم كيفية صياغة وحل مشكلتي النقل والتخصيص متعددة الأهداف كنماذج برمجة هدف يمكن حلها باستخدام الطرق المقدمة في البابيين الرابع عشر والسادس عشر.

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكن حل مشاكل النقل والتخصيص متعددة الأهداف بأستخدام الطرق المقدمة في الباب الرابع عشر والسادس عشر، ولكن نظراً لخصائص هذه المشاكل فإن ذلك يتطلب تقديم خوارزميات خاصة بها كذلك تصميم برامج حاسب خاصة بها أيضاً.

وفي هذا الباب سوف نقدم كيفية صياغة النقل والتخصيص كنماذج برمجة هدف، ثم حل هذه النماذج بأستخدام الطرق المقدمة في البابين الرابع عشر والسادس عشر.

(١٧-٢) صياغة مشكلة النقل Formulation of Transportation Problem

بالرجوع إلى الباب الرابع بالجزء الأول من هذا الكتاب، نجد أن مشكلة النقل وحيدة الهدف تتمثل في وجود عدد (m) من مراكز الإنتاج تقوم بإنتاج منتج معين تغذي عدد (n) من مراكز الاستهلاك لهذا المنتج، فإذا كانت تكلفة نقل الوحدة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j) تساوي C_{ij} حيث $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ ويكون هدف متخذ القرار تحديد عدد الوحدات التي يجب نقلها من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j) ولتكن X_{ij} بحيث تكون إجمالي تكاليف النقل أقل ما يمكن. وبالتالي يكون نموذج النقل وحيد الهدف على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ التي تجعل:

$$\text{Min. } C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\,X_{ij} \qquad (17.1)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=D_j \quad , \quad j=1,2,...,n \qquad (17.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=S_i \quad , \quad i=1,2,...,m \qquad (17.3)$$

$$X_{ij}\geq 0 \quad , \; i=1,2,...,m \; , \; j=1,2,...,n \qquad (17.4)$$

حيث D_j تشير إلى الكمية المطلوبة لمركز الاستهلاك (j) ، S_i تشير إلى الكمية المتاحة لمركز الإنتاج (i). ويلاحظ أن جميع الخوارزميات التي قدمت في الباب الرابع بالجزء الأول لحل النموذج (17.1)−(17.4) تعتمد على أن يكون النموذج في حالة التوازن بمعنى:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (17.5)$$

أو تحويل النموذج غير المتوازن إلى نموذج متوازن. أما بالنسبة لاستخدام أسلوب برمجة الهدف (GP) في حل مشكلة النقل متعددة الأهداف فلا يتطلب هذا الشرط وذلك بسبب وجود المتغيرات الإنحرافية السالبة (d^-) والمتغيرات الإنحرافية الموجبة (d^+). وفيما يلي سوف نقدم بعض الأمثلة لمشاكل النقل متعددة الأهداف وصياغتها كنموذج برمجة هدف.

مثال (١٧-١) إذا فرضنا مركزين للاستيراد B_1, B_2 من سلعة ما من مركزين للتصدير بأحدي الدوال A_1, A_2 والجدول التالي يوضح الكميات المطلوبة (بالألف) لمراكز الاستيراد، كذلك الكميات المتاحة (بالألف وحدة) لدى مراكز التصدير، وتكلفة نقل الوحدة (بالألف جنيه) من كل مركز تصدير إلى كل مركز إستيراد.

جدول (١٧-١)

مراكز الاستيراد / مراكز التصدير	B_1	B_2	الكميات المتاحة S_i
A_1	10	12	10
A_2	8	6	12
الكميات المطلوبة D_j	7	9	22 / 16

ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

الأولوية الأولي: ١- أستيفاء مراكز الاستيراد من الكميات المطلوب استيرادها.

٢- إستيراد ما لا يزيد عن 80% من المتاح لدى مركز التصدير A_1، كذلك استيراد ما لا يقل عن 75% من المتاح لدى مركز التصدير A_2.

الأولوية الثانية: ٣- تصغير التكلفة الكلية للنقل.

والمطلوب تحديد الكميات التي يجب إستيرادها من كل مركز من مراكز التصدير لكل مركز من مراكز الاستهلاك بحيث تتحقق أهداف متخذ القرار وفقاً لأولوياتها من خلال تكوين نموذج برمجة هدف مناسب.

الحل: إذا فرضنا أن X_{ij} هي الكمية التي يتم نقلها من مركز التصدير (i) إلى مركز الاستيراد (j) حيث $i = 1,2 \;,\; j = 1,2$.

من الجدول السابق نجد أن:

$$G_1 : \begin{cases} \left(X_{11} + X_{21} + d_1^- - d_1^+ = 7\right) & (1) \\ \left(X_{12} + X_{22} + d_2^- - d_2^+ = 9\right) & (2) \end{cases}$$

كذلك:

$$G_2 : \begin{cases} \left(X_{11} + X_{12} + d_3^- - d_3^+ = 8\right) & (3) \\ \left(X_{21} + X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 9\right) & (4) \end{cases}$$

من الأهداف goals (4)-(1) نجد أن دالة الإنجاز للأولوية الأولى على النحو:

$$\text{Min. } a_1 = \{(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+) + (d_3^+ + d_4^-)\} \qquad (5)$$

بالمثل:

$$G_3 : \{(10X_{11} + 12X_{12} + 8X_{21} + 6X_{22} + d_5^- - d_5^+ = 0)\} \quad (6)$$

وبالتالي نجد أن دالة الإنجاز للأولوية الثانية على النحو:

$$\text{Min. } a_2 = \{d_5^+\} \qquad (7)$$

ملحوظة: بالنسبة للهدف G_3 تم افتراض أن المستوى المرجو يساوي صفر، ولكن يمكن افتراض قيمة أخرى يحددها متخذ القرار.

من (7)–(1) يمكن صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $j=1,2$, $i=1,2$ التي تجعل

$$\text{Lexic. Min. } a = \{(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^+ + d_4^-), (d_5^+)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T} \quad & X_{11} + X_{21} + d_1^- - d_1^+ = 7 \\
& X_{12} + X_{22} + d_2^- - d_2^+ = 9 \\
& X_{11} + X_{12} + d_3^- - d_3^+ = 8 \\
& X_{21} + X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 9 \\
& 10X_{11} + 12X_{12} + 8X_{21} + 6X_{22} + d_5^- - d_5^+ = 0 \\
& X_{ij} \ge 0 \quad , \quad d_k^-, d_k^+ \ge 0 \quad , (d_k^-)\cdot(d_k^+) = 0 \; , \\
& \qquad i=1,2 \quad , \quad j=1,2 \; , \; k=1,2,3,4
\end{aligned}$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطية يمكن حله باستخدام طريقة الحلول المتتالية (أنظر الفصل (١٤-٤)) على النحو التالي:

١- نكون النموذج وحيد الهدف المناظر للأولوية الأولى وليكن (M1) على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min. } a_1 = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^+ + d_4^- & \\ \text{S.T.} \quad X_{11} + X_{21} + d_1^- - d_1^+ = 7 & \\ \qquad X_{12} + X_{22} + d_2^- - d_2^+ = 9 & \\ \qquad X_{11} + X_{12} + d_3^- - d_3^+ = 8 & \\ \qquad X_{21} + X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 9 & \\ \qquad X_{ij}, d^-, d^+ \geq 0 \ , \ (d_k^-)\cdot(d_k^+) = 0 & \end{array}\right\} (M1)$$

وبحل النموذج (M1) نجد أن $a_1^* = 0$

٢- نكون النموذج الجزئي الثاني المناظر للأولوية الثانية والأخيرة (M2) على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min. } a_2 = d_5^+ & \\ \text{S.T.} \quad X_{11} + X_{21} + d_1^- - d_1^+ = 7 & \\ \qquad X_{12} + X_{22} + d_2^- - d_2^+ = 9 & \\ \qquad X_{11} + X_{12} + d_3^- - d_3^+ = 8 & \\ \qquad X_{21} + X_{22} + d_4^- - d_4^+ = 9 & \\ \qquad 10X_{11} + 12X_{12} + 8X_{21} + 6X_{22} + d_5^- - d_5^+ = 0 & \\ \qquad d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^+ + d_4^- = 0 & \\ \qquad X_{ij}, d^-, d^+ \geq 0 \ , \ (d_k^-)\cdot(d_k^+) = 0 & \end{array}\right\} (M2)$$

وبحل النموذج (M2) نجد أن الحل الأمثل للمشكلة على النحو التالي:

$$X_{11}^* = 0 \ , \ X_{12}^* = 0 \ , \ X_{21}^* = 7 \ , \ X_{22}^* = 9 \ , \ d_4^{+*} = 7 \ , \ d_5^{+*} = 110$$

$$d_1^{-*} = d_1^{+*} = d_2^{-*} = d_2^{+*} = d_4^{-*} = d_5^{-*} = 0 \ , a_2^* = 110 , a^* = \{0 \ , \ 110)$$

وهذا يعني أنه لتحقيق أهداف متخذ القرار في مراكز الاستيراد فأن هذا يتطلب الاستيراد من مركز التصدير الثاني فقط A_2 وتكون أقل تكلفة تساوي 110 ألف جنيه.

مثال(١٧-٢) إذا فرضنا وجود 4 مراكز إنتاج لأحدى السلع وهي A_1, A_2, A_3, A_4 تنتج الكميات S_1, S_2, S_3, S_4 من الوحدات (بالألف وحدة) على الترتيب. كذلك يوجد ثلاثة مراكز استهلاك B_1, B_2, B_3 تحتاج إلى الكميات D_1, D_2, D_3 (بالألف وحدة) على الترتيب. كما هو موضح في الجدول التالي.

جدول (١٧-٢)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	B_1	B_2	B_3	الكميات المتاحة S_i
A_1	5	8	3	100
A_2	7	4	5	40
A_3	2	6	9	40
A_4	4	6	6	120
الكميات المطلوبة D_j	120	140	140	300 / 400

ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقط لأولوياتها:

١- نقل جميع الوحدات من مراكز الإنتاج A إلى مراكز الاستهلاك B.

٢- أمداد كل مركز من مراكز الاستهلاك بما لا يقل عن 50% من الكمية التي يطلبها.

٣- أمداد مركز الاستهلاك B_1 بالكمية الكلية التي يطلبها.

٤- تصغير تكلفة النقل الكلية.

المطلوب: صياغة المشكلة أعلاه كنموذج برمجة هدف.

الحل: ١- إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى الكمية المنقولة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j) حيث $i=1,2,3,4\ ,\ j=1,2,3$.

٢- من الجدول السابق نجد أن:

$$G_1:\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+d_1^- - d_1^+ = 100 & (1)\\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+d_2^- - d_2^+ = 40 & (2)\\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+d_3^- - d_3^+ = 40 & (3)\\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+d_4^- - d_4^+ = 120 & (4)\end{cases}$$

حيث d_i^- تشير إلى الكمية المتبقية بمركز الإنتاج (i) كذلك d_i^+ تشير إلى الكميات الناقصة عن الطلب من مركز الإنتاج (i). وتكون دالة الإنجاز المناظرة لهذا الهدف:

$$\text{Min. } a_1=(d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+) \qquad (5)$$

كذلك الهدف الثاني

$$G_2:\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+d_5^- - d_5^+ = 60 & (6)\\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+d_6^- - d_6^+ = 70 & (7)\\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+d_7^- - d_7^+ = 70 & (8)\end{cases}$$

وبالتالي تكون دالة الإنجاز المناظرة لهذا الهدف:

$$\text{Min. } a_2=(d_5^- + d_6^- + d_7^-) \qquad (9)$$

بالمثل

$$G_3:\{X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+d_8^- - d_8^+ = 120 \qquad (10)$$

وبالتالي:

$$\text{Min. } a_3=(d_8^- + d_8^+) \qquad (11)$$

بالمثل

$$G_4 : \begin{cases} (5X_{11} + 8X_{12} + 3X_{13} + 7X_{21} + 4X_{22} + 5X_{23} + \\ 2X_{31} + 6X_{32} + 9X_{33} + 4X_{41} + 6X_{42} + 6X_{43} + \\ d_9^- - d_9^+ = 0) \end{cases} \qquad (12)$$

وبالتالي:

$$\text{Min. } a_4 = (d_9^+) \qquad (13)$$

من (13)−(1) فإن نموذج برمجة الهدف يصبح على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $j = 1,2,3$, $i = 1,2,3,4$ التى تجعل

$$\text{lexic. min. } a = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{4} (d_i^- + d_i^+) \right), \left(\sum_{i=5}^{7} d_i^- \right), (d_8^- + d_8^+), (d_9^+) \right\} \ (14)$$

$$\text{S.T.} \quad G_1 = \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + d_3^- - d_3^+ = 40 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + d_4^- - d_4^+ = 120 \end{cases}$$

$$G_2 = \begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + d_5^- - d_5^+ = 60 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + d_6^- - d_6^+ = 70 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + d_7^- - d_7^+ = 70 \end{cases}$$

$$G_3 = \left\{ X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + d_8^- - d_8^+ = 120 \right.$$

$$G_4 = \begin{cases} 5X_{11} + 8X_{12} + 3X_{13} + 7X_{21} + 4X_{22} + 5X_{23} + 2X_{31} + \\ 6X_{32} + 9X_{33} + 4X_{41} + 6X_{42} + 6X_{43} + d_9^- - d_9^+ = 0 \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0 \ , (d_k^-) \cdot (d_k^+) = 0 \ , \ i = 1,2,3,4 , j = 1,2,3 , k = 1,2,..,9$$

ونلاحظ أن النموذج أعلاه نموذج برمجة هدف خطية يمكن حله باستخدام طريقة الحلول المتتالية كما أوضحنا ذلك في المثال السابق (مثال (١٧−١)).

مثال (١٧-٣) إذا اعتبر نموذج برمجة الهدف متعدد الأهداف في مثال (١١-٤) بالباب الحادي عشر حيث أن النموذج متعدد الأهداف على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
\text{Min. } a_1 = \{&20X_{11} + 15X_{12} + 10X_{13} + 12X_{21} + 17X_{22} \\
&+ 13X_{23} + 9X_{31} + 11X_{32} + 14X_{33}\} \qquad (1) \\
\text{Min. } a_2 = \{&5X_{11} + 4X_{12} + 15X_{13} + 8X_{21} + 3X_{22} \\
&+ 10X_{23} + 10X_{31} + 2X_{32} + 8X_{33}\} \qquad (2) \\
\text{S.T.} \quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} = 15{,}000 \qquad (3) \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} = 65{,}000 \qquad (4) \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} = 70{,}000 \qquad (5) \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50{,}000 \qquad (6) \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} = 60{,}000 \qquad (7) \\
& X_{13} + X_{23} + X_{33} = 40{,}000 \qquad (8) \\
& X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,3
\end{aligned}
$$

فإن النموذج أعلاه يمكن تحويله إلى نموذج برمجة هدف خطية على النحو التالي:

١- تحويل قيود العرض والطلب في (8)-(3) إلى أهداف $G_1 - G_6$ بإضافة المتغيرات الإنحرافية على النحو التالي:

$$
\left.
\begin{aligned}
G_1 &: X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 15{,}000 \\
G_2 &: X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 65{,}000 \\
G_3 &: X_{31} + X_{32} + X_{33} + d_3^- - d_3^+ = 70{,}000 \\
G_4 &: X_{11} + X_{21} + X_{31} + d_4^- - d_4^+ = 50{,}000 \\
G_5 &: X_{12} + X_{22} + X_{32} + d_5^- - d_5^+ = 60{,}000 \\
G_6 &: X_{13} + X_{23} + X_{33} + d_6^- - d_6^+ = 40{,}000
\end{aligned}
\right\} \quad (9)
$$

٢- ونظراً لأن الأهداف في (9) عبارة عن قيود تم تحويلها إلى أهداف لذلك تصبح الأولوية المطلقة (الأولوية الأولى) تحقيق هذه القيود وبالتالي تكون الأولوية الأولى:

$$\begin{aligned} \text{Min. } a_1 = (d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+ \\ + d_5^- + d_5^+ + d_6^- + d_6^+) \qquad (10) \end{aligned}$$

٣- بالنسبة للأهداف المطلقة في (2)-(1) يتم تحويلها إلى أهداف وفقاً لأولوياتها بإضافة المستوى المرجو تحقيقه على النحو التالي:

$$\begin{aligned} G_7 : \{20X_{11} + 15X_{12} + 10X_{13} + 12X_{21} + 17X_{22} + 13X_{23} \\ + 9X_{31} + 11X_{32} + 14X_{33} + d_7^- - d_7^+ = 0\} \qquad (11) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Min.} a_2 = (d_7^+)$$

$$\begin{aligned} G_8 : \{5X_{11} + 4X_{12} + 15X_{13} + 8X_{21} + 3X_{22} + 10X_{23} \\ + 10X_{31} + 2X_{32} + 8X_{33} + d_8^- - d_8^+ = 0\} \qquad (12) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Min.} a_3 = (d_8^+) \qquad (13)$$

ملحوظة: في الهدفين G_7, G_8 تم وضع المستوى المرجو في كل منهما يساوي صفر، ولكن يمكن افتراض أي قيمة أخرى موجبة صغيرة مناسبة وذلك لأن الأهداف المطلقة في (2)-(1) تهدف إلى التصغير. ولكن في حالة إذا كانت بعض الأهداف المطلقة تهدف إلى التعظيم ففي هذه الحالة يمكن افتراض المستوى المرجوة لهذه الأهداف قيمة موجبة كبيرة.

ويصبح نموذج برمجة الهدف على النحو التالي: أوجد X_{ij} ، $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$ التي تجعل

$$\left.\begin{array}{l}
\text{lexic. min. } a=\left\{\left(\sum_{j=1}^{6}(d_j^- + d_j^+)\right),(d_7^+),(d_8^+)\right\} \\
\text{S.T. } X_{11}+X_{12}+X_{13}+d_1^- - d_1^+ = 15{,}000 \\
\quad X_{21}+X_{22}+X_{23}+d_2^- - d_2^+ = 65{,}000 \\
\quad X_{31}+X_{32}+X_{33}+d_3^- - d_3^+ = 70{,}000 \\
\quad X_{11}+X_{21}+X_{31}+d_4^- - d_4^+ = 50{,}000 \\
\quad X_{12}+X_{22}+X_{32}+d_5^- - d_5^+ = 60{,}000 \\
\quad X_{13}+X_{23}+X_{33}+d_6^- - d_6^+ = 40{,}000 \\
\quad 20X_{11}+15X_{12}+10X_{13}+12X_{21}+17X_{22}+ \\
\quad\; 13X_{23}+9X_{31}+11X_{32}+14X_{33}+d_7^- - d_7^+ = 0 \\
\quad 5X_{11}+4X_{12}+15X_{13}+8X_{21}+3X_{22}+10X_{23}+ \\
\quad\; 10X_{31}+2X_{32}+8X_{33}+d_8^- - d_8^+ = 0 \\
\quad X_{ij},d_k^-,d_k^+ \ge 0 \;,\; (d_k^-)\cdot(d_k^+)=0 \;, \\
\qquad\qquad i=1,2,3 \;,\; j=1,2,3 \;,\; k=1,2,\ldots,8
\end{array}\right\} \quad (14)$$

ونموذج برمجة الهدف في (14) نموذج خطي يمكن حله بأستخدام طريقة الحلول المتتالية في الفصل (٤-١٤) ويكون الحل على النحو التالي:

$$a^* = \{0 \;,\; 1{,}705{,}00 \;,\; 1{,}015{,}000\},\; X_{13}^* = 15{,}000 \;,\; X_{21}^* = 40{,}000$$

$$X_{23}^* = 25{,}000 \;,\; X_{31}^* = 10{,}000 \;,\; X_{32}^* = 60{,}000$$

(١٧-٣) صياغة مشكلة التخصيص Formulation of Assignment Problem

وبالرجوع إلى الباب الخامس بالجزء الأول من هذا الكتاب، نجد أن مشكلة التخصيص وحيدة الهدف تتمثل في وجود عدد n من المهام يجب إنجازها باستخدام عدد m من الوسائل (قد تكون أشخاص، آلات، ... الخ) بحيث يتم تخصيص لكل مهمة وسيلة واحدة لإنجازها بحيث تكون التكلفة الكلية أقل ما يمكن. وبالتالي يكون نموذج التخصيص وحيد الهدف على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $i = 1,2,...,m \;,\; j = 1,2,...,n$ التي تجعل:

$$\text{Min. } C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij} \qquad (17.5)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad , \; j = 1,2,...,n \qquad (17.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \; i = 1,2,...,m \qquad (17.7)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \; X_{ij} = 0,1 \qquad (17.8)$$

حيث تشير C_{ij} إلى تكلفة تكليف الوسيلة (i) لإنجاز المهمة (j) لجميع قيم (i)،(j) واعتمدت جميع الخوارزميات التي قدمت في الباب الخامس بالجزء الأول من الكتاب لحل النموذج (17.8)−(17.5) على أن عدد المهام يساوي عدد الوسائل أي $m = n$ أو تحويل النموذج غير المتوازن إلى نموذج متوازن بحيث $m = n$.

ويمكن تناول مشكلة التخصيص بأستخدام أسلوب برمجة الهدف (GP) في حل مشكلة التخصيص متعددة الأهداف. بالإضافة أن استخدام أسلوب (GP) لا يتطلب تحقق شرط التوازن وذلك بسبب وجود المتغيرات الإنحرافية السالبة (d^{-}) والمتغيرات الإنحرافية الموجبة (d^{+}).

وفيما يلي سوف نقدم بعض الأمثلة لمشاكل التخصيص متعددة الأهداف التي يمكن صياغتها وحلها كنموذج برمجة هدف (خطى أو غير خطي) على النحو الموضح فيما يلي.

مثال (١٧-٤) في أحد المؤسسات التجارية تم الإعلان عن ثلاث وظائف خالية $j = 1,2,3$ تقدم لها ثلاث أشخاص وفقاً لشروط معينة تنطبق على كل منهم جميع الشروط المطلوبة للوظائف الثلاثة. وقامت المؤسسة بإجراء بعض الاختبارات لكل منهم لتحديد كفاءة إنجاز كل شخص لمهام الوظيفة حيث تم قياس كفاءة كل منهم (G) في كل وظيفة بإعطائه درجة من $(1-10)$ والجدول التالي يوضح الدخل الشهري (C) لكل وظيفة (والذي يمثل تكلفة للمؤسسة) بالنسبة لكل شخص كذلك مستوى كفاءة الشخص وفقاً لكل وظيفة على النحو الموضح في الجدول التالي.

جدول (١٧-٣)

رقم الوظيفة(j) / رقم الشخص(i)	المعيار التكلفة C الكفاءة G	(1)	(2)	(3)
(1)	C_{1j} G_{1j}	15,000 9	18,000 7	20,000 9
(2)	C_{2j} G_{2j}	16,000 9	20,000 6	20,000 8
(3)	C_{3j} G_{3j}	16,000 8	19,000 7	20,000 9

والمطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج تخصيص متعدد الأهداف وفقاً لمعيار الكفاءة ومعيار التكلفة على الترتيب بحيث يتم تحديد الشخص (i) للوظيفة (j)

٢- تحويل النموذج إلى نموذج برمجة هدف.

٣- حل النموذج.

الحل: إذا اعتبرنا X_{ij} تشير إلى تخصيص الشخص (i) للوظيفة (j) حيث:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(j) إذا شغل الشخص i الوظيفة} \\ 0 & \end{cases}$$

ووفقاً للمعايير وهي تعظيم مستوى الإنجاز ثم تقليل التكاليف الكلية على الترتيب يصبح نموذج التخصيص متعدد الأهداف على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max. } G = {} & 9X_{11} + 7X_{12} + 9X_{13} + 9X_{21} + 6X_{22} \\ & + 8X_{23} + 8X_{31} + 7X_{32} + 9X_{33} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Min. } C = {} & 15{,}000X_{11} + 18{,}000X_{12} + 20{,}000X_{13} \\ & + 16{,}000X_{21} + 20{,}000X_{22} + 20{,}000X_{23} \\ & + 16{,}000X_{31} + 19{,}000X_{32} + 20{,}000X_{33}\} \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\text{S.T.} \quad \left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} &= 1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} &= 1 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{قيود الأشخاص} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 1 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{قيود الوظائف} \qquad (4)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,3 \qquad (5)$$

٢- والنموذج أعلاه نموذج برمجة خطية متعدد الأهداف ولكن نجد أن الهدفين (2),(1) هدفين متعارضين، لذلك يكون من المناسب استخدام أسلوب برمجة الهدف الخطية (LGP) على النحو التالي:

أ- بالنسبة للقيود (4),(3) يتم تحويلهم إلى أهداف بإضافة المتغيرات الإنحرافية الموجبة والسالبة على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
G_1 &: X_{11} + X_{12} + X_{13} + d_1^- - d_1^+ = 1 \\
G_2 &: X_{21} + X_{22} + X_{23} + d_2^- - d_2^+ = 1 \\
G_3 &: X_{31} + X_{32} + X_{33} + d_3^- - d_3^+ = 1 \\
G_4 &: X_{11} + X_{21} + X_{31} + d_4^- - d_4^+ = 1 \\
G_5 &: X_{12} + X_{22} + X_{32} + d_5^- - d_5^+ = 1 \\
G_6 &: X_{13} + X_{23} + X_{33} + d_6^- - d_6^+ = 1
\end{aligned}$$

ولكي تتحقق الأهداف $G_1 - G_6$ كقيود فإن الأولوية المطلقة تصبح على النحو التالي:

$$\text{Min. } a = \left(\sum_{t=1}^{6} (d_t^- + d_t^+) \right) \tag{6}$$

ب- بالنسبة للهدفين المطلقين (2),(1) يتم تحويلها إلى أهداف goals بإضافة المتغيرات الإنحرافية كذلك تحديد مستوى الإنجاز aspiration level على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
G_7 : 9X_{11} + 7X_{12} + 9X_{13} + 9X_{21} + 6X_{22} + 8X_{23} \\
+ 8X_{31} + 7X_{32} + 9X_{33} + d_7^- - d_7^+ = 30
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Min. } a_2 = (d_7^-) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} G_8 : & 15{,}000X_{11} + 18{,}000X_{12} + 20{,}000X_{13} \\ & + 16{,}000X_{21} + 20{,}000X_{22} + 20{,}000X_{23} \\ & + 16{,}000X_{31} + 19{,}000X_{32} + 20{,}000X_{33} + d_8^- - d_8^+ = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Min. } a_3 = (d_8^+) \qquad (8)$$

ملحوظة: ١- تم افتراض أن المستوى المرجو لـ G_7 يساوي 30 (حيث 30 تمثل أقصى كفاءة ممكن الوصول لها) وهي قيمة افتراضية، كذلك يمكن افتراض قيمة موجبة أكبر منها.

٢- بالنسبة للمستوى المرجو لـ G_8 يساوي صفر وهي أقل قيمة افتراضية موجبة يمكن افتراضها.

مما سبق يكون نموذج برمجة الهدف الممثل للمشكلة أعلاه على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $i = 1,2,3 \;,\; j = 1,2,3$ التي تجعل

$$\text{lexic. Min. } a = \left\{ \left(\sum_{t=1}^{6} (d_t^- + d_t^+) \right), (d_7^-), (d_8^+) \right\} \qquad (9)$$

$$\text{S.T.} \qquad G_1 - G_8 \qquad (10)$$

$$X_{ij} = 0,1 \quad , \quad d_t^- \cdot d_t^+ = 0 \quad ,$$
$$i = 1,2,3 \;,\; j = 1,2,3 \;,\; t = 1,2,..,8 \qquad (11)$$

والنموذج (11)-(9) نموذج برمجة هدف خطية يمكن حله باستخدام طريقة الحلول المتتالية على النحو التالي:

٣- نكون النموذج الجزئي الأول التالي:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min. } a_1 = \left(\sum_{t=1}^{6}(d_t^- + d_t^+)\right) \\
\text{S.T.} \quad G_1 - G_6 \\
\qquad X_{ij} = 0,1 \quad , \quad (d_t^-)\cdot(d_t^+) = 0
\end{array}\right\} \quad (M1)$$

وبحل النموذج (M1) نجد أن الحل الأمثل

$$a_1^* = 0$$

٢- نكون النموذج الجزئي الثاني:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min. } a_2 = d_7^- \\
\text{S.T.} \quad G_1 - G_7 \\
\qquad \sum_{t=1}^{6}(d_t^- + d_t^+) = 0 \\
\qquad X_{ij} = 0,1 \quad , \quad (d_t^-)\cdot(d_t^+) = 0
\end{array}\right\} \quad (M2)$$

وبحل النموذج (M2) نجد أن الحل الأمثل:

$$a_2^* = G^* = 25$$

٣- نكون النموذج الجزئي الثالث والأخير:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Min. } a_3 = d_8^+ \\
\text{S.T.} \quad G_1 - G_8 \\
\qquad \sum_{t=1}^{6}(d_t^- + d_t^+) = 0 \\
\qquad d_7^- = 25 \\
\qquad X_{ij} = 0,1 \quad , \quad (d_t^-)\cdot(d_t^+) = 0
\end{array}\right\} \quad (M3)$$

وبحل النموذج (M3) نجد أن:

$$a_3^* = C^* = 54{,}000$$

ويكون الحل على النحو التالي:

$$X_{21}^* = 1 \ , \ X_{12}^* = 1 \ , \ X_{13}^* = 1 \ , \ d_7^{-^*} = 5 \ , \ d_8^{+^*} = 54{,}000$$

$$a^* = \{0 \ , \quad 25 \ , \quad 54{,}000\}$$

مثال (١٧-٥) أعتبر مثال (١١-٣) بالباب الحادي عشر حيث نموذج التخصيص متعدد الأهداف على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\text{Min. } C = & 10{,}000\,X_{11} + 15{,}000\,X_{12} + 24{,}000\,X_{13} + 11{,}000\,X_{14} \\
& + 12{,}000\,X_{21} + 17{,}000\,X_{22} + 20{,}000\,X_{23} + 15{,}000\,X_{24} \\
& + 15{,}000\,X_{31} + 20{,}000\,X_{32} + 18{,}000\,X_{33} + 20{,}000\,X_{34} \\
& + 13{,}000\,X_{41} + 15{,}000\,X_{42} + 17{,}000\,X_{43} + 25{,}000\,X_{44} \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Min. } R = & \{(0.05)^{X_{11}}\ (0.30)^{X_{12}}\ (0.40)^{X_{13}}\ (0.25)^{X_{14}}\}\{(0.10)^{X_{21}} \\
& (0.30)^{X_{22}}\ (0.40)^{X_{23}}\ (0.20)^{X_{24}}\}\{(0.15)^{X_{31}}\ (0.30)^{X_{32}}\ (0.25)^{X_{33}} \\
& (0.30)^{X_{34}}\}\{(0.10)^{X_{41}}\ (0.15)^{X_{42}}\ (0.25)^{X_{43}}\ (0.50)^{X_{44}}\} \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{S.T.} \quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1 && (3) \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1 && (4) \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1 && (5) \\
& X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1 && (6) \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1 && (7) \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1 && (8) \\
& X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1 && (9) \\
& X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1 && (10) \\
& X_{ij} = 0 \text{ أو } 1 \ , \quad i = 1,2,3,4 \ , \quad j = 1,2,3,4 && (11)
\end{aligned}$$

المطلوب: ١- حول النموذج أعلاه إلى نموذج برمجة هدف – ثم أذكر خصائصه.

٢- حل النموذج في (١) باستخدام طريقة الحلول المتتالية.

الحل: ١- بنفس الأسلوب المتبع في المثال السابق نجد أن نموذج الهدف المناظر لنموذج تعدد الأهداف (11)-(1) على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $j = 1,2,3,4$, $i = 1,2,3,4$ التي تجعل

$$\text{Lexic. Min. } a = \left\{ \left(\sum_{t=1}^{8} (d_t^- + d_t^+) \right), (d_9^+), (d_{10}^+) \right\} \tag{12}$$

$$\text{S.T. } G_1 : X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + d_1^- - d_1^+ = 1 \tag{13}$$

$$G_2 : X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + d_2^- - d_2^+ = 1 \tag{14}$$

$$G_3 : X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + d_3^- - d_3^+ = 1 \tag{15}$$

$$G_4 : X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + d_4^- - d_4^+ = 1 \tag{16}$$

$$G_5 : X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + d_5^- - d_5^+ = 1 \tag{17}$$

$$G_6 : X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + d_6^- - d_6^+ = 1 \tag{18}$$

$$G_7 : X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + d_7^- - d_7^+ = 1 \tag{19}$$

$$G_8 : X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + d_8^- - d_8^+ = 1 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} G_9 : & 10{,}000\, X_{11} + 15{,}000\, X_{12} + 24{,}000\, X_{13} \\ & + 11{,}000\, X_{14} + 12{,}000\, X_{21} + 17{,}000\, X_{22} \\ & + 20{,}000\, X_{23} + 15{,}000\, X_{24} + 15{,}000\, X_{31} \\ & + 20{,}000\, X_{32} + 18{,}000\, X_{33} + 20{,}000\, X_{34} \\ & + 13{,}000\, X_{41} + 15{,}000\, X_{42} + 17{,}000\, X_{43} \\ & + 25{,}000\, X_{44} + d_9^- - d_9^+ = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

$$G_{10}:\{(0.05)^{X_{11}}\ (0.30)^{X_{12}}\ (0.40)^{X_{13}}\ (0.25)^{X_{14}}\}$$
$$\{(0.10)^{X_{21}}\ (0.30)^{X_{22}}\ (0.40)^{X_{23}}\ (0.20)^{X_{24}}\}$$
$$\{(0.15)^{X_{31}}\ (0.30)^{X_{32}}\ (0.25)^{X_{33}}\ (0.30)^{X_{34}}\}$$
$$\{(0.10)^{X_{41}}\ (0.15)^{X_{42}}\ (0.25)^{X_{43}}\ (0.50)^{X_{44}}\}$$
$$+d_{10}^{-}-d_{10}^{+}=0 \qquad (22)$$

$$X_{ij}=0 \text{ أو } 1 \quad , \quad i=1,2,3,4 \quad , \quad j=1,2,3,4 \qquad (23)$$

والنموذج أعلاه نموذج برمجة هدف غير خطية يمكن تحويله إلى نموذج خطي كما سوف نوضح فيما يلي. وبأستخـــدام طريقــة الحلـول المتتابعة يمكـن حـــل النمــوذج (12)-(23) على النحو التالي.

١- نكون النموذج الجزئي الأول

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min. } a_1=\left(\sum_{t=1}^{8}(d_t^{-}+d_t^{+})\right) \\ \text{S.T.} \quad G_1-G_8 \\ \qquad X_{ij}=0,1 \quad , \quad (d_t^{-})\cdot(d_t^{+})=0 \end{array}\right\} \qquad (M1)$$

ونجد أن النموذج الجزئي (M1) نموذج برمجة هدف خطية وبحله باستخدام طريقة السمبلكس. نجد أن الحل الأمثل

$$a_1^{*}=0$$

٢- نكون النموذج الجزئي الثاني على النحو:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min. } a_2 = d_9^+ \\ \text{S.T.} \quad G_1 - G_9 \\ \sum_{t=1}^{8}(d_t^- + d_t^+) = 0 \\ X_{ij} = 0,1 \quad , \quad (d_t^-)\cdot(d_t^+) = 0 \end{array}\right\} \quad (M2)$$

والنموذج (M2) نموذج خطي بحله نجد أن:

$$a_2^* = 58,000$$

$$X_{11} = 1 \ , \ X_{24} = 1 \ , \ X_{33} = 1 \ , \ X_{42} = 1 \ , \ d_9^+ = 58,000$$

٣- نكون النموذج الجزئي الثالث والأخير

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min. } a_3 = d_{10}^+ \\ \text{S.T.} \quad G_1 - G_{10} \\ \sum_{t=1}^{8}(d_t^- + d_t^+) = 0 \\ d_9^+ = 58,000 \\ X_{ij} = 0,1 \ , \ (d_t^-)\cdot(d_t^+) = 0 \ , \ t = 1,\dots,10 \end{array}\right\} \quad (M3)$$

والنموذج (M3) نموذج برمجة غير خطي وحيد الهدف يمكن حله بأستخدام أحدى طرق حل النماذج وحيدة الهدف غير الخطية ويكون الحل على النحو التالي:

$$a_3^* = R^* = 0.00037$$

$$X_{11}^* = 1 \ , \ X_{24}^* = 1 \ , \ X_{33}^* = 1 \ , \ X_{42}^* = 1$$

$$a^* = \{0 \ , \quad 58,000 \ , \quad 0.00037\}$$

(١٧-٤) تمرينات Exercises

(١٧-١) إذا وجد 4 مراكز لتجارة الجملة في أحدى السلع A_1, A_2, A_3, A_4 تغذى أربعة مراكز لتجارة التجزئة B_1, B_2, B_3, B_4. والجدول التالي يوضح الكميات المتاحة لدى مراكز تجارة الجملة والكميات المطلوبة لمراكز التجزئة وتكلفة نقل الوحدة (بالآلف كيلو جرام). فإذا كان المطلوب تحديد الكميات التي يجب نقلها من مراكز الجملة إلى مراكز التجزئة بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

جدول (١٧-٤)

مراكز التجزئة / مراكز الجملة	B_1	B_2	B_3	B_4	الكميات المتاحة
A_1	5	6	5	8	200
A_2	7	3	2	5	200
A_3	10	12	10	15	300
A_4	5	6	5	4	100
الكميات المطلوبة	100	300	600	500	800 / 1500

والمطلوب: ١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية ثم حل النموذج.

٢- صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف – ثم حل النموذج.

٣- قارن بين الحل في (١) ، (٢).

(١٧-٢) في التمرين السابق – إذا كان متخذ القرار بالنسبة لمراكز تجارة الجملة يرغب في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لأولوياتها:

١- يجب تغذية جميع مراكز التجزئة بنسبة لا تقل عن 50% من احتياج كل مركز من مراكز التجزئة.

٢- تصغير التكلفة الكلية للنقل.

(١٧-٣) أعلن أحد البنوك عن وجود ثلاثة وظائف خالية A_1, A_2, A_3 ويرغب في شغلها من المتخصصين وبعد إجراء الاختبارات للمتقدمين أستقر الوضع على قبول ثلاثة من المتقدمين B_1, B_2, B_3. والجدول التالي يوضح الأجر الشهري المخصص لكل شخص من المتقدمين وفقاً للوظيفة التي يمكن شغلها.

جدول (١٧-٥)

رقم الوظيفة / رقم المتقدم	B_1	B_2	B_3
A_1	2500	2400	255
A_2	3000	5000	4500
A_3	270	3000	3500

ويرغب متخذ القرار في تخصيص المتقدم (j) للوظيفة (i). والمطلوب:

١- صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية ثم حلها.

٢- صياغة المشكلة كنموذج برمجة هدف ثم حلها.

٣- قارن بين الحل في (١) بالحل في (٢).

(١٧-٤) في أحدى المحافظات يوجد ثلاثة مراكز لتجميع القمامة A_1, A_2, A_3 كذلك يوجد ثلاثة مراكز لتدوير وتصنيع هذه القمامة B_1, B_2, B_3. والجدول التالي يوضح تكلفة نقل الطن الواحد من مركز التجميع (i) إلى مركز التدوير (j) بالجنية، وسوف نرمز لها بالرمز C_{ij} كذلك يوضح الجدول احتمال حدوث مخاطرة لعدم نقل الطن الواحد من مركز التجميع (i) إلى مركز التدوير (j) وسوف نرمز لها بالرمز r_{ij}.

جدول (١٧-٦)

مركز التدوير / مركز التجميع	C_{ij} r_{ij}	B_1	B_2	B_3	الكميات الموجودة (بالطن)
A_1	C_{1j} r_{1j}	100 0.01	200 0.05	150 0.09	150
A_2	C_{2j} r_{2j}	150	80	1.00	120
A_3	C_{3j} r_{3j}	200 0.10	180 0.20	2.10 0.50	130
الكميات الممكن تدويرها		100	100	100	400 / 300

ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية:

١- نقل القمامة من مراكز التجميع إلى مراكز التدوير.

٢- تصغير كميات القمامة المتبقية في مركز التجميع والمتسببة في حدوث مخاطر.

٣- تصغير تكلفة النقل.

(١٧-٥) الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة (بالطن) من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j)، كذلك الكميات المتاحة في كل مركز إنتاج والكميات المطلوبة لكل مركز استهلاك. ويرغب متخذ القرار في تحقيق الأهداف التالية وفقاً لترتيبها:

١- نقل جميع الوحدات من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك.

٢- استيفاء على الأقل 90% من متطلبات مركز الاستهلاك (3).

٣- استيفاء على الأقل 80% من متطلبات مركز الاستهلاك (1).

٤- أن تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

جدول (١٧-٧)

مركز الاستهلاك / مركز الإنتاج	(1)	(2)	(3)	الكميات المتاحة (بالطن)
(1)	500	210	600	1000
(2)	300	510	300	1300
(3)	450	350	250	1000
(4)	270	400	300	
الكميات المطلوبة (بالطن)	1200	1300	1500	3300 / 4000

(١٧-٦) أعتبر التمرين السابق. ويرغب متخذ القرار في اعتبار الأهداف وفقاً لترتيبها على النحو التالي:

١- نقل جميع الوحدات من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك.

٢- أن تكون التكاليف أقل ما يمكن.

٣- استيفاء نسبة 70% على الأقل من متطلبات مركز الاستهلاك (١).

الباب الثامن عشر

البرمجة الرياضية وتحليل الانحدار

Mathematical Programming (MP)
And Regression Analysis

(١٨-١) العلاقة بين بحوث العمليات والإحصاء

Relationship Between O.R. and Stat.

(١٨-٢) نماذج الانحدار **Regression Models**

(١٨-٣) طريقة المربعات الصغرى **Least Squares Method**

(١٨-٤) الخصائص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

Statistical Properties of the Least Squares Estimators

(١٨-٥) طريقة المربعات الصغرى المقيدة **Restricted Least Squares Method**

(١٨-٦) مشكلة التداخل الخطي **Collinearity Problem**

(١٨-٧) طريقة الإمكان الأكبر **Maximum Likelihood Method**

(١٨-٨) تمرينات **Exercises**

(١٨-١) العلاقة بين بحوث العمليات والإحصاء
Relationship Between O.R. and Stat.

في الجزء الأول من الكتاب (الباب الأول) تم توضيح العلاقة بين بحوث العمليات وبعض العلوم الأخرى. ومن العلوم الأكثر أتساق ببحوث العمليات علم الإحصاء [٤]. فالعلاقة بين بحوث العمليات والإحصاء علاقة تبادلية بمعنى أن الأساليب الإحصائية تعتبر ضرورة لا غنى عنها في تطبيق أساليب بحوث العمليات، كذلك كثير من المشاكل في النظرية والأساليب الإحصائية يمكن حلها بأستخدام أساليب بحوث العمليات.

وفي هذا الباب سوف نتناول أستخدام بعض أساليب البرمجة الرياضية كجزء هام من أساليب بحوث العمليات في حل بعض المشاكل في الإحصاء.

وبصفة عامة عادةً يمكن تقسيم أساليب الاستدلال الإحصائي statistical inference إلى قسمين أساسين هما:

١- أساليب التقدير الإحصائية Statistical Estimation Approaches

٢- أساليب اختبارات الفروض الإحصائية Testing of Statistical Hypotheses Approaches

ويعتبر أسلوب المربعات الصغرى least square technique وأسلوب الإمكان الأكبر maximum likelihood technique من أهم الأساليب في القسمين السابقين.

وفيما يلي سوف نقدم نبذة تاريخية عن أسلوبي المربعات الصغرى والإمكان الأكبر كأسلوبين من أساليب بحوث العمليات المستخدمة في أشتقاق نماذج الانحدار الإحصائية.

فمنذ سنة ١٧٥٠ وأخذت مجموعة من العلماء مثل Lagrange، Bernoulli، Bays، Euler، Laplace، Gauss، ... الخ في دراسة التوزيعات الاحتمالية probability distributions لبعض الظواهر، كذلك دراسة التوزيع الاحتمالي للأخطاء المشاهدة observational errors في الظواهر المتكررة والتي تعتبر دوال في متغيرات أخرى [100,44]. فقدموا دالة كثافة الاحتمال المشتركة joint density function كدالة يمكن أستخدامها في دراسة أتساق consistency قيم المعلمات parameters في مجتمع الدراسة مع بيانات العينة sample data وسميت هذه الدالة بدالة الإمكان likelihood function، وتوالت الدراسات لأستخدام هذه الدالة في الحصول على تقديرات لمعلمات التوزيعات الاحتمالية للظواهر محل الدراسة من خلال بيانات العينة.

وفي سنة ١٩٣٠ قدم Fisher الفروض التي إذا توافرت أمكن الحصول على أفضل تقديرات لمعلمات التوزيع الاحتمالي أو معلمات نموذج الانحدار وسميت هذه الطريقة بطريقة الإمكان الأكبر Maximum likelihood Method. وتعتبر طريقة الإمكان الأكبر من أساليب الأمثلية التقليدية classical optimization technique وسوف نقدم هذه الطريقة كأحدي طرق البرمجة الرياضية في الفصل (١٨-٧).

بالمثل منذ القرن الثامن عشر استخدمت أساليب الأمثلية التقليدية classical optimization technique أيضاً في تقدير معالم نماذج الانحدار، حيث يعتبر أول من أستخدم معيار مجموع مربعات الأخطاء عالم الرياضيات Legendre سنة ١٨٠٥ ولكن يعتبر أول من قدما أسلوب المربعات الصغرى least square technique كل من Gauss-Newton سنة ١٨٠٩ حيث أستخدما الطرق الحسابية calculus methods [44,48] في اشتقاق تقديرات معلمات نماذج الانحدار، كذلك تحديد الخصائص الرياضية والإحصائية لهذه التقديرات. ومن ذلك التوقيت تم تطبيق أسلوب المربعات الصغرى. ولكن يعتبر أول استخدام مباشر للبرمجة الرياضية في الإحصاء كان سنة ١٩٥٥ عندما قدم كل من Charnes, Cooper and Ferges طريقة تصغير مجموع القيم المطلقة للانحرافات minimizing sum of absolute deviations كبديل لأسلوب المربعات الصغرى [8]. ثم توالى أستخدام الأساليب المختلفة للبرمجة الرياضية في الحصول على تقديرات متحيزة biased estimators أو غير متحيزة unbiased estimators لمعلمات النماذج الإحصائية.

وفي هذا الباب سوف تقتصر دراستنا على كيفية الحصول على التقديرات الإحصائية المثلى وفقاً لعدة معايير (أو أهداف) مختلفة بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية من خلال تقديم الأساليب التالية:

١- أسلوب المربعات الصغرى least square technique

٢- أسلوب المربعات الصغرى المقيدة restricted least square technique

٣- أسلوب الإمكان الأكبر maximum likelihood technique

حيث يتم تناول الأساليب أعلاه كأساليب برمجة رياضية حيث يتيح ذلك أمكانية تطوير النماذج الإحصائية فعلى سبيل المثال:

١- أمكانية أن يتضمن النموذج أكثر من هدف (أو معيار) [83,6].

٢- أمكانية حل بعض المشاكل الإحصائية مثل التداخل الخطي [33,43].

٣- وضع شروط يرغب متخذ القرار في تحقيقها لخصائص التقديرات التي يتم اشتقاقها [28,83].

(١٨-٢) نماذج الانحدار Regression Models

إذا أعتبرنا أن المتغير التابع dependent variable (Y) دالة في المتغيرات المفسرة explicatory variables (X) حيث المتغيرات X وفي كثير من الحالات تكون متغيرات مستقلة independent variables، ويمكن أن نرمز إلى هذه الدالة بالرمز $f(X)$. بالإضافة إلى وجود متغير عشوائي آخر يؤثر على المتغير التابع Y هو ε حيث ε متغير عشوائي random variable له خصائص معينة، كما سوف نوضح ذلك فيما بعد.

فإنه يمكن وضع العلاقة بين Y ، X على النحو التالي [٢]:

$$Y = f(X,\beta) + \varepsilon \qquad (18.1)$$

والعلاقة أعلاه علاقة إحصائية تربط بين المتغير التابع Y والمتغيرات المفسرة X وتسمى بعلاقة انحدار Y على X، حيث β تمثل معلمات parameters للدالة $f(X,\beta)$ ويكون النموذج الذي يمثل العلاقة في (18.1) على النحو:

$$\hat{Y} = f(X,\hat{\beta}) \qquad (18.2)$$

ويكون هدف متخذ القرار كيفية أيجاد التقديرات $\hat{\beta}$ بحيث يمثل النموذج في (18.2) أفضل تعبير عن العلاقة في (18.1). وتوجد عدة طرق لإيجاد التقديرات $\hat{\beta}$. وبالتالي تختلف خصائص التقديرات $\hat{\beta}$ وفقاً للطريقة المستخدمة. وتختلف طرق التقدير عن بعضها وفقاً للمعيار criteria (أو الهدف objective) الذي تعتمد عليه الطريقة المستخدمة.

وتحليل الانحدار يهتم بكيفية الحصول على التقديرات $\hat{\beta}$ ، $\hat{Y}$. والاختبارات الإحصائية المرتبطة بـ $\hat{\beta}$ ، $\hat{Y}$. وفي الفصول التالية سوف نقدم بعض الطرق المستخدمة في الحصول على $\hat{\beta}$ ، $\hat{Y}$.

(١٨-٣) طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

من الفصل السابق نجد أن:

$$\varepsilon'\varepsilon = [Y - \hat{Y}]'[Y - \hat{Y}] = [Y - f(X,\hat{\beta})]'[Y - f(X,\hat{\beta})] \qquad (18.3)$$

حيث:
$$Y = [y_1, y_2, ..., y_n]' \quad , \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n]'$$
$$X_{ij} = [X_{1j}, X_{2j}, ..., X_{nj}]'$$

حيث n هو حجم العينة، y_i تشير إلى القيمة المشاهدة للمتغير التابع Y للمفردة رقم (i)، كذلك $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{im})$ هي القيم المشاهدة للمتغيرات المفسرة $X_1, X_2, ..., X_m$ للمفردة رقم (i).

والمعيار (أو الهدف) بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى هو أيجاد التقديرات $\hat{\beta}$ التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء $\left(\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^2)\right)$ أقل ما يمكن أو بعبارة أخرى [8]:

$$\text{Min. } Z = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^2) = (\varepsilon'\varepsilon) = [Y - f(X,\beta)]'[Y - f(X,\beta)] \qquad (18.4)$$

والعلاقة في (18.4) هو عبارة عن نموذج برمجة غير خطية غير مقيدة unconstrained programming model يمكن إيجاد قيم التقديرات المثلى $\hat{\beta}$ بأستخدام طرق حل نماذج البرمجة غير الخطية (أنظر الباب التاسع بالجزء الأول من الكتاب). وفيما يلي سوف نقدم كيفية حل النموذج (18.4) في الحالتين التاليتين:

<u>**الحالة الأولى:**</u> عندما تكون الدالة $f(X,\beta)$ دالة خطية في التقديرات β في هذه الحالة يسمى النموذج (18.2) بنموذج الانحدار الخطي linear regression model.

ملحوظة: العلاقة خطية في المعلمات β أو النموذج خطي في التقديرات $\hat{\beta}$.

الحالة الثانية: عندما تكون الدالة $f(X,\beta)$ دالة غير خطية في المعلمات β. في هذه الحالة يكون نموذج الانحدار غير الخطي nonlinear regression model.

نماذج الانحدار الخطية: إذا فرضنا أن العلاقة الفعلية بين المتغير التابع Y والمتغيرات المفسرة X على النحو التالي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

أو:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_m X_m + \varepsilon$$

وأيضاً يمكن كتابة العلاقة السابقة على النحو:

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \qquad (18.5)$$

أو:

$$Y = \beta' X + \varepsilon$$

ووفقاً لمعيار تصغير مجموع مربع الأخطاء – فيكون الهدف على النحو التالي:

$$\text{Min. } Z = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} \beta_j X_{ij} \right)^2 \qquad (18.6)$$

والنموذج (18.6) نموذج برمجة غير خطية في المعلمات β_j وهو نموذج غير مقيد أيضاً. ونظراً لأن الدالة $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} \beta_j X_{ij} \right)^2$ دالة محدبة convex function

فبأستخدام شروط كون توكر [٣،٤] يمكن الحصول على التقديرات المثلى للمعلمات β_j وسوف نشير لها بالرمز $\hat{\beta}_j$ وذلك بإيجاد المشتقات الجزئية $\frac{\partial Z}{\partial \beta_j}$، $j = 0,1,..,m$ ومساوتها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta_j} = -2X\backslash Y - 2X\backslash X\hat{\beta} = 0 \longrightarrow \qquad (18.7)$$

وتسمى المعادلات (18.7) بالمعادلات الطبيعية normality equations ومن المعادلة السابقة نجد أن:

$$X\backslash X\hat{\beta} = X\backslash Y$$

$$\hat{\beta} = (X\backslash X)^{-1} X\backslash Y \qquad (18.8)$$

وفي سنــة ١٩٠٠ تــم نشــر نظــريــة جــاوس مـــاركوف Gauss-Markov Theorem التي مؤدها إذا كانت المتغيرات العشوائية ε_i ، $i = 1,2,....,n$ متغيرات عشوائية مستقلة توقع كل منها يساوى صفر ولها نفس التباين σ^2 ، أو بعبارة أخرى:

$$E(\varepsilon_i) = 0 \ , \quad Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ , \quad cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \, , i \neq j$$

وبالتالي

$$Var(Y) = \sigma^2 I$$

فإن التقديرات $\hat{\beta}$ التي يتم الحصول عليها باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

١- تقديرات غير متحيزة unbiased estimators.

٢- لها أقل تباين.

٣- تقديرات خطية linear estimators(بمعنى أن أي توليفة خطية في التقديرات $\hat{\beta}$ تكون أيضاً تقدير غير متحيز له أقل تباين أيضاً).

ولذلك إذا توافرت الفروض أعلاه فإن تقديرات المربعات الصغرى تسمى أفضل تقديرات خطية غير متحيزة The Best Linear Unbiased Estimators (BLUE).

ومما سبق يتضح أن إيجاد التقديرات $\hat{\beta}$ بأستخدام طريقة المربعات الصغرى في حالة عدم توافر بعض أو كل الفروض أعلاه فإن هذا يؤدي إلى الحصول على تقديرات لا تتوافر فيها الخصائص المذكورة أعلاه.

وفي الفصل (١٨-٤) سوف نقدم نظرية جاوس ماركوف بالتفصيل.

وفي الحالة الخاصة عندما يوجد متغير واحد مفسر أي عندما:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \qquad (18.9)$$

ويكون النموذج المقدر:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \qquad (18.10)$$

فإنه يمكن إيجاد كل من $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ من المعادلتين التاليتين:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i X_i y_i - \left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_i y_i\right) \div n}{\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2 \div n} \qquad (18.11)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_i y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \left(\frac{\sum_i X_i}{n}\right) \qquad (18.12)$$

<u>مثال (١٨-١)</u> الجدول التالي يوضح الكميات المعروضة من أحدى السلع Y (بالألف وحدة) وسعر بيع الوحدة الواحدة X بالجنية في عدة سنوات.

جدول (١٨-١)

X بالجنيه	8	5	7	7	8	6	5	4	3	6	4	7	8	8	7
Y بالألف وحدة	12	10	12	13	15	11	8	8	5	9	6	10	15	11	11

والمطلوب: ١- أرسم البيانات بالجدول السابق في شكل يوضح اتجاه العلاقة بين X ، Y (شكل الانتشار scattor diagram).

٢- تحت افتراض أن المتغير العشوائي ε يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين σ^2 أوجد نموذج انحدار Y على X ثم عقب على الناتج.

٣- قدر قيمة Y (أي أوجد $\hat{Y}$) عندما $X = 10$.

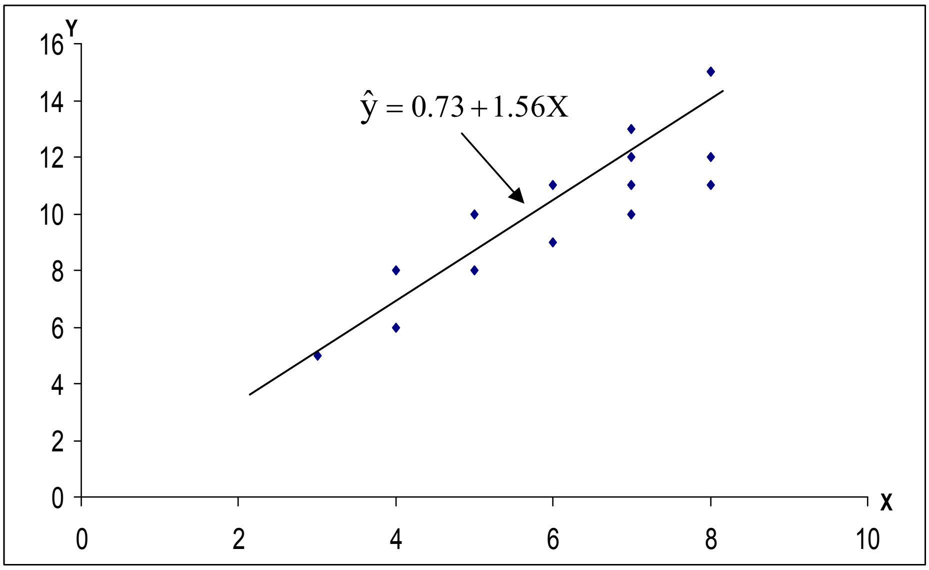
الحل: ١- الشكل التالي يوضح شكل الانتشار. ومن الشكل يتضح أن اتجاه العلاقة اتجاه خطي ومتزايد.

٢- من الشكل يمكن أفتراض أن العلاقة بين X ، Y على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \qquad (1)$$

حيث β_0, β_1 معلمات النموذج، ε هو متجه قيم مشاهدات المتغير العشوائي بتوقع صفر وتباين يساوى σ^2 وتتبع التوزيع المعتاد (الطبيعي).

شكل (١٨-١)



فإن أفضل خط (أي الخط الذي يمثل هذه البيانات) يأخذ الصيغة التالية:

$$E(Y) = \hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \qquad (2)$$

حيث أن النموذج في (2) نموذج خطي. فلإيجاد التقديرات $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى نكون الجدول التالي.

وبالتعويض من الجدول (١٨-٢) في المعادلتين (18.11),(18.12) نجد أن:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i X_i y_i - \left(\sum_i X_i\right)\left(\sum_i y_i\right) \div n}{\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2 \div n} = \frac{1027 - (93)(156)/15}{615 - (93)^2/15} = 1.56$$

جدول (١٨-٢)

Y	X	XY	X^2
12	8	96	64
10	5	50	25
12	7	84	49
13	7	91	49
15	8	120	64
11	6	66	36
8	5	40	25
8	4	32	16
5	3	15	9
9	6	54	36
6	4	24	16
10	7	70	49
15	8	120	64
11	8	88	64
11	7	77	49
$\sum Y = 156$	$\sum X = 93$	$\sum XY = 1027$	$\sum X^2 = 615$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_i y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \left(\frac{\sum_i X_i}{n} \right) = \frac{156}{15} - 1.56\left(\frac{93}{15}\right) = 0.73$$

ويصبح نموذج الانحدار على النحو:

$$\hat{Y} = 0.73 + 1.56\,X$$

حيث تسمى $\hat{\beta}_1$ بمعامل انحدار Y على X، وعندما تكون قيمة $\hat{\beta}_1$ قيمة موجبة فإن العلاقة بين X ، Y تكون علاقة متزايدة increasing relation وزيادة X يؤدي إلى زيادة Y. وإذا كانت قيمة $\hat{\beta}_1$ قيمة سالبة فإن العلاقة بين X ، Y تكون علاقة متناقصة decreasing relation، أما إذا كانت $\hat{\beta}_1$ تساوي صفر فهذا يعنى أنه لا توجد علاقة خطية بين X ، Y أو قد لا توجد علاقة بين X ، Y.

٣- عندما $X = 10$ فإن:

$\hat{Y} = 0.73 + 1.56\,(10) = 16.33$ ألف وحدة $= 16330$ وحدة

<u>مثال (١٨-٢)</u> الجدول التالي يوضح الكمية Y المطلوبة من سلعة ما، وسعر بيع الوحدة X_1 بالجنية كذلك سعر بيع الوحدة الواحدة من السلعة البديلة لها X_2 بالجنية أيضاً.

أوجد نموذج انحدار Yعلى كل من X_1 ، X_2 بافتراض أن العلاقة بين Y ، X_1 ، X_2 علاقة خطية، وبأفتراض أن المتغير العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين σ^2.

جدول (١٨-٣)

الكمية المطلوب (Y)	100	80	70	60	65
سعر بيع الوحدة (X_1)	2	3	4	9	9
سعر بيع الوحدة البديلة (X_2)	4	6	6	8	7

الحل: بما أن العلاقة خطية بالتالي فإن:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

وبالتالي فإن

$$E(Y) = \hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$$

من العلاقة (18.8) نجد أن:

$$\hat{\beta} = (X^{\prime} X)^{-1} X^{\prime} Y$$

حيث: $Y = [100 \quad 80 \quad 70 \quad 60 \quad 65]^{\prime}$, $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3]^{\prime}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}_{5\times 3} \longrightarrow X^{\prime} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

وبالتالي فإن:

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 31 \\ 27 & 191 & 185 \\ 31 & 185 & 201 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ملحوظة: المصفوفة $(X'X)$ مصفوفة متماثلة symmetric. وبأيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ نحصل على المصفوفة التالية [6]:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 9.468 & 0.70 & -2.11 \\ 0.70 & .010 & -0.20 \\ -2.11 & -0.20 & 0.51 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.468 & 0.70 & -2.11 \\ 0.70 & .010 & -0.20 \\ -2.11 & -0.20 & 0.51 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 5} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 70 \\ 60 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 128 \\ -1.56 \\ -7.19 \end{bmatrix}$$

حل آخر: يمكن إيجاد التقديرات $\hat{\beta}$ من حل المعادلات الطبيعية في (18.8) على النحو التالي:

بما أن: $$Z = \sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)^2 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum X_1(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \hat{\beta}_2} = -2\sum X_2(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) = 0 \qquad (3)$$

ويمكن أعادة كتابة المعادلات (3)–(1) على النحو التالي:

$$\sum y = n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_1 - \hat{\beta}_2 \sum X_2 \qquad (4)$$

$$\sum X_1 y = \hat{\beta}_0 \sum X_1 - \hat{\beta}_1 \sum X_1^2 - \hat{\beta}_2 \sum X_1 X_2 \qquad (5)$$

$$\sum X_2 y = \hat{\beta}_0 \sum X_2 - \hat{\beta}_1 \sum X_1 X_2 - \hat{\beta}_2 \sum X_2^2 \qquad (6)$$

ولحل المعادلات الخطية في $\hat{\beta}$ في (6)–(4) نكون الجدول التالي:

جدول (١٨–٤)

Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2
100	2	4	200	400	4	16	8
80	3	6	240	480	9	36	18
70	4	6	280	420	16	36	24
60	9	8	540	480	81	64	72
65	9	7	585	455	81	49	63
$\sum Y = 375$	$\sum X_1 = 27$	$\sum X_2 = 31$	$\sum X_1Y = 1845$	$\sum X_2Y = 2235$	$\sum X_1^2 = 191$	$\sum X_2^2 = 201$	$\sum X_1X_2 = 185$

وبالتعويض بالقيم في الجدول السابق في المعادلات (6)-(4) نحصل على المعادلات الخطية التالية:

$$375 = 5\hat{\beta}_0 + 27\hat{\beta}_1 + 31\hat{\beta}_2$$

$$1845 = 27\hat{\beta}_0 + 191\hat{\beta}_1 + 185\hat{\beta}_2$$

$$2235 = 31\hat{\beta}_0 + 185\hat{\beta}_1 + 201\hat{\beta}_2$$

بحل المعادلات أعلاه نجد أن:

$$\hat{\beta}_0 = 128 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = -1.56 \quad , \quad \hat{\beta}_2 = -7.19 \longrightarrow$$

$$\hat{Y} = 128 - 1.56X_1 - 7.19X_2$$

(٤-١٨) الخصائص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

Statistical Properties of the Least Squares Estimators

في الفصل السابق أعتبرنا العلاقة الخطية بين Y ، X على النحو:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad , \quad E(\varepsilon) = 0 \;, \;\; Var(\varepsilon) = \sigma^2$$

وفي هذه الحالة يكون نموذج الانحدار الخطى على النحو:

$$E(Y) = \hat{Y} = X\hat{\beta}$$

حيث تم الحصول على التقديرات $\hat{\beta}$ بأستخدام طريقة المربعات الصغرى، وتم إثبات أن التقديرات $\hat{\beta}$ على النحو التالي:

$$\hat{\beta} = (X\backslash X)^{-1} X\backslash Y$$

حيث:

$$(X\backslash X) = \begin{bmatrix} n & \sum_i X_{i1} & \sum_i X_{i2} & \ldots\ldots & \sum_i X_{ik} \\ \sum_i X_{i1} & \sum_i X_{i1}^2 & \sum_i X_{i1}X_{i2} & \ldots\ldots & \sum_i X_{i1}X_{ik} \\ \sum_i X_{i2} & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : \\ \sum_i X_{ik} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \sum_i X_{ik}^2 \end{bmatrix}_{(k+1)(k+1)}$$

$$X\backslash Y = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i X_{i1} y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_i X_{ik} y_i \end{bmatrix}_{(k+1)(1)}$$

حيث k عدد المتغيرات المفسرة ، (k+1) عدد المعلمات.

وفيما يلي سوف نقدم أهم الخصائص الإحصائية للتقديرات $\hat{\beta}$ من خلال النظريات التالية.

<u>نظرية (١٨-١):</u> إذا كان $E(Y) = X\beta$ ، فإن التقديرات $\hat{\beta}$ تقديرات غير متحيزة للمعلمات unbiased estimators for β.

الإثبات:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\left[(X\backslash X)^{-1} X\backslash Y\right] \\ &= (X\backslash X)^{-1} X\backslash E(Y) \\ &= (X\backslash X)^{-1} X\backslash X\beta \\ &= I\beta = \beta \qquad (18.13) \end{aligned}$$

<u>نظرية (١٨-٢):</u> إذا كان ε متغيرات عشوائية مستقلة توقع وتباين كل منها يساوى صفر ، σ^2 على الترتيب بالتالي:

$$\text{cov}(Y) = \sigma^2 I$$

فإن مصفوفة التغاير للتقديرات $\hat{\beta}$ على النحو التالي:

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^\backslash X)^{-1} \qquad (18.14)$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة.

الإثبات:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\hat{\beta}) &= \text{cov}\left((X^\backslash X)^{-1} X^\backslash Y\right) \\
&= (X^\backslash X)^{-1} X^\backslash \,\text{cov}(Y)[(X^\backslash X)^{-1} X^\backslash]^\backslash \\
&= (X^\backslash X)^{-1} X^\backslash (\sigma^2 I) X (X^\backslash X)^{-1} \\
&= \sigma^2 (X^\backslash X)^{-1} X^\backslash X (X^\backslash X)^{-1} \\
&= \sigma^2 (X^\backslash X)^{-1} I \\
&= \sigma^2 (X^\backslash X)^{-1}
\end{aligned}$$

حالة خاصة: إذا كان

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

فإن:

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \text{cov}\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_0) & \text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \text{var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n \sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_i X_i^2 & -\sum_i X_i \\ -\sum_i X_i & n \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum_i X_i^2 \big/ n}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} \qquad (18.15)$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} \qquad (18.16)$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\sigma^2 \overline{X}}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} \qquad (18.17)$$

حيث $\overline{X}$ متوسط (الوسط الحسابي) قيم X_i ، حيث $i = 1,2,...,n$.

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n} \qquad (18.18)$$

<u>مثال (١٨-٣):</u> الجدول التالي يوضح قيم المتغير التابع Y ، والقيم المناظرة للمتغيرات المفسرة X_1 ، X_2 [6].

جدول (١٨-٥)

Y	2	3	2	7	6	8	10	7	8	12	11	14
X_1	0	2	2	2	4	4	4	6	6	6	8	8
X_2	2	6	7	5	9	8	7	10	11	9	15	13

بافتراض أن العلاقة بين Y وكل من X_1 ، X_2 علاقة خطية على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

حيث ε متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التباين σ^2 .

المطلوب: ١- أوجد تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$.

٢- أحسب مصفوفة $\operatorname{cov}(\hat{\beta})$.

الحل: من الجدول نجد أن:

$$Y=\begin{bmatrix}2\\3\\2\\7\\6\\8\\10\\7\\8\\12\\11\\14\end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&6\\1&2&7\\1&4&5\\1&4&9\\1&4&8\\1&4&7\\1&6&10\\1&6&11\\1&6&9\\1&8&15\\1&8&13\end{bmatrix} \quad , \quad X\backslash X=\begin{bmatrix}12&52&102\\52&296&536\\102&536&1004\end{bmatrix}$$

$$X\backslash Y=\begin{bmatrix}90\\482\\872\end{bmatrix} \quad , \quad (X\backslash X)^{-1}=\begin{bmatrix}0.97476&0.2429&-0.22871\\0.2429&0.16207&-0.1112\\-0.22871&-0.1112&0.0836\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X\backslash X)^{-1}X\backslash Y=\begin{bmatrix}5.3754\\3.0118\\-1.2855\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta})=\sigma^2(X\backslash X)^{-1}$$

$$=\sigma^2\begin{bmatrix}0.97476&0.2429&-0.22871\\0.2429&0.16207&-0.1112\\-0.22871&-0.1112&0.0836\end{bmatrix}$$

نظرية (١٨-٣): نظرية جاوس ماركوف Gauss-Markov Theorem.

إذا فرضنا أن:

$$E(Y) = X\beta \qquad , \qquad \text{cov}(Y) = \sigma^2 I$$

بحيث $\hat{\beta}$ تشير إلى تقديرات المربعات الصغرى، فإن التقديرات $\hat{\beta}$ لها أقل تباين بالنسبة لجميع التقديرات الأخرى غير المتحيزة لمعلمات β.

الإثبات: أنظر مرجع [6, page 130].

ومن النظريات السابقة يتضح أن تقديرات المربعات الصغرى تعتبر:

١- أفضل تقديرات Best Estimators (BE) حيث أن $\hat{\beta}$ تعتبر أفضل حل للنموذج (18.4) global solution.

٢- تقديرات خطية Linear Estimators (LE) بمعنى أن $\hat{\beta}$ دالة خطية في Y حيث أن $\hat{\beta}_j = a'_j Y$ حيث a'_j هو الصف رقم j في المصفوفة $\left((X'X)^{-1}X'\right)$.

٣- تقديرات غير متحيزة Unbiased Estimators (UE).

لذلك تسمى أفضل تقديرات خطية غير متحيزة وللاختصار نكتب (BLUE).

(١٨-٥) طريقة المربعات الصغرى المقيدة

Restricted Least Squares Method

في كثير من الحالات توجد بعض القيود الخطية في شكل معادلات أو متباينات في معلمات العلاقة ويرغب متخذ القرار في أيجاد تقديرات المربعات الصغرى في وجود هذه القيود. وفيما يلي سوف نوضح النموذج ثم حله واشتقاق تقديرات المعلمات.

النموذج:

$$\text{Min. } Z = \varepsilon'\varepsilon \qquad (18.19)$$

$$\text{S.T. } A\beta = C \qquad (18.20)$$

والنموذج (18.20)–(18.19) نموذج برمجة غير خطية (دالة الهدف غير خطية ولكنها محدبة) والقيود خطية في هذه الحالة (وممكن أن تكون غير خطية أيضاً)، وبالتالي فهو نموذج محدب [8] بحله يمكن الحصول على القيم المثلى لتقدير المعلمات β على النحو التالي.

١- نكون دالة لاجرانج L حيث:

$$L = \varepsilon'\varepsilon + (\beta'A' - C)\lambda \qquad (18.21)$$

حيث λ معاملات لأجرانج.

ولاشتقاق نقط الاستقرار للدالة L (التي هي نقط استقرار أيضاً للدالة Z [102]) نوجد المشتقات $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ على النحو التالي ومساوتها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$-2X'Y + 2X'X\beta + A'\lambda = 0 \qquad (18.22)$$

$$A\beta = C \qquad (18.23)$$

وبحل المعادلات (18.22) نحصل على تقديرات المعلمات β والتي سوف نشير لها بـ $\hat{\beta}_R$ (حيث أنها تأخذ في الاعتبار القيود في (18.23)). وبالتعويض بالطرف الأيسر في (18.23) في الطرف الأيسر للعلاقة (18.22) ثم اشتقاق $\hat{\beta}_R$ تصبح على النحو التالي:

$$\hat{\beta}_R = (X'X)^{-1}X'Y - \frac{1}{2}(X'X)^{-1}A'\hat{\lambda}_R \qquad (18.24)$$

ويمكن التعبير عن التقديرات المقدرة $\hat{\beta}_R$ بدلالة تقديرات المربعات الصغرى غير المقيدة $\hat{\beta}$ على النحو التالي:

بما أن $\hat{\beta}_R$ تحقق القيود في (18.23) بالتالي:

$$C = A\hat{\beta}_R = A\hat{\beta} - \frac{1}{2}A(X'X)^{-1}A'\hat{\lambda}_R \qquad (18.25)$$

بالتعويض في الطرف الأيمن في (18.24) بالطرف الأيمن في (18.25) أي أيجاد $\hat{\beta}_R$ بدلالة $\hat{\beta}$ حيث أن:

$$-\frac{1}{2}\hat{\lambda}_R = \left[A(X'X)^{-1}A'\right]^{-1}(C - A\hat{\beta}) \qquad (18.26)$$

من (18.25) وبالتعويض بـ (18.26) في (18.24) نجد أن:

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}A'\left[A(X'X)^{-1}A'\right]^{-1}(C - A\hat{\beta}) \qquad (18.27)$$

وفي حالة إذا كان المتغيرات ε تخضع لنظرية ماركوف فإنه وفقاً لنظرية جاوس ماركوف فإن التقديرات $\hat{\beta}_R$ تقديرات غير متحيزة unbiased estimators أيضاً.

__مثال (١٨-٤):__ الجدول التالي يوضح الكمية المعروضة Y من سلعة معينة وفقاً لسعر بيع السلعة X_1 بالجنيه، كذلك وفقاً لسعر بيع الوحدة الواحدة من السلعة المكملة لها X_2 بالجنيه أيضاً.

جدول (١٨-٦)

الكمية المعروضة Y	101	132	88	115	92	105	135	166	106	145
سعر الوحدة X_1	10	15	9	12	8	13	15	20	11	17
سعر السلعةالبديلة X_2	10	12	8	11	10	7	14	15	10	13

وبافتراض العلاقة الخطية بين Y ، X_1 ، X_2. ويرغب متخذ القرار في بناء نموذج مناسب لتقدير الكميات المعروضة باستخدام قيم معينة لسعر الوحدة من السلعة X_1 وسعر السلعة من الوحدة البديلة بحيث يكون معدل تغير الكمية المعروضة بالنسبة لسعر بيع الوحدة من السلعة يساوى 7 (أي $\beta_1 = 7$).

الحل: من الفصل السبق نجد أن النموذج المقيد على النحو التالي:

$$\text{Min. } Z = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)^2$$

$$\text{S.T.} \qquad \beta_1 = 7$$

نكون دالة لأجرانج على النحو التالي:

$$L = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)^2 + \left\{ \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 7 \right\} \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = -2 \sum_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) + 0 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -2 \sum_i X_1 (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) + 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = -2 \sum_i X_2 (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{\beta}_1 - 7 = 0 \qquad (4)$$

ويمكن أعادة كتابة المعادلات (4)-(1) على النحو التالي:

$$\sum_i y_i = n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_1 - \hat{\beta}_2 \sum X_2 \qquad (5)$$

$$\sum_i X_1 y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_1 - \hat{\beta}_1 \sum X_1^2 - \hat{\beta}_2 \sum X_1 X_2 + 1 \qquad (6)$$

$$\sum_i X_2 y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_2 - \hat{\beta}_1 \sum X_1 X_2 - \hat{\beta}_2 \sum X_2^2 \qquad (7)$$

وبالتعويض في المعادلات (7)-(5) من القيم بالجدول التالي، نجد أن:

$$\hat{\beta}_{0(R)} = 37.85 \quad , \quad \hat{\beta}_{1(R)} = 7 \quad , \quad \hat{\beta}_{2(R)} = -0.51$$

ويصبح نموذج الانحدار على النحو:

$$\hat{Y} = 37.85 + 7X_1 - 0.51X_2$$

جدول (١٨-٧)

Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2
101	10	10	1010	1010	100	100	100
132	15	12	1980	1584	225	144	180
88	9	8	792	704	81	64	72
115	12	11	1380	1265	144	121	132
92	8	10	736	920	64	100	80
105	13	7	1365	735	169	49	91
135	15	14	2025	1890	225	196	210
166	20	15	3320	2490	400	225	300
106	11	10	1166	1060	121	100	110
145	17	13	2465	1885	289	169	221
$\sum Y = 1185$	$\sum X_1 = 130$	$\sum X_2 = 110$	$\sum X_1Y = 16239$	$\sum X_2Y = 13543$	$\sum X_1^2 = 1818$	$\sum X_2^2 = 1268$	$\sum X_1X_2 = 1496$

ومن نموذج الانحدار يتضح أن:

$$\hat{Y} = 37.85 + 7X_1 - 0.51X_2$$

١- العلاقة بين X_1 , Y علاقة طردية حيث $\hat{\beta}_1 = +7$.

٢- العلاقة بين X_2 , Y علاقة عكسية حيث $\hat{\beta}_2 = -0.51$.

ملحوظة: في حالة عدم استقلال X_1, X_2 استقلال تام في هذه الحالة قد يوجد تداخل خطى بين X_1, X_2، ويمكن معالجة ذلك بأساليب مختلفة، وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل التالي.

(١٨-٦) مشكلة التداخل الخطي Collinearity Problem

من الفروض التي بنيت عليها طريقة المربعات الصغرى للحصول على التقديرات $\hat{\beta}$ افتراض الاستقلال الإحصائي للمتغيرات المفسرة X_j عن بعضها، بحيث $j = 0,1,2,\dots,k$.

ولكن في كثير من المشاكل التطبيقية تكون المتغيرات المفسرة X_j (أو بعضها) غير مستقلة ويوجد بينها شبة ارتباط خطي بمعنى [8,33,34]:

$$X_j \approx \sum_{\substack{t=0 \\ t\neq j}}^{k} \alpha_t X_t \qquad (18.28)$$

وفي هذه الحالة يكون محدد المصفوفة ($X'X$) يقترب من الصفر، أو بعبارة أخرى:

$$\det(X'X) \approx 0 \qquad (18.29)$$

ويترتب على وجود شبة أرتباط خطي بين المتغيرات المفسرة (أو بعضها) حدوث تضخم في قيم التقديرات $\hat{\beta}$ وتبايناتها $\mathrm{var}(\hat{\beta})$ أو تكون أشارة بعض التقديرات ولتكن $\hat{\beta}_j$ لا تعكس العلاقة الفعلية بين المتغير المفسر X_j والمتغير التابع Y (بمعنى إذا كانت العلاقة بين X_j، Y علاقة طردية أي يجب أن يكون $\hat{\beta}_j$ بإشارة موجبة ولكن عند أشتقاقها تكون أشرتها سالبة [6,7])

وللحد من تأثير مشكلة التداخل الخطي، أي التقليل من التأثير السلبي لهذه المشكلة قدمت عدة تقديرات كدوال في تقديرات المربعات الصغرى منها [33]:

١- تقديرات أنحدار التل Rigde's Estimators.

٢- تقديرات ستين Stien's Estimators.

٣- تقديرات المكونات الأولية Principal Component's Estimators

وفي هذا الفصل سوف نقدم تقديرات انحدار التل $\hat{\beta}^*$ والتي تعتمد على تصغير قيم التقديرات $\hat{\beta}$ بنسبة معينة. وذلك من خلال أفتراض المقدار الثابت k بحيث يؤدي أضافته إلى عناصر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ لتصبح $(X'X+kI)^{-1}$ فإن ذلك يؤدي إلى تصغير تباينات التقديرات $\hat{\beta}^*$ عن تباينات التقديرات $\hat{\beta}$، وتسمى التقديرات بعد الإضافة بتقديرات التل وسوف نرمز لها بالرمز $\hat{\beta}^*$. وفيما يلي نوضح العلاقة بين تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ وتقديرات التل $\hat{\beta}^*$ على النحو التالي:

$$\hat{\beta}^* = (X'X+kI)^{-1}X'Y \qquad , \quad k \geq 1 \qquad (18.30)$$
$$= (X'X+kI)^{-1}X'X\hat{\beta}$$
$$= [I + k(X'X)]^{-1}\hat{\beta} \qquad (18.31)$$

حيث I مصفوفة الوحدة.

<u>ملحوظة</u>: يوجد طرق متعددة لأختبار وجود تداخل خطي بين المتغيرات المفسرة لدراستها أنظر المرجع [6,33,34].

<u>مثال (١٨-٥)</u> الجدول التالي يوضح قيم المتغير التابع Y والمتغيران المفسرين X_1 ، X_2 على النحو التالي:

جدول (١٨-٨)

Y	1	4	8	10	12	$\sum Y = 35$
X_1	0	1	2	3	4	$\sum X_1 = 10$
X_2	0	2	5	6	7	$\sum X_2 = 20$

١- بأستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد نموذج انحدار Y على X_1 ، X_2 بأفتراض أن العلاقة خطية.

٢- بأفتراض وجود ارتباط خطي بين X_1 ، X_2 أوجد تقديرات أنحدار التل للمعلمات β_0,β_1,β_3 ثم قارن التقديرات في (١) بالتقديرات في (٢).

الحل: ١- لإيجاد تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$، حيث:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

لذلك نكون الجدول التالي.

جدول (١٨-٩)

Y	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2
1	0	0	0	0	0
4	1	2	2	1	4
8	2	5	10	4	25
10	3	6	18	9	36
12	4	7	28	16	49
35	10	20	58	30	114

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 58 \\ 20 & 58 & 114 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$(X\backslash X)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.175 & -0.063 & 0.063 \\ -0.063 & -0.531 & 0.281 \\ 0.063 & 0.281 & 0.156 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -0.175 & -0.063 & 0.063 \\ -0.063 & -0.531 & 0.281 \\ 0.063 & 0.281 & 0.156 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 98 \\ 152 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.723 \\ -9.326 \\ 53.455 \end{bmatrix}$$

٢- بما أن تقديرات انحدار التل $\hat{\beta}^*$ على النحو:

$$\hat{\beta}^* = (X\backslash X + kI)^{-1} X\backslash Y$$

حيث:

$$(X\backslash X + kI) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 58 \\ 20 & 58 & 114 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 10 & 35 & 58 \\ 20 & 58 & 119 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$(X\backslash X + kI)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.151 & -0.006 & -0.023 \\ -0.006 & 0.149 & -0.072 \\ -0.023 & -0.072 & 0.047 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} 0.151 & -0.006 & -0.023 \\ -0.006 & 0.149 & -0.072 \\ -0.023 & -0.072 & 0.047 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 98 \\ 192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.281 \\ 0.988 \\ 1.163 \end{bmatrix}$$

ملاحظات: ١- رغم أن العلاقة بين X_1 ، Y علاقة طردية رغم ذلك كان معامل X_1 في تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}_1 = -9.326$. أي لا يعكس طبيعة العلاقة وذلك يرجع إلى التداخل الخطي بين X_1, X_2 وكذلك يتضح تضخم قيم $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ حيث $\hat{\beta}_1 = -9.326\ ,\ \hat{\beta}_2 = 53.455$.

٢- تقديرات انحدار التل $\hat{\beta}^*$ نجد أن:

$$\hat{\beta}_0^* = 0.281 \quad , \quad \hat{\beta}_1^* = 0.988 \quad , \quad \hat{\beta}_2^* = 1.163$$

فنجد أن تقديرات انحدار التل $\hat{\beta}^*$ تعكس طبيعة العلاقة بين Y، X_1، X_2 حيث أن أشارة كل من $\hat{\beta}_1^*$ ، $\hat{\beta}_2^*$ أشارة موجبة، تعكس العلاقة الطردية. كذلك نجد أنه لا يوجد تضخم في قيم تقديرات المعلمات β_1, β_2.

<u>مثال (١٨-٦)</u> الجدول التالي يوضح القيم المعروضة Y (بالألف وحدة) من سلعة معينة وسعر بيع الوحدة الواحدة X_1 بالجنيه. كذلك سعر بيع الوحدة الواحدة من السلعة البديلة X_2 بالجنيه.

جدول (١٨-١٠)

العرض Y (بالألف وحدة)	5	10	7	8	6	4	3	9	5	10
سعر الوحدة X_1 بالجنية	4	8	7	7	6	3	2	8	4	9
سعر الوحدة البديلة X_2 بالجنيه	8	17	15	14	11	7	5	16	9	17

بافتراض العلاقة بين Y وكل من X_1 ، X_2 علاقة خطية على النحو:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

والمتغيرات العشوائية ε يتبع كل منها التوزيع المعتاد بتوقع صفر وتباين σ^2.

المطلوب: ١- أوجد تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ ثم عقب على النتائج.

٢- وضح بيانياً أتجاه العلاقة بين X_1 ، X_2.

٣- بافتراض أن $k = 2$ أوجد تقديرات انحدار التل $\hat{\beta}^*$.

٤- قارن بين $\hat{\beta}$ ، $\hat{\beta}^*$.

الحل: ١- لإيجاد تقديرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ حيث:

$$\hat{\beta} = (X^\prime X)^{-1} X^\prime Y$$

لذلك نكون الجدول التالي. وبما أن:

$$X^\prime X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^2 \end{bmatrix}$$

بالتعويض بقيم عناصر المصفوفة $(X^\prime X)$ من الجدول نجد أن:

$$(X^\prime X) = \begin{bmatrix} 10 & 58 & 119 \\ 58 & 388 & 785 \\ 119 & 785 & 1595 \end{bmatrix}_{3\times 3} \longrightarrow$$

جدول (١٨-١١)

Y	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2
5	4	8	32	16	64
10	8	17	136	64	289
7	7	15	105	49	225
8	7	14	98	49	196
6	6	11	66	36	121
4	3	7	21	9	49
3	2	5	10	4	25
9	8	16	128	64	256
5	4	9	36	16	81
10	9	17	153	81	289
$\sum Y = 67$	$\sum X_1 = 58$	$\sum X_2 = 119$	$\sum X_1X_2 = 785$	$\sum X_1^2 = 388$	$\sum X_2^2 = 1595$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.079 & 0.371 & -0.263 \\ 0.371 & 0.733 & -0.388 \\ -0.263 & -0.388 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

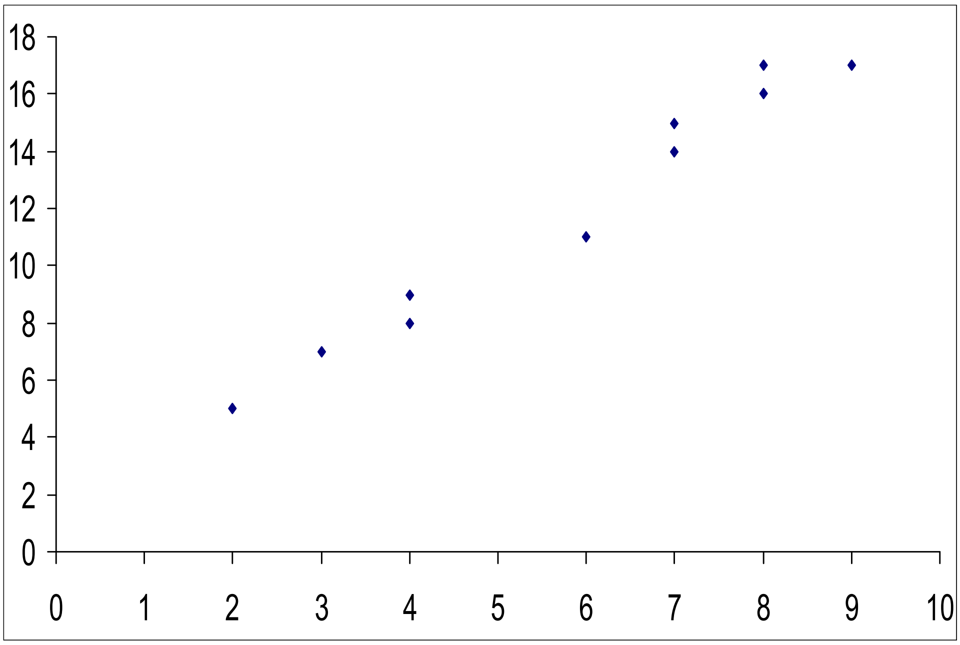
$$= \begin{bmatrix} 1.079 & 0.371 & -0.263 \\ 0.371 & 0.733 & -0.388 \\ -0.263 & -0.388 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 67 \\ 441 \\ 895 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.519 \\ 0.85 \\ 0.116 \end{bmatrix}$$

حيث:

$$X^{\backslash}Y = [67 \quad 441 \quad 895]^{\backslash}$$

٢- الشكل التالي يوضح العلاقة بين X_1 ، X_2.

شكل (٢)



من الشكل يتضح أنه يوجد ارتباط خطي.

٣- بافتراض أن $k = 2$ فإن:

$$\hat{\beta}^{*} = [I + k(X^{\backslash}X)^{-1}]^{-1}\hat{\beta}$$

$$[I + k(X^{\backslash}X)^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1.079 & 0.371 & -0.263 \\ 0.371 & 0.733 & -0.388 \\ -0.263 & -0.388 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3.158 & 0.742 & -0.526 \\ 0.742 & 2.466 & -0.776 \\ -0.526 & -0.776 & 1.422 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\longrightarrow$$

$$[I+k(X'X)^{-1}]^{-1}=\begin{bmatrix} 0.350 & -0.080 & 0.089 \\ -0.080 & 0.521 & 0.255 \\ 0.089 & 0.255 & 0.895 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\longrightarrow$$

بالتعويض بـ (2) ، (3) في الطرف الأيمن لـ $\hat{\beta}^*$ نجد أن:

$$\hat{\beta}^*=\begin{bmatrix} 0.350 & -0.080 & 0.089 \\ -0.080 & 0.521 & 0.255 \\ 0.089 & 0.255 & 0.895 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.519 \\ 0.85 \\ 0.116 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.124 \\ 0.431 \\ 0.367 \end{bmatrix}$$

٤- بمقارنة $\hat{\beta}$ ، $\hat{\beta}^*$ نجد أن:

$$\hat{\beta}_0=0.519 \quad , \quad \hat{\beta}_0^*=0.124$$
$$\hat{\beta}_1=0.85 \quad , \quad \hat{\beta}_1^*=0.431$$
$$\hat{\beta}_2=0.116 \quad , \quad \hat{\beta}_2^*=0.367$$

رغم أن قيم تقديرات التل بالنسبة للمعلمات β_0,β_1 أقل من قيم تقديرات المربعات الصغرى، فإن تقدير التل بالنسبة للمعلمة β_2 زاد عن تقدير المربعات الصغرى.

(١٨-٧) طريقة الإمكان الأكبر Maximum Likelihood Method

تعتبر طريقة الإمكان الأكبر من أهم الطرق المستخدمة في الحصول على تقديرات إحصائية للنماذج التي تمثل الظواهر التي تتضمن متغيرات عشوائية.

وتعتبر طريقة الإمكان الأكبر أحدى طرق الأمثلية التقليدية classical optimization method منذ القرن الثامن عشر الميلادي. وفي هذا الفصل سوف نتناول طريقة الإمكان الأكبر كأحد طرق البرمجة الرياضية وخصائص التقديرات التي يتم الحصول عليها بأستخدام هذه الطريقة بصفة عامة، وبصفة خاصة أستخدام هذه الطريقة للحصول على تقديرات نماذج الانحدار الخطية بصفة خاصة.

وفيما يلي سوف نقدم أولاً تعريف دالة الإمكان، ثم تقديم نبذه تاريخية عن استخدام دالة الإمكان كأحد المعايير للحصول على تقديرات للظواهر المتضمنة العنصر العشوائي.

تعريف (١٨-١) إذا كان لدينا عينة حجمها n من المشاهدات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ ولكل منها نفس التوزيع الاحتمالي بدالة كثافة $f(X_i \mid \theta)$ حيث θ متجه معلمات parameters دالة كثافة الاحتمال. فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $X_1, X_2, ..., X_n$ وسوف نشير لها بالرمز $L(X \mid \theta)$ تعرف على النحو التالي:

$$L(X \mid \theta) = f(X_1 \mid \theta)\, f(X_2 \mid \theta) .... f(X_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid \theta) \quad (18.32)$$

وتسمى الدالة $L(X \mid \theta)$ أيضاً بدالة الإمكان likelihood function حيث θ متجه المعلمات، X متجه المشاهدات X_i.

وكما ذكرنا سابقاً، فإنه منذ القرن الثامن عشر وأهتم العلماء بدراسة الأخطاء المشاهدة observational errors للظواهر الطبيعية المتكررة، حيث اعتبروا أن الدالة $L(X|\theta)$ معيار يمكن استخدامه للحصول على تقديرات للمعلمات θ.

فدالة الإمكان تعتبر مقياس يقيس مدى أتساق المعلمات θ ببيانات العينة، فكلما زادت قيمة الدالة $L(X|\theta)$ زاد أتساق بيانات العينة بالمعلمات θ. وبالتالي يمكن الحصول على أفضل تقديرات للمعلمات θ عندما تكون الدالة $L(X|\theta)$ في نهايتها العظمى. وبالتالي فإن أفضل تقديرات لـ θ هي التقديرات التي تجعل الدالة $L(X|\theta)$ نهاية عظمى [100].

ففي سنة ١٧٧٦ أستخدم كل من Bays, Lagrange, Bernoulli وآخرين معيار (أو هدف) تعظيم دالة الإمكان:

$$\text{Max.}\, L(X|\theta) \qquad (18.33)$$

للحصول على تقديرات لمعلمات التوزيع الاحتمالي متعدد الحدود multi-nominal probability distribution. ولكن يعتبر Fisher سنة ١٩١٢ أول من استخدم معيار دالة الإمكان ($\text{Max.}\, L(X|\theta)$) في الحصول على تقديرات التوزيع المعتاد (الطبيعي). وفي سنة ١٩٣٠ قدم أهم النظريات للحصول على تقديرات الإمكان الأعظم وخصائصها تحت فروض معينة.

والنموذج في (18.33) هو نموذج برمجة رياضية يمكن حله بأستخدام أساليب البرمجة الرياضية. وفي هذا الفصل سوف نقدم طريقة الإمكان الأكبر للحصول على تقديرات نموذج الانحدار الخطي عندما تكون المتغيرات العشوائية ε متغيرات مستقلة بتوقع صفر وتباين σ^2 أي عندما $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I)$.

نظرية (١٨-٣) إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ على النحو:

$$Y = \sum_j \beta_j X_j + \varepsilon = X'\beta + \varepsilon$$

حيث ε متجه المتغيرات العشوائية المستقلة كل منها له التوزيع المعتاد بتوقع صفر وتباين σ^2 ، $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ فإن تقديرات الإمكان الأكبر $\hat{\beta}$ على النحو:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \tag{18.34}$$

الإثبات: بما أن $\varepsilon \sim N(0, \sigma I_n)$ حيث I_n متجه كل عنصر فيه يساوى واحد، بالتالي فإن دالة الإمكان $L(X|\beta)$ على النحو التالي:

$$L(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right) e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\varepsilon^2} \longrightarrow$$

$$L(X|\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right) e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(y_i - \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij})^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij})^2} \tag{18.35}$$

وبما أن قيم $\hat{\beta}_j$ التي تجعل الدالة $L(X|\beta)$ نهاية عظمى هي نفس القيم $\hat{\beta}_j$ التي تجعل الدالة $\ln L(X|\beta)$ نهاية عظمى أيضاً [6]، لذلك وللتبسيط نوجد الدالة $\ln L(X|\beta)$.

$$\ln L(X|\beta) = \ln \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij})^2} \right\}$$

$$= -n\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}(y_i - \sum_{j=0}^{k}\beta_j X_{ij})^2$$

ولإيجاد قيم β_j ، $j = 1,2,...k$ التي تجعل الدالة $\ln L(X|\beta)$ أو $L(X|\beta)$ نهاية عظمى نوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j}$ ، $j = 1,2,...k$ ومساوتها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}(y_i - \sum_{j=0}^{k}\hat{\beta}_j X_{ij}) = 0 \quad , \quad j = 0,1,...,k \qquad (18.36)$$

ومجموعة المعادلات (18.36) يمكن كتابتها على النحو:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}(y_i - \sum_{j=0}^{k}\beta_j X_{ij}) = 0$$

أو:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} y_i = \sum_{j=0}^{k}\hat{\beta}_j X_{ij} \qquad (18.37)$$

حيث أن $X_{i0} = 1$ لجميع قيم i وتسمى المعادلات (18.37) بالمعادلات الطبيعية normality equations ويمكن أعادة كتابتها في صورة مصفوفات على النحو التالي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \qquad (18.38)$$

ملحوظة: تقديرات الإمكان الأكبر في (18.38) تكافئ تقديرات المربعات الصغرى في (18.8)، وبالتالي لها نفس خصائص تقديرات المربعات الصغرى في هذه الحالة.

مثال(١٨-٧) الجدول التالي يوضح قيم المشاهدات للمتغير التابع Y والقيم المناظرة لها للمتغيرات المفسرة X_1 ، X_2 على الترتيب.

جدول (١٨-١٢)

Y	10	17	2	13	18	9	7	20	25	30
X_1	1	5	3	4	5	0	2	8	9	10
X_2	1	2	3	2	1	0	2	2	1	0

إذا فرضنا أن العلاقة بين Y وكل من X_1 ، X_2 على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

حيث $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ ، I_n متجه من الترتيب $(n \times 1)$ كل عنصر فيه يساوى واحد.

المطلوب: ١- كون دالة الإمكان كدالة في المعلمات β ، σ^2.

٢- كون نموذج الإمكان الكبر، ثم أوجد تقديرات كل من $\hat{\beta}$ ، $\hat{\sigma}^2$.

الحل: من العلاقة أعلاه

$$\varepsilon = Y - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2$$

١- دالة الإمكان

$$L(\varepsilon \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \varepsilon_i^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{10} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)^2}$$

٢- نموذج الإمكان

$$\text{Max. } L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{10} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(y_i-\beta_0-\beta_1X_1-\beta_2X_2)^2}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ متغيرات حقيقية

$\sigma^2 \geq 0$

وبما أن قيم β ، σ^2 التي تجعل الدالة L نهاية عظمى هي نفسها القيم التي تجعل الدالة $\ln L$ نهاية عظمى. حيث يمكن إيجاد التقديرات $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ بأيجاد $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}$ ومساوتها بالصفر على النحو التالي:

$$\ln L = -10 \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10} y_i - \beta_0 - \beta_1X_{i1} - \beta_2X_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = -\frac{-2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1X_{i1} - \hat{\beta}_2X_{i2}) = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\sum_i X_{i1} + \hat{\beta}_2\sum_i X_{i2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = -\frac{-2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}X_{i1}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1X_{i1} - \hat{\beta}_2X_{i2}) = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_{i1}y_i = \hat{\beta}_0\sum_i X_{i1} + \hat{\beta}_1\sum_i X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2\sum_i X_{i1}X_{i2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} = -\frac{-2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}X_{i2}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1X_{i1} - \hat{\beta}_2X_{i2}) = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_{i2}y_i = \hat{\beta}_0\sum_i X_{i2} + \hat{\beta}_1\sum_i X_{i1}X_{i2} + \hat{\beta}_2\sum_i X_{i2}^2 \qquad (3)$$

والمعادلات (3)-(1) تمثل المعادلات الطبيعية يمكن حلها بالتعويض في (3)-(1) من الجدول التالي.

جدول (١٨-١٣)

Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2
10	1	1	10	10	1	1	1
17	5	2	85	34	25	4	10
2	3	3	6	6	9	9	9
13	4	2	52	26	16	4	8
18	5	1	90	18	25	1	5
9	0	0	0	0	0	0	0
7	2	2	14	14	4	4	4
20	8	2	160	40	64	4	16
25	9	1	225	25	81	1	9
30	10	0	300	0	100	0	0
$\sum Y = 151$	$\sum X_1 = 47$	$\sum X_2 = 14$	$\sum X_1Y = 942$	$\sum X_2Y = 173$	$\sum X_1^2 = 325$	$\sum X_2^2 = 28$	$\sum X_1X_2 = 62$

$$151 = 10\hat{\beta}_0 + 47\hat{\beta}_1 + 14\hat{\beta}_2$$

$$942 = 47\hat{\beta}_0 + 325\hat{\beta}_1 + 62\hat{\beta}_2$$

$$173 = 14\hat{\beta}_0 + 62\hat{\beta}_1 + 28\hat{\beta}_2$$

وبحل المعادلات أعلاه نجد أن:

$$\hat{\beta}_0 = 10.3032 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = 2.0993 \quad , \quad \hat{\beta}_2 = -3.6214$$

مثال (١٨-٨) فيما يلي بيانات عن المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة X_1 ، X_2 في الجدول التالي.

جدول (١٨-١٤)

Y	6	5	2	10	5	15	12	9	4	3
X_1	1	2	0	3	1	5	4	2	1	0
X_2	2	5	3	1	2	0	1	1	2	3

فإذا كانت العلاقة بين Y وكل من X_1 ، X_2 علاقة خطية على النحو التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

حيث ε متجه المتغيرات العشوائية $\varepsilon = [\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad ....., \quad \varepsilon_n]^\backprime$ حيث كل متغير ε_i يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu = 5$ وتباين $\sigma^2 = 4$.

كذلك , $Y = [y_1, \quad y_2, \quad ....., \quad y_n]^\backprime$, $X_1 = [X_{11}, \quad X_{12}, \quad ....., \quad X_{1n}]^\backprime$

$$X_2 = [X_{21}, \quad X_{22}, \quad ....., \quad X_{2n}]^\backprime$$

كذلك نموذج الأنحدار:

$$\hat{Y} = E(Y \mid X) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + 5$$

أوجد $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

الحل: بما أن دالة الإمكان L على النحو التالي:

$$L(Y,X_1,X_2\mid\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)e^{\frac{1}{\sigma^2}(y_i-\beta_0-\beta_1X_{1i}-\beta_2X_{2i}-\mu)^2}$$

$$=\left(2\sqrt{2\pi}\right)^{-n}e^{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1X_{1i}-\beta_2X_{2i}-5)^2}$$

$$\ln L(Y,X_1,X_2\mid\beta)=-n\ln\left(2\sqrt{2\pi}\right)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1X_{1i}-\beta_2X_{2i}-5)^2$$

وللحصول على تقديرات الإمكان للمعلمات β_0,β_1,β_2 نوجد $\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_j}$ ، $j=0,1,2$ ومساواة كل منها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_0}=\frac{-2}{4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_{1i}-\hat\beta_2X_{2i}-5)=0\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_{1i}-\hat\beta_2X_{2i}-5)=0\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=n\hat\beta_0+\hat\beta_1\sum_{i=1}^{n}X_{1i}+\hat\beta_2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}+5\qquad(1)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_1}=\frac{-2}{4}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}(y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1X_{1i}-\hat\beta_2X_{2i}-5)=0\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_{i1}y_i=\hat\beta_0\sum_{i=1}^{n}X_{1i}+\hat\beta_1\sum_{i=1}^{n}X_{1i}^2+\hat\beta_2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+5\qquad(2)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_2}=\frac{-2}{4}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}(y_i-\beta_0-\beta_1X_{1i}-\beta_2X_{2i}-5)=0\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_{2i}y_i=\hat\beta_0\sum_{i=1}^{n}X_{2i}+\hat\beta_1\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\hat\beta_2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}^2+5\qquad(3)$$

نكون الجدول التالي.

جدول (١٨-١٥)

Y	X_1	X_2	X_1Y	X_2Y	X_1^2	X_2^2	X_1X_2
6	1	2	6	12	1	4	2
5	2	5	10	25	4	25	10
2	0	3	0	6	0	9	0
10	3	1	30	10	9	1	3
5	1	2	5	10	1	4	2
15	5	0	75	0	25	0	0
12	4	1	48	12	16	1	4
9	2	1	18	9	4	1	2
4	1	2	1	8	1	4	2
3	0	3	0	9	0	9	0
$\sum Y = 71$	$\sum X_1 = 19$	$\sum X_2 = 20$	$\sum X_1Y = 193$	$\sum X_2Y = 101$	$\sum X_1^2 = 61$	$\sum X_2^2 = 58$	$\sum X_1X_2 = 25$

وبالتعويض من الجدول في المعادلات (3)-(1)

$$\left.\begin{aligned} 71 &= 10\hat{\beta}_0 + 19\hat{\beta}_1 + 20\hat{\beta}_2 + 5 \\ 193 &= 19\hat{\beta}_0 + 61\hat{\beta}_1 + 25\hat{\beta}_2 + 5 \\ 101 &= 20\hat{\beta}_0 + 25\hat{\beta}_1 + 58\hat{\beta}_2 + 5 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

بحل المعادلات في (4) نجد أن:

$$\hat{\beta}_0 = 3.724 \ , \ \hat{\beta}_1 = 2.356 \ , \ \hat{\beta}_2 = -0.300 \longrightarrow$$

$$\hat{Y} = 3.724 + 2.356X_1 - 0.300X_2$$

(١٨-٨) تمرينات　Exercises

(١٨-١) الجدول التالي يوضح الكميات المطلوبة من منتج معين وسعر بيع الوحدة من هذا المنتج، كذلك سعر بيع الوحدة من المنتج البديل لهذا المنتج.

جدول (١٨-١٦)

الكمية المطلوبة y	6	5	2	10	5	9	4	3
سعر بيع الوحدة X_1	1	2	0	3	1	2	1	0
سعر بيع الوحدة البديلة X_2	2	5	3	1	2	1	2	3

فإذا كانت العلاقة بين y وكل من X_1 ، X_2 علاقة خطية على النحو التالي:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

حيث ε متغير معتاد بتوقع صفر وتباين σ^2.

المطلوب: إذا فرضنا أن نموذج الأنحدار المناظر للعلاقة أعلاه

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$$

١- كون نموذج برمجة رياضية للحصول على $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ التي يحقق أقل مجموع مربعات للأخطاء $\sum \varepsilon^2$ تحت شرط: $\beta_2 > \beta_1$

٢- حدد خصائص التقديرات $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$.

٣- تنبأ بقيمة y عندما $X_1 = 150$, $X_2 = 100$.

(١٨-٢) أعتبر التمرين السابق (١٨-١) أستخدم طريقة الإمكان الأكبر في إيجاد $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ في ظل القيد $\beta_2 > \beta_1$.

(١٨-٣) الجدول التالي يوضح تطور سعر بيع الوحدة الواحدة من سلعة معينة خلال الفترة 1990-1999.

جدول (١٨-١٧)

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
سعر الوحدة بالجنية	1	2	4	6	10	12	15	16	18	20

١- أرسم شكل الانتشار الذي يوضح إتجاة العلاقة بين الزمن وسعر بيع الوحدة.

٢- أستخدم طريقة المربعات الصغرى لتقدير العلاقة بين الزمن وسعر بيع الوحدة بأفتراض أن العلاقة خطية على النحو:

$$y = a_0 + a_1 X + \varepsilon$$

حيث تشير X للسنة، y إلى سعر بيع الوحدة، كذلك ε متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع μ حيث $\mu = 10$ وتباين σ^2.

٣- قدر سعر بيع الوحدة في سنة 2010.

(١٨-٤) أعتبر التمرين السابق (١٨-٣) بأفتراض أن العلاقة بين سعر بيع الوحدة y والزمن على النحو التالي:

$$y = a_0 \, e^{a_1 X} + \varepsilon$$

بأفتراض أن ε متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين σ^2.

المطلوب: ١- باستخدام طريقة الإمكان الأكبر قدر كل من a_0 , a_1.

٢- قدر قيمة y في سنة 2010.

٣- قارن بين القيم الفعلية y والقيم المقدرة $\hat{y}$.

(١٨-٥) الجدول التالي يوضح حجم أحد المشروعات بالمليون جنيه (X) وصافي الربح بالألف جنيه (y).

جدول (١٨-١٨)

حجم المشروع بالمليون جنيه X	5	7	9	10	11	12	14	15	18	20
صافي الربح بالآلف جنيه y	140	189	218	228	236	238	231	220	165	110

١- أرسم شكل الإنتشار الذي يوضح اتجاه العلاقة بين حجم المشروع (X) وصافي الربح (y).

٢- فإذا كانت العلاقة بين X ، y على النحو التالي:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon$$

حيث ε متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع صفر وتباين σ^2.

أوجد نموذج انحدار y على X بأستخدام طريقة المربعات الصغرى.

٣- أوجد نموذج انحدار y على X بأستخدام طريقة الإمكان الأكبر.

٤- قارن بين النموذجين في (٢) ، (٣).

٥- قدر y عندما $X = 25$.

(١٨-٦) إذا فرضنا أن العلاقة بين المتغير التابع y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_t$ على النحو التالي:

$$y = \sum_{j=0}^{t} \beta_j X_j + \varepsilon$$

باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد التقديرات β_j، حيث $j = 0,1,...,t$

حيث ε متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع صفر وتباين σ^2 بحيث:

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > ..... > \beta_t$$

(١٨-٧) إذا فرضنا أن العلاقة بين المتغير التابع y والمتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_t$ على النحو التالي:

$$y = A\, e^{\sum_{j=0}^{t} \beta_j X_j} + \varepsilon$$

حيث ε متغير عشوائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع صفر وتباين σ^2.

باستخدام طريقة الإمكان الأكبر قدر كل من A, β_j، حيث $j = 0,1,...,t$.

ملحق (١): الخطوات التفصيلية لحل مثال (١٢-٩)

<u>أولاً</u>: الجدول التالي يوضح الخطوات التفصيلية لحل النموذج الجزئي (M1)

SIMPLEX TABLEAU - (Two-Phase Method)

Title: exm. 12-9,M1 (Maximize)

Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:

1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Phase 1 (Iter 1							
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Solution
z (min)	3.00	-4.00	2.00	-1.00	0.00	0.00	17.00
Rx5	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	7.00
Rx6	2.00	-5.00	1.00	-1.00	0.00	1.00	10.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n				
Phase 1 (Iter 2							
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Solution
z (min)	0.00	3.50	0.50	0.50	0.00	-1.50	2.00
Rx5	0.00	3.50	0.50	0.50	1.00	-0.50	2.00
x1	1.00	-2.50	0.50	-0.50	0.00	0.50	5.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n				
Phase 1 (Iter 3							
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00
x2	0.00	1.00	0.14	0.14	0.29	-0.14	0.57
x1	1.00	0.00	0.86	-0.14	0.71	0.14	6.43
Lower Bound	0.00	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n				
Phase 2 (Iter 4							
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Solution
z (max)	0.00	0.00	7.14	0.14	blocked	blocked	14.57
x2	0.00	1.00	0.14	0.14	0.29	-0.14	0.57
x1	1.00	0.00	0.86	-0.14	0.71	0.14	6.43
Lower Bound	0.00	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n				

ثانياً: الجدول التالي يوضح الخطوات التفصيلية لحل النموذج الجزئي (M2)

SIMPLEX TABLEAU - (Two-Phase Method)

Title: exm. 12.9,M2 -1 (Minimize)

Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:

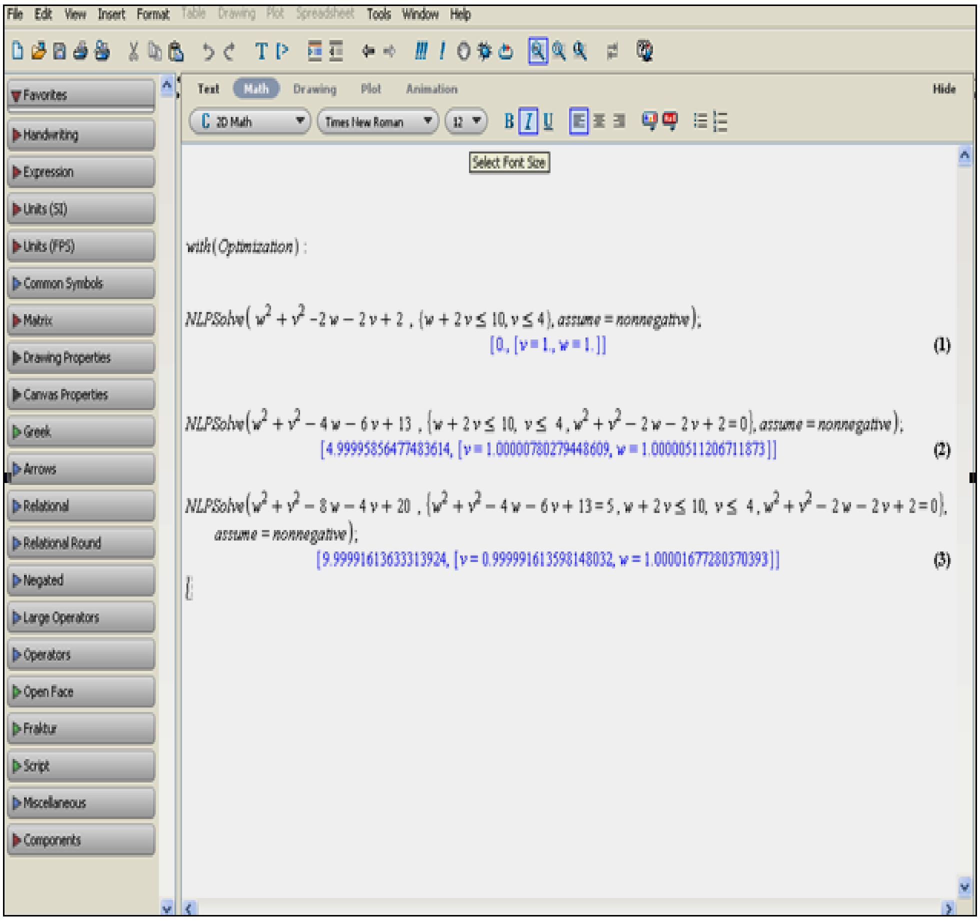
1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Phase 1 (Iter 1								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Rx7	Solution
z (min)	5.00	-1.00	-3.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	31.57
Rx5	2.00	3.00	-5.00	0.00	1.00	0.00	0.00	14.57
Rx6	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	7.00
Rx7	2.00	-5.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	10.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					
Phase 1 (Iter 2								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Rx7	Solution
z (min)	0.00	11.50	-5.50	1.50	0.00	0.00	-2.50	6.57
Rx5	0.00	8.00	-6.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	4.57
Rx6	0.00	3.50	0.50	0.50	0.00	1.00	-0.50	2.00
x1	1.00	-2.50	0.50	-0.50	0.00	0.00	0.50	5.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					
Phase 1 (Iter 3								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Rx7	Solution
z (min)	0.00	0.00	3.13	0.06	-1.44	0.00	-1.06	0.00
x2	0.00	1.00	-0.75	0.13	0.13	0.00	-0.13	0.57
Rx6	0.00	0.00	3.13	0.06	-0.44	1.00	-0.06	0.00
x1	1.00	0.00	-1.38	-0.19	0.31	0.00	0.19	6.43
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					
Phase 1 (Iter 4								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Rx7	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	0.00
x2	0.00	1.00	0.00	0.14	0.02	0.24	-0.14	0.57
x3	0.00	0.00	1.00	0.02	-0.14	0.32	-0.02	0.00
x1	1.00	0.00	0.00	-0.16	0.12	0.44	0.16	6.43
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					
Phase 2 (Iter 5								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	Rx5	Rx6	Rx7	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	-0.70	blocked	blocked	blocked	20.43
x2	0.00	1.00	0.00	0.14	0.02	0.24	-0.14	0.57
x3	0.00	0.00	1.00	0.02	-0.14	0.32	-0.02	0.00
x1	1.00	0.00	0.00	-0.16	0.12	0.44	0.16	6.43
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					

ملحق (٢): الخطوات التفصيلية لحل مثال (١٢−١٠)

أولاً: الشكل التالي يوضح الحل للنماذج الجزئية باستخدام حزمة Maple حيث يوضح أوامر الأدخال والأخرج

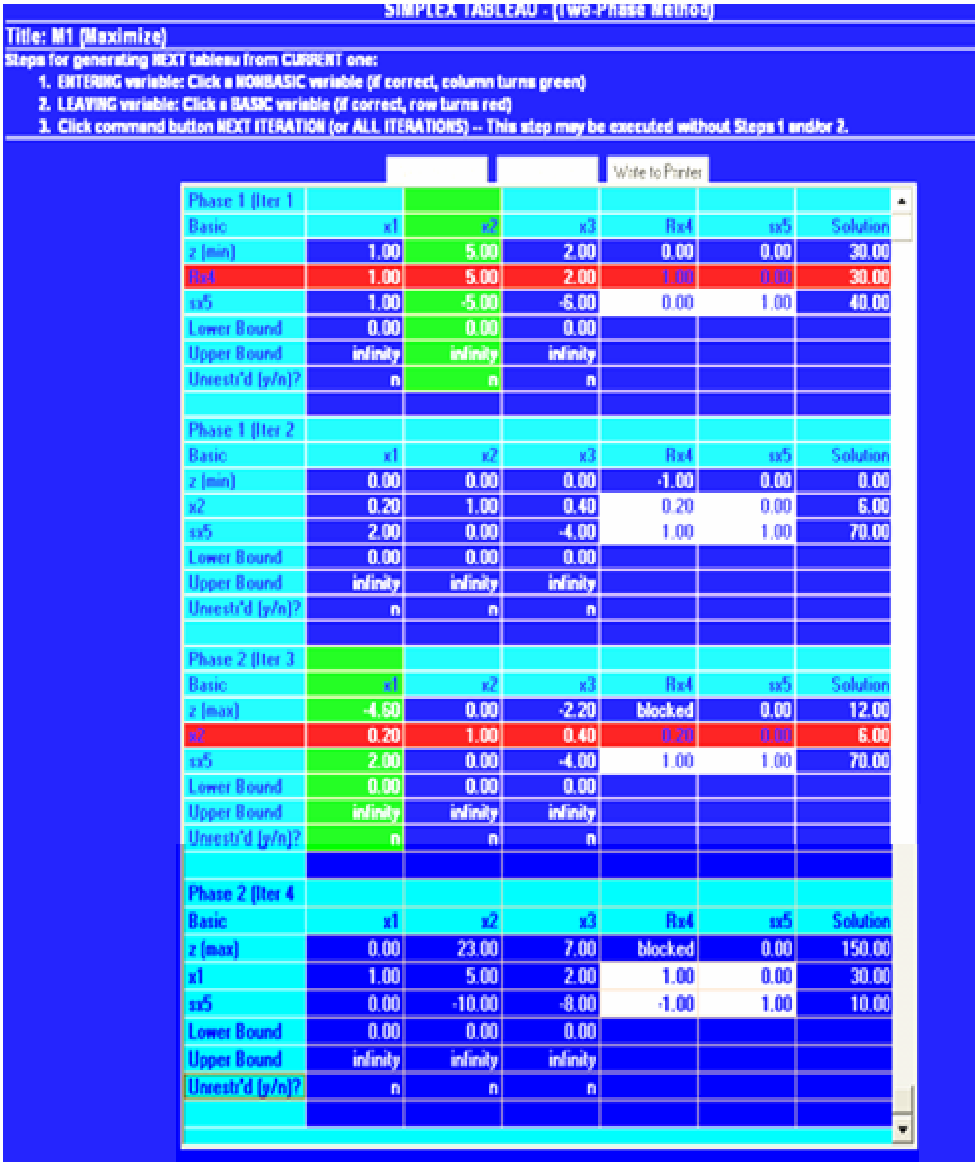


حيث الحل الأمثل للنموذج الجزئي (M1) موضح في (1)، والحل الأمثل للنموذج الجزئي (M2) موضح في (2)، والحل الأمثل للنموذج الجزئي (M3) في (3).

ملحق (٣): الخطوات التفصيلية لحل مثال (١٢-١١)

أولاً: حل النموذج (M1) باستخدام أسلوب المرحلتين بحزمة TORA

جدول (١): يوضح خطوات حل النموذج (M1) باسلوب المرحلتين



SIMPLEX TABLEAU - (Two-Phase Method)

Title: M1 (Maximize)

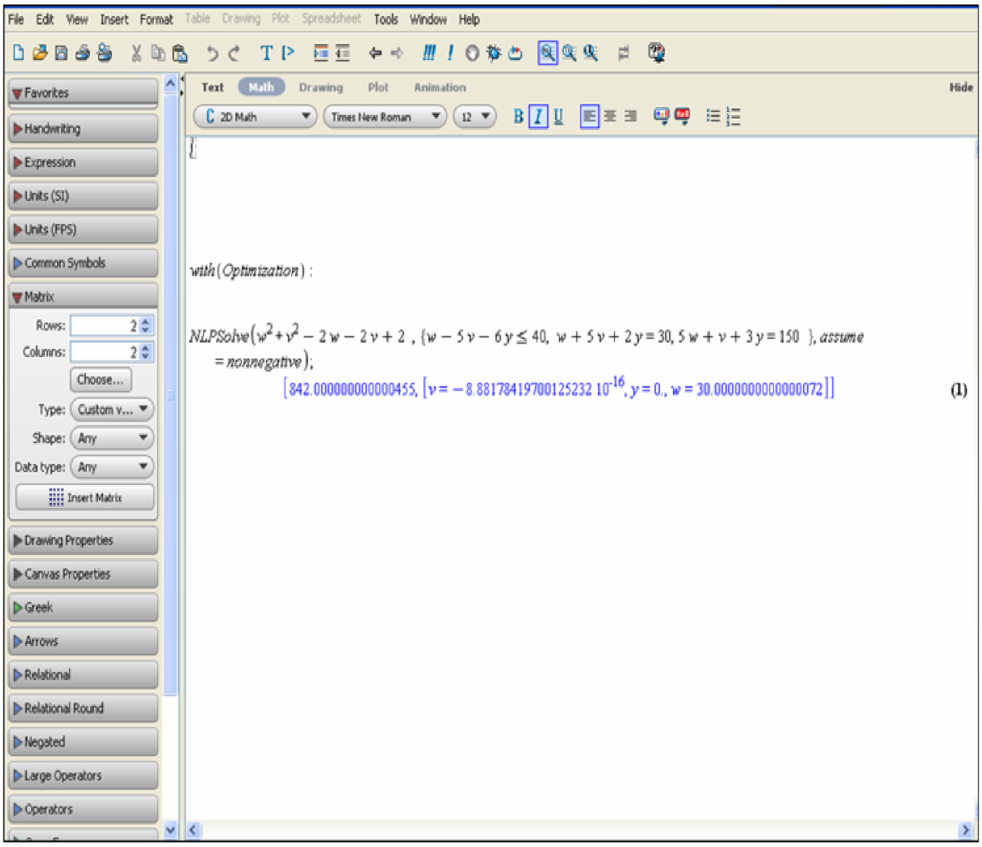
Steps for generating NEXT tableau from CURRENT one:

1. ENTERING variable: Click a NONBASIC variable (if correct, column turns green)
2. LEAVING variable: Click a BASIC variable (if correct, row turns red)
3. Click command button NEXT ITERATION (or ALL ITERATIONS) -- This step may be executed without Steps 1 and/or 2.

Write to Printer

Phase 1 (Iter 1						
Basic	x1	x2	x3	Rx4	sx5	Solution
z (min)	1.00	5.00	2.00	0.00	0.00	30.00
Rx4	1.00	5.00	2.00	1.00	0.00	30.00
sx5	1.00	-5.00	-6.00	0.00	1.00	40.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			
Phase 1 (Iter 2						
Basic	x1	x2	x3	Rx4	sx5	Solution
z (min)	0.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00
x2	0.20	1.00	0.40	0.20	0.00	6.00
sx5	2.00	0.00	-4.00	1.00	1.00	70.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			
Phase 2 (Iter 3						
Basic	x1	x2	x3	Rx4	sx5	Solution
z (max)	-4.60	0.00	-2.20	blocked	0.00	12.00
x2	0.20	1.00	0.40	0.20	0.00	6.00
sx5	2.00	0.00	-4.00	1.00	1.00	70.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			
Phase 2 (Iter 4						
Basic	x1	x2	x3	Rx4	sx5	Solution
z (max)	0.00	23.00	7.00	blocked	0.00	150.00
x1	1.00	5.00	2.00	1.00	0.00	30.00
sx5	0.00	-10.00	-8.00	-1.00	1.00	10.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

<u>ثانياً</u>: حل النموذج $(M2)$ باستخدام حزمة Maple.



ومن (١) في الشكل أعلاه نجد أن:

$$X_1^* = 30 \ , \ X_2^* = 0 \ , \ X_3^* = 0 \ , \ f_2(X^*) = 842$$

المصطلحات

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
الأولوية المطلقة	١٠٥	absolute priority
المستوى المقبول لإنجاز الهدف العام	١٠٢	acceptable level of achievement of an objective
متجه الإنجاز	١٠٥، ١٠٧	achievement function
قيد فعال	٥٧	active constraint
المستوى المرجو تحقيقه (مستوى الإنجاز)	١٠٢، ٢٥٠	aspiration level
مشكلة التخصيص	٤٦	assignment problem
التوازن بين العائد والمخاطرة	٣١	balancing return and risk
المتغيرات الأساسية (الموجودة في الحل)	١٨٠	basic variables
أفضل تقديرات	٢٨٤	best estimators
أفضل حلول توافقية	١٨، ٤٥، ٩٩، ١٠٦، ١٥٠	best compromise solutions
أفضل حلول ممكنة	٥٩	best feasible solutions
تقديرات متحيزة	٢٦٥	biased estimators

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
رأس مال	٣١	Capital
مشكلة تحديد الموازنة الرأسمالية	٢٤	capital budgeting problem
المبالغ النقدية	٣١	Cash
حسابات جارية	٣١	checking accounts
أساليب الأمثلية التقليدية	٢٦٤	classical optimization technique
مشكلة التداخل الخطي	٢٩٠	Collinearity Problem
البنك التجاري	٣١	commercial bank
القروض التجارية	٣٢	commercial loans
برامج حاسب	٢٣٥	computer programs
دوال مقعرة	٧٤،	concave functions
أهداف متعارضة ومتنافسة	١٨، ١٩، ٨٦	conflecting and competitive objectives
القيود المتعارضة	١٨، ٤٥، ٩٩	conflecting constraints
القيود	١٠٤، ١٠٥	Constraints
المتغيرات التحكمية	٢٥	control variables
النقط التقاربية	٢١٤	convergent points

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
convergent solution	٢٢٠	الحل التقاربي
convex (MOP) model (CMOP)	٥٨	نموذج محدب متعدد الأهداف
convex constraints	٧٤	قيود محدبة
convex function	٥٨، ٢٦٨	دالة محدبة
convex set	٥٨	فئة محدبة
convex sets and combinations	٤٧	الفئات والتوليفات المحدبة
Criteria	٢٢، ٢٦٦	المعايير
decision making	٤٦	صناعة القرار
decision’s variables	٢٥	المتغيرات القراريه
decision's space	٥٥	فراغ القرار
decreasing relation	٢٧٤	علاقة متناقصة
dependent variable	٢٦٦	المتغير التابع
deterministic LGP models	١٧٩	نماذج برمجة الهدف الخطية اليقينية
deviational variables	١٠٣	المتغيرات الإنحرافية
discrete changes	١٩٤	تغيرات منفصلة

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
مشكلة التوزيع	٢٣٥	distribution problem
الحل السائد	٥٨	dominant solution
خوارزم السمبلكس الثنائي	١٩٠	dual simplex algorithm
النظرية الثنائية	٢١	duality theory
النقط الكفأ	٥٩	efficient points
نقطة حل كفأ	٥٨	efficient solution point
الحلول الكفأ	٥٧، ٦٣	efficient solutions
أسلوب الحلول الكفء	٤٣	efficient solutions (or generating) approach
قيد مرن	١٠٢، ١٠٥	elastic constraint
قيود وأهداف مرنة	٤٥	elastic constraints and objectives
مشاكل مرنة	٩٩	elastic Problems
فئة خالية	٤٥، ٥٧، ١٠٠	empty set
المتغير الداخل	١٤٨	entering variable
حالات أستثنائية	١٨، ٤٤، ٩٩	exceptional cases
المتغيرات المفسرة	٢٦٦	explicatory variables
فئة الحلول الممكنة	٤٤	feasible solutions set

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
الأولوية الأولي	١٠٥	first priority
أسلوب البرمجة المشوشة	٢٠	fizzy programming approach
نظرية جاوس ماركوف	٢٦٩، ٢٨٤	Gauss-Markov theorem
حل أمثل مطلق	٤٣	global optimum solution
القيم المثلى المطلقة	٤٣	global optimum values
حل باريتو الأمثل المطلق	٦١	globally Pareto optimal solution
صياغة الهدف	١٠٣	goal formulation
أسلوب برمجة الهدف	١٩، ٢١، ٤٣، ٢٣٥	goal programming approach
طرق برمجة الهدف	٤٥	goal programming methods
نماذج برمجة هدف	١٠٩	goal programming models
أسلوب برمجة الهدف	٤٥، ٩٩	goal programming technique
التحليل البياني	١٣٦	graphical analysis
طريقة التدرج	٤٥	Hierarchical method
الموضوعات الهامة	٤٦	important topics
علاقة متزايدة	٢٧٤	increasing relation

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
متغيرات مستقلة	٢٦٦	independent variables
الرقم القياسي	١٤٦	index number
حل غير ممكن	١٩٠	infeasible solution
فئة تقاطع	٤٤	intersection set
تكرارات	٢٢٠	iterations
الأسلوب التكراري	٢٠، ١٦٣، ٢٢٤	iterative approach
دالة كثافة الاحتمال المشتركة	٢٦٤	joint density function
شروط كون–توكر	٥٧، ٦٤	Kuhn-Tuker conditions
طريقة لأجرانج	٤٦	Lagrange method
طريقة المربعات الصغرى	٢٦٧	least square method
أسلوب المربعات الصغرى	٢٦٣، ٢٦٥	least square technique
المتغير الخارج	١٤٨	leaving (departing) variable
النهايات الصغرى لعناصر المتجه وفقاً لترتيبها	١٩	lexicographic minimum of ordered vector
دالة الإمكان	٢٦٤، ٢٩٩	likelihood function
الجبر الخطي	٤٧	linear algebra

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
تقديرات خطية	٢٦٩، ٢٨٤	linear estimators
أسلوب برمجة الهدف الخطية	١٨	linear goal programming technique
البرمجة الخطية	٤٦	linear programming
نموذج الانحدار الخطي	٢٦٧	linear regression model
نسبة السيولة	٣٢	liquid part
حل باريتو الأمثل النسبي	٦١	locally Pareto optimal solution
الصياغة الرياضية	٢٥	mathematical form
المصفوفات والمتجهات	٤٧	matrices and vectors
تعظيم الحصص	٢٣	max. (dividends)
تعظيم أقل صافى عائد فى أى فترة	٢٣	max. (minimum net revenue in any period)
تعظيم صافى القيمة الحالية	٢٤	max. (net present value)
تعظيم العائد	٢٣	max. (return)
تعظيم العائد الصافى الكلى	٢٣	max. (total net revenue)
عملية تعظيم	٨٦، ١٤٤	Maximization

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
طريقة الإمكان الأكبر	٢٩٩	maximum likelihood method
أسلوب الإمكان الأكبر	٢٦٣، ٢٦٥	maximum likelihood technique
تحسن متجه الأنجاز	٢١٥	measure of improvement
طريقة الانحدار المقيد	١٧	method of constrained regressions
الطرق	٤٣	Methods
تقليل الطلبات المتأخرة	٢٣	min. (back orders)
تقليل التكاليف	٢٢، ٢٤	min. (cost)
تصغير الأختلافات عن أهداف تنوع الحافظة	٢٣	min. (deviations from diversification goals)
تقليل كمية البترول الخام المستورد	٢٢	min. (imported crude)
تقليل الوقت الأضافى	٢٣	min. (overtime)
تقليل المخاطرة	٢٣، ٢٤	min. (risk)
عملية تصغير	٨٦، ١٤٤	Minimization
تصغير مجموع القيم المطلقة للانحرافات	٢٦٥	minimizing sum of absolute deviations

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
طريقة السمبلكس المعدلة	١١٨	modified simplex method
برمجة تعدد الأهداف	١٧	multi objective programming
خوارزم طريقة السمبلكس الثنائية ذو المحاور المتعددة	١٩٠	multi-dimensional dual simplex algorithm
التوزيع الاحتمالي متعدد الحدود	٣٠٠	multi-nominal probability distribution
نموذج برمجة خطية متعددة الأهداف	٢٧	multi-objective linear programming model
نموذج برمجة غير خطية متعدد الأهداف	٢٧	multi-objective nonlinear programming model
الجدول متعدد الجوانب	١٤٤	multi-stub table
مفهوم ضبابي	٥٦	murky concept
طريقة نيوتن رافسون	٤٦	Newton-Raphson's method
المتغيرات غير الموجودة في الحل	١٨٠	nonbasic variables
قيود غير متعارضة	٩٩	non-conflicting constrains

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
non-conflicting objectives	٤٤، ٩٩	أهداف غير متعارضة
non-empty set	٤٤	فئة غير خالية
noninferior solutions	٥٧	حلول غير الدنيا
nonlinear functions	٢٠٥	دوال غير خطية
nonlinear goal programming problems	٢٠	مشاكل برمجة الهدف غيرالخطية
nonlinear multi-objective programming problems	١٧	مشاكل البرمجة غير الخطية متعددة الأهداف
nonlinear programming	٤٦	البرمجة غير الخطية
nonlinear regression model	٢٦٨	نموذج الانحدار غير الخطي
normality equations	٢٦٩، ٣٠٢	المعادلات الطبيعية
Objectives	١٠٤، ١٠٧، ١١٧، ١٣٦، ٢٦٦	الأهداف العامة
objectives (criterion) space	٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٩	فراغ الأهداف (أو المعايير)
observational errors	٢٦٤، ٣٠٠	الأخطاء المشاهدة
optimal alternatives	١٨، ٤٤	البدائل المثلى

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
optimal solution	٥٦، ١٩٤	الحل الأمثل
optimality condition	١٤٨	شرط الأمثلية
ordered vector	١٩	المتجه الترتيبى
over-achievement	١٠٣	أكبر من الإنجاز
Parameters	٢٥، ١٧٩، ٢٦٤، ٢٦٦	المعلمات
Pareto optimal solutions	٥٧، ٥٨	حلول باريتو المثلى
pivot process	١٤٩	عملية الدوران
preemptive priorities	١٩، ١٠٤	الأولويات المرتبة
principal component's estimators	٢٩٠	تقديرات المكونات الأولية
Priorities	٢٦، ٧٦	أولويات
prioritizing (or ranking) approach	٤٣	أسلوب الأولويات (أو الترتيب)
priority level	١٤٥	مستوى الأولوية
Probabilistic goal programming approach	٢١	أسلوب برمجة الهدف الأحتمالية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
Probabilistic linear goal prog.	٢٠٥	نماذج برمجة الهدف الخطية الاحتمالية
probability distributions	٢٦٤	التوزيعات الاحتمالية
random variable	٢٦٦	متغير عشوائي
real valued function	٥٥	دالة قيمة حقيقية
reformulating	١٧٩	أعادة الصياغة
relatively general statement	١٠٢	عبارة عامة نسبياً
restricted least square method	٢٨٥	طريقة المربعات الصغرى المقيدة
restricted least square technique	٢٦٥	أسلوب المربعات الصغرى المقيدة
return rate	٣٢	معدل العائد
Rigde's estimators	٢٩٠	تقديرات أنحدار التل
rigid constraints	١٠٥، ١١١	القيود الصارمة
sample data	٢٦٤	بيانات العينة
satisfactory alternatives	١٨، ٤٥	البدائل المرضية
saving accounts	٣١	حسابات إدخارية

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
شكل الانتشار	٢٧١	scattor diagram
تحليل الحساسية	١٧٩	sensitivity analysis
طريقة الحلول المتتالية	١١٨	sequential (iterative) solutions method
فئة	١٧	set
أسلوب فئة الحلول الكفأ	٢٠	set of efficient solution approach
الفئات والدوال الرياضية	٤٦	sets and mathematical functions
طريقة السمبلكس	١٧	simplex method
الهدف الواحد	١٧، ٤٧، ٦٢	single objective
نموذج البرمجة وحيدة الهدف	٢٦	single objective programming model
فراغ الحل	٥٥	solution's space
أساليب التقدير الإحصائية	٢٦٣	statistical estimation approaches
الاستدلال الإحصائي	٢٦٣	statistical inference
تقديرات ستين	٢٩٠	Stien's estimators
أسلوب برمجة الهدف العشوائية	١٩	stochastic goal programming approach

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
نقطة حل مبدئية ملائمة	٢١٤	suitable initial point
مفكوك تيلور	٢٠٩	Taylor series expansion
أساليب اختبارات الفروض الإحصائية	٢٦٣	testing of statistical hypotheses approaches
أفضل تقديرات خطية غير متحيزة	٢٧٠	the best linear unbiased estimators (BLUE)
برنامج الفضاء الأمريكي أبولو	١٩	the saturn /Apollo program
مقياس المؤمونيه	٣٩	tolerance measure
مصفوفة التحويل	١٨٦	transformation matrix
مشكلة النقل	٤٦	transportation problem
تقديرات غير متحيزة	٢٦٥، ٢٦٩، ٢٨٠، ٢٨٤، ٢٨٧	unbiased estimators
الأهداف غير المتعارضة	٥٧	unconflicting objectives
نموذج برمجة غير مقيدة	٢٦٧	unconstrained programming model
أقل من الإنجاز	١٠٣	under-achievement
حل وحيد	٦٣	unique solution

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
مشاكل البرمجة الخطية غير القابلة للحل	١٨، ٩٩	unsolvable linear programming problems
أسلوب تعظيم المتجه	١٧	vector maximization technique
مشكلة أمثلية المتجه	٥٥	vector optimization problem (VOP)
نموذج تعظيم المتجه	١٧	vector-maximum model
أسلوب الأوزان الترجيحية (أو المنفعة)	٤٣	weighting (or utility) approach
المعامل (الوزن) النسبي	١٤٦	weighting factor
طريقة الأوزان الترجيحية	٤٥	weighting method

أولاً: المراجع العربية

[١] عبدالله الهلباوي (٢٠٠٢): "مقدمة في نظرية الإحصاء – الجزء الأول" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.

[٢] عفاف الدش (١٩٩٩): "نماذج الانحدار" الناشر مكتبة عين شمس، شارع القصر العينى، القاهرة، جمهورية مصر العربية.

[٣] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية" الجزء الأول، الطبعة الأولى، المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[٤] عفاف الدش (٢٠١٢): "بحوث العمليات وإتخاذ القرارات" الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" الطبعة الثانية، المكتبة الأكاديمية، الدقي، القاهرة.

[٥] فاطمة الزهراء (٢٠٠٤): "نموذج احتمالي متعدد الأهداف لحل مشكلة النقل" رسالة ماجستير – قسم بحوث العمليات والحاسب – معهد الدراسات الإحصائية – جامعة القاهرة.

ثانياً: المراجع الأجنبية

[6] Alvin, C. R. (2000): "Linear Models in Statistics" John Wiley & Son's, INC., New York.

[7] Armand, P. and Maliver, C. (1991): "Determination of the Efficient Set in Multiobjective Linear Programming" Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 70, No. 3.

[8] Arthanari, T. S. and Dodge, Y. (1993): "Mathematical Programming in Statistics" John Wiley & Son's, INC., New York.

[9] Arthur, J. and Lawerence, K. (1985): "A Multiple Goal Capital Flow Model for A Chemical and Pharmaceutical Company" Engineering Economist, P. 121-134.

[10] Balachandran, K. and Steuer, R. (1982): "An Interactive Model for The CPA Firm Audi Staff Planning Problem With Multiple Objectives" Accounting Review, P. 125-139.

[11] Beighter, C.S., Phillips, D.T.; and Wilde, D.J. (1979): "Foundations of Optimization", Second Edition, Prentice-Hall, London.

[12] Bhaskar, K. and Mc Namee, P. (1983): "Multiple Objectives in Accounting and Finance" J. of Business Finance and Accounting P. 595-621.

[13] Bradley, G. L., and Smith, K. J. (1999): "Calculus" Second Edition, Prentice Hall, New York.

[14] Callahan, J. (1973): "An Introduction To Financial Planning Through Goal Programming" Cost and Management, P. 7-12.

[15] Charnes, A., and Cooper, W. W. (1961): "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming" Vols. 1 and 2, New York, Wiley.

[16] Contini, G. B. (1968): "Stochastic Approach to Goal Programming" O. R., PP. 576-586.

[17] Dan Reid, R. and Nada, R. Sanders (2007): "Operations Management – An Integrated Approach" Third Edition, John Wiley & Sons, INC.

[18] Dantzing, G. (1966): "Linear Programming and Extensions" Princeton University Press, Princeton.

[19] Dauer, J. P. and Krueger, R. (1976): "An Iterative Approach to Goal Programming" Ph.D. Thesis Dept. of Math., University of Nebraska.

[20] Dauer, J. P. and Krueger, R. J. (1977): "An Iterative Approach to Goal Programming"O.R.,Vol.28,No.3

[21] Deb, K. (2001): "Multi-Objectives Optimization Using Evolutionary Algorithms" John Wiley & Sons.

[22] Edition by Springer (2009): "Multi-objective Programming and Goal Programming" Series Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 618.

[23] Eiselt, H. A. and Sandblom, C. L. (2010) : "Operations Research: A Model – Based Approach" Springer, Canda.

[24] El-Dash, A. (1984): "Chance-Constrained and Nonlinear Goal Programming", Ph.D. Thesis, Applied Mathematics Dep., North Wales Univ. U.K.D.

[25] El-Dash, A. (1985): "An Algorithm for Solving Nonlinear Goal Programming Problems" the 20th Annual International Conference in Statistics, Computer Science, Information, and Operation Research, Vol.4, ISSR, Cairo University Page 62-83.

[26] El-Dash, A. (1988): "Geometric Programming and Cyclic Aircraft Maintenance Flying System" The Egyptian computer Journal, ISSR, Cairo University Vol.16, Page 42-59.

[27] El-Dash, A. (1993): "Goal Programming Model to Planning Inventory System for Limited Life Items" Economic & Business Review, Faculty of Commerce, Ain Shams University, Vol.1, January, Page 1-13.

[28] El-Dash, A. and Others (1993): "Lagrangian Analysis for Multi-objective Decision Making Problems" The 18th International Conference for Statistics, Computer Science, Scientific & Social Applications, Tanta University, Page 297-310.

[29] El-Dash, A. and Bayomi, M. (1992): "Sequential Duality Method for Solving Polynomial Goal Programming Problems" The Egyptian Computer Journal, ISSR, Cairo University,Vol.20, No.1, Page 12-38.

[30] El-Dash, A. and Hughes, J. (1984): "Optimizing the Distribution of Foreign Trade Between Parts and Trading Centers" International Seminar, Journal of The Mathematics of Multi-objective Optimizations CISM, Undine, Italy, Page 1-10.

[31] El-Dash, A. and Mahmoud, Z. (1991): "A Parametric Analysis for Linear Goal Programming Problems" The Proceedings of the Second Annual International Conference of CICS, Faculty of Economic & Political Sciences, Cairo University, Page 82-101.

[32] El-Dash, A. and Nagib, A. (1996): "Goal Programming & Mixed Product Problem" The Annual Conference of Statistics & Computer Modeling in Human & Statistics & International Computer Modeling in Human & Social Sciences, Faculty of The Economic, Cairo University, Page 160-177.

[33] El-Dash, A., Aly, H.; and Rasha, S. (2011): "Goal Programming Technique for Correcting Multicollinearity Problem in Multinomial Logistic Regression" The Egyptian Statistical Journal, ISSR, Cairo University.

[34] El-Dash, A., Aly, H.; and Rasha, S. (2011): "Treating Multicollinearity Problem Using Goal Programming Technique" The Annual International Conference on Statistics, Computer Science & Operation Research, ISSR, Cairo University.

[35] El-Dash, A., Farag, I.; and El-Sherif, A. (1991): "Stochastic Goal Programming for Repair & Maintenance of Flying System" Proceeding of the 16th International Conference for Statistics, Computer Science, Social and Demographic Research, Ain Shams University, Vol. 1, Page 345-366.

[36] Engau, A. and Wiecek, M. (2005): "Exact Generation of Epsilon Efficient Solutions in Multiple-Objective Programming" MSC. Thesis Dept. of Mathematical Sciences, Clemson University, South Carolina, USA.

[37] Fortson, J. and Dince, R. (1977): "An Application of Goal Programming To Management of A Country Bank" J. of Bank Research, P. 311-319.

[38] Girgis, N., El-Dash, A. and Mahmoud, Z. (1993): "A Parametric Analysis for Probabilistic Lexicographic Linear Goal Programming (PLLGP) Problems" Scientific Journal of Commercial Science, Faculty of Commerce, Banha, Vol.13, No.1, January, Page 1-25.

[39] Gleason, J. and Litly, C. (1977): "A Goal Programming Model for Insurance Agency Management" Decision Sciences, P. 180-190.

[40] Griffith, R. and Stewart, R. (1961): "A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems" Mang. Sci. , Vol. 7, No.4, PP. 379-392.

[41] Guerard, J. and Buell, S. (1984): "Multi-Criteria Financial Planning Model of Public Utility Firms" Deci-

sion Making with Multiple Objectives Proceedings: 6th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Berlin, Springer Verlag.

[42] Gupta, C. B. (2008): "Optimization Technique in Operations Research" I. K. International Publishing House PVT. LTD., Mumbai.

[43] Gupta, P.K. and Hira, D.S. (2007): "Operations Research" S. Chand & Company LTD, New Delhi – 110055.

[44] Harris, T. E. (1950): "Regression Using Minimum Absolute Deviation" Am. Stat. 4, 14.

[45] Harter, H. L. (1974a): "The Method of Least Squares and Some Alternatives I", Int. Stat. Rev. 42, 147.

[46] Harter, H. L. (1974b): "The Method of Least Squares and Some Alternatives II", Int. Stat. Rev. 42, 235.

[47] Harter, H. L. (1975a): "The Method of Least Squares and Some Alternatives III", Int. Stat. Rev. 43, 1.

[48] Harter, H. L. (1975b): "The Method of Least Squares and Some Alternatives IV", Int. Stat. Rev. 43, 125.

[49] Himmelbau, David M. (1972): "Applied Nonlinear Programming" New York, Mc Graw-Hill Book Co.

[50] Hindelang, J. and Krishnamurthy, S. (1985): "A Multi-Objective Approach To Strategic Financial Planning" Financial Review, P. 59.

[51] Ignizio, J. P. (1963): "S-II Trajectory Study and Optimum Antenna Placement" North American Aviation Report SID-63, Downey, Calif.

[52] Ignizio, J. P. (1976): "An Approach To The Capital Budgeting Problem With Multi-Objective" Engineering Economist, Summer, 259-272.

[53] Ignizio, J. P. (1976): "Goal Programming and Extensions" Mass Heath (Lexington Books), New York.

[54] Ignizio, J. P. (1978): "Goal Programming: A Tool for Multi Objective Analysis" J. of the Operational Research Society, Vol. 29, II, PP. 1109-1119.

[55] Ignizio, J. P. (1982): "Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems" Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 07632.

[56] Ijiri, Y. (1965): "Management Goals and Accounting for Control" Chicago: Rand-McNally.

[57] Joiner, C. and Drake, A. (1983): "Government Planning and Budgeting With Multi-Objective Models" Omega, 11, P. 57-66.

[58] Jones, D. F., Tamiz, M. (2002): "Goal Programming in The Period 1990-2000, in Multi-Criteria Optimization: State of the Art Annotated" bibliographic Surveys, 129-170.

[59] Jones, D. F., Tamiz, W. (2010): "Practical Goal Programming" Springer Books, New York.

[60] karim, M. A. and Jan R. M. (2005): "Matrix Algebra", Cambridge, U. K. D.

[61] Kelley, I. (1960): "the Cutting Plane Method For Solving Convex Programs", J. Soc. Indust., Appl. Math., Vol. 8, No. 4.

[62] Keown, A. J. (1978): "A Chance–Constrained Goal Prog. Model For hank liquidity Management", Decision Sci., January.

[63] Keown, A. J. and Martin, J. D. (1977): "A Chance–Constrained Goal Programming Model For Working Capital Management" The Engineering Economist, Vol. 22, No. 3.

[64] Kim, N. T. and Thien, N. T. (2007): "Generating All Efficient Extreme Points in Multiple Objective Linear Programming Problem and It's Application" The National Basic Program an Natural Science, Vietnam.

[65] Kombluth, J. S. (1985): "Sequential Multi-Criterion Decision Making" Omega, 13.

[66] Kombluth, J. S. (1986): "Accounting Control in Multi-Objective Linear Programming" Omega, 14, PP. 245-249.

[67] Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (1951): "Nonlinear Programming", J. Neyman (Ed.), Proceeding of Second Berkeley Symposium an Mathematical Statistics and Probability Berkeley, Colif. , University of California Press, PP. 481-491.

[68] Lawrence, K. D., Koch, H. B., and Burhridge, J.J. (1976): "Multiple-Objective Linear Programming Models For The Acquisition Problem" Paper Presented in ORSA, Tims Joint National Meeting Miami.

[69] Leary, D. and O'leary, J. L. (1982): "A Mathematical Programming Approach to the Hospital Cash Management Problem and Extensions" Proceeding, Eighteenth Annual Hawaii International Conference An Systems Sciences.

[70] Lee, S. M. (1971): "Decision Analysis Through Goal Programming" Decision Sci., Vol.2, No.2, PP. 172-180.

[71] Lee, S. M. (1972): "Goal Programming for Decision Analysis", Philadelphia, Auerbach.

[72] Lin, W. T. (1980): "An Accounting Control System An Multiple Objective Planning Model" Omega, 8, PP. 375-382.

[73] Makary, N., El-Dash, A. and Desouky, A. (1992): "An Analytic Iterative Goal Programming (AIGP) Algorithm for Small & Large Scale Problems" The Proceedings of the Fourth Annual International Conference of CICS, Faculty of Economic & Political Sciences, Cairo University, Page 47-63.

[74] March, J. G., and Simon, H. P. (1958): "Organizations", Wiley, New York.

[75] Markowski, C. A. (1980): "Duality in Linear Goal Programming" The Pennsylvania State Univ., PH. D. Thesis in Industrial Engineering and Operations Research.

[76] Marler R. T. and Arora, J. S. (2004): "Survey of Multi-Objective Optimization Method for Engineering" Struct Multidisc Optim, 26, 369-395.

[77] Masud, A. S. and Hwang, C. L. (1981): "Interactive Se-

quential Goal Programming" J. Apl. Res, Soc., Vol. 32, PP. 391-400.

[78] Melvian, J. M. (1982): "Numerical Analysis: A Practical Approach" Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

[79] Milan, Z. (1982): "Multiple Criteria Decision Making" M.c Graw – Hill Book Company, New York.

[80] Ming-Lung Hung and Other (2006): "A Novel Multi-Objective Programming Approach Dealing With Qualitative and Quantitative Objectives for Environmental Management" Ecological Economics 56, 584-593.

[81] Mital, K.V. (1977): "Optimization Methods In Operations Research and System Analysis" Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[82] Mulvey, J. (1987): "Nonlinear Network Models in Finance" Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, Vol. 1, PP. 253-271.

[83] Nahed, S. (2006): "Multi-Objective Programming to Estimate Some Optimal Regression Models" Ph.D. Thesis, Math. Dept., Education Faculty, Ain Shims Univ.

[84] Nita, H. S., Ravi, M. G.; and Hardik, S. (2007): "Operations Research" Prentic – Hall of India, New Delhi-110001.

[85] Nunamaker, T. and Truitt (1987): "Rationing Discretionary Economic Resources: A Multi-Objective Approach" Decision Sciences, 524-534.

[86] Osyczka, A. (1984): "Multicriterion Optimization in Engineering with Fortran Programs" New York, John Wiley and Sons.

[87] Rangoaga, M. J. (2009): "A Decision Support System for Multi-Objective Programming Problems" MSC. Thesis, University of South Africa.

[88] Rao, S.S. (1978): "Optimization: Theory and Applications" Second Edition, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[89] Ravindran, A., Phillips, D. T. and Soiberg, J. (2006): "Operations Research: Principles and Practice" Second Edition, Wiley, India.

[90] Richard, B. (1982) : "Operations Research" Schoum's Outline Series- Theory and Problems, M.c Graw – Hill - Book Company, New York.

[91] Rometo, C. (1991): "Handbook of Issues in Goal Programming" Pergamon Press, Oxford.

[92] Ronald, L. R. (1998): "Optimization in Operations Research" Prentice Hall, New York.

[93] Scniederjons, S. (1995): "Goal Programming Methodology and Applications" Kluwer Publishers, Boston.

[94] Sealey, C. W. (1977): "Commercial Bank Portfolio Management With Multi-Objectives" J. of Commercial Bank Lending, P. 39-48.

[95] Sengupta, J. and Fox, K. (1969): "Optimization Techniques in Quantitive Economic Models" North –Holland Publishing Company, London.

[96] Sengupta, J. K. (1972): "Stochastic Programming Methods and Applications", North Holland Publishing Company, Amsterdam.

[97] Smith, M. (2007):"Calculus" Third Edition, Mc Graw – Hill Higher Education, New York.

[98] Spahr, R. and Hebert, I. (1987): "A Non-Linear Goal Programming Approach to Risk Analysis in Capital Budgeting" Advances In Mathematical Programming and Financial Planning, Vol. 1, P. 45-57.

[99] Stadler, W. (1988): "Fundamentals of Multicriteria Opti-

mization in Engineering and in the Sciences" PP 1-25, New York, Plenum Press.

[100] Stephen, A. S. (2007): "The Epic Story of Maximum Likelihood" Vol. 22, No. 4.

[101] Stewer, R. E. (1986): "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Applications", John Wiley & Sons, New York.

[102] Taha, H. (1997): "Operations Research: An Introduction", Prentice Hall, International, INC.

[103] Thanassoulis, E. (1985): "Selecting A Suitable Solution Method for A Multi-Objective Programming Capital Budgeting Problem" J. of Business Finance and Accounting, Autumn, 453-47.

[104] Thomas, W. and Daniel, E. (1993): "Goal Programming Applications in Financial Management", Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, Vol. 3, P. 211-229.

[105] Vira, C. and Yacov, Y. (1983): "Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology" Series Volume 8.

[106] Wayne, L.W.(2004): "Operations Research - Applications and Algorithms" Fourth Edition, Curt Hinrichs, Canada.

[107] White, D. J. (1982): "Optimality and Efficiency", John Wiley & Sons, New York.

[108] Widhelm, W. B. (1981): "Extensions of Goal Programming Models" Omega, Vol. 9, No. 2.

[109] Wolfe, P. (1970): "Integer and Nonlinear Programming", Ahadil, J. Ed. North Holland Publishing Co.

[110] Yu, P. L. (1972): "Introduction to Domination Structures in Multi Criteria Problems" Proceeding of Seminar on Multiple Criteria Decision Making, University of South Carotina.

[111] Yu, P. L. (1974a): "A Class of Solutions of Group Decision Problems", Mang. Sci. 19, 939-946.

[112] Yu, P. L. (1974b) Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions on Decision Problems With Multiobjectives, Journal of Optimization Theory Applications14,319-377.

[113] Zanakis, S. H. and Gupta, S. K. (1985): "A Categorical Bibliographic Survey of Goal Programming" Omega, Vol. 13, N. 3.

[114] Zimmermann, H. J. (1978): "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objectives" Fuzzy Sets and Systems. Vol. 1, PP. 45-55.

كتب للمؤلفة

- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات – الجزء الثاني: "البرمجة متعددة الأهداف" (سنة ٢٠١٣م)– المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة
- بحوث العمليات وأتخاذ القرارات – الجزء الأول: "البرمجة وحيدة الهدف" (سنة ٢٠١٢م)– المكتبة الأكاديمية – شارع التحرير – الدقي – القاهرة
- الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية (سنة ٢٠٠٩م) – المكتبة الأكاديمية– شارع التحرير – الدقي – القاهرة.
- استخدام الحزم الجاهزة SPSS – Maple – TORA (سنة ٢٠٠٨م) – بالاشتراك مع آخرين – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الثاني: "الإستدلال الإحصائي" (سنة ٢٠٠٦م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الأول: "الإحصاء الوصفي" (سنة ٢٠٠٠م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- رياضيات الاستثمار (سنة ٢٠٠٠م) – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الرياضيات وصناعة القرارات (سنة ١٩٩٦م) – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني – القاهرة.
- نماذج الانحدار (سنة ١٩٩٠م) – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني– القاهرة