الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والإجتماعية

الأساليب - التطبيق - أستخدام الحزم الرياضية

الجزء الأول

الطبعة الأولى

الدكتورة
عفاف على حسن الدش
أستاذ ورئيس قسم الرياضة والاحصاء التطبيقى
كلية التجارة وادارة الأعمال - جامعة حلوان

٢٠٠٩

الرياضيات التطبيقية
للعلوم الإحصائية والإجتماعية

الأساليب – التطبيق – أستخدام الحزم الرياضية

الجزء الأول

الطبعة الأولي

دكتوره

عفاف على حسن الدش

أستاذ ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

الناشر

دار المريخ

١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م

{ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاء مَاء فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ
زَبَداً رَّابِياً وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاء حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ
زَبَدٌ مِّثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ
جُفَاء وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ
الأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآيه ١٧)

إهداء

إلى روح

أخي الحبيب

الأستاذ محمد الدش

الفهرس

الموضوع	الصفحة
(٤-١) تعريف المشتقة الجزئية....................................	١٧٩
(٤-٢) إيجاد المشتقات الجزئية....................................	١٨٣
(٤-٣) الدالة الحدية والمرونة الجزئية............................	١٨٩
(٤-٤) مشاكل الأمثلية..	١٩٨
(٤-٥) القيم العظمي والصغري للدوال متعددة المتغيرات.........	٢٠٠
(٤-٦) طريقة لأجرانج..	٢١٤
(٤-٧) أمثلة تطبيقية...	٢٢٤
(٤-٨) استخدام الحزمة الرياضية.................................	٢٣٤
(٤-٩) تمرينات...	٢٤٢
الباب الخامس: التكامل (العملية العكسية للمشتقات)......................	٢٤٥
(٥-١) مفهوم التكامل...	٢٤٧
(٥-٢) القواعد الأساسية للتكامل..................................	٢٥٤
(٥-٣) التكامل المحدود..	٢٦٣
(٥-٤) التكامل المزدوج...	٢٧٤
(٥-٥) أمثلة تطبيقية..	٢٨١
(٥-٦) استخدام الحزمة الرياضية..................................	٢٨٨
(٥-٧) تمرينات...	٢٩٤
الباب السادس: أساليب التكامل...	٢٩٧
(٦-١) التكامل بالتعويض..	٢٩٩
(٦-٢) التكامل بالتجزئ..	٣٠٣
(٦-٣) التكامل باستخدام الكسور الجزئية.........................	٣٠٧
(٦-٤) جداول التكامل..	٣١١
(٦-٥) التكامل العددي..	٣١٨
(٦-٦) أمثلة تطبيقية...	٣٢٩
(٦-٩) تمرينات...	٣٣٨
الباب السابع: المتسلسلات اللانهائية.......................................	٣٤١
(٧-١) المتتابعات (المتواليات).......................................	٣٤٣
(٧-٢) المتسلسلات اللانهائية..	٣٥٥
(٧-٣) أختبار التكامل وأختبارات المقارنة..........................	٣٦٢
(٧-٤) متسلسلة تيلور..	٣٧٢
(٧-٥) أمثلة تطبيقية..	٣٨٠

الموضوع	الصفحة

المقدمة

تعانى المكتبة العربية من قصور حاد في الكتابات العلمية بصفة عامة – وبصفة خاصة الفروع المختلفة للرياضيات Mathematics وتطبيقاتها في العلوم الأخري.

فالرياضيات بفروعها المختلفة تعتبر العمود الفقري لمعظم العلوم الأخري، ومن هنا برزت الحاجة إلى ضرورة أمداد القارئ العربي بكتاب متخصص يتناول بعض الأساليب الرياضية Mathematical Techniques الضرورية في دراسة وتطوير الأساليب الإحصائية Statistical Techniques وكثير من الأساليب في العلوم الإجتماعية Social Sciences الأخري وبالتالي تطبيقاتها في المجالات الاقتصادية، الطبية، السياسية، ... الخ.

لذا يعتبر هذا الكتاب محاولة لتقديم بعض الأساليب الرياضية في بعض الفروع المختلفة للرياضيات (الجبر Algebra ، التفاضل Differentiation ، التكامل Integration ، التحليل العددي Numerical Analyses) الضرورية في دراسة وتطبيق العلوم الإحصائية والاجتماعية بأسلوب يتسم بالبساطة والعمق والشمولية في نفس الوقت.

فيتناول الكتاب بعض الأساليب الرياضية المقدمة من حيث النظرية والتطبيق بالإضافة إلى تناول كيفية استخدام الحزمة الرياضية Mathematical Package **Maple 11** في حل العديد من المشاكل المرتبطة بالأساليب المقدمة. وذلك لأهمية استخدام الحزم الجاهزة في توفير الوقت وبصفة خاصة بالنسبة للمشاكل ذات الحجم الكبير Large Sizes Problems وذلك بالنسبة للمتخصصين وغير المتخصصين.

والمستهدفون من هذا الكتاب هم طلاب مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا في تخصصات الإحصاء والعلوم الإجتماعية الأخري مثل الاقتصاد ، الإدارة ، ... الخ كذلك مستخدمي العلوم الإحصائية والإجتماعية. ويحتوي الكتاب على عشرة أبواب:

الباب الأول تحت عنوان: الدالة والدالة العكسية

ويتناول هذا الباب الدالة وتقديم بعض أنواع الدوال الهامة مثل الدالة الأسية واللوغاريتمية وتعريف الدالة العكسية.كذلك يقدم عدة تطبيقات للدوال بالإضافة إلى تناول كيفية استخدام حزمة Maple 11 في رسم الدوال ثم تقديم العديد من التمرينات المتنوعة.

الباب الثاني تحت عنوان: النهايات والأتصال

ويتناول هذا الباب مفاهيم النهايات والأتصال والنظريات المرتبطة بهم لأهمية هذه المفاهيم في دراسة الأساليب التي سوف يتم تناولها في الأبواب التالية.

الباب الثالث تحت عنوان: التفاضل وتطبيقاته

ويتناول هذا الباب عملية التفاضل وأهم النظريات المرتبطة بعملية التفاضل والمشتقات من الترتيب الأعلى. ثم يقدم التفاضل العددي وأهم تطبيقات التفاضل في المجالات الاقتصادية، التجارية، ... الخ. بالإضافة إلى العديد من التمرينات المتنوعة.

الباب الرابع تحت عنوان: التفاضل الجزئي وتطبيقاته

ويتناول المشتقات الجزئية Partial Derivatives ومشاكل الأمثلية Optimization Problems المقيدة وغير المقيدة وأهم التطبيقات للمشتقات الجزئية ومشاكل الأمثلية بالإضافة إلى تقديم استخدام Maple 11 في الحصول على المشتقات والمشتقات الجزئية وتقديم مجموعة من التمرينات المتنوعة.

الباب الخامس تحت عنوان: التكامل وتطبيقاته

ويتناول مفهوم التكامل وأهم قواعد التكامل وكل من التكامل المحدود والتكامل المزدوج ثم يتناول كيفية استخدام Maple 11 في إيجاد التكاملات المختلفة بالإضافة إلى تقديم العديد من الأمثلة التطبيقية ومجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب السادس تحت عنوان: أساليب التكامل وتطبيقاتها

ويتناول بعض الأساليب المختلفة للتكامل مثل التكامل بالتعويض، التكامل بالتجزئ، التكامل باستخدام الكسور الجزئية، التكامل العددي بالإضافة إلى تقديم العديد من الأمثلة التطبيقية ومجموعة من التمرينات المتنوعة.

الباب السابع تحت عنوان: المتسلسلات اللانهائية

ويتناول تعريف وأنواع المتتابعات والمتسلسلات المختلفة، وبعض أختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات. كذلك يقدم متسلسلة تيلور نظراً لأهميتها في العديد من التطبيقات. ويشمل الباب أيضاً العديد من الأمثلة التطبيقية ومجموعة من التمرينات المتنوعة.

الباب الثامن تحت عنوان: المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها

ويتناول تعريف المعادلات التفاضلية من الترتيب الأول وأساليب حلها التحليلة والعددية بالإضافة إلى تقديم نماذج النمو والإضمحلال والعديد من الأمثلة التطبيقية في المجالات المختلفة ومجموعة من التمرينات المتنوعة.

الباب التاسع تحت عنوان: المعادلات التفاضلية من الترتيب الأعلي

ويتناول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الترتيب الثاني، الثالث، ... الخ بالإضافة إلى تقديم كيفية استخدام حزمة Maple 11 لحل المعادلات التفاضلية ثم تقديم مجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب العاشر تحت عنوان: الأستكمال

ويتناول مفهوم الاستكمال بشكل عام ثم أستكمال كثيرة الحدود بشكل خاص، وتقديم طريقتي لأجرانج ونيوتن للأستكمال، كذلك يقدم كيفية استخدام الحزمة Maple 11 في أستكمال الدوال بالإضافة إلى تقديم مجموعة متنوعة من التمرينات.

وأخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجد القارئ العربي في هذا الكتاب لبنه من لبنات البناء، عسى أن تجد من المتخصصين العرب من يقدم اسهاماته في هذه العلوم.

والله ولى التوفيق

المؤلف
أ.د عفاف على حسن الدش
رئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي
كلية التجارة – جامعة حلوان

الباب الأول
الدالة والدالة العكسية
Function and Inverse Function

(١-١) الدالة   Function

إذا كان لدينا فئتين A , B Two Sets بحيث يعتمد تحديد عناصر الفئة B على عناصر الفئة A. أي أنه يوجد علاقة Relationship بين عناصر الفئة A وعناصر الفئة B، وتأخذ هذه العلاقة صياغة رياضية يطلق عليها الدالة [٤]. وبالتالي فأن الدالة هي قاعدة رياضية Mathematical Rule باستخدامها يتم تحديد لكل عنصر x حيث $x \in A$ عنصراً وحيداً مناظراً له y بحيث $y \in B$.

ويرمز إلى هذه القاعدة بالرمز (f) وتكتب على النحو التالي:

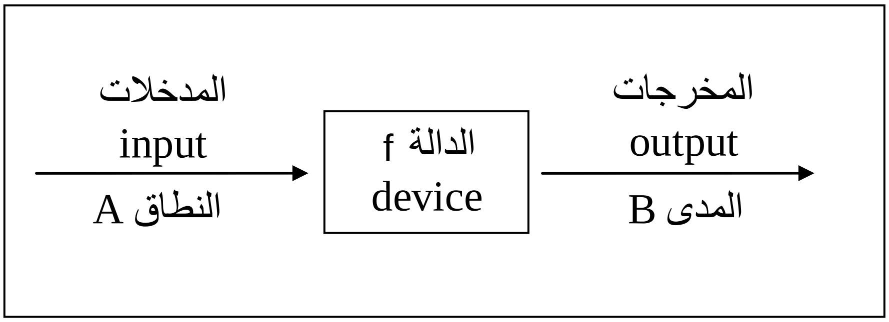
$$f: A \longrightarrow B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B \tag{1.1}$$

وتسمى الفئة A بنطاق Domain الدالة f، والفئة B بالنطاق المصاحب co-domain أو المدى Range للدالة f.

فإذا كان $x \in A$، $y \in B$ حيث يتم تحديد (تعيين) y باستخدام الدالة f عند العنصر المناظر x، ونرمز لذلك بالرمز:

$$y = f(x) \tag{1.2}$$

ومما سبق يتضح أن الدالة هي بمثابة جهاز للمدخلات والمخرجات (input/output). فباستخدام القاعدة الرياضية (الدالة) يتم تحويل المدخلات (النطاق) إلى مخرجات (المدى) كما هو موضح بالشكل التالي:



شكل (١-١)

وتعتبر y دالة في متغير واحد (x)، أو بعبارة أخرى فأن فئة النطاق تمثل متغير واحد x كذلك فئة المدى تمثل متغير واحد y وفي الفصل (١-٣) من هذا الباب سوف نتناول الدوال متعددة المتغيرات.

مثال (١-١)

إذا كانت f هي الدالة التي تعيين لكل عدد حقيقي x (بحيث $x \in R$) مربعة. فإن نطاق الدالة في هذه الحالة هو فئة الأعداد الحقيقية R، كذلك المدى هو فئة الأعداد الحقيقية غير السالبة. وتكتب على النحو التالي:

$$f(x) = x^2 \qquad , x \in R$$

وبالتالي فإن:

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = (1)^2 = 1$$

$$x = 5 \longrightarrow f(5) = (5)^2 = 25$$

$$x = -5 \longrightarrow f(-5) = (-5)^2 = 25$$

مثال (١-٢)

إذا كانت الدالة f هي الدالة التي تعين لكل عدد حقيقي x مكعبه مضاف إليه مربعه. فإن نطاق الدالة هو فئة الأعداد الحقيقية R والمدى هو فئة الأعداد الحقيقية أيضاً حيث:

$$f:\ R \longrightarrow R$$

أو

$$f(x) = x^3 + x^2 \qquad , x \in R$$

وبالتالي فإن:

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = (1)^3 + (1)^2 = 2$$

$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = 0$$

$$x = 5 \longrightarrow f(5) = (5)^3 + (5)^2 = 150$$

$$x = -5 \longrightarrow f(-5) = (-5)^3 + (-5)^2 = -100$$

مثال (١-٣)

إذا كانت x تشير إلى عدد الوحدات المنتجة يومياً في أحدى الشركات من منتج معين، C هي التكلفة الكلية للوحدات المنتجة يومياً من هذا المنتج. وبالتالي تحديد قيمة C يعتمد على قيمة x . حيث يمكن كتابة C على النحو التالي:

$$C = f(x)$$

حيث x هو نطاق الدالة f، C مدى الدالة f.

فإذا قامت إدارة التخطيط بتحديد f(x) على النحو التالي:

$$f(x) = 10000 + 2x$$

فإذا كان الإنتاج اليومي $x = 2000$ وحدة فإن التكلفة عند هذا الإنتاج هي:

$$C = f(2000) = 10000 + 2(2000) = 14000$$ جنيه

وبالتالي فإذا كان الإنتاج اليومي $x = 5000$ وحدة فإن التكلفة في هذه الحالة:

$$C = f(5000) = 10000 + 2(5000) = 20000$$ جنيه

النطاق والمدى المقيدين Restricted Domain & Range

إذا كان A,B هما فئتي النطاق والمدى للدالة f على الترتيب، فإذا كان $x \in A$ بحيث $x_1 \le x \le x_2$ كذلك $y \in B$ بحيث:

$$y = f(x)$$

فإن قيم عناصر فئة المدى B لابد أن تكون محصورة بين $f(x_1)$، $f(x_2)$ أي أن:

$$f(x_1) \le x \le f(x_2)$$

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متزايدة في x.

كذلك:

$$f(x_2) \le y \le f(x_1)$$

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متناقصة في x.

وفي هذه الحالة عندما يكون للنطاق حد أدنى وحد أعلى يسمى بالنطاق المقيد Restricted Domain ويكون للمدى أيضاً حداً أدنى وحداً أعلى – ويسمى بالمدى المقيد Restricted Range.

مثال (١-٤)

إذا كانت D دالة الطلب على أحدى المنتجات، x سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتج حيث:

$$D = f(x) = 500 - 10x \ , \quad 5 \le x \le 50$$

أوجد:

١- المدى المقيد.

٢- الطلب عند السعر 25جنيه

الحل

١- بما أن الدالة:

$$D = 500 - 10x$$

فنجد أنها دالة متناقصة في x، بالتالي فإن المدى المقيد:

$$f(x_2) \le D \le f(x_1)$$

حيث

$$x_1 = 5 \longrightarrow f(x_1) = 500 - 10(5) = 450$$

$$x_2 = 50 \longrightarrow f(x_2) = 500 - 10(50) = 0$$

وبالتالي

$$0 \le D \le 450$$

٢- إذا كان $x = 25$ فإن:

$D = f(x = 25) = 500 - 10(25) = 250$ وحدة

تمرين (١)

١- أوجد في كل دالة من الدوال التالية فئتي النطاق والمدي:

1) $f(x) = 3x - 2$, 2) $f(x) = 5x + 3$

3) $f(x) = -2x + 10$ ، 4) $f(x) = \dfrac{-5x}{3}$

5) $f(x) = t^4$ ، 6) $f(x) = -2x^3 + 7x$

7) $f(x) = x^3$ ، 8) $f(x) = 50 - \dfrac{x^2}{3}$

9) $f(x) = ax^2 + t$ ، 10) $f(x) = tx^2 - hx + 100$

٢- حدد فئة النطاق لكل دالة من الدوال التالية ووضح ذلك بيانياً:

1) $f(x) = 200$ ، 2) $f(x) = -3$

3) $f(x) = 5x - 7$ ، 4) $f(x) = -x + 5$

5) $f(x) = 49 - x^2$ ، 6) $f(x) = x^2 - 16$

7) $f(x) = \sqrt{x + 8}$ ، 8) $f(x) = \sqrt{-3x + 81}$

9) $f(x) = \sqrt{-x - 9}$ ، 10) $f(x) = \sqrt{81 - x^2}$

11) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{(-x^2 + 2x + 5)}$ ، 12) $f(h) = \dfrac{\sqrt{h^2 - 4}}{(h^3 + h^2 - 6h)}$

(١-٢) الدالة العكسية Inverse Function

إذا كان y دالة في المتغير x أى أن y المتغير التابع، x المتغير المستقل حيث:

$$y = f(x)$$

فبمعرفة الدالة f يمكن تحديد قيمة y عند قيمة محددة لـ x. ولكن إذا كان المطلوب العكس أي تحديد قيمة x عند قيمة محددة لـ y فأنه يتم ذلك باستخدام دالة أخرى تسمى بالدالة العكسية للدالة f(x) (أو بمعكوس الدالة f(x)) ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(y)$ حيث:

$$x = f^{-1}(y) \qquad (1.3)$$

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

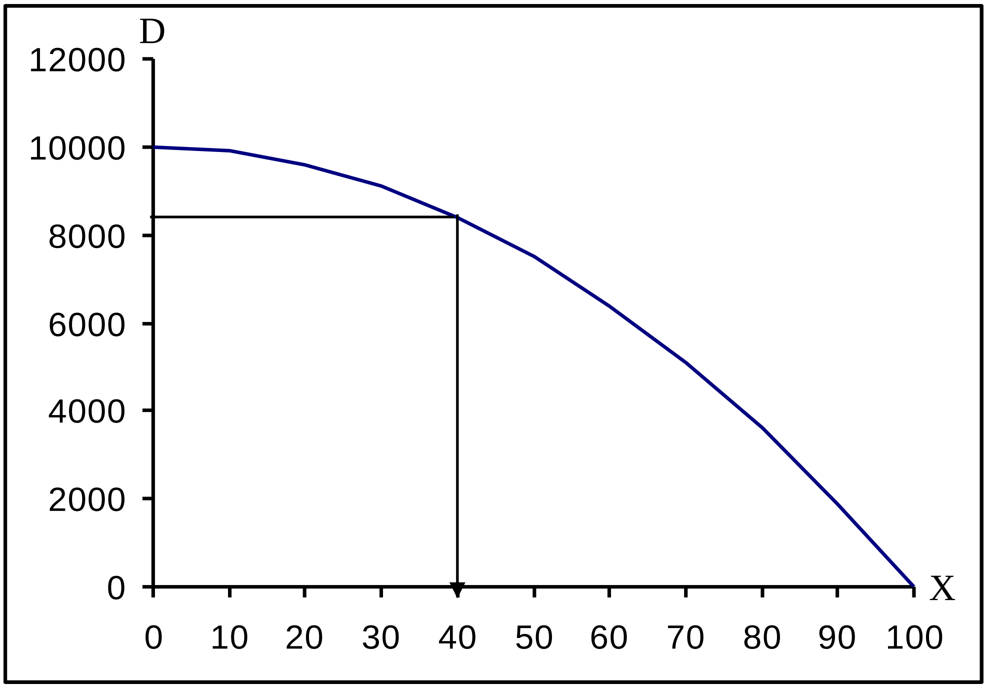
ملحوظة: f^{-1} تشير إلى الدالة العكسية للدالة f.

مثال (١-٥)

إذا فرضنا أن x تشير إلى سعر بيع الوحدة من منتج معين، D تشير إلى الكمية المطلوبة من هذا المنتج، فإن D تعتبر دالة في x حيث:

$$D = f(x) = 10000 - x^2 \ , \quad 0 < x < 100$$

والشكل التالي يوضح العلاقة بين x، D.



شكل (١-٢)

ومن الرسم يمكن تحديد السعر x عند كمية مطلوبة معينة D، فمثلاً نجد أنه عند الكمية $D = 8400$ نجد أن السعر يساوى $x = 40$ جنيه للوحدة. ومن الرسم يمكن إيجاد x عند أي قيمة معينة لـ D. كذلك يمكن إيجاد x بدلالة D من العلاقة التالية:

$$X = g(D) = \sqrt{10000 - D} \ , \quad 0 \leq D \leq 10000 \qquad (1.4)$$

وتسمى الدالة $g(D)$ معكوس الدالة $f(x)$ أي:

$$g(D) = f^{-1}(D)$$

وفي كثير من الأحيان يمكن إيجاد $f^{-1}(D)$ عن طريق الدالة $f(x)$.

وبصفة عامة تسمى الدالة $g(x)$ معكوس للدالة $f(x)$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= X \\ g[f(x)] &= X \end{aligned} \qquad (1.5)$$

ملحوظة: $f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$

مثال (١-٦)

في المثال السابق نجد أن:

$$D = f(x) = 10000 - x^2$$

$$X = g(D) = \sqrt{10000 - D}$$

وبتطبيق العلاقة (1.5) نجد أن:

$$f[g(x)] = 10000 - [\sqrt{10000 - x}]^2 = x$$

وبالمثل نجد أن:

$$g[f(x)] = \sqrt{10000 - 10000 + x^2} = x$$

تعريف (١-١)

إذا كان $y = f(x)$ فإنه يقال أن العلاقة بين x ، y أي الدالة f واحد إلى واحد one-to-one عندما يكون لكل عنصر في فئة المدى y عنصر واحد فقط مناظر له في فئة النطاق x [14].

مثال (١-٧)

١- وضح أن الدالة

$$y = f(x) = x^2 \;,\; -\infty \le x \le \infty$$

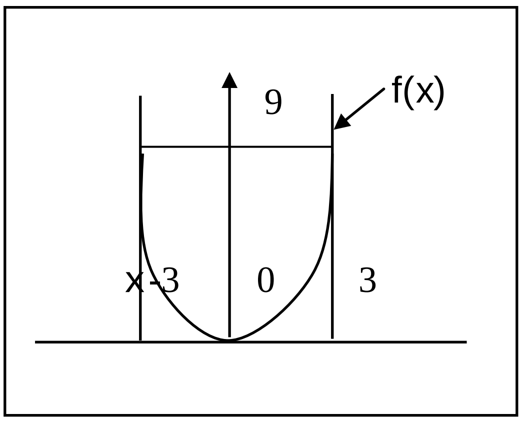
ليس لها دالة عكسية.

٢- كذلك وضح أن الدالة

$$y = f(x) = x^2 \;,\; 0 \le x$$

لها دالة عكسية.

الحل



شكل (١-٣)

١- بما أن عندما $x = 3$ نجد أن:

$$f(3) = 9$$

كذلك عندما $x = -3$ نجد أن:

$$f(-3) = 9$$

وبالتالي فإنه عند القيمة الواحدة لـ y تناظرها قيمتين لـ x أي أن العلاقة ليست واحد إلى واحد. وبالتالي لا يوجد دالة عكسية لـ $f(x) = x^2 \;,\; -\infty \le x \le \infty$.

٢- ولكن عندما $y = f(x) = x^2 \;,\; x \ge 0$ فإن القيمة الواحدة لـ y تناظرها قيمة واحدة لـ x وبالتالي فإن الدالة العكسية:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

حيث

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = (\sqrt{y})^2 = y$$

نظرية (١-١)

الشرط الضروري والكافي لوجود معكوس للدالة $y = f(x)$ أن تكون العلاقة بين المتغير الأساسي x والمتغير التابع y علاقة واحد إلى واحد one-to-one.

مثال (١-٨)

وضح أن كل من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ كل منهما معكوس للآخر

$$f(x) = x^{1/3} \quad , \quad g(x) = x^3$$

الحل

بما أن:

$$f\left(g(x)\right) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$g\left(f(x)\right) = (x^{1/3})^3 = x$$

ودراسة الدالة العكسية للدالة يعتبر من أهم الدراسات التي لها تطبيقات عملية هامة في كثير من المجالات، وفيما يلي بعض الأمثلة لتطبيقات الدالة العكسية.

<u>أولاً:</u> فمثلاً جهاز رسم القلب الكهربائي مبنى على فكرة الدالة العكسية [22] فإذا فرضنا أن قياس النشاط الكهربائي لصدر المريض وليكن y دالة في قياس النشاط الكهربائي لقلب المريض وليكن x على النحو التالي:

$$y = f(x)$$

وعادة يتم توصيل الجهاز بصدر المريض فيتم قياس النشاط الكهربائي للصدر y وعن طريق الدالة العكسية يقوم الجهاز بتحديد قياس النشاط الكهربائي للقلب x حيث:

$$X = f^{-1}(y)$$

ثانياً: كذلك في السوق الحر، إذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة S من منتج معين وسعر الوحدة من المنتج x على النحو:

$$S = f(x)$$

فإنه يمكن عن طريق الدالة العكسية تحديد السعر x عند مستوى معين من العرض حيث:

$$X = f^{-1}(S)$$

تمرين (٢)

١- وضح أن كل من الدالة $f(g(x))$ ، $g(f(x)) = x$ دالة عكسية للآخرة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^5 \quad , \quad g(x) = x^{1/5}$

2) $f(x) = 4x^3 \quad , \quad g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3}$

3) $f(x) = \frac{1}{x+2} \quad , \quad g(x) = \frac{1-2x}{x}, (x \neq 0, x \neq -2)$

4) $f(x) = 2x^3 + 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

٢- حدد أى من العلاقات التالية تكون واحد - لواحد one-to-one ثم حدد المعكوس في حالة الدوال one-to-one.

1) $f(x) = x^3 - 2$

2) $f(x) = x^3 + 5$

3) $f(x) = x^5 - 1$

4) $f(x) = x^4 - 2x - 1$

5) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

8) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

٣- وضح أن الدالة $g(x)$ حيث:

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad , \ x \geq 0$$

معكوس للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = x^2 \qquad , \ x \geq 0$$

ووضح ذلك بيانياً

٤- وضح أن الدالة $g(x)$ حيث:

$$g(x) = \sqrt{x+1} \qquad , \ x \geq -1$$

معكوس للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad , \ x \geq 0$$

٥- ناقش أي الدوال الموصوفة فيما يلي لها معكوس:

أ - دخل أحدى الشركات يتغير مع الزمن.

ب- طول الشخص يتغير مع الزمن.

جـ- درجة الطالب في الإحصاء تتغير وفقاً لدرجته في الرياضة.

د - الكمية المطلوبة من أحدى المنتجات تتوقف على سعر الوحدة من المنتج.

هـ- الكمية المعروضة من سلعة معينة تتوقف على الكمية المطلوبة من السلعة.

(١-٣) الدوال متعددة المتغيرات Functions of several Variables

في الفصلين السابقين في هذا الباب تناولنا الدالة في متغير واحد مستقل، أي أن المتغير التابع Z يعتمد على متغير واحد (x) على النحو:

$$Z = f(x)$$

ويوجد أشكال متعددة للدوال في متغير واحد مثل الدالة الخطية، التربيعية، الأسية، ... الخ [٤]. ولكن نظراً لتشابك العلاقات واعتماد المتغير التابع على العديد من المتغيرات الأخرى، وبصفة خاصة العلاقات الإنسانية سواء اقتصادية، تجارية، سياسية، .. الخ.

فعادة المتغير التابع Z يعتمد على أكثر من متغير مستقل ولتكن المتغيرات $x_1, x_2, x_3, .., x_n$ وفي هذه الحالة يقال أن المتغير التابع Z دالة متعددة المتغيرات المستقلة - ويشار إليها بالرمز

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, .., x_n) \qquad (1.6)$$

وفي أغلب التطبيقات الفعلية عادة تكون الدوال متعددة المتغيرات – فعلى سبيل المثال تعتمد تكلفة الوحدة المنتجة من سلعة ما على:

١- أسعار المواد الداخلة في إنتاجها. ٢- حجم المنشأة.

٣- المستوى التكنولوجي للإنتاج.

وعادة إذا كانت Z دالة في المتغيرات x, y فإننا نرمز لها بالرمز:

$$Z = f(x, y) \qquad (1.7)$$

وتسمى في هذه الحالة دالة في متغيران مستقلان bivariate function أو دالة في متغيران function of two variables. وبالنسبة للدالة في (1.7) نجد أن فئة النطاق لها Domain هي الفئة D، حيث الفئة D هي فئة الأزواج المرتبة ordered pairs للأعداد الحقيقية (x,y) على النحو:

$$D = \{ D \mid D \in (x,y) , X \in R , Y \in R \} \tag{1.8}$$

أي أن:

$$D \subset R^2 \tag{1.9}$$

كذلك نجد أن فئة الأعداد الحقيقية G هي فئة المدى range للدالة في (1.7) حيث:

$$G = \{ g \mid g \in R \}$$

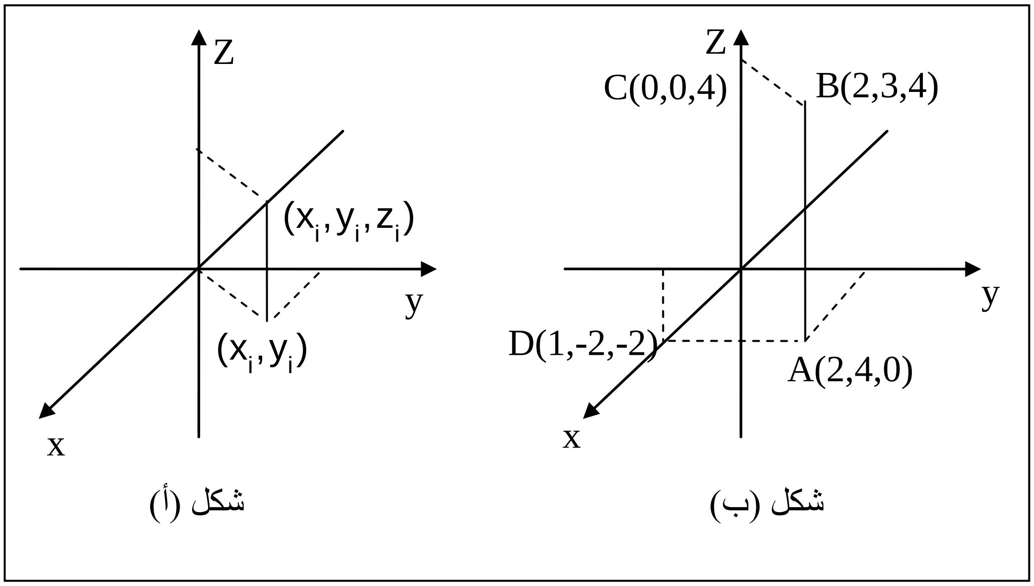
أي أن:

$$G \subset R \tag{1.10}$$

وبالتالي يمكن التعبير عن الدالة في هذه الحالة على النحو:

$$f : D \subset R^2 \to R \tag{1.11}$$

ولرسم الدالة في متغيران $f(x,y)$ نحتاج إلى ثلاث محاور Three-dimensions. كما هو موضح بشكل (١-٣).



شكل (١-٣): يوضح تحديد نقطة في ٣ محاور

حيث يوضح الشكل (أ) تحديد النقطة $((x_i, y_i)z_i)$ فهي ترتيب ثلاثي Ordered Triple في المحاور x, y, z. ولكل نقطة (x_i, y_i) في المستوى –XY Plane توجد نقطة وحيدة $((x_i, y_i)z_i)$. أي النقطة $((x_i, y_i), f(x_i, y_i))$. كذلك يوضح الشكل (ب) موضع النقاط A، B، C، D على المحاور الثلاثة.

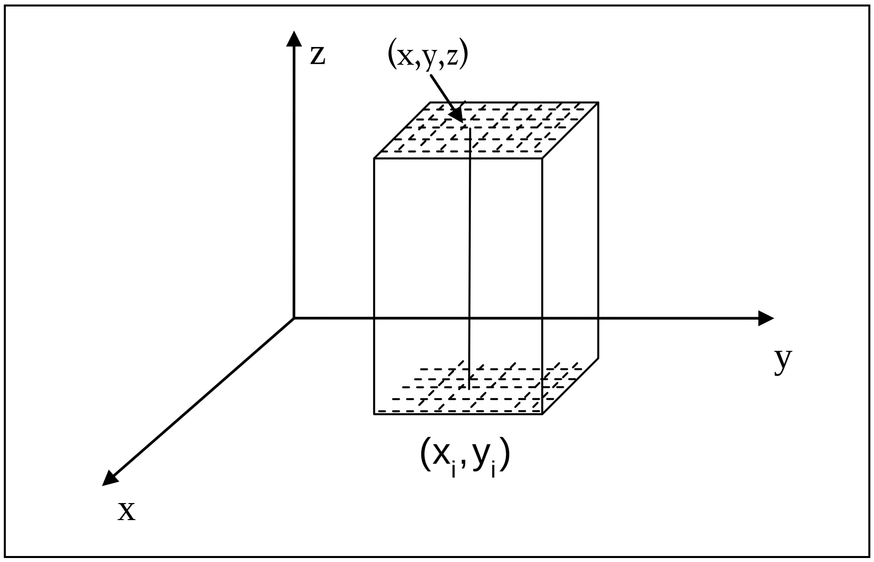
وبصفة عامة فإن التمثيل البياني للدالة $Z = f(x, y)$ هو عبارة عن سطح Surface في المحاور الثلاثة x, y, z. ويتوقف شكل السطح على الصياغة الرياضية للدالة $Z = f(x, y)$.

مثال (١-٨)

وضح بيانياً الدالة

$$Z = f(x,y) = 3xy + 10 \qquad ,0 \le x \le 10$$
$$3 \le y \le 10$$

ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي



شكل (١-٤)

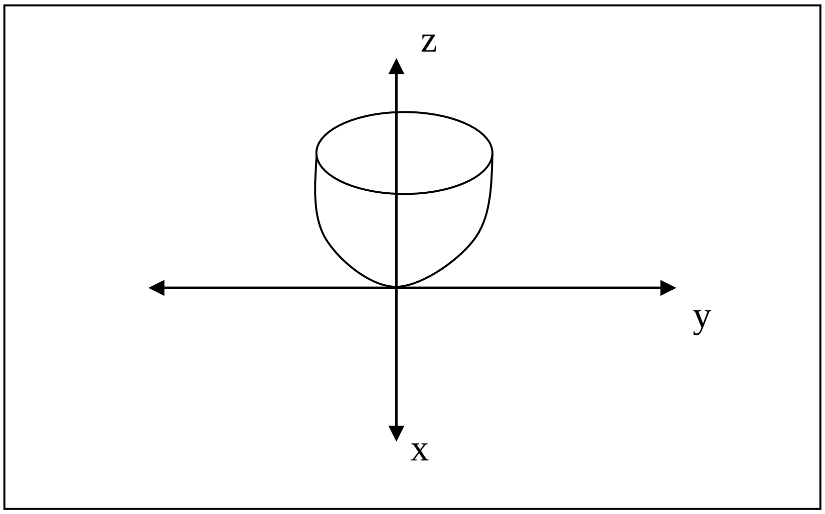
فإذا فرضنا أن الفئة الممثلة للأزواج المرتبة (x_i, y_i) للدالة، أي فئة النطاق Domain للدالة كما هي موضحة في الشكل (١-٤) فإن فئة المدى Z هي فئة جميع النقاط المناظرة للأزواج المرتبة (x_i, y_i) والفئة التي تمثل جميع النقاط (x_i, y_i, z_i) هي عبارة عن السطح الذي يمثل الدالة $Z = f(x,y)$.

مثال (١-٩)

وضح بيانياً الدالة

$$Z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

والشكل التالي (١-٥) يوضح الدالة Z.



شكل (١-٥)

فنجد أن الشكل يمثل قطع مكافئ دائري.

ويمكن أن تكون الدالة في أكثر من متغيرين، فإذا كانت الدالة K حيث K دالة في المتغيرات x, y, z أي أن:

$$K = f(x,y,z) \tag{1.12}$$

وتسمى الدالة (1.12) بالدالة في ثلاثة متغيرات function of three variables - وبالمثل يمكن ان تكون الدالة في عدد n من المتغيرات – فإذا كان x_j، $j = 1,2,...,n$ تشير إلى المتغير j فإن الدالة y حيث:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) \tag{1.13}$$

حيث أن فئة النطاق D بحيث:

$$D = \{ D \mid D \in (x_1, x_2, ..., x_n) , X_j \in R , j = 1,2,..,n \}$$

أي أن كل عنصر في فئة النطاق D مكون من n من العناصر المرتبة حيث:

$$D \subset R^n$$

كذلك نجد أن فئة الأعداد الحقيقية G هي فئة المدى للدالة في (1.13) حيث:

$$G = \{g \mid g \in R\}$$

أي أن:

$$G \subset R$$

وبالتالي يمكن التعبير عن الدالة (1.13) في هذه الحالة على النحو:

$$f : D \subset R^n \to R \qquad (1.14)$$

ويوجد العديد من التطبيقات يمكن صياغاتها في شكل دالة متعددة المتغيرات كما سوف نوضح في الأمثلة التالية:

مثال (١-١٠)

إذا فرضنا أن الدالة y حيث:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - 5x_3x_4$$

أوجد:

1) $f(1,10,4,-5)$ 2) $f(2,1,1,1)$

الحل:

$$1)\ f(1,10,4,-5) = f(x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 4, x_4 = -5)$$
$$= (1)(10) - 5(4)(-5) = 10 + 100 = 110$$

$$2)\ f(2,1,1,1) = f(x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1)$$
$$= 2(1) - 5(1)(1) = 2 - 5 = -3$$

مثال (١-١١)

تقوم إحدى الشركات ببيع نوعين من المنتجات المرتبطة ببعض، فإذا فرضنا أن الكمية المطلوبة من كل نوع ولتكن q_1, q_2 (بالألف وحدة) دالة في سعر بيع الوحدة الواحدة من كل نوع وليكن p_1, p_2 (بالجنيه) على النحو التالي:

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) = 350 - 5p_1 - p_2$$
$$q_2 = f_2(p_1, p_2) = 400 - p_1 - 2p_2$$

المطلوب:

١- حدد الكمية المطلوبة من كل نوع إذا فرضنا أن:

$$p_1 = 25 \quad , \quad p_2 = 30$$

٢- حدد العلاقة بين p_1, p_2 عند تتساوي $q_1 = q_2$

الحل

١- عندما $p_1 = 25 \quad , \quad p_2 = 30$

$$q_1 = f_1(p_1 = 25, p_2 = 30) = 350 - 5(25) - 30$$
$$= 350 - 125 - 30 = 255$$ (ألف وحدة)

$$q_2 = f_2(p_1 = 25, p_2 = 30) = 400 - 25 - 2(30)$$
$$= 400 - 25 - 60 = 315$$ (ألف وحدة)

٢- عندما $q_1 = q_2$ نجد أن:

$$350 - 5p_1 - p_2 = 400 - p_1 - 2p_2 \longrightarrow p_2 = 50 + 4p_1$$

تمرين (٣)

١- أعتبر الدالة

$$f(x,y) = 2x + 3y - 4$$

أحسب ما يلي:

$$f(0,0) \ , \ f(1,0) \ , \ f(0,1) \ , \ f(1,2) \ , \ f(2,-1)$$

٢- اعتبر الدالة

$$f(x,y) = \frac{(x+y)}{(x-y)}$$

أحسب ما يلي:

$$f(0,1) \ , \ f(-1,1) \ , \ f(2,1) \ , \ f(\pi,-\pi)$$

٣- حدد فئة النطاق لكل من الدوال التالية:

$$1)\ f(x,y) = 2x + 3y \ , \quad 2)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$3)\ h(x,y) = \frac{xy}{x-y} \ , \quad 4)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$5)\ h(u,v) = \sqrt{4 - u^2 - v^2} \ , \quad 6)\ h(x,y) = \ln(x + y - 5)$$

$$7)\ f(x,y) = e^{-xy}$$

٤- تقوم أحدى الشركات السياحية بتقدير الزيادة في الفائدة السنوية (بالألف جنيه) نتيجة الاتفاق على الإعلان للشركة في الجرائد بمقدار X (بالألف جنيه في السنة) وفي التليفزيون Y (بالألف جنيه في السنة) فكانت العلاقة بين Y, X, Z على النحو التالي:

$$Z = f(x,y) = 30\, x^{1/4}\, y^{3/4}$$

المطلوب:

١- قدر الزيادة في العائد عندما

$Y = 50$ (ألف جنية) ، $X = 16$ (ألف جنية)

٢- قدر متوسط الزيادة في العائد الشهري في أحدى السنوات عندما:

(ألف جنية) $Y = 100$ ، (ألف جنية) $X = 100$

(١-٤) الدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Function

أولاً: الدالة الأسية

إذا اعتبرنا الدالة y حيث:

$$y = f(x) = b^x \qquad , b > 0 , x \neq 1 \qquad (1.15)$$

فإن الدالة y في هذه الحالة تسمى بالدالة الأسية exponential function بالأساس (b) والأس x.

فمثلا الدالة الأسية للأساس (2) والأس (x) تكون على النحو:

$$f(x) = 2^x \qquad , \quad x \in R$$

فنجد أن فئة النطاق D حيث:

$$D = \{x \mid x \in R\}$$

كذلك نجد ان:

$$f(x=3) = 2^3 = 8 \quad , \quad f(x=\frac{3}{2}) = 2^{3/2} = 2(2)^{1/2} = 2\sqrt{2}$$

$$f(x=0) = 2^0 = 1 \quad , \quad f(x=-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad , \quad \ldots$$

كذلك يتضح أن فئة المدى G حيث:

$$G = \{g \mid g \in R^+\}$$

بعض قوانين الأسس

إذا فرضنا أن a , b مقادير ثابتة، x,y متغيران فإن:

$$b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} \quad 1) \qquad , \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{(x-y)} \quad 2)$$

$$(b^x)^y = b^{xy} \quad 3) \qquad , \qquad (ab)^x = a^x b^x \quad 4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad 5)$$

مثال (١-١٢)

إذا اعتبرنا الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = 3^{2x-1}$$

أوجد قيمة (x) عندما $f(x) = 81$

الحل

عندما $f(x) = 81$ فإن:

$$f(x) = 81 = 3^4 \qquad (1)$$

وبما أن

$$f(x) = 3^{2x-1} \qquad (2)$$

وبمساواة (1) بـ (2) نجد أن

$$3^{2x-1} = 3^4 \longrightarrow$$

$$2x - 1 = 4 \longrightarrow$$

$$x = \frac{5}{2} = 2.5$$

مثال (١-١٣)

أرسم الدالة الأسية في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = 2^x$ 1) , $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 2)

الحل

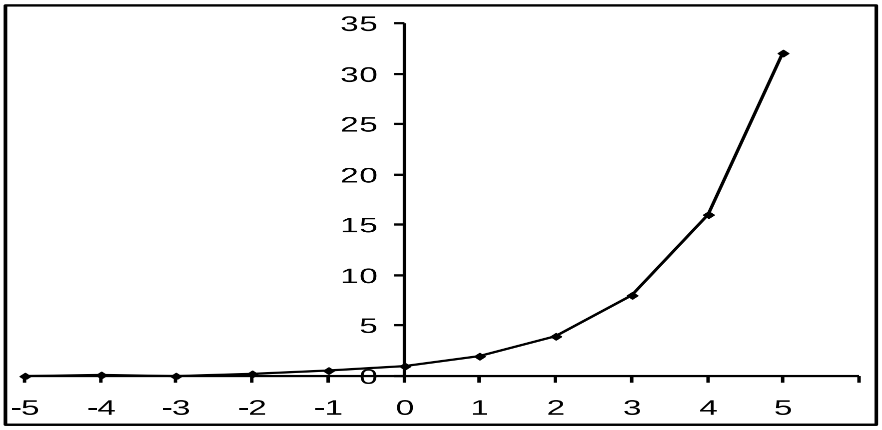
١- لرسم الدالة

$$y = f(x) = 2^x$$

نكون الجدول التالي حيث يتم افتراض قيم للمتغير x ويتم حساب قيم y المناظرة لها على النحو الموضح بالجدول.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.50	1	2	4	8	16	32

وبتحديد قيم x على المحور الأفقي، وقيم y على المحور الرأسي وتحديد النقط لقيم x، وقيم y المناظرة لها وتوصيل هذه النقط نجد أن الدالة y يمثلها المنحنى الموضح بالشكل التالي:

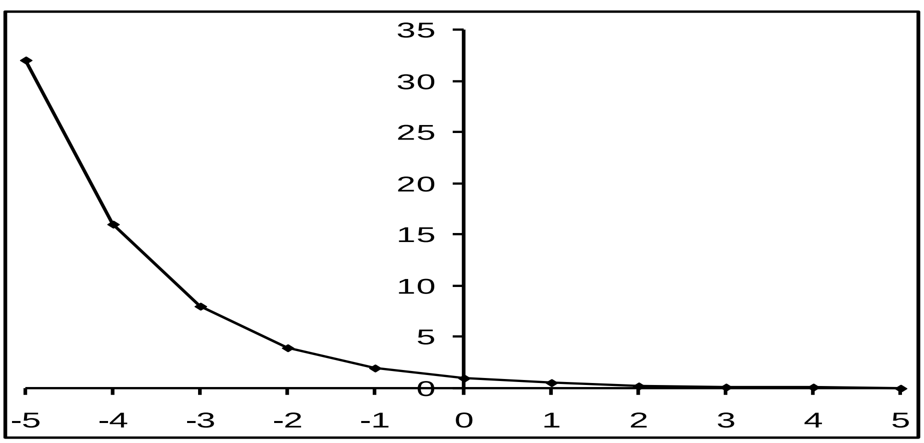


شكل (١-٦) يوضح منحنى الدالة $y = 2^x$

٢- بالمثل لرسم الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ نكون الجدول التالى

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	32	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125

والشكل التالي يوضح منحنى الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



شكل (١-٧) يوضح منحنى الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

خصائص الدالة الأسية

الدالة الأسية

$$y = b^x \qquad b > 0 \;,\; x \neq 1$$

لها بعض الخصائص التالية:

١- فئة النطاق للدالة تتكون من العناصر $(-\infty \,,\, +\infty)$.

٢- فئة المدى للدالة تتكون من العناصر $(0 \,,\, +\infty)$.

٣- منحنى الدالة يمر بالنقطة $(x = 0 \,,\, y = 1)$ لجميع قيم b, x.

٤- الدالة دالة متصلة $(-\infty \,,\, +\infty)$.

٥- عندما $b > 1$ تكون الدالة y دالة متزايدة، وعندما $b < 1$ تكون الدالة y دالة متناقصة وذلك لجميع قيم $-\infty < x < +\infty$.

الدالة الأسية للأساس الطبيعي (e)

إذا أعتبرنا المقدار e حيث:

$$e = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \tag{1.14}$$

والجدول التالي يوضح المقدار $(1 + \frac{1}{m})^m$ عند القيم المتزايدة لـ m

m	$(1 + \frac{1}{m})^m$
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

ومن الجدول يتضح أن

$$e = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \approx 2.718$$

وتسمى e بالأساس الطبيعي للدالة الأسية، وتعتبر الدالة الأسية للأساس الطبيعي e من الدوال الهامة في كثير من التطبيقات، كما سوف نوضح ذلك فيما بعد.

مثال (١-١٤)

أرسم كل من الدوال التالية:

1) $y = e^{x}$ ، 2) $y = e^{-x}$

الحل

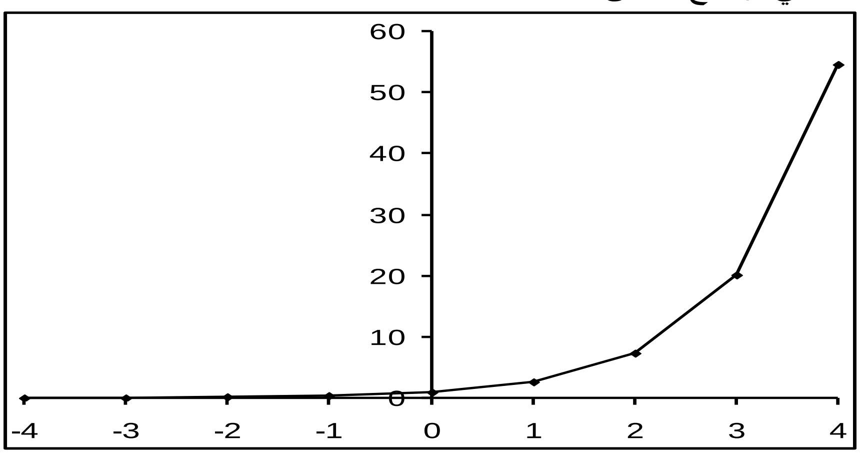
١- لرسم الدالة الأسية للأساس الطبيعي

$$y = e^{x}$$

نكون الجدول التالي:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0.0183	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09	54.5981

والشكل التالي يوضح منحنى الدالة



شكل (١-٨) يوضح منحنى الدالة $y = e^{x}$

٢- بالمثل نجد ان الدالة

$$y = e^{-x}$$

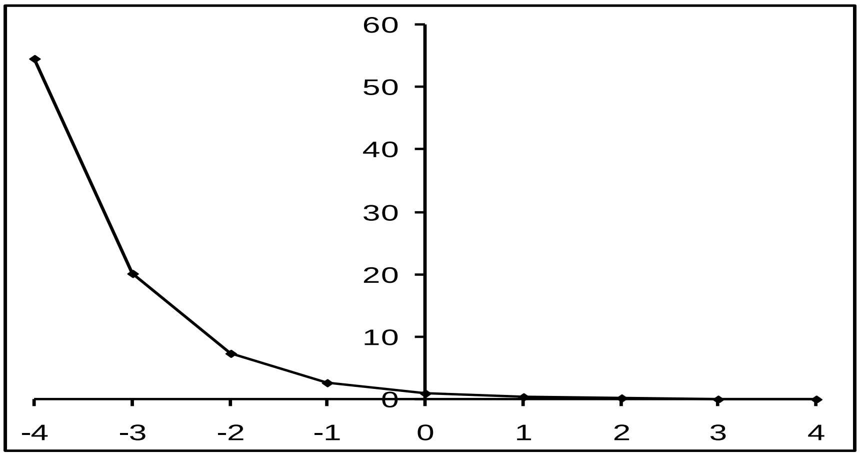
عبارة عن:

$$y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^{x}$$

نكون الجدول التالي:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	54.5981	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14	0.05	0.0183

والشكل التالي يوضح منحنى الدالة



شكل (١-٩) يوضح منحنى الدالة $y = e^{-x}$

ثانياً: الدالة اللوغاريتمية

إذا فرضنا أن

$$b^y = x \qquad , \qquad b > 0$$

فإن

$$y = \log_b x \tag{1.15}$$

وتسمى y بالدالة اللوغاريتمية. وتقرأ "y تساوى لوغاريتم x للأساس b".

وبالتالي فإن:

$$y = \log_b x \text{ إذا وإذا فقط } x = b^y$$

مثال (١-١٥)

ضع الدالة الأسية المناظرة لكل دالة من الدوال التالية:

1) $\log_{10} 100 = 2$ 2) $\log_3 27 = 3$

$\log_{20} 20 = 1$ (3)	$\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ (4)

الحل

$\log_{10} 100 = 2 \longrightarrow 10^2 = 100$ (1)

$\log_3 27 = 3 \longrightarrow 3^3 = 27$ (2)

$\log_{20} 20 = 1 \longrightarrow (20)^1 = 20$ (3)

$\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3 \longrightarrow (3)^{-3} = \frac{1}{27}$ (4)

وللتبسيط فإننا سوف نستخدم الرموز التالية:

$$\left.\begin{array}{l} \log_{10} x = \log x \\ \log_e x = \ln x \end{array}\right\} \tag{1.16}$$

بعض قوانين اللوغاريتمات

إذا كان n، m أعداد موجبة أي $n, m > 0$ فإن:

1- $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

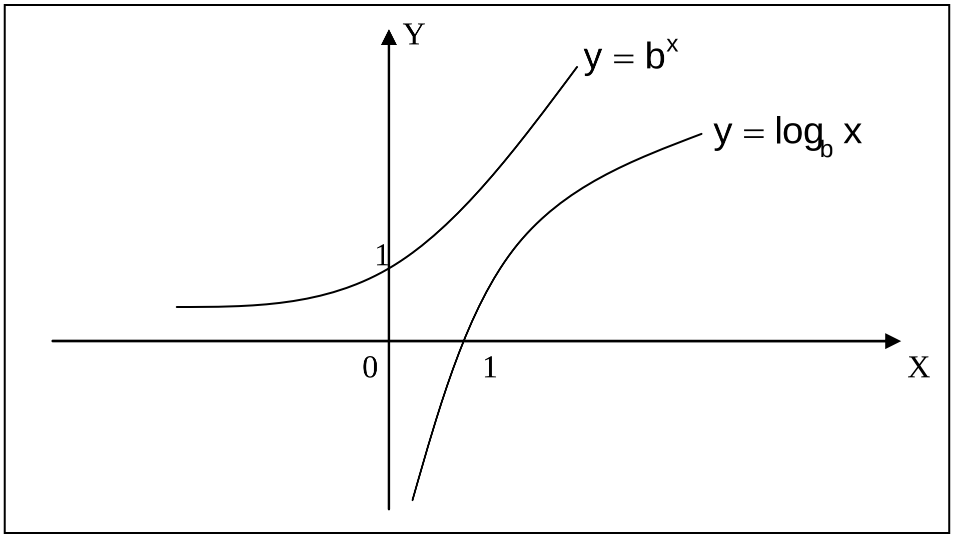
2- $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

3- $\log_b m^n = n \log_b m$

4- $\log_b 1 = 0$

5- $\log_b b = 1$

والشكل التالي يوضح كل من الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية معاً.



شكل (١-١٠)

وتوجد علاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي e على النحو التالي:

$$e^{\ln x} = x \qquad (1.17)$$

$$\ln e^{x} = x \qquad (1.18)$$

ومن العلاقة (1.17)، (1.18) يتضح أن الدالة اللوغاريتمية دالة عكسية للدالة الأسية، والدالة الأسية دالة عكسية للدالة اللوغاريتمية.

مثال (١-١٦)

١- إذا فرضنا أن

$$y = f(x) = e^{x}$$

بالتالي فإن:

$$x = \ln y$$

وبالتالي تصبح الدالة $\ln(y)$ دالة عكسية للدالة $f(x)$، أي أن:

$$f^{-1}(y) = \ln(y)$$

٢- كذلك إذا فرضنا أن

$$Z = f(x) = \ln x$$

فإن

$$e^{z} = e^{\ln x} = x \longrightarrow$$
$$x = e^{z}$$

وبالتالي تصبح الدالة e^{z} دالة عكسية للدالة $f(x)$ أي أن:

$$f^{-1}(Z) = e^{z}$$

مثال (١-١٧)

حل المعادلات التالية:

$$3e^{x+4} = 18 \quad 1) \qquad , \qquad 4\ln x + 5 = 0 \quad 2)$$

الحل

-١

$$\Theta\ 3e^{x+4} = 18 \longrightarrow e^{x+4} = \frac{18}{3} = 6 \longrightarrow$$
$$\ln e^{x+4} = \ln 6 \longrightarrow$$
$$x + 4 = \ln 6 \longrightarrow$$
$$x = \ln 6 - 4 = 1.8 - 4 = -2.2$$

-٢

$$\Theta\ 4\ln x + 5 = 0 \longrightarrow \ln x = \frac{-5}{4} \longrightarrow$$

$$e^{\ln x} = e^{\frac{-5}{4}} \longrightarrow$$
$$x = e^{-1.25} = 0.2865$$

تمرين (٤)

١- أوجد قيم كل مما يلي:

1) $y = 3^{-2} \cdot 3^{5}$, 2) $3^{-3} \cdot 3^{6}$

3) $y = (5^{-1})^{3}$, 4) $y = (3^{-2})^{3}$

5) $y = \left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{2}\right]^{-2}$, 6) $y = \left[\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\right]^{-3}$

7) $y = \left(\frac{125}{8}\right)^{-1/3}(81)^{-1/4}$, 8) $y = \left(\frac{8}{27}\right)^{-1/3}\left(\frac{81}{256}\right)^{-1/4}$

٢- حل المعادلات التالية

1) $6^{2x} = 6^{4}$, 2) $5^{-x} = 5^{3}$

3) $5^{3x+1} = 5^{-5}$, 4) $(-2.5)^{2x+1} = (-2.5)^{x-2}$

5) $8^{x} = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$, 6) $3^{x-x^{2}} = \frac{1}{9x}$

7) $5^{2x} - (26)5^{x} + 25 = 0$, 8) $3^{2x} - (12)3^{x} + 27 = 0$

٣- إذا فرضنا أن معدل الوفيات للأطفال (في سن أقل من سنة) في السنة t في إحدى الدول (في الألف) هو $N(t)$ حيث:

$$N(t) = 12.5\,e^{-0.029t} \quad , \quad 0 \le t \le 25$$

حيث t تقاس بالسنوات، $t = 0$ في عام ١٩٨٥.

أ- أوجد معدل الوفيات سنة ١٩٨٥، ١٩٩٥، ٢٠٠٠.

ب- أرسم الدالة $N(t)$ ثم عقب على الرسم.

٤- حدد أى العلاقات التالية صحيحة وأيها خطأ.

1) إذا كان $x > y$ فإن: $e^x > e^y$

2) $e^{xy} = e^x e^y$

3) $(x^3 + 1)^2 = x^6 + 1$

4) إذا كان $0 < b < 1$, $x < y$ فإن $b^x > b^y$

٥- عبر عن المعادلات التالية في شكل لوغاريتمات

1) $4^2 = 16$, 2) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

3) $5^{-4} = \frac{1}{625}$, 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

٦- إذا كان $\log 5 = 0.69897, \log 4 = 0.60206$ أوجد قيمة كل مما يلي:

1) $\log 10$, 2) $\log \frac{5}{20}$

3) $\log 100$, 4) $\log\left(\frac{1}{80}\right)$

٧- باستخدام اللوغاريتمات حل المعادلات التالية:

1) $e^{3x-1} = 7$, 2) $4e^{3x-1} = 4$

3) $5e^{-5x} - 3 = 9$, 4) $\frac{40}{1 + 2e^{3x}}$

5) $15 - e^{4x} = 5$

(١-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (١-١)

إذا كانت دالة الطلب $D(x)$ ودالة العرض $S(x)$ على أحد المنتجات (بالألف وحدة) دالة في السعر x بالجنية. على النحو التالي [12]:

$$D(x) = -0.01x^2 - 0.2x + 10$$

$$S(x) = 5 + 0.1x + 0.01x^2$$

المطلوب: أوجد كل من السعر والكمية التوازنية في السوق Equilibrium Quantity and Price – ووضح ذلك بيانياً.

الحل

بما أن عند التوازن – نجد أن الكمية المعروضة تساوى الكمية المطلوبة أي أن:

$$S(x) = D(x) \longrightarrow$$

$$5 + 0.1x + 0.01x^2 = 10 - 0.2x - 0.01x^2 \longrightarrow$$

$$0.02x^2 + 0.3x - 5 = 0 \longrightarrow$$

$$(x + 25)(x - 10) = 0 \longrightarrow$$

$$x = -25 \quad \text{or} \quad x = 10$$

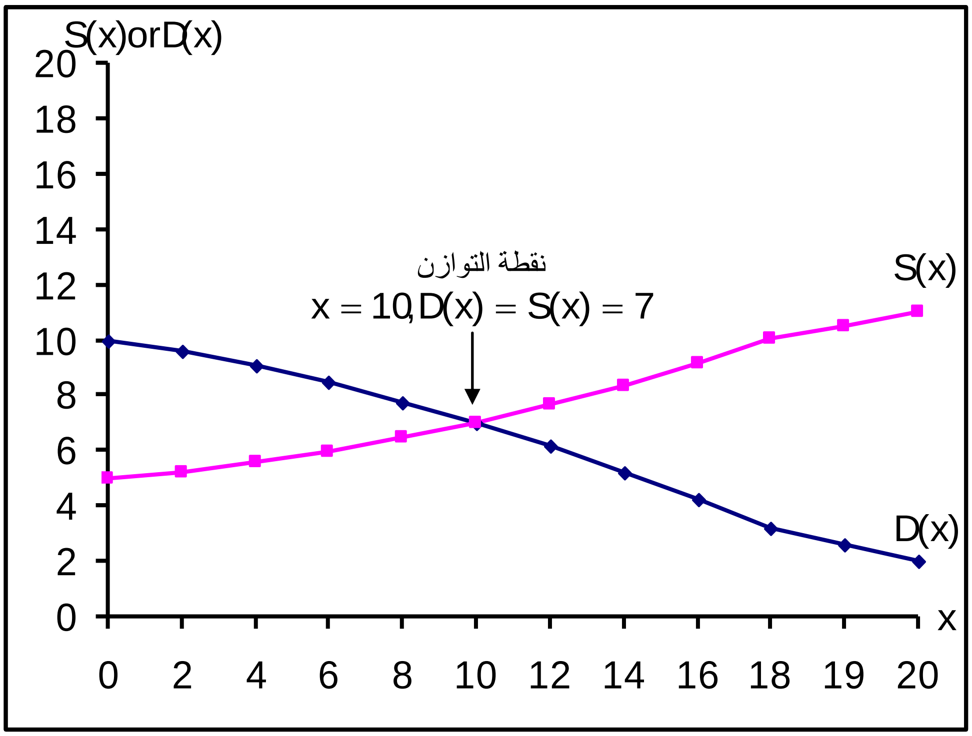
وبما أن x تشير إلى سعر الوحدة بالجنية وبالتالي فإن السعر التوازني x حيث $x = 10$ ويتم رفض القيمة السالبة لـ x.

وبالتالي فإن

$$D(x=10)=10-0.2(10)-0.01(100)=10-2-1=7$$ وحدات

$$S(x=10)=5+0.1(10)+0.01(100)=5+1+1=7$$ وحدات

والشكل التالي يوضح كل من دالتي الطلب والعرض.



شكل (١-١١)

تطبيق (١-٢)

بالنسبة لإحدى شركات الطيران قدر ثمن التذكرة على إحدى الرحلات للشركة بمبلغ 7000 جنيه إذا كان عدد العملاء في الرحلة 200 راكب وفي حالة زيادة عدد العملاء لهذه الرحلة بعدد x من الركاب فإن ذلك سوف يؤدى إلى خفض ثمن التذكرة للفرد بـ 100 جنيه.

المطلوب: كون دالة الإيراد لهذه الرحلة – ثم أوجد الأيراد عن زيادة عدد العملاء عن 200عميل بـ 5 ركاب.

الحل

إذا فرضنا أن x عدد العملاء - الزيادة عن 200 - الحاجزين على الرحلة فإن ايراد الرحلة في هذه الحالة وسوف نرمز له بالرمز R(x) حيث:

$$R(x) = (200 + x)(7000 - 100x)$$

$$= 1{,}400{,}000 = 13{,}000x - 100x^2$$

$$\text{حيث } 70 = \frac{7000}{100} \geq x$$

$$R(x = 5) = (200 + 5)(7000 - 500) = 1{,}332{,}500 \text{ جنيه}$$

تطبيق (١-٣)

ينتج أحد المصانع منتج معين بتكلفة ثابتة شهرية 80,000 جنيه والتكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة 10 جنيهات، فإذا كان ثمن بيع الوحدة 25 جنيه.

المطلوب:

١- أوجد دالة التكلفة الكلية الشهرية.

٢- أوجد دالة الايراد الشهرية.

٣- أوجد دالة الربح الشهرية.

٤- أوجد الربح (أو الخسارة) إذا انتج المصنع 15000 وحدة في أحد الشهور.

الحل

إذا فرضنا أن عدد الوحدات التي يتم أنتاجها وتسويقها في الشهر يساوي x بالتالي:

١- إذا أشرنا إلى دالة التكلفي بالرمز $C(x)$ فإن:

$$C(x) = 80{,}000 + 10x$$

٢- كذلك إذا أشرنا إلى دالة الأيراد بالرمز $R(x)$ فإن:

$$R(x) = 25x$$

٣- إذا أشرنا إلى دالة الربح بالرمز $P(x)$ فإن:

$$P(x) = R(x) - C(x) \longrightarrow$$
$$P(x) = 25x - (40{,}000 + 10x) = 15x - 80{,}000$$

٤- إذا كان $x = 15000$ فإن:

$$P(x = 15{,}000) = 25(15000) - 80{,}000$$
$$= 225{,}000 - 80{,}000 = 145{,}000 \text{ جنيه}$$

تطبيق (١-٤)

في التطبيق السابق أوجد:

١- الدالة العكسية لدالة الربح ثم عقب على الناتج.

٢- عدد الوحدات التى يجب انتاجها لتحقيق ربح 520,000 في الشهر.

الحل

١- بما أن

$$P = P(x) = 15x - 80{,}000 \longrightarrow$$

$$P^{-1}(x) = x = \frac{1}{15}(P + 80{,}000)$$

والدالة العكسية لدالة الربح $P^{-1}(x)$ تعطى عدد الوحدات x عند قيمة معينة للربح P.

٢- إذا فرضنا أن $P = 520{,}000$ فإن:

$$x = \frac{1}{15}(520{,}000 + 80{,}000) = \frac{1}{15}(600{,}000) = 40{,}000 \text{ وحدة}$$

تطبيق (١-٥)

إذا فرضنا أن عدد السكان فوق 50 في إحدى الدول يمثل نسبة من عدد السكان الكلي لهذه الدولة نرمز لها بالرمز $f(t)$ - وتعتبر هذه النسبة دالة في الزمن t. حيث:

$$f(t) = 10.75(0.8t + 10)^{0.3} \qquad 0 \le t \le 10$$

حيث تقاس t بالسنوات، $t = 0$ في عام 2005.

١- أوجد الدالة العكسية للدالة $f(t)$ ثم عقب على ذلك.

٢- أوجد $f^{-1}(22)$ ثم عقب على الناتج.

الحل

١- إذا فرضنا أن $y = f(t)$ فإن:

$$y = 10.75(0.8t + 10)^{0.3} \longrightarrow$$

$$(0.8t + 10)^{0.3} = \frac{y}{10.75} \longrightarrow$$

$$f^{-1}(y) = t = \frac{10\left(\frac{y}{10.75}\right)^{10/3} - 100}{8}$$

والدالة العكسية هنا تعنى تحديد السنة (t) عند نسبة معينة لعدد الأفراد 50 فأكثر بالنسبة لعدد السكان في المجتمع.

٢-

$$f^{-1}(22) = \frac{10\left(\frac{22}{10.75}\right)^{10/3} - 100}{8} = \frac{8.5619}{8} = 1.07 \text{ سنة}$$

وبما أن $t = 0$ في سنة 2005 بالتالي عندما $t = 1.07$ فهذا يعنى الشهر الثاني في سنة 2006، وبالتالي فإن نسبة الأفراد فوق 50 سنة في هذا البلد يكون 22% في الشهر الثاني في سنة 2006.

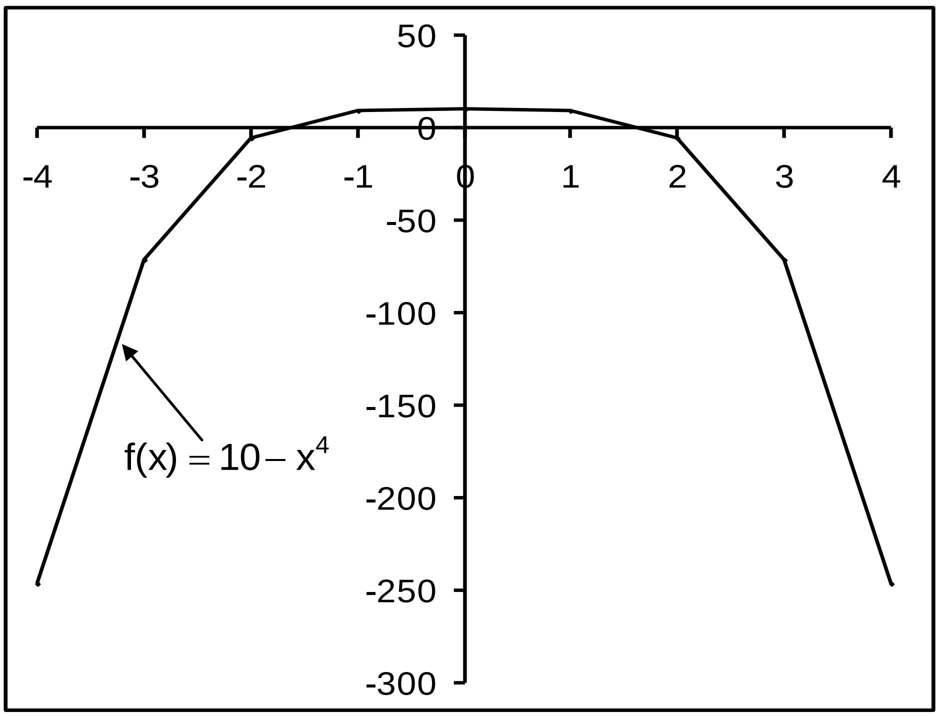
تطبيق (١-٦)

وضح أنه لا يوجد دالة عكسية للدالة التالية ووضح ذلك بيانياً.

$$y = f(x) = 10 - x^4$$

الحل

الشكل التالي يوضح الدالة $f(x)$



شكل (١-١٢)

من الشكل يتضح أن العلاقة بين y, x ليست علاقة one-to-one فمثلاً $f(-2) = f(2) = -6$ وبالتالي الدالة f ليس لها معكوس.

تطبيق (١-٧)

إذا فرضنا أن أحد المستثمرين أستثمر مبلغ 400,000 جنيه في إحدى المشروعات بمعدل فائدة مركبة متصلة 8% سنوياً.

١- حدد شكل الدالة التي يمكن باستخدامها تحديد جملة المبلغ بعد عدد معين من السنوات.

٢- أوجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

٣- أوجد مقدار الفائدة بعد خمس سنوات.

الحل

١- إذا كانت الفائدة مركبة ومتصلة، فإنه إذا فرضنا أن A جملة المبلغ بعد t من السنوات، A_0 هي المبلغ المراد استثماره، $r\%$ هي معدل الفائدة السنوي فإن:

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

٢- الجملة بعد 5 سنوات

$$A(5) = 400{,}000e^{0.08(5)} = 400{,}000(1.4918246)8 = 596{,}729.88$$

٣- الفائدة I حيث:

$$I = A(5) - A(0) = 596{,}729.88 - 400{,}000 = 196{,}729.88$$

تطبيق (١-٨)

أوجد ثمن بيع أحد الأجهزة الطبية بعد استعماله 5 سنوات إذا كان ثمنه عند الشراء يساوى 50,000 جنيه ومعدل الاهلاك السنوي 10% (معدل متصل).

الحل

إذا فرضنا أن

$A(t)$: تشير إلى ثمن بيع الجهاز بعد استعماله t من السنوات

$A(0)$: تشير إلى ثمن شراء الجهاز

t : تشير إلى عدد السنوات

r : تشير إلى معدل اهلاك الجهاز في السنة

وبالتالي فإن:

$$A(t) = A(0)e^{-rt}$$

كذلك يكون ثمن بيع الجهاز بعد 5 سنوات يساوي $A(5)$ حيث:

$$A(5) = A(0)\, e^{-r(5)} = 50{,}000 e^{-0.10(5)}$$
$$= 50{,}000(0.606530659) = 30{,}326.53 \text{ جنيه}$$

تطبيق (١-٩)

تقوم أحد الشركات بعمل إعلان في TV عن منتجاتها وتم تقدير نسبة العملاء الذين يطلبون هذه المنتجات نتيجة إعلانات TV دالة في عدد مرات نزول الإعلان على النحو التالي:

$$D(t) = 1 - e^{-0.09t}$$

حيث

$D:$ نسبة العملاء في السوق الذين يطلبون المنتجات

$t:$ عدد مرات نزول الإعلان

أوجد نسبة العملاء بعد نزول الإعلان 3، 5، 10 مرات

الحل

نسبة العملاء بعد نزول الإعلان 3 مرات

$$D(t=3) = 1 - e^{-0.09(3)} = 1 - 0.76338 = 0.23662 = 23.662\%$$

نسبة العملاء بعد نزول الإعلان 5 مرات

$$D(t=5) = 1 - e^{-0.09(5)} = 0.36237 = 36.24\%$$

وبالمثل نسبة العملاء بعد نزول الإعلان 10 مرات

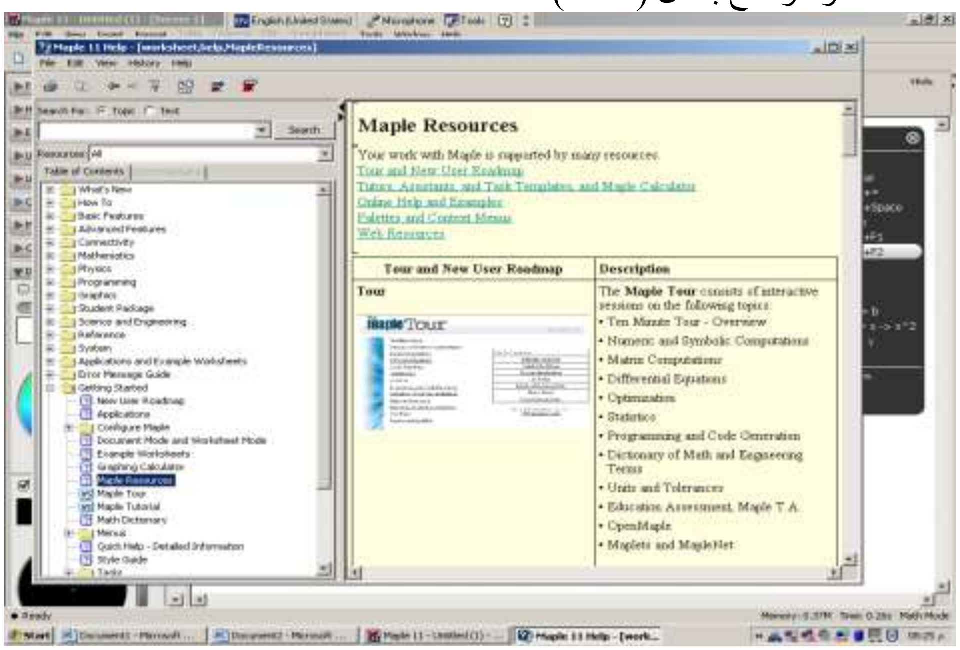
$$D(t=10) = 1 - e^{-0.09(10)} = 0.59343 = 59.34\%$$

(١-٦) استخدام الحزمة الرياضية
Using The Mathematical Package

وكما ذكرنا سابقاً أننا سوف نتعامل في هذا الكتاب مع الحزمة الرياضية **Maple 11** في الحصول على نتائج العمليات الرياضية Mathematical Processes مثل إيجاد المشتقات الجزئية Partial Derivatives أو إيجاد التكاملات Integrals ، ... الخ كما سوف نوضح ذلك في الأبواب التالية.

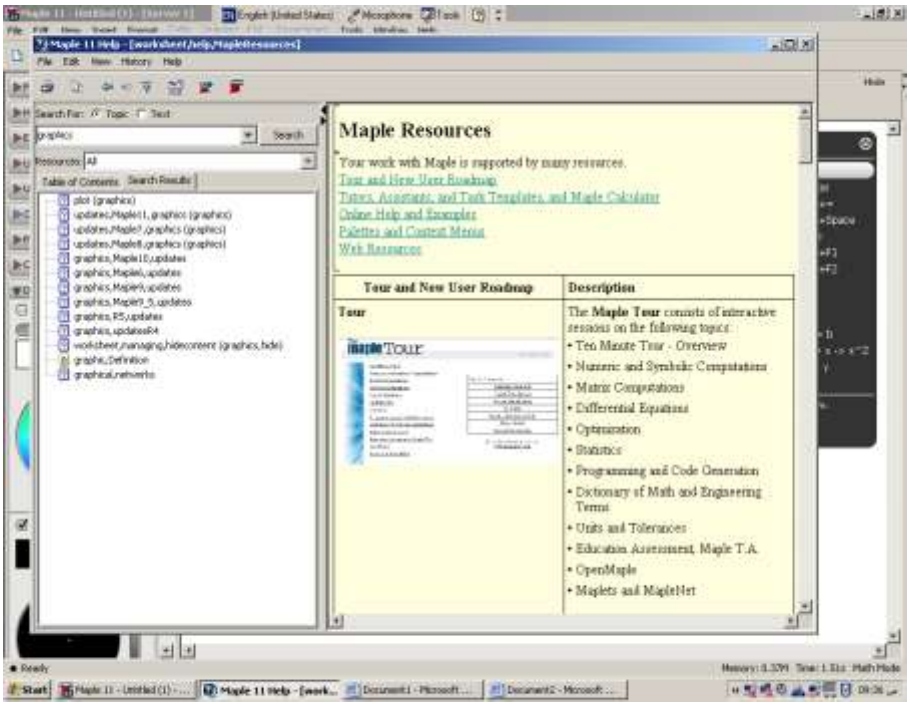
وفي هذا الفصل سوف يقتصر استخدامنا للحزمة **Maple 11** في رسم Plot الدوال الرياضية Mathematical Functions كما سوف نوضح ذلك في الخطوات التالية:-

١- فتح برنامج Maple 11 كما هو موضح بملحق (١) – فتظهر الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (١-١٣)



شكل (١-١٣)

٢- في شكل (١-١٣) يتم كتابة Graphic في المستطيل في يسار الصفحة بشكل (١-١٣) ثم نضغط على Search فيظهر شكل (١-١٤).



شكل (١-١٤)

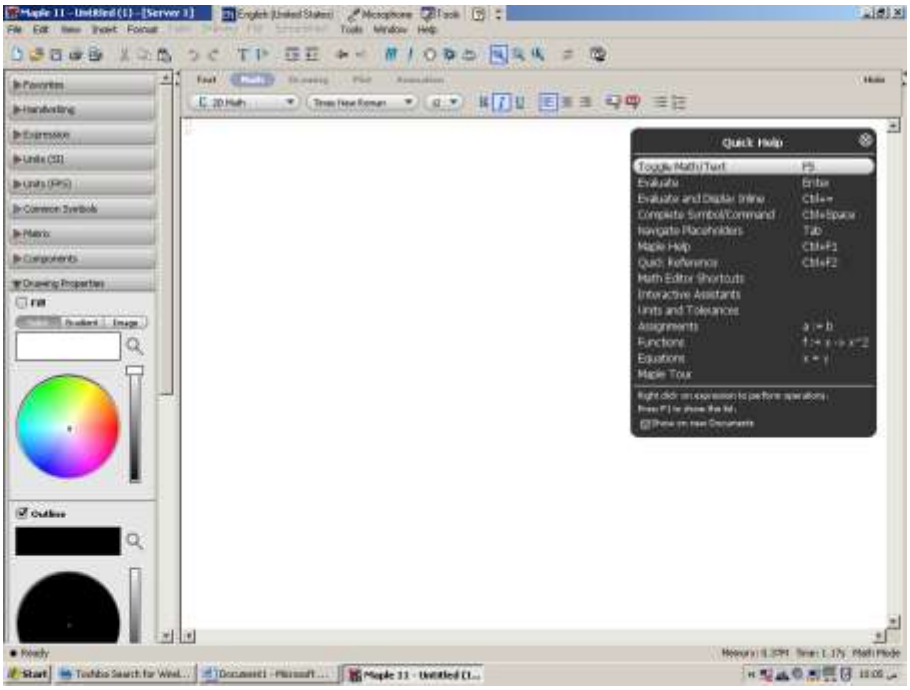
٣- في يمين الصفحة في شكل (١-١٤) يوجد توصيف لأوامر أدخال البيانات (أي أمر كتابة الدالة المراد رسمها) وعدد من الأمثلة المحلوله - حيث يوجد العديد من أوامر رسم الدوال - سوف نتناول منها الأمر التالي:

```
> Plot(f(t),t);
```
(1.19)

ويمكن تنفيذ أو رسم الدالة Plot باستخدام Maple 11 بطريقتين:

الطريقة الأولي

٤- يتم أستدعاء Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة في شكل (١-١٤) فيظهر شكل (١-١٥) حيث يوجد المستطيل النشط كما هو موضح في شكل (١-١٥)



شكل (١-١٥)

٥- يكتب في المستطيل النشط أمر ادخال البيانات.

٦- ثم نضغط على مفتاح Enter فيظهر الرسم المطلوب.

الطريقة الثانية

وتستخدم هذه الطريقة بالنسبة للمستخدمين للحزمة من غير المجيدين الأجادة المطلوبة بالنسبة لكتابة أوامر الأدخال. فإنه يمكن أتباع ما يلي:-

٤- أخذ نسخة Copy من الأمثلة المحلولة (والتي تتماثل فيها صياغة الدوال مع الدوال المطلوب رسمها) في صفحة التوصيف (أرجع إلى خطوة ٣)

٥- أستدعاء Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة في شكل (١-١٤) فيظهر شكل (١-١٥) حيث يوجد المستطيل النشط.

٦- لصق Paste الأمثلة المحلولة في المستطيل النشط.

٧- مسح مدخلات المثال المحلول (المتماثل فيه شكل الدالة مع الدالة المطلوب رسمها) وكتابة الدالة المطلوب رسمها.

٨- الضغط على مفتاح Enter فيظهر الرسم المطلوب.

وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

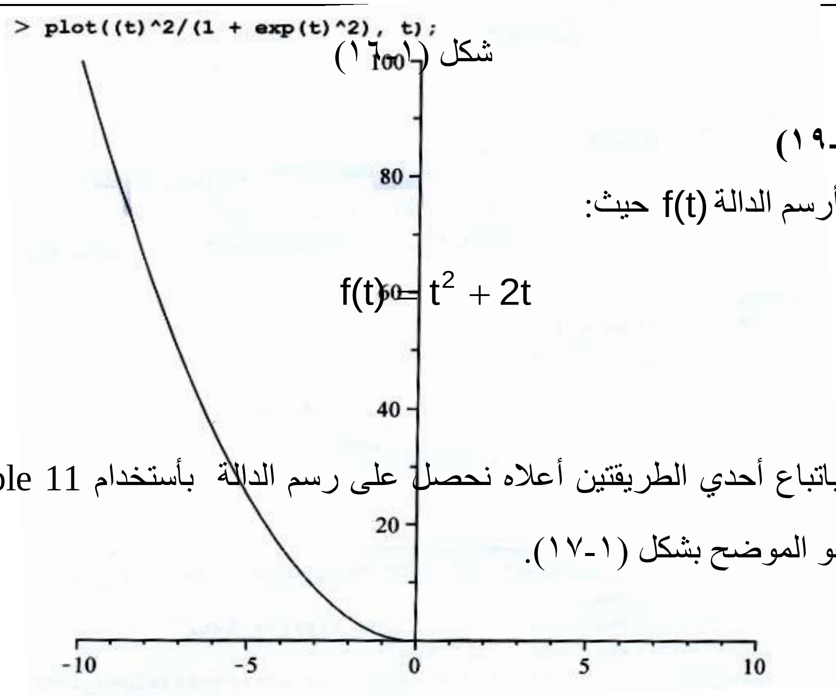
مثال (١-١٨)

أرسم الدالة التالية:

$$f(t) = \frac{t^2}{(1+e^{t^2})}$$

الحل

باتباع الطريقة الأولي أو الثانية نحصل على رسم الدالة $f(t)$ كما هو موضح بشكل (١-١٦).



شكل (١-١٦)

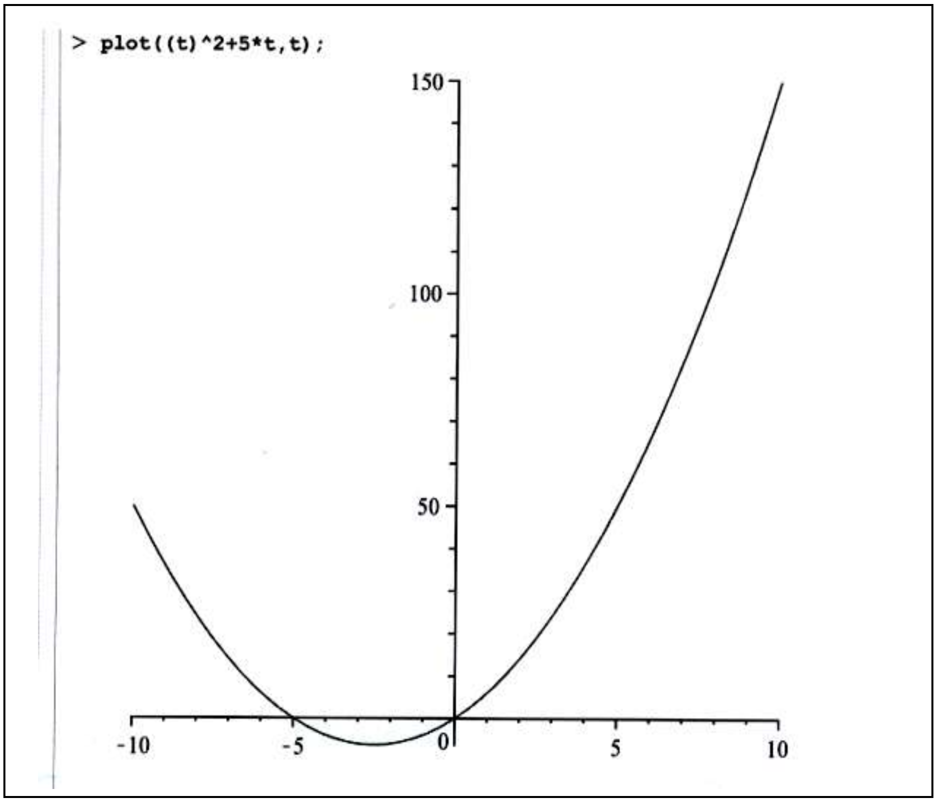
مثال (١-١٩)

أرسم الدالة f(t) حيث:

$$f(t) = t^2 + 2t$$

الحل

باتباع أحدي الطريقتين أعلاه نحصل على رسم الدالة بأستخدام Maple 11 على النحو الموضح بشكل (١-١٧).



شكل (١-١٧)

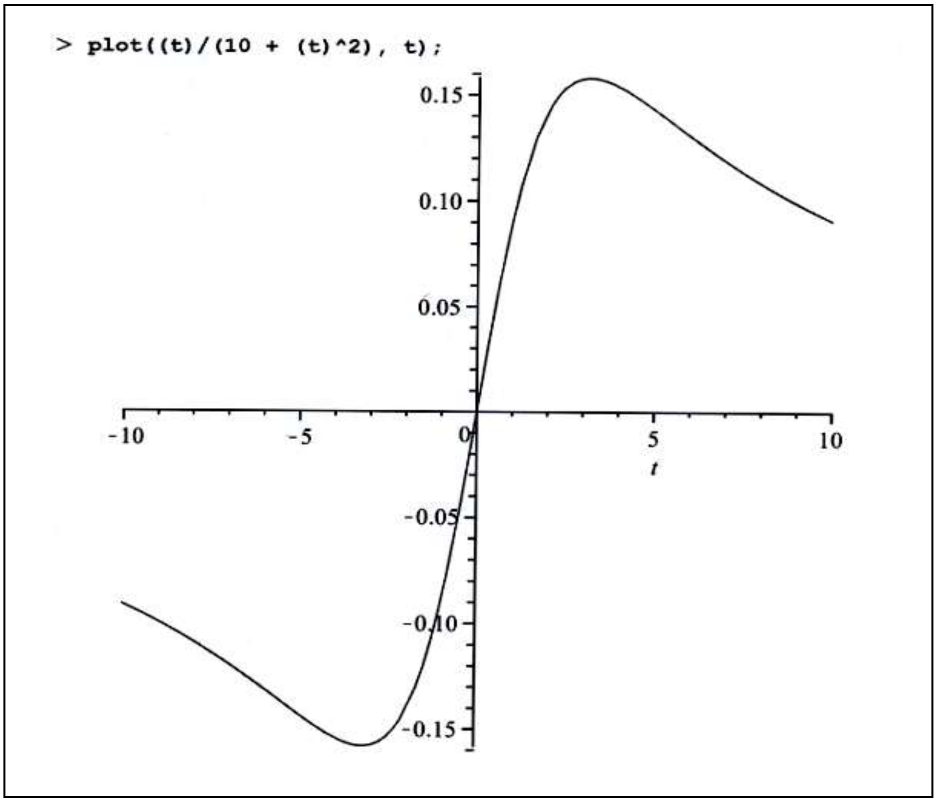
مثال (١-٢٠)

أرسم الدالة f(t) حيث:

$$f(t) = \frac{t}{(10 + t^2)}$$

الحل

باستخدام أحدي الطريقتين أعلاه نحصل على رسم الدالة f(t) على النحو الموضح بشكل (١-١٨).



شكل (١-١٨)

(١-٧) تمرينات Exercise

(١-١) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال التالية:

$y = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ 1) , $g = 3x - 2$ 2)

$y = x^2 \ , x \le 0$ 3) , $y = x^3 + 1$ 4)

$y = \sqrt{9 - x^2} \ , \ x \ge 0$ 5) , $y = x^{5/3} + 1$ 6)

(١-٢) وضح أن كل دالة من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{3x}$ 1)

$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x}$ 2)

$f(x) = 2x + 3 \quad , \quad g(x) = \frac{x-3}{2}$ 3)

$f(x) = x^2 + 1 \ (x \le 0) \quad , \quad g(x) = -\sqrt{x-1}$ 4)

$f(x) = 4(x+1)^{2/3} \ (x \ge -1) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{8}(x^{3/2} - 8) \quad x \ge 0$ 5)

$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad , \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 6)

(١-٣) أرسم الدالة التالية

$$f(x) = x^2 + 2 \ , \ x \le 0$$

ووضح أن العلاقة one-to-one ثم أوجد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ووضح ذلك بيانياً.

(١-٤) أرسم الدالة التالية

$$f(x) = (x+1)^4$$

ثم أوجد الفترة التي تكون فيها العلاقة one-to-one ثم أوجد الدالة العكسية في هذه الفترة.

(١-٥) أرسم كل دالة من الدوال التالية ثم حدد أي منها دالة one-to-one - وفي حالة العلاقة one-to-one – أوجد الدالة العكسية.

(١-٦) إذا فرضنا أن الارتفاع العمودي لبالونة هوائية عن سطح الأرض يساوي h حيث h دالة في الزمن t من لحظة انطلاق البالونة بالثواني [1].

$$h = f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \quad , \; 0 \le t \le 60$$

١- أوجد معكوس الدالة h - ثم وضح ماذا يمثل معكوس الدالة.

٢- أوجد الزمن t عندما يكون ارتفاع البالونة العمودي عن سطح الأرض 150 قدم.

(١-٧) إذا فرضنا أن نسبة عدد السكان في سن 60 سنة فأكثر بالنسبة لباقي السكان في إحدى الدول دالة في الزمن t على النحو التالي:

$$f(t) = (10.78)(0.9t+5)^{0.4} \quad , 0 \le t \le 10$$

حيث $t = 0$ في سنة 2002.

١- أوجد $f^{-1}(t)$.

٢- أوجد $f^{-1}(3)$ ثم عقب على الناتج.

(١-٨) إذا كان كمية تركيز أحد الأدوية في الجرعة بدم المريض بعد تعاطيه بفترة زمنية t هي $x(t)$ حيث تقاس $x(t)$ بالجرام في السنتمتر المكعب، t تقاس بالثانية على النحو:

$$x(t) = 0.08 + 0.12(1 - e^{-0.02t})$$

أوجد درجة تركيز الدواء في الجرعة بالدم عند أخذها مباشراً $(t = 0)$.

(١-٩) إذا كان حجم السكان في إحدى الدول يساوي P مليون نسمة دالة في معدل النمو المتصل بنسبة 2.5% سنوياً فإذا كان حجم المجتمع في أول يناير 1985 يساوى 50 مليون نسمة.

١- أوجد الصيغة العامة للدالة P كدالة في الزمن t حيث t تقاس بالسنوات.
٢- قدر حجم السكان في سنة 2015.

(١-١٠) في أحد المعامل وجد أن نوع معين من البكتريا يتزايد وفقاً للنمو الأسي حيث:

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

حيث

$Q(t)$: عدد البكتريا في الزمن t
$Q(t=0) = Q_0$: عدد البكتريا في بداية التجربة
t: الزمن بالساعة
k: مقدار ثابت

١- أوجد عدد البكتريا في نهاية 4ساعات
٢- إذا كان

$$Q_0 = 10,000$$

أوجد معدل نمو البكتريا k بعد 4 ساعات.

الباب الثاني
النـهايات والاتصال
Limits And Continuity

(٢-١) مفهوم النـهاية The Concept of Limit

(٢-٢) خصائص النـهايات The Properties of Limits

(٢-٣) الأتصال وأهميته Continuity and Its Consequences

(٢-٤) النـهايات عندما يؤول المتغير إلى مالانـهاية Limits at Infinity

(٢-٥) نـهايات الدوال متعددة المتغيرات

Limits of Several Variables Functions

(٢-٦) تمرينات Exercises

(٢-١) مفهوم النهاية　　The Concept of Limit

في الباب السابق تناولنا بالتفصيل الدوال الرياضية - وتتطلب دراسة سلوك واستخدامات الدوال الرياضية من الناحية التطبيقية دراسة كل من التفاضل والتكامل التي سوف نتناولها في الأبواب من الباب الثالث إلى الباب السادس.

وتتطلب دراسة عمليات التفاضل والتكامل ضرورة دراسة مفهومي النهايات والاتصال للدوال. لذلك سوف نتناول في هذا الباب مفهوم كل من النهاية والاتصال للدالة من خلال مجموعة من التعريفات والنظريات بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة التوضيحية. وفي هذا الفصل سوف نتناول مفهوم النهاية وخصائص النهايات وكيفية حسابها على النحو التالي:

إذا فرضنا أن $f(x)$ دالة في المتغير x حيث $a \le x \le b$، واعتبرنا أن نقطة ما ولتكون c حيث c تقع داخل الفترة $[a,b]$. وعادة يكون من الأهمية معرفة سلوك قيم الدالة $f(x)$ عندما يقترب أحد قيم المتغير x من النقطة c داخل الفترة $[a,b]$ من ناحية اليمين للنقطة c (أي من قيم أكبر من c ونرمز لها بالرمز c^+) أو من ناحية اليسار للنقطة c (أي من قيم أكبر من c ونرمز لها بالرمز c^-). فإذا وجدت قيمة نهاية محدودة ولتكن L Limiting Value فأنه يقال أن القيمة L نهاية Limit للدالة $f(x)$ عندما x تقترب من c وتكتب على النحو التالي:

$$\lim f(x) = L \qquad (2.1)$$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من النقطة c (أو تؤول x إلى النقطة c، ويرمز لذلك بالرمز $x \to c$) تساوي L.

وعادة إذا كان اقتراب المتغير x من النقطة c من أتجاه اليمين، فأنه يرمز للنهاية في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad (2.2)$$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من جهة اليمين تساوي L، وأحياناً تسمى نهاية يمني أي الاقتراب يتم من جهة اليمين.

وإذا كان اقتراب المتغير x من النقطة c من أتجاه اليسار، فأنه يرمز للنهاية في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad (2.3)$$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c من جهة اليسار تساوي L، وأحياناً تسمى نهاية يسري أي الاقتراب يتم من جهة اليسار.

نظرية (٢-١)

تكون القيمة L نهاية للدالة $f(x)$ عندما $x \to c$، إذا كان الأقتراب من اليمين واليسار يساوي L أي أن:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L \qquad (2.4)$$

وتكتب:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to c$ تساوي L.

مثال (٢-١)

إذا كانت الدالة $f(x)$ بحيث:

$$f(x) = x^2$$

أوجد نهاية الدالة عندما x تقترب من 2، أي أوجد: $\lim_{x \to 2} f(x)$

الحل

لإيجاد $\lim_{x \to 2} f(x)$ نوجد كل من:

$$\text{i)} \lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad , \qquad \text{ii)} \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

ولإيجاد كل من النهايتين اليمني واليسري نحسب قيمة الدالة $f(x)$ عندما $x \to 2^+$ ثم عندما $x \to 2^-$ من خلال الجدولين التاليين:

$x \to 2^+$ جدول (٢-١)

x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001	2.0001	2.00001
f(x)	9	6.25	4.41	4.203	4.04	4.02	4.004	4	4

بالمثل

$x \to 2^-$ جدول (٢-٢)

x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999	1.9999	1.99999
f(x)	1	2.25	3.61	3.80	3.96	3.98	3.996	4	4

من الجدولين السابقين نجد أن:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

ملحوظة: مما هو جدير بالذكر أنه ليس بالضرورة أن تكون النهاية اليمني تساوي النهاية اليسري – أو بعبارة أخري في بعض الحالات:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x) \tag{2.5}$$

وفي هذه الحالات لا توجد نهاية عندما $x \to c$. وسوف نوضح ذلك من خلال المثالين التاليين:

مثال (٢-٢)

إذا اعتبرنا الدالة $f(x)$ بحيث:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & x < 2 \\ \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

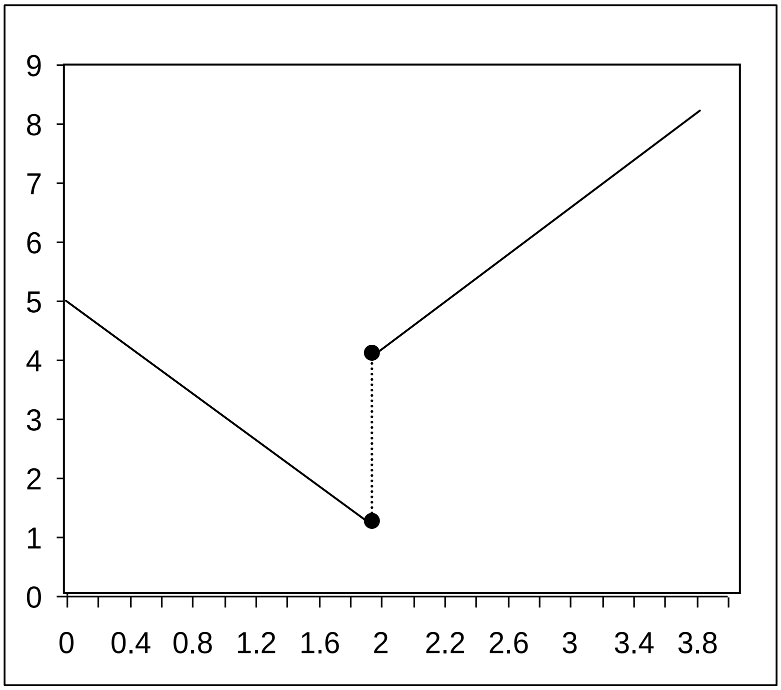
أوجد:

$$1 - \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad , \quad 2 - \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

ثم أثبت أنه لا يوجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2، ووضح ذلك بيانياً.

الحل:

الشكل التالي يوضح الدالة $f(x)$.



شكل (٢-١)

لحساب $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ نكون الجدول التالي:

$x \to 2^+$ جدول (٢-٣)

x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001	2.0001
f(x)	6	5	4.2	4.1	4.02	4.001	4.0001	4

من الجدول نجد أن:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

بالمثل لحساب $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ نكون الجدول التالي

جدول (٢-٤) $x \to 2^-$

x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999	1.9999
f(x)	3	2	1.02	1.01	1.02	1.01	1.002	1

من الجدول نجد أن:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

وبما أن:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

بالتالي لا يوجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما $x \to 2$.

مثال (٢-٣)

إذا فرضنا أن:

$$f(x) = \frac{x-5}{|x-5|} \qquad , -\infty < x < \infty$$

أوجد كل من النهاية اليمني واليسري للدالة $f(x)$ عندما $x \to 5$.

الحل:

١- إذا كانت $x > 5$ فإنه في هذه الحالة نجد أن قيمة البسط موجبة ومساوية لقيمة المقام، أي أن:

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 1$$

والجدول التالي يوضح ذلك:

جدول (٢-٥) $x \to 5^+$

x	6	5.5	5.1	5.05	5.01	5.005	5.001	5.0001
f(x)	1	1	1	1	1	1	1	1

بالمثل نجد أنه عندما $x < 5$ في هذه الحالة نجد أن قيمة البسط هي نفس قيمة المقام ولكن بأشارة سالبة، أي أن:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -1$$

والجدول التالي يوضح ذلك:

جدول (٢-٦) $x \to 5^-$

x	4	4.5	4.9	4.95	4.99	4.995	4.999	4.9999
f(x)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

٢- ومما هو جدير بالذكر أنه عندما $x = 0$ فإن قيمة كل من البسط والمقام تساوي صفر، أي أن:

$$f(x = 5) = \frac{0}{0}$$

وهذا يعني أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند النقطة $x = 5$.

تمرين (١)

(١) أوجد كل مما يلي:

$$1)\ \lim_{x \to -2} (-3x^2) \qquad , \qquad 2)\ \lim_{x \to 4} (4x^2 - 5x + 1)$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3)$, 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{3-x}$

5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x-8}$, 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x}{x+2}$, 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+7x-15}{x-3}$

(٢) أرسم الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2x & x<2\\ x^2 & x\ge 2\end{cases}$$

أوجد كل من:

$1-\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, $2-\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

$3-\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, $4-\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

(٣) أرسم الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ \sqrt{x+1}-2 & x>0\end{cases}$$

أوجد كل من:

$1-\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $2-\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

$3-\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $4-\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, $5-\lim\limits_{x\to 4}f(x)$

(٤) أرسم الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 3x + 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

أوجد كل من:

$$1 - \lim_{x \to 1^-} f(x) \quad , \quad 2 - \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$3 - \lim_{x \to -1} f(x) \quad , \quad 4 - \lim_{x \to 1} f(x)$$

(٢-٢) خصائص النهايات The Properties of Limits

في هذا الفصل سوف نقدم أهم خصائص النهايات من خلال النظريات التالية:

نظرية (٢-١)

إذا فرضنا وجود كل من $\lim_{x\to a} g(x)$ ، $\lim_{x\to a} f(x)$ ، c مقدار ثابت فإن:

$$\text{i)}\ \lim_{x\to a} c = c \tag{2.6}$$

$$\text{ii)}\ \lim_{x\to a} x = a \tag{2.7}$$

$$\text{iii)}\ \lim_{x\to a} [c\,f(x)] = c\lim_{x\to a} f(x) \tag{2.8}$$

$$\text{iv)}\ \lim_{x\to a} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \tag{2.9}$$

$$\text{iiv)}\ \lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)] \tag{2.10}$$

$$\text{v)}\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (\text{إذا كان } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0) \tag{2.11}$$

الإثبات: أنظر مرجع [14 , 22]

مثال (٢-٤)

طبق النظرية السابقة لإيجاد:

$$\lim_{x\to 2} (3x^2 - 9x + 14)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-9x+14)=\lim_{x\to 2}(3x^2)-\lim_{x\to 2}9x+\lim_{x\to 2}14$$
$$=3\lim_{x\to 2}x^2-9\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}14$$
$$=3(2)^2-9(2)+14=12-18+14=8$$

مثال (٢-٥)

طبق النظرية السابقة لإيجاد:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+4}{x^2-2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+4}{x^2-2}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^3-5x+4)}{\lim_{x\to 2}(x^2-2)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 2}x^3-\lim_{x\to 2}5x+\lim_{x\to 2}4}{\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}2}$$
$$=\frac{2^3-5(2)+4}{2^2-2}=\frac{2}{2}=1$$

مثال (٢-٦)

أوجد: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$

الحل:

بما أن المقام: $\lim_{x\to 1}(1-x)=0$ لذلك فإن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}\neq\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(1-x)}$$

ولكن ممكن أعتبار أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1}-(x+1)=-(1+1)=-2$$

نظرية (٢-٢)

إذا فرضنا أن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n، a أي عدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a) \tag{2.12}$$

الإثبات: أنظر مرجع [14 , 22]

مثال (٢-٧)

أوجد: $\lim_{x\to 10}(3x^2+7x+5)$

الحل:

$$\lim_{x\to 10}(3x^2+7x+5)=3(10)^2+7(10)+5=300+70+5=375$$

نظرية (٢-٣)

إذا فرضنا أن:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L \quad , \quad L>0$$

فإن:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L} \tag{2.13}$$

الإثبات: أنظر مرجع [14 , 22]

مثال (٢-٨)

أوجد: $\lim_{x\to 3}\sqrt[7]{3x^2+2x}$

الحل

$$\lim_{x\to 3}\sqrt[7]{3x^2+2x}=\sqrt[7]{\lim_{x\to 3}(3x^2+2x)}$$
$$=\sqrt[7]{27-6}=\sqrt[7]{21}=(21)^{1/7}=1.55$$

مثال (٢-٩)

أوجد: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

الحل

نلاحظ أن كل من البسط والمقام في المقدار: $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

عندما $x\to 0$ يساوي 0 وبالتالي فإن المقدار يؤول إلى $\dfrac{0}{0}$ أي كمية غير معينة ولكن ممكن بضرب كل من البسط والمقام في $(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})$ نجد إن:

$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(x+3)-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}=\frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

نظرية (٢-٤)

إذا فرضنا أن a عدد حقيقي فإن:

$$\text{i)}\ \lim_{x\to a} e^x = e^a \qquad (2.14)$$

$$\text{ii)}\ \lim_{x\to a} (\ln x) = \ln a \qquad ,\ a > 0 \qquad (2.15)$$

الإثبات: أنظر مرجع [22 , 14]

مثال (٢-١٠)

أوجد كل مما يلي:

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 2} e^x \qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to 7} \ln x \qquad \text{iii)}\ \lim_{x\to 0} (e^x - 5)$$

الحل

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 2} e^x = e^2 = 7.3891$$

$$\text{ii)}\ \lim_{x\to 7} \ln x = \ln 7 = 1.946$$

$$\text{iii)}\ \lim_{x\to 0} (e^x - 5) = e^0 - 5 = 1 - 5 = -4$$

تمرين (٢)

١- أوجد كل مما يلي في حالة وجود نهاية:

$$1)\ \lim_{x\to 0} (x^3 - 3x + 1) \qquad , \qquad 2)\ \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2x+1}$$

$$3)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad , \qquad 4)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \qquad , \qquad 6)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,e^{-2x+1}}{x^2+x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$, 10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

11) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, 12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{|x|}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{1-e^{x}}$, 14) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

15) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{\sqrt{h^2+h+3}-\sqrt{h+3}}$, 16) $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}}{2+t}$

٢- أوجد النهايات اليمنى واليسري ثم وضح عدم وجود نهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{16-x^2}$, $\lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{16-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x^2+3x+2}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2+3x+2}$

٣- وضح وجود أو عدم وجود نهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+x)^{1/x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} x^{\ln x}$

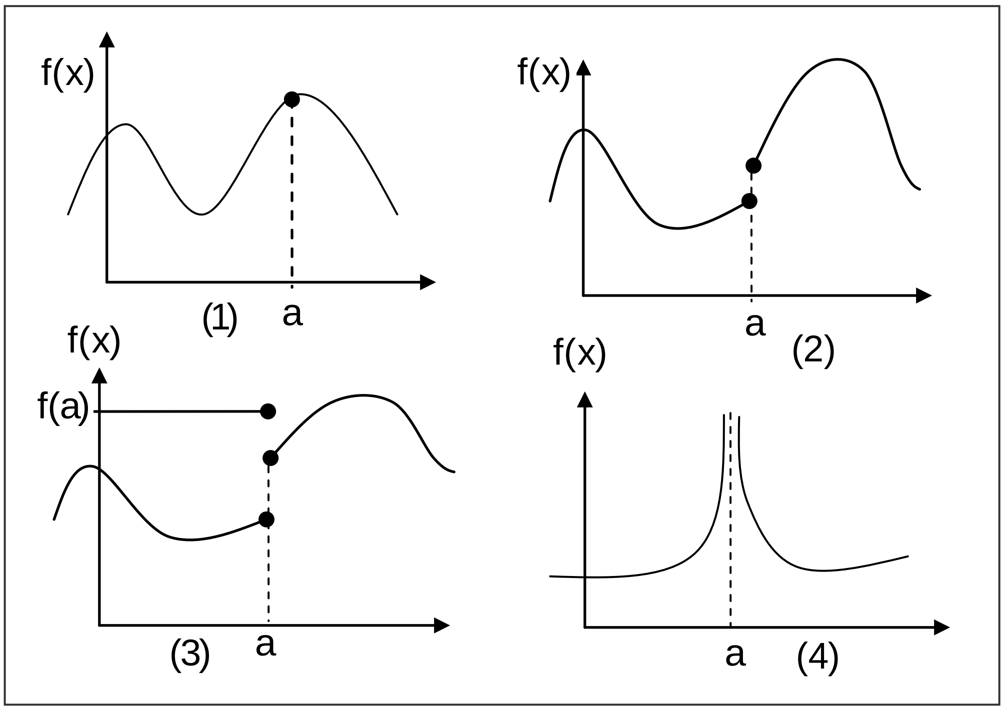
(٢-٣) الأتصال وأهميته Continuity and Its Consequences

عندما يتم وصف أي شيء بالأتصال فهذا يعني أستمرار الشيء دون انقطاع. فعلى سبيل المثال إذا فرضنا أن آله معينة تعمل 15 ساعة متصلة، فهذا يعني عمل الماكينة 15 ساعة متصلة (مستمرة) دون أنقطاع.

بالمثل بالنسبة لدراسة الدوال الرياضية Mathematical Functions. فيقال أن الدالة متصلة في فترة معينة فهذا يعني عدم أنقطاع الدالة عند أي نقطة داخل هذه الفترة.

مثال (٢-١١)

أعتبر الدوال f(x) في الأشكال التالية:



شكل (٢-٢)

من شكل (٢-٢) يتضح عدم أتصال الدالة f(x) عند النقطة $x = a$ في الحالات التالية:

١- الشكل (1) يوضح أن الدالة $f(x)$ غير معرفة Is Not defined في النقطة $x = a$.

٢- الشكل (2) رغم أن الدالة $f(x)$ دالة معرفة Defined في النقطة $x = a$ ولكن لا يوجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما $x \to a$.

٣- الشكل (3) نجد أن الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x = a$ ولكن قيمة الدالة عند النقطة a أي $f(a)$ لا تساوي نهاية الدالة عند $x \to a$.

أو بعبارة أخري:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

٤- الشكل (4) يوضح أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند النقطة $x = a$ كذلك لا يوجد نهاية للدالة عندما $x \to a$.

مما سبق يمكن تعريف أتصال الدالة في النقطة $x = a$ على النحو التالي:

تعريف (٢-١)

إذا أعتبرنا الدالة $f(x)$، فإن $f(x)$ تكون متصلة Continuous في النقطة $x = a$ عندما:

١- تكون الدالة $f(x)$ معرفة في النقطة $x = a$.

٢- عند وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما $x \to a$.

٣- عندما تساوي نهاية الدالة عند $x \to a$ قيمة الدالة عندما $x = a$ أي عندما:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

وفي حالة عدم تحقق أحد الشروط المذكورة أعلاه فأنه يقال أن الدالة غير متصلة discontinuous في النقطة $x = a$.

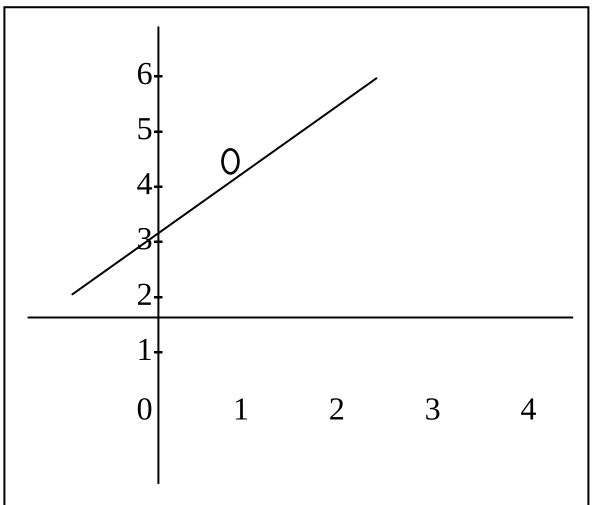
مثال (٢-١٢)

أختبر أتصال الدالة $f(x)$ عند $x = 1$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

الحل

الشكل التالي يوضح أن الدالة $f(x)$ دالة غير معرفة عند النقطة $x = 1$.



وبالتالي فإن الدالة غير متصلة عند النقطة $x = 1$.

ملحوظة: علماً بأنه يوجد نهاية للدالة عندما $x \to 1$ حيث:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 3) = 4$$

نظرية (٢-٥)

إذا فرضنا أن $f(x)\,,\,g(x)$ دوال متصلة في النقطة $x=a$ فإن:

أ) الدوال $(f \pm g)$ تكون متصلة أيضاً في $x=a$.

ب) الدالة$(f(x)g(x))$ تكون أيضاً متصلة في $x=a$.

ج) الدالة $[f(x)/g(x)]$ تكون متصلة في $x=a$ بشرط أن $g(a)\neq 0$.

الإثبات: أنظر مرجع [14 , 22]

مثال (٢-١٣)

إذا فرضنا أن:

$$f(x)=x^2 \qquad , \quad g(x)=2x+1$$

حيث $f(x)\,,\,g(x)$ دوال متصلة عند $x=2$. أثبت أن:

١- الدالة $z(x)$ دالة متصلة عند $x=2$ حيث:

$$z(x)=f(x)g(x)$$

٢- الدالة $h(x)$ دالة متصلة عند $x=2$ حيث:

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

الحل:

١- بما أن

$$z(x)=f(x)g(x)=x^2(2x+1)$$

فنجد أن الدالة $z(x)$ دالة معرفة عند $x = 2$ حيث:

$$z(x) = (2)^2 (2(2) + 1) = 4(5) = 20 \longrightarrow (1)$$

كذلك نجد أن:

$$\lim_{x \to 2} z(x) = \lim_{x \to 2} [x^2 (2x + 1)] = 20 \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن:

$$z(x) = \lim_{x \to 2} z(x) = 20$$

بالتالي الدالة $z(x)$ دالة متصلة في النقطة $x = 2$.

٢- بالمثل الدالة

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{2x + 1} \longrightarrow (3)$$

كذلك

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{\lim_{x \to 2} g(x)} = \frac{4}{5} \longrightarrow (4)$$

من (3) ، (4) نجد أن الدالة $h(x)$ دالة متصلة في النقطة $x = 2$.

تمرين (٣)

(١) وضح لماذا تعتبر كل دالة $f(x)$ في الحالات التالية دوال غير متصلة عند النقط المعطاه.

$$f(x) = \frac{x}{x - 1} \quad , \quad x = 1 \; 1)$$

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4} \quad , \quad x=4 \quad 2)$$

$$f(x)=e^{1/x} \quad , \quad x=0 \quad 3)$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , x<2 \\ 3 & , x=2 \\ 3x-2 & , x>2 \end{cases} \quad , \quad x=1 \quad 4)$$

(٢) أختبر أتصال الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\frac{5}{x^3-4x}$$

في النقاط التالية:

$$x=0 \quad , \quad x=2 \quad , \quad x=-2$$

(٣) أختبر أتصال الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\frac{12}{6-x}$$

داخل الفترة $[0 \le x \le 10]$

(٤) أختبر أتصال الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2 & , x<3 \\ 6-x & , x\ge 3 \end{cases}$$

في النقطة $x=3$

(٢-٤) النهايات عندما يؤول المتغير إلى مالانهاية Limits at Infinity

في بعض الحالات يكون من الأهمية دراسة سلوك الدالة $f(x)$ عندما يتزايد المتغير x زيادة غير محدودة أي عندما $x \to \infty$ (أو يتناقص x نقص غير محدودة أي عندما $x \to -\infty$).

مثال (٢-١٤)

أعتبر الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

أوجد كل من:

$$1 - \lim_{x \to \infty} f(x) \qquad , \qquad 2 - \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

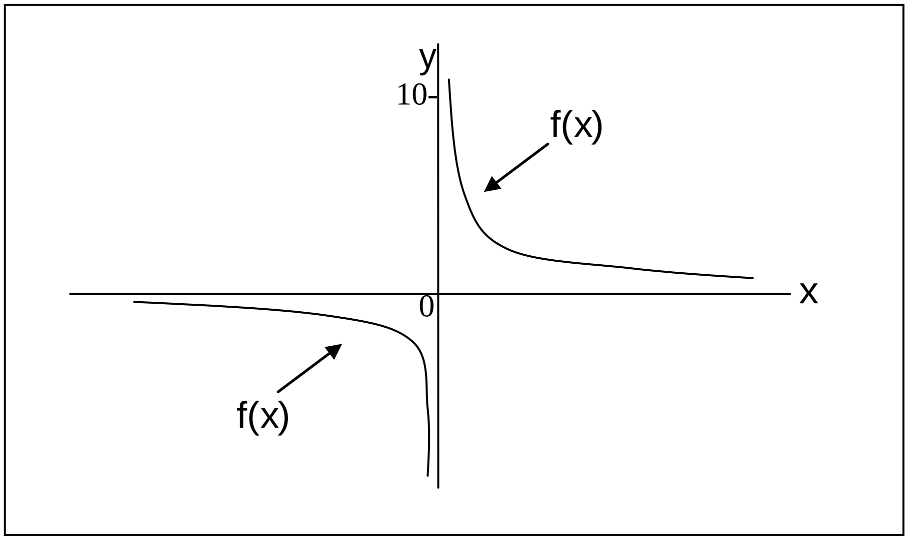
ووضح ذلك بيانياً.

الحل

$$1 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$2 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

والشكل التالي يوضح الدالة $f(x)$ عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$.



شكل (٢-٤)

مثال (٢-١٥)

أعتبر الدالة

$$f(x) = 5 - \frac{1}{x}$$

أوجد:

$$1- \lim_{x\to\infty} f(x) \qquad , \qquad 2- \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

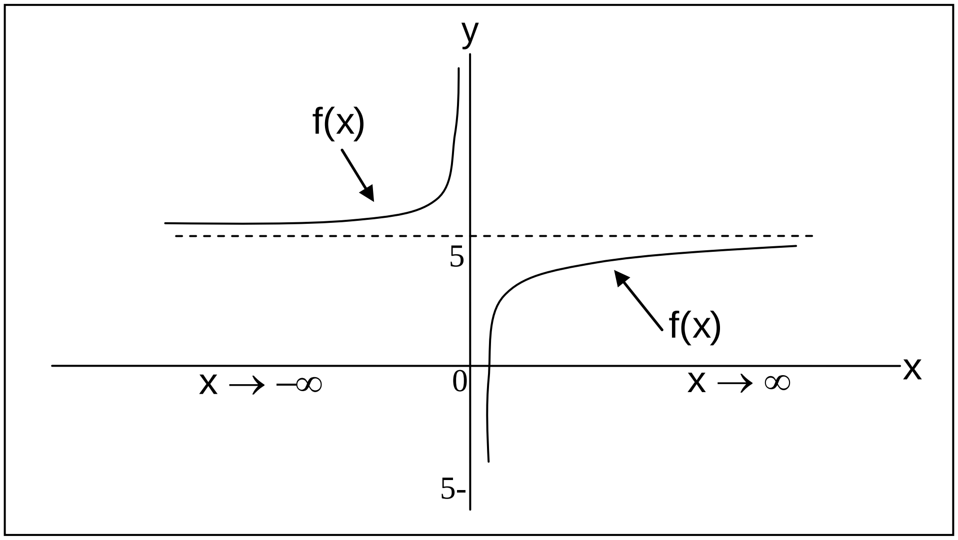
ووضح ذلك بيانياً.

الحل

$$1- \lim_{x\to\infty}(5 - \frac{1}{x}) = 5$$

$$2- \lim_{x\to-\infty}(5 - \frac{1}{x}) = 5$$

والشكل التالي يوضح ذلك



شكل (٢-٥)

نظرية (٢-٦)

إذا فرضنا t عدد نسبي بحيث $t > 0$ فإن:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0 \qquad (2.16)$$

عندما $t = \frac{p}{q}$ ، q عدد فردي.

الإثبات: أنظر مرجع [22]

نظرية (٢-٧)

إذا اعتبرنا كثيرة الحدود $p_n(x)$ من الدرجة n حيث:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_0$$

فإن:

$$\lim_{x \to \infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } a_n > 0 \\ -\infty & \text{if } a_n < 0 \end{cases}$$

الإثبات: أنظر مرجع [22]

مثال (٢-١٦)

أوجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-10}{3x+4}$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-10}{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(7x-10)}{(3x+4)}\cdot\frac{1/x}{1/x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(7-10/x)}{(3+4/x)}\right]=\frac{7}{3}$$

تمرين (٤)

أوجد ما يلي:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(1+e^{x})}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2/x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{x/3}-x^4)$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+5}{e^{x/2}}$, 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

ملحوظة: $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

(٢-٥) نهايات الدوال متعددة المتغيرات

Limits of Several Variables Functions

وكما ذكرنا في الفصل الأول (٢-١) أهمية مفاهيم النهايات والأتصال Limits and Continuality في دراسة عملية التفاضل بصفة عامة والتي سوف نتناولها في الباب التالي (الثالث) بالنسبة للدوال في متغير واحد Single Variables Functions. كذلك سوف نتناول عملية التفاضل بالنسبة للدوال متعددة المتغيرات Several Variables Functions والتي تسمى بالمشتقات الجزئية في الباب الرابع.

وتتطلب عمليات التفاضل للدوال متعددة المتغيرات والتي يطلق عليها المشتقات الجزئية Partial Derivatives دراسة مفاهيم النهايات والأتصال للدوال متعددة المتغيرات والتي سوف نتناولها في هذا الفصل.

وفي هذا الفصل سوف نتناول الدوال في متغيران وبالمثل يمكن التعميم في أكثر من متغيران [14 , 27].

إذا أعتبرنا الدالة z حيث:

$$z = f(x, y) \qquad (2.17)$$

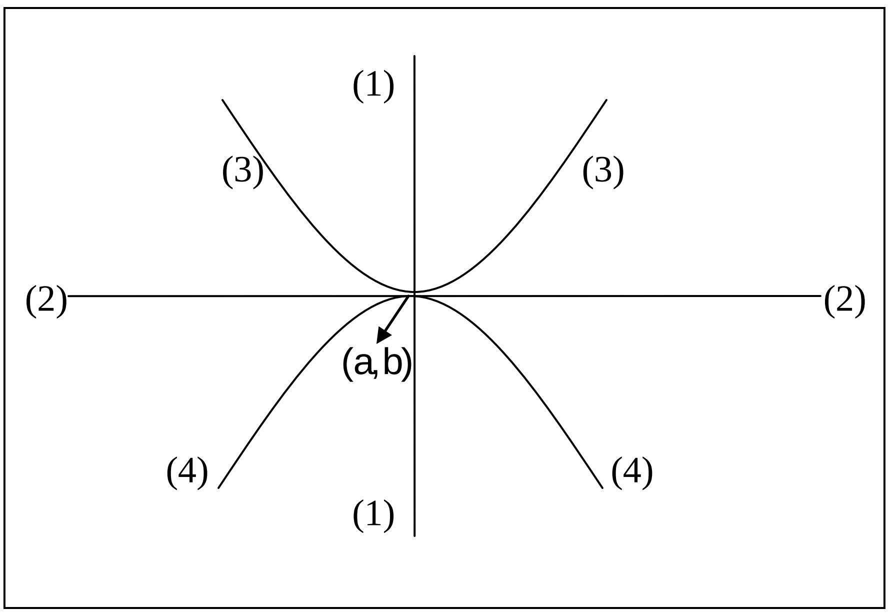
من الفصل (٢-١) وجدنا أن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ تعنى أنه عندما يقترب المتغير x تماماً من اليمين أو اليسار من النقطة $x = a$ فإن $f(x)$ تقترب تماماً من القيمة L.

أما إذا كانت الدالة $f(x, y)$ دالة في متغيران x , y بالمثل كما في حالة الدالة في متغير واحد فإن:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L \qquad (2.18)$$

فهذا يعنى أنه عندما يقترب المتغير x تماماً من اليمين أو اليسار من $x = a$ كذلك يقترب المتغير y تماماً من اليمين أو اليسار من $y = b$ فإن $f(x,y)$ تقترب تماماً من القيمة L.

وهذا يعنى أنه في حالة الدالة $f(x,y)$ يكون الأقتراب من القيمة L ليس من اليمين أو اليسار كما في حالة الدالة في متغير واحد ولكن يكون الأقتراب في هذه الحالة من عدة مسارات Paths كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل (٢-٦): يوضح المسارات المختلفة للأقتراب من النقطة (a,b)

ملحوظة (١): إذا أعتبرنا الدالة $f(x,y)$ تقترب من القيمة L_i عندما يقترب (x,y) من (a,b) في المسار P_i، $i = 1,2,3,4$ فإن:

١- توجد نهاية للدالة $f(x,y)$ عندما (x,y) تقترب من (a,b) وتساوي القيمة L عندما:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = L_i \qquad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad (2.19)$$

أي توجد نهاية للدالة $f(x,y)$ عندما $(x,y) \to (a,b)$ في حالة تساوى النهايات في جميع المسارات.

٢- في حالة

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \neq L_i \qquad (2.20)$$

لأي قيمة من قيم i.

فإنه في هذه الحالة لا توجد نهاية Does Not Exist للدالة عندما $(x,y) \to (a,b)$.

ملاحظة (٢): يمكن تحديد نهاية الدالة $f(x,y)$ عندما $(x,y) \to (a,b)$ في كل مسار من المسارات التي تمر بالنقطة (a,b) على النحو التالي:

١- بمحاذاة المسار $x = a$ ثم نوجد نهاية الدالة عندما $y \to b$.

٢- بمحاذاة المسار $y = b$ ثم نوجد نهاية الدالة عندما $x \to a$.

٣- بمحاذاة المسار y كدالة في (x) أي $y = g(x)$ ثم نوجد النهاية عندما $x \to a$.

٤- بمحاذاة المسار x كدالة في (y) أي $x = g(y)$ ثم نوجد النهاية عندما $y \to b$.

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٢-١٧)

أوجد:
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$$

الحل

١- نضع $x=1$ ثم نوجد النهاية عندما $y\to 0$ على النحو التالي:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{1+y-1} = \lim_{y\to 0} 1 = 1 \longrightarrow (1)$$

٢- نضع $y=0$ ثم نوجد النهاية عندما $x\to 1$ على النحو التالي:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+0-1} = \lim_{x\to 1} 0 = 0 \longrightarrow (2)$$

من (2) ، (1) نجد أن النهاية مختلفة في مسارين مختلفين وبالتالي لا توجد نهاية للدالة عندما $(x,y)\to(1,0)$.

مثال (٢-١٨)

أوجد نهايات الدالة $f(x,y)$ حيث:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

عندما $(x,y)=(0,0)$ في المسارات المختلفة – ثم وضح أنه توجد نهاية للدالة $f(x,y)$ عند $(x,y)=(0,0)$.

الحل

١- بمحاذاة المسار $x=0$ فإن:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \longrightarrow (1)$$

٢- عند $y=0$ فإن:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2(0)}{x^2+(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \longrightarrow (2)$$

٣- عند محاذاة المسار $x=y$ فإن:

$$\lim_{(y,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{2} = 0 \longrightarrow (3)$$

٤- بمحاذاة المسار $y=x$ فإن:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0 \longrightarrow (4)$$

من $(4)-(1)$ نجد أن نهايات الدالة عندما $(x,y)=(0,0)$ في المسارات المختلفة متساوية بالتالي فإن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

مثال (٢-١٩)

أوجد ما يلي:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2}$$

الحل

١- بمحاذاة المسار $x=1$

$$\lim_{(1,y)\to(1,0)} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0 \longrightarrow (1)$$

٢- بمحاذاة المسار $y = 0$

$$\lim_{(x,0)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2} = \lim_{(x,0)\to(1,0)} \ln x = 0 \longrightarrow (2)$$

٣- والمسار الثالث الذي يمر بالنقطة $(1,0)$ يمكن وضع $y = x - 1$ (وفي هذه الحالة نجد أن $y \to 0$ عند $x \to 1$)

$$\lim_{(x,x-1)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + (x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 \ln x}{2(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2} = 0 \longrightarrow (3)$$

٤- وبمحاذاة المسار الرابع الذي يمر بالنقطة $(1,0)$ يمكن وضع $x = y + 1$ (وفي هذه الحالة نجد أن $x \to 1$ عند $y \to 0$)

$$\lim_{(y+1,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \ln(y+1)}{2y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{2} = 0 \longrightarrow (4)$$

من (4) – (1) نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

تعريف (٢-٢)

إذا أعتبرنا الدالة $f(x,y)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x,y)$ دالة متصلة Continuous في النقطة (a,b) إذا كان:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \qquad (2.21)$$

فيما عدا ذلك يقال أن الدالة غير متصلة discontinuous في النقطة (a,b).

تمرين (٥)

أوجد ما يلي:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{x^2y}{4x^2-y}$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x+y}{x^2-2xy}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,0)} \dfrac{e^xy}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2}{x^2+y^2}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{5x}+xy}{2\ln xy}$, 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{-3x^2+2y^{-3}}{xy}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \dfrac{e^{xy}+10}{x^2y^2}$, 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{5xy^2}{e^x+10}$

(٢-٦) تمرينات Exercises

(١) أوجد ما يلي:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+1)$, 2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{1-e^{x}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, $f(x)=\begin{cases}2x & , x<2\\ x^2 & , x\ge 2\end{cases}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , x<-1\\ 3 & , x<1\\ 2x+1 & , x>1\end{cases}$

(٢) وضح لماذا كل دالة من الدوال التالية تعتبر دالة غير متصلة في النقطة المناظرة لها.

1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x=1$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x=1$

3) $f(x) = e^{1/x} \quad , \quad x = 0$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 3 & , \quad x = 2 \\ 3x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases} \quad , \quad x = 2$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ & \\ 3x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases} \quad , \quad x = 2$

(٣) وضح أن النهايات المشار إليها في كل حالة من الحالات التالية غير موجودة

.Does Not Exist

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2}{x^2 + y^2}$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2y^2}{2x^2 - y^2}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{3y^2 - x^2}$, 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$, 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2\sqrt{y}}{x^4 + y^2}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{x}y^2}{x + y^3}$, 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{x^2 + 8y^6}$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{2y^2}{(x-2)^2 + y^2}$, 11) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{3x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

12) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2+z^2}$, 13) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2yz}{x^4+y^4+z^4}$

(٤) وضح وجود Exist النهاية في كل حالة من الحالات التالية.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+x^2y^3}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{3x^2}{x^2+y^2+z^2}$

5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$

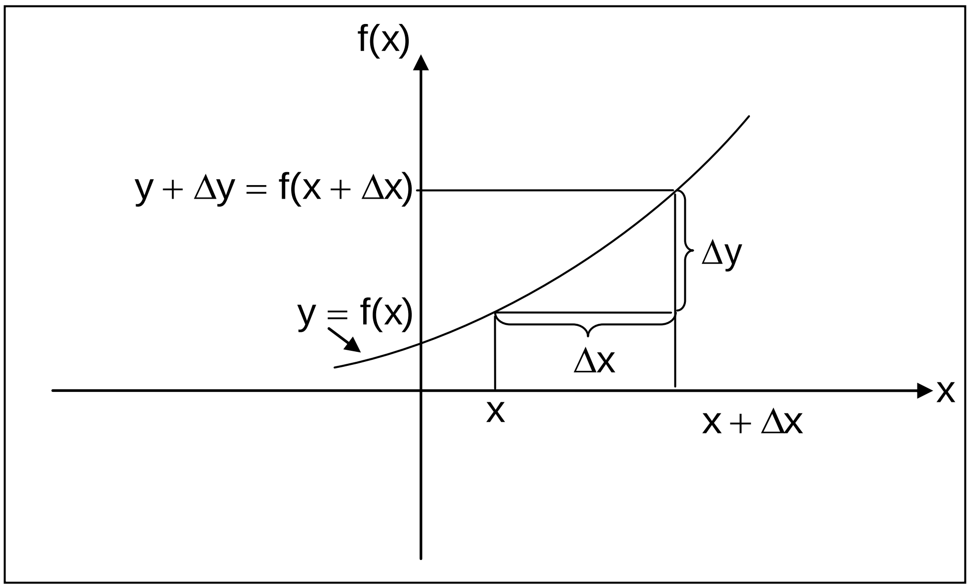
الباب الثالث
التفاضل وتطبيقاته
Differentiation And Its Applications

(٣-١) متوسط معدل التغير Average Rate of Change

إذا فرضنا أن y دالة في المتغير المستقل x، بمعنى:

$$y = f(x)$$

فإذا حدث تغير في المتغير x بمقدار (Δx) أدى إلى تغير y بمقدار (Δy) كما هو مبين في الشكل (٣-١).



شكل (٣-١)

ملحوظة: يمكن أن يكون (Δx) أو (Δy) مقدار موجب أو مقدار سالب.

ويسمى خارج قسمة مقدار التغير في y (Δy) بالنسبة إلى مقدار التغير في x (Δx) بمتوسط معدل التغير ويرمز له بالرمز M. أو بعبارة أخرى

$$M = \frac{(\Delta y)}{(\Delta x)} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.1)$$

أي أن تغير المتغير x بمقدار وحدة واحدة خلال الفترة (Δx) سوف يؤدي إلى تغير الدالة $f(x)$ بمقدار في المتوسط يساوي M. وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية [٤].

مثال (٣-١)

إذا فرضنا أن المتغير (x) يشير إلى سعر بيع الوحدة من أحد المنتجات، كذلك المتغير (y) يشير إلى الإيراد اليومي من الوحدات المباعة من هذا المنتج. فإذا كانت العلاقة بين x ، y على النحو التالي:

$$y = f(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad (3.2)$$

فإذا تغير سعر بيع الوحدة الواحدة من 10 جنيهات إلى 13 جنيه فإننا نجد أن مقدار التغير المناظر له في الإيراد هو (Δy) حيث:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f(13) - f(10) \\ &= \left\{ (13)^2 + 2(13) - 1 \right\} - \left\{ (10)^2 + 2(10) - 1 \right\} \\ &= 169 + 26 - 1 - 100 - 20 + 1 = 75 \text{ جنيه} \end{aligned}$$

أي أن حدوث تغير في سعر الوحدة الواحدة من المنتج بمقدار 3 جنيهات أدى إلى حدوث تغير في الإيراد اليومي بمقدار 75 جنيه – وبالتالي فإن:

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{75}{3} = 25 \text{ جنيه}$$

أي أن تغير سعر الوحدة الواحدة بمقدار جنيه واحد داخل الفترة ($x = 10 - x = 13$) سوف يؤدي إلى زيادة الإيراد اليومي بمقدار 25 جنيه في المتوسط.

بالمثل إذا نقص السعر من 10 جنيهات إلى ثمانية جنيهات فإن:

$$\Delta x = 8 - 10 = -2 \text{ جنيه}$$

كذلك

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(8) - f(10) \\ &= \{(8)^2 + 2(8) - 1\} - \{(10)^2 + 2(10) - 1\} \\ &= 64 + 16 - 1 - 100 - 20 + 1 = -40 \text{ جنيه} \end{aligned}$$

أي أن نقص سعر الوحدة الواحدة بجنيهين سوف يؤدي إلى نقص الإيراد اليومي بمقدار 40 جنيه وبالتالي فإن:

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-40}{-2} = 20 \text{ جنيه}$$

أي أن متوسط معدل التغير في الفترة من (10-8) يساوي 20 جنيه – او بعبارة أخري فإن نقص السعر (أو الزيادة) بجنية واحد خلال الفترة من 10 إلى 8 سوف يؤدي إلى نقص (أو زيادة) الإيراد اليومي بمقدار 20 جنيه في المتوسط.

مثال (٣-٢)

إذا كان x ، y يمثلان عدد ساعات العمل اليومية للعامل في إحدى الشركات الخاصة، ودخله اليومي من عدد ساعات العمل بالجنيه على الترتيب.

فإذا كانت العلاقة بين x ، y على النحو التالي:

$$y = f(x) = x^2 - x + 1$$

فإذا تغير عدد ساعات العمل من 10 ساعات إلى 10.5 ساعة يومية – فإن:

$$\Delta x = 10.5 - 10 = 0.5 \text{ ساعة}$$

كذلك

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left\{ (10.5)^2 - 10.5 + 1 \right\} - \left\{ (10)^2 - 10 + 1 \right\} \\ &= 110.25 - 10.5 - 100 + 10 = 9.75 \text{ جنيه}\end{aligned}$$

أي أن حدوث تغير في عدد ساعات العمل بمقدار 0.5 ساعة سوف يؤدي إلى زيادة الدخل اليومي بمقدار 9.75 جنيه.

وبالتالي فإن:

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9.75}{0.5} = 19.5 \text{ جنيه}$$

أي أنه خلال الفترة من (10.5-10) يكون متوسط معدل 19.5 جنيه. أو بعبارة أخري أن زيادة عدد ساعات العمل بساعة واحدة سوف يؤدي إلى زيادة الدخل اليومي 19.5 جنيه.

تمرين (١)

١- أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدوال التالية إذا تغيرت x من $x = 1$ إلى $x = 3$ ثم عقب على الناتج.

1) $y = f(x) = 5x^2$ ، 2) $y = f(x) = 2x^3$

3) $y = f(x) = 2x + 5$ ، 4) $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$

5) $y = f(x) = 5x^2 - 2x$ ، 6) $y = f(x) = x^2 + x + 10$

7) $y = f(x) = x^5 - x^3 + 1$ ، 8) $y = f(x) = e^{x^2}$

9) $y = f(x) = \ln(2x)$ ، 10) $y = f(x) = e^x + 5x$

٢- الجدول التالي يوضح قيمة المبيعات السنوية بالألف جنيه لأحدى الشركات في السنوات الموضحة بالجدول من أحد المنتجات للشركة.

السنة	1986	1986	1987	1988	1989	1990
قيمة المبيعات السنوية (بالألف جنيه)	120	125	130	134	136	140

أ- اوجد متوسط معدل التغير لقيمة المبيعات بين عامي 1985، 1988.

ب- أوجد متوسط معدل التغير لقيمة المبيعات بين عامي 1985، 1990 كذلك بين عامي 1986، 1990 ثم عقب على الناتج.

٣- إذا كانت المسافة المقطوعة (D) لأحدى السيارات بالكيلو متر في إحدى الرحلات دالة في الزمن t (الزمن t مقاس بالساعة) على النحو التالي:

$$D = f(t) = 5t^2 + 12t \qquad 0 \le t \le 5$$

أ- أوجد متوسط معدل التغير في السرعة أثناء الساعة الأولى من الرحلة، ثم أثناء الساعة الثانية من الرحلة.

ب- أوجد متوسط معدل التغير في السرعة في الساعة الخامسة من الرحلة.

(٣-٢) المشتقة The Derivative

إذا اعتبرنا الدالة y دالة في المتغير المستقل x، أي أن:

$$y = f(x)$$

معرفة خلال الفترة $a \le x \le b$. فإذا فرضنا النقطة c تقع داخل الفترة $[a,b]$ بمعنى $c \in [a,b]$ فإن تفاضل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x عند النقطة c يعرف بأنه نهاية متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x عندما تؤول (Δx) إلى الصفر (وذلك في حالة وجود نهاية للدالة $f(x)$ عند النقطة c). ويرمز لتفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x بالرمز $\frac{dy}{dx}$ وتقرأ "تفاضل الدالة y بالنسبة للمتغير x" وأحياناً يرمز للتفاضل بالرمز y' أو $f'(x)$ أو $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ - ومن التعريف السابق نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.3)$$

وفي حالة عدم وجود نهاية للدالة y عند نقطة معينة ولتكن $x = h$ فإنه يقال أن الدالة $y = f(x)$ ليس لها تفاضل عند النقطة $x = h$.

وأحيانا يسمى تفاضل الدالة y أي $\frac{dy}{dx}$ بالمشتقة derivative أو المشتقة الأولى للدالة first derivative بالنسبة للمتغير x. ومن تعريف المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ في المعادلة (3.3) فيتضح أن المشتقة الأولى هي معدل التغير اللحظي أو الفوري[*] Instantaneous Rate of Change للدالة y. والمقصود بالتغير اللحظي هو التغير في الدالة $f(x)$ الناتج عن التغير الطفيف (أي أقل تغير ممكن أن يحدث في

[*] Bud nick, F.S.(1986): Applied Mathematics For Economics, and The Social Sciences, McGraw – Hill Book Co. London.

(x)) في المتغير المستقل (x). ويطلق على المشتقة الأولى بمعدل التغير اللحظي للتمييز فقط بينها وبين متوسط معدل التغير M.

ولحساب التفاضل (المشتقة الأولي) عند نقطة معينة باستخدام النهايات يسمى بأسلوب النهايات Limit Approach حيث تتبع الخطوات التالية:

١- نوجد الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $(x + \Delta x)$.

٢- نوجد المقدار Δy حيث

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

٣- نوجد متوسط معدل التغير M حيث

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

٤- نوجد نهاية متوسط معدل التغير، أى نوجد:

$$\lim_{\Delta x \to 0} M.$$

٥- نحسب $\lim_{\Delta x \to 0} M$ عند النقطة المطلوبة.

مثال (٣-٣)

أوجد تفاضل الدالة y حيث:

$$y = f(x) = x^2 + 10x + 5$$

عند النقطة $x = 1$، ثم عقب على الناتج.

الحل

١- نوجد $f(x+\Delta x)$ حيث

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 + 10(x+\Delta x) + 5 \\ &= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 10x + 10(\Delta x) + 5 \\ &= x^2 + (2x+10)\Delta x + 10x + (\Delta x)^2 + 5 \end{aligned}$$

٢- نوجد Δy حيث:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= x^2 + (2x+10)\Delta x + 10x + (\Delta x)^2 + 5 - x^2 - 10x - 5 \\ &= (2x+10)\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

٣- نوجد متوسط معدل التغير M:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{(2x+10)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= (2x+10) + (\Delta x) \end{aligned}$$

٤- نوجد $\lim\limits_{\Delta x \to 0} M$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} M = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+10) + (\Delta x) = 2x + 10$$

٥- عندما $x = 1$ فإن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2(1) + 10 = 12$$

والناتج (12) يعنى أن حدوث أي تغير طفيف في المتغير x عند $x = 1$ سوف يؤدي إلى تغير الدالة y بمقدار 12 وحدة.

مثال (٣-٤)

أوجد تفاضل الدالة y عند النقطة $x = 5$ حيث:

$$y = f(x) = 4x^2 - 5x + 7$$

باستخدام أسلوب النهايات

الحل

١- نوجد $f(x + \Delta x)$ حيث

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= 4(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 7 \\ &= 4(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5(\Delta x) + 7 \\ &= 4x^2 + 4(2x - 5)(\Delta x) + 4(\Delta x)^2 - 5x + 7 \end{aligned}$$

٢- نوجد Δy حيث:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 5x - 5(\Delta x) + 7 - 4x^2 + 5x - 7 \\ &= (8x - 5)(\Delta x) + 4(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

٣- نوجد متوسط معدل التغير M:

$$\begin{aligned} M = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(8x - 5)\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= (8x - 5) + 4(\Delta x) \end{aligned}$$

٤- نوجد $\lim\limits_{\Delta x \to 0} M$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} M = (8x - 5) = 8x - 5$$

٥- عندما $x = 5$ فإن:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = 8(5) - 5 = 35$$

ملحوظة:

مما سبق يتضح أن الشرط الضروري لوجود تفاضل للدالة $f(x)$ عند نقطة معينة ولتكن $x = h$، هو أن تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x = h$. ولكن ليس بالضرورة كل دالة متصلة عند نقطة معينة ولتكون $x = h$ مثلاً أن يكون لها تفاضل عند هذه النقطة. فقد تكون الدالة متصلة عند نقطة معينة ولكن ليس لها تفاضل عند هذه النقطة. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (٣-٥)

إذا فرضنا الدالة y حيث:

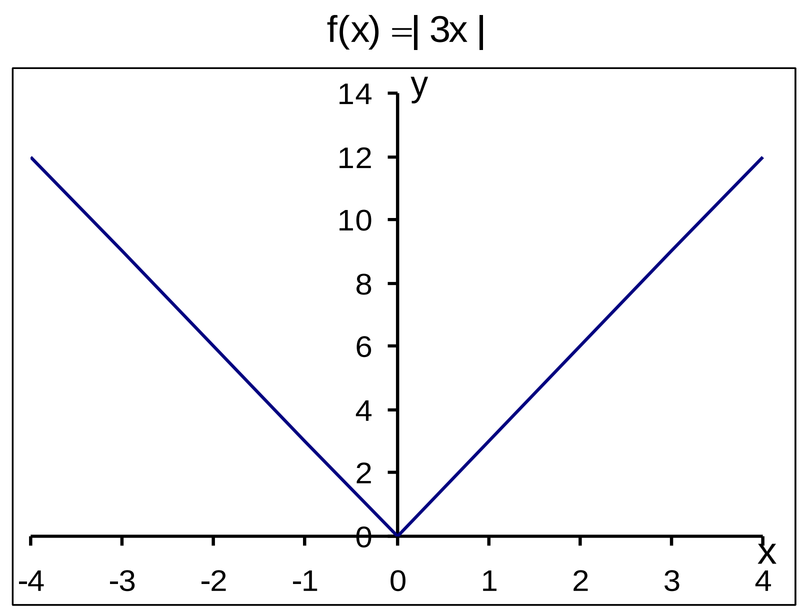
$$y = f(x) = |\, 3x \,|$$

المطلوب:

١- أرسم الدالة $f(x)$.
٢- أوجد نهاية الدالة y من اليمين ومن اليسار.
٣- هل الدالة متصلة عند $x \to 0$.
٤- هل يوجد للدالة مشتقة عندما $x \to 0$.

الحل

١ـ الشكل التالي يوضح الدالة



شكل (٣-٢)

من الرسم يتضح أن الدالة متصلة عند النقطة $x = 0$ حيث أن:

$$y = f(x) = \begin{cases} -3x & , \quad x < 0 \\ +3x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

٢ـ وباستخدام أسلوب النهايات من اليمين ومن اليسار يمكن أثبات أن:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -3x = 0 \qquad (3.4)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x = 0 \qquad (3.5)$$

وبما أن

$$f(x=0)=|3(0)|=0 \tag{3.6}$$

٣- من (3.6) – (3.4) نجد أن الدالة متصلة عند $x=0$.

٤- وفيما يلي سوف نوضح أن الدالة $f(x)=|3x|$ ليس لها تفاضل عند النقطة $x=0$ على النحو التالي:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|3(x+\Delta x)|-|3x|}{\Delta x}$$

وعندما $x=0$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|3\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|3\Delta x|}{\Delta x} \tag{3.7}$$

ويمكن إيجاد النهاية في (3.7) باستخدام أسلوب الاقتراب من الطرف الأيمن ومن الطرف الأيسر على النحو الموضح في الجدول التالي:

الاقتراب من اليسار 0^-			
Δx	-1	-0.5	-0.01
$\frac{\|3\Delta x\|}{\Delta x}=\frac{-3\Delta x}{\Delta x}$	-3	-3	-3
الاقتراب من اليمين 0^+			
Δx	1	0.5	0.01
$\frac{\|3\Delta x\|}{\Delta x}=\frac{+3\Delta x}{\Delta x}$	3	3	3

من الجدول يتضح أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|3\Delta x|}{\Delta x} = -3 \qquad (3.8)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|3\Delta x|}{\Delta x} = 3 \qquad (3.9)$$

ومن (3.9)، (3.8) يتضح أن النهايتين غير متساويتين وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|3\Delta x|}{\Delta x}$$

غير موجودة.

وبالتالي فرغم أن الدالة $|3x|$ دالة متصلة عند النقطة $x = 0$ فإنه لا يوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $x = 0$.

المرونة Elasticity

من أهم التطبيقات الاقتصادية، والإدارية، والسياسية، ... الخ، التطبيقات التي تتطلب قياس مؤشر المرونة. فإذا فرضنا أن المتغير التابع y حيث:

$$y = f(x)$$

وإذا رمزنا إلى مرونة الدالة y بالنسبة للمتغير x بالرمز $E(x)$، فإن مقياس المرونة يعرف على إنه نهاية التغير النسبي في y بالنسبة للتغير النسبي في (x) عندما يؤول مقدار التغير في (x) إلى الصفر أي عندما $\Delta x \to 0$، ويمكن صياغة $E(x)$ على النحو التالي:

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$$
$$= \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\} \left(\frac{x}{y} \right)$$
$$= \frac{dy}{dx} \left(\frac{x}{y} \right) \qquad (3.10)$$

مثال (٣-٦)

في إحدى الشركات قام قسم التسويق بإجراء دراسة عن الطلب المتوقع في السوق على أحدى المنتجات كدالة في سعر بيع الوحدة الواحدة (x) بالجنيه، فقدرت دالة الطلب y على النحو التالي:

$$y = f(x) = 6000 - 20x^2 \quad , \quad x > 0$$

المطلوب:

١- أوجد الكمية المطلوبة المتوقعة عندما يكون سعر بيع الوحدة 5 جنيهات.

٢- أوجد مرونة الطلب بالنسبة للسعر x.

٣- أحسب قيمة مرونة الطلب عندما يكون $x = 8$، $x = 16$ ثم عقب على الناتج.

الحل

١- عندما $x = 5$ فإن:

$$y = f(x = 5) = 6000 - 20(5)^2 = 6000 - 500 = 5500 \text{ وحدة}$$

٢-

$$E(x) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = (-40x)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-40x^2}{y}$$
$$= \frac{-40x^2}{6000-20x^2} = \frac{-2x^2}{300-x^2}$$

٣- وعندما $x = 8$ فإن:

$$f(x=8) = 6000 - 20(8)^2 = 6000 - 1280 = 4720$$ وحدة

كذلك

$$E(x=8) = \frac{-2(8)^2}{300-(8)^2} = \frac{-128}{236} = -0.54$$

وهذا يعنى أنه عندما يساوى سعر الوحدة 8 جنيهات فإن الزيادة النسبية الصغيرة في السعر سوف تؤدي إلى نقص نسبي في كمية الطلب بمقدار 0.54 مرة من نسبة التغير في السعر.

فمثلاً إذا حدث تغير نسبي في السعر بمقدار 10% فإن هذا التغير النسبي في السعر سوف يؤدي إلى نقص نسبي في الكمية المطلوبة يساوى 5.4% من الكمية المطلوبة حيث أن:

$$10\% \times 0.54 = 5.4\%$$

أو بعبارة أخرى إذا كان سعر الوحدة 8 جنيهات وزاد (أو نقص) بنسبة 10% أي زاد (أو نقص) بمقدار 0.80 جنيه حيث:

$$8\times\frac{10}{100}=0.80 \text{ جنيه}$$

أي زاد السعر من 8 جنيهات إلى 8.8 جنيه فإن هذه الزيادة سوف تؤدي إلى نقص الكمية المطلوبة y بنسبة 5.4% أي أن مقدار النقص (أو الزيادة) في الكمية المطلوبة يساوي:

$$f(x=8)\times\frac{5.4}{100}=[4720]\times\frac{5.4}{100}$$
$$=4720\times\frac{54}{1000}=254.9\approx 255 \text{ وحدة}$$

وبالتالي فإن ارتفاع سعر الوحدة من 8 إلى 8.8 سوف يؤدي إلى نقص الكمية من 4720 إلى 4465 (4720-225=4465)

وبصفة عامة فإن:

التغير النسبي في الكمية المطلوبة = المرونة × التغير النسبي في السعر

بالمثل عندما $x=16$ فإن:

$$E(x=16)=\frac{-2(16)^2}{300-(16)^2}=\frac{-512}{44}=-11.64$$

وهذا يعني أنه عندما يكون سعر الوحدة 16 جنيه فإن نسبة التغير في السعر سوف يؤدي إلى نقص الكمية المطلوبة بمقدار 11.64 مرة من نسبة التغير في السعر.

نظرية (٣-١)

إذا كانت $E(x)$ مرونة الدالة y حيث:

$$y = f(x)$$

$$E(x) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

فإن:

١- الدالة y تكون مرنة إذا كان

$$|E(x)| > 1 \qquad (3.11)$$

٢- الدالة y تكون غير مرنة إذا كان

$$|E(x)| < 1 \qquad (3.12)$$

ففي المثال السابق نجد أنه عندما يكون سعر الوحدة $x = 8$ فإن:

$$|E(x=8)| = 0.54 < 1$$

إذن الطلب غير مرن Inelastic عند السعر 8 جنيهات، في حين نجد عند السعر $x = 16$:

$$|E(x=16)| = |-11.64| = 11.64 > 1$$

إذن الطلب مرن Elastic عند السعر 16 جنيه.

تمرين (٢)

١) أوجد المشتقة الأولى لكل دالة من الدوال التالية بأسلوب النهايات، ثم أوجد المرونة عند $x = 1$.

1) $f(x) = 4x + 5$, 2) $f(x) = -30$

3) $f(x) = 2x^2$, 4) $f(x) = 3x^3$

5) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 6) $f(x) = 10x^2 + 3$

7) $f(x) = \frac{-2}{x}$, 8) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

9) $f(x) = -2x^3 + 10x$, 10) $f(x) = \frac{x^2}{5}$

٢) في إحدى الشركات قدرت دالة العرض y كدالة في سعر بيع الوحدة الواحدة من منتجاتها x على النحو التالي:

$$y - f(x) = 12000 + 3x^2$$

١- أوجد الكمية المعروضة المتوقعة عند $x = 5$.

٢- أوجد متوسط معدل تغير الكمية المعروضة عند السعر $x = 10$.

٣- أوجد المشتقة الأولى للعرض عند السعر يساوى 8 جنيهات، ثم عقب على الناتج.

٤- أوجد مرونة العرض عند السعر 10 جنيهات، ثم عقب على الناتج.

(٣-٣) قواعد التفاضل Rules of Differentiation

كما وضحنا في الفصل السابق أنه يمكن إيجاد المشتقة (أو تفاضل) الدالة باستخدام أسلوب النهايات وفي هذا الفصل سوف نقدم بعض النظريات التي يمكن باستخدامها إيجاد التفاضل مباشرة لأي دالة.

نظرية (٣-٢)

إذا كان c مقدار ثابت، $f(x)$ حيث:

$$y = f(x) = c$$

فإن:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3.13)$$

الإثبات

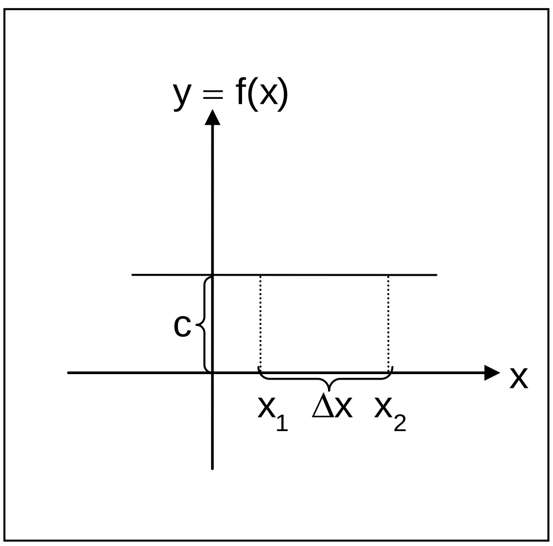
الشكل التالي (٣-٣) يوضح الدالة:

$$y = f(x) = c$$

ويتضح أن المتغير (y) لا يتغير بتغير المتغير x.

فعند $x = x_1$ فإن:

$$f(x = x_1) = c$$



شكل (٣-٣)

كذلك عند $x = x_2$ حيث:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

فإن:

$$f(x = x_2) = c$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

مثال (٣-٧)

إذا كان:

$$y = f(x) = 5$$

أوجد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

بما أن y تساوى مقدار ثابت (5) فإن:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(نظرية)}$$

نظرية (٣-٣)

إذا كان

$$y = f(x) = x$$

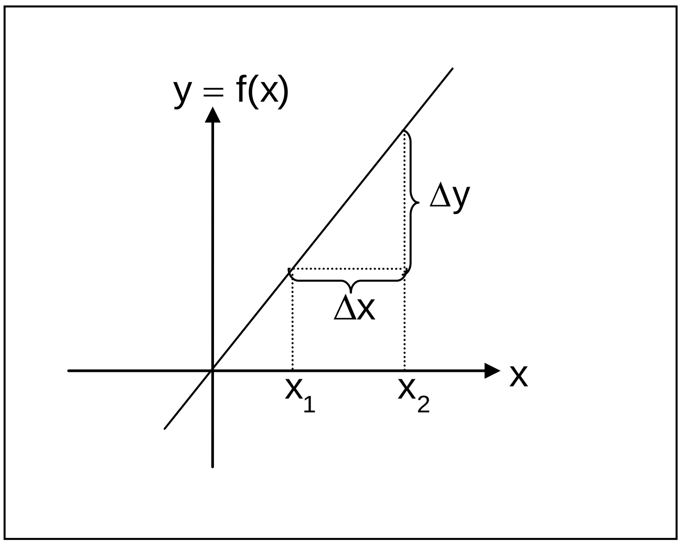
فإن:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad (3.14)$$

الإثبات

الشكل التالي (٣-٤) يوضح الدالة:

$$f(x) = x$$



شكل (٣-٤)

بما أن:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - (x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1\end{aligned}$$

نظرية (٣-٤)

إذا كان m عدد حقيقي، $y = f(x) = x^n$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \qquad (3.15)$$

الإثبات

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\}x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\} = nx^{n-1}$$

مثال (٣-٨)

إذا كان:

$f(x) = x^7$ i) , $f(x) = \frac{1}{x}$ ii)

أوجد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{df(x)}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6 \text{ i)} \qquad \text{(نظرية)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow \text{ii)}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -x^{-1-1} = -x^{-2}$$

نظرية (٣-٥)

إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين قابلتين للتفاضل في المتغير x ، c مقدار ثابت

فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x) \text{ i)} \qquad (3.16)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x) \text{ ii)} \qquad (3.17)$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x) \text{ iii)} \qquad (3.18)$$

الإثبات

$$\text{i) } \frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

بالمثل إثبات (ii)، (iii).

مثال (٣-٩)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة y حيث:

$$y = f(x) = 5x^9 + 4\sqrt{x^3}$$

الحل

$$y = f(x) = 5x^9 + 4x^{3/2} \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(9x^8) + 4(\frac{3}{2}x^{3/2-1})$$

$$= 45x^8 + 6x^{1/2} = 45x^8 + 6\sqrt{x}$$

مثال (٣-١٠)

أوجد $f'(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 5\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 5\sqrt{x}}{x} = 5x^2 - 3x + 5x^{-1/2} \longrightarrow$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 10x - 3 + 5(\frac{-1}{2})x^{-3/2} = 10x - 3 - \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

نظرية (٣-٦)

إذا كان $g(x)$ ، $f(x)$ دالتين قابلتين للتفاضل في المتغير x فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (3.19)$$

الإثبات

إذا فرضنا أن:

$$f(x)g(x) = k(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = k'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x+\Delta x) - k(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x)\right] + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x)\right]$$

$$= \left[f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\right] + f(x)g'(x)$$

وبما أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \longrightarrow g(x)$$

فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

وتسمي هذه النظرية بقاعدة الضرب Product Rule.

مثال (٣-١١)

باستخدام قاعدة الضرب أوجد $f'(x)$ حيث:

$$f(x) = (2x^5 + 4x - 20)(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x^{10}})$$

الحل

$$f(x) = (2x^5 + 4x - 20)(x^2 - x^{1/2} + 2x^{-10})$$

وباستخدام قاعدة الضرب فإن:

$$\frac{df(x)}{dx} = (10x^4 + 4)(x^2 - x^{1/2} + 2x^{-10}) + (2x^5 + 4x - 20)(2x - \frac{1}{2}x^{-3/2} + 20x^{-11})$$

نظرية (٣-٧)

إذا كان $g(x)$ ، $f(x)$ دالتين قابلتين للتفاضل بالنسبة للمتغير x ، كذلك $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (3.20)$$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=k(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x)-k(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}\right]-\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)f(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)-\left[f(x)/g(x)\right]}{g(x)g(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{(\Delta x)g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}\right\}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x}\right]g(x)-f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

حيث $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$

وتسمي هذه النظرية بقاعدة القسمة Quotient Rule.

مثال (٣-١٢)

باستخدام قاعدة القسمة أوجد $f'(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^2 - 10}{x^3 + 2x + 1}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{(5x^4 + 4x)(x^3 + 2x + 1) - (x^5 + 2x^2 - 10)(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^7 + 9x^4 + 10x^5 + 8x^2 + 4x - (3x^7 + 6x^4 + 2x^5 + 26x^2 - 20)}{(x^3 + 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^7 + 3x^4 + 8x^5 - 18x^2 + 4x - 20}{(x^3 + 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^7 + 3x^4 + 8x^5 - 18x^2 + 4x - 20}{x^6 + 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 1}$$

نظرية (٣-٨)

إذا كانت الدالة $g(x)$ دالة قابلة للتفاضل بالنسبة للمتغير x كذلك f دالة قابلة للتفاضل بالنسبة للمتغير $g(x)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x) \tag{3.21}$$

الإثبات

سوف نقدم إثبات النظرية في حالة إذا كان $g'(x) \neq 0$ ، فإذا فرضنا أن:

$$k(x) = f(g(x))$$

فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = k'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x+\Delta x) - k(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)}$$

$$= \lim_{g(x+\Delta x) \to g(x)} \frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

ملحوظة:

إذا كان $\Delta x \to 0$ فإن:

$$g(x+\Delta x) \to g(x)$$

وتسمى هذه النظرية بقاعدة السلسلة Chain Rule.

مثال (٣-١٣)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث:

$$y=(x^3+2x-5)^7$$

الحل

إذا فرضنا أن:

$$y=f\big(g(x)\big)=(x^3+2x-5)^7$$

حيث

$$g(x)=x^3+2x-5$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f'\big(g(x)\big)g'(x)\\&=7(x^3+2x-5)^6(3x^2+2)\end{aligned}$$

مثال (٣-١٤)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث:

$$y=\sqrt[5]{5x^3+2x-10}$$

الحل

بما أن:

$$y=\sqrt[5]{5x^3+2x-10}=(5x^3+2x-10)^{1/5}\longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}(5x^3+2x-10)^{-4/5}(15x^2+2)$$
$$=\frac{1}{5}\frac{(15x^2+2)}{\sqrt[5]{(5x^3+2x-10)^4}}$$

تمرين (٣)

١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية:

1) $f(x)=x^3-2x+1$, 2) $f(x)=x^5-7x^3+8x^2+9x$

3) $f(x)=\frac{3}{x}-8x+10$, 4) $f(x)=\frac{5}{x^4}-x^5+4$

5) $f(x)=\frac{20}{\sqrt{x}}-5x$, 6) $f(x)=10\sqrt[4]{x^4}+8$

7) $f(x)=x^2(3x^2+\sqrt{x})$, 8) $f(x)=\frac{4x^2-x+3}{\sqrt[3]{x}}$

٢) أوجد تفاضل كل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(x^3+5x)(x^3-2x^2+4x+10)$

2) $f(x)=(x^4-3x^3+5)(x^3-4x^2+3)$

3) $f(x)=(\sqrt{x}+4x^2)(3x^4-\frac{5}{x})$

4) $f(x)=(x^{5/2}-4x)(x^3-\frac{3}{x^2}+5)$

5) $f(x)=\frac{(3x+5)}{(5x+4)}$

6) $f(x)=\dfrac{(x^2+3x+5)}{(x^3-4x)}$, 7) $f(x)=\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{5}{x^3}$

8) $f(x)=(x^2+1)\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2}$, 9) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x}}$

10) $f(x)=x(\sqrt[4]{x}+7)$, 11) $f(x)=(x^3+2x^2+5)^{10}$

12) $f(x)=\sqrt{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)^3}$, 13) $f(x)=\sqrt{(3x^2+18-x^2)^3}$

14) $f(x)=(\sqrt{x^3+2}+2x)^{-2}$, 15) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

16) $f(x)=\dfrac{3x^2+2\sqrt{x^3+4/x^2}}{(x^3-2)\sqrt{x^2+3}}$

17) $f(x)=\sqrt[4]{x\sqrt{x^4+2x\sqrt[3]{\dfrac{4}{x+2}}}}$, 18) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

19) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, 20) $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt[x]{5x^2+1}}$

## (٣-٤) قاعدة لوبتال		I'Hapital's Rule

في بعض الحالات تكون كل من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ قابلـه للتفاضل.

ولكن عند إيجاد:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

تحصل على شكل غير محدد Indeterminate Form عبارة عن:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \text{أو} \qquad \frac{0}{0}$$

ولكن عالم الرياضيات I'Hapital (١٦٦١-١٧٠٤) أثبت النظرية التالية:

نظرية (٣-٩)

إذا فرضنا أن الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ قابليتين للتفاضل في فترة مفتوحة تحتوي على النقطة c وبأفتراض أن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \text{ أو } \frac{\infty}{\infty}$$

كذلك

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

حيث L عدد محدد Finite Number فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

أيضاً

مثال (٣-١٥)

أوجد

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

الحل

بإيجاد

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

بالطرق المباشرة نحصل على $\frac{0}{0}$.

ولكن باستخدام:

(١) الجداول للحصول على النهاية اليمني واليسري كما ذكرنا في الباب السابق نجد أن:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$$

(٢) كذلك باستخدام قاعدة لوبتال نجد أن:

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$g'(x) = 1$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2(2) + 1}{1} = 5$$

مثال (٣-١٦)

أوجد
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

الحل

بإيجاد
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$$
بالطرق المباشرة نحصل على $\frac{\infty}{\infty}$.

ولكن باستخدام:

(١) الجداول للحصول على النهاية اليمني واليسري كما ذكرنا في الباب السابق نجد أن:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{3}$$

(٢) باستخدام قاعدة لوبتال نجد أن:
$$f'(x) = 4x - 3$$
$$g'(x) = 6x + 5$$

وبالتالي:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x - 3}{6x + 5} \cdot \frac{1/x}{1/x}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4 - (3/x)}{6 + (5/x)}\right] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

تمرين (٤)

١- أثبت ما يلي باستخدام قاعدة لوبتال

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^n}=-\infty \quad , \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}=\infty \quad , \quad 4)\ \lim_{x\to\infty}x^n e^{-kx}=0$$

٢- استخدم طريقة مناسبة لإيجاد ما يلي:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \quad , \quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-27}{x^2-9}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x+1} \quad , \quad 4)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x-1}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} \quad , \quad 6)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}$$

(٣-٥) القيم العظمي والصغري للدالة
Maximum and Minimum Values of A function

تعتبر تحديد القيم العظمي والصغري للدالة جزء ذو أهمية خاصة في دراسة سلوك الدالة من الناحية التطبيقية.

إذا اعتبرنا الدالة $f(x)$ دالة معرفة في الفترة $[a \le x \le b]$ حيث:

$$y = f(x)$$

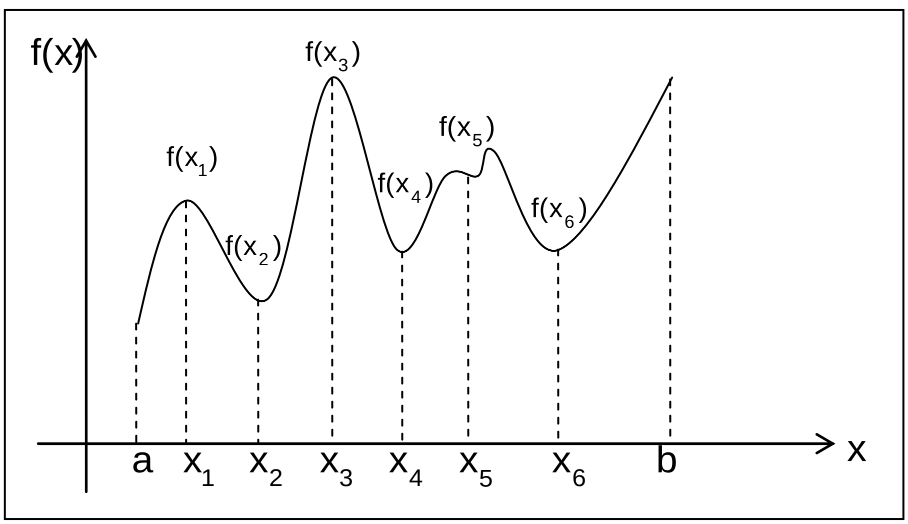
فإذا فرضنا أن النقطة $x = x_0$ حيث $a \le x_0 \le b$ فإن النقطة $(x_0, f(x_0))$ يقال لها نقطة عظمي Maximum Point (وأحياناً تسمي نقطة نهاية عظمي) إذا كان:

$$f(x_0) \ge f(x_0 + \Delta x) \quad , \ |\Delta x| \to 0 \qquad (3.22)$$

كذلك يقال أن النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة صغري Minimum Point إذا كان:

$$f(x_0) \le f(x_0 + \Delta x) \quad , \ |\Delta x| \to 0 \qquad (3.23)$$

والشكل التالي يوضح النقط العظمي والصغري للدالة $f(x)$



شكل (٣-٥)

ومن الشكل يتضح أن النقط $(x_1, f(x_1)), (x_3, f(x_3))$ نقط عظمي وتسمى نقط عظمي نسبية (أو محلية) Relative (Local) Maximum Points ، كذلك النقط $(x_6, f(x_6)),\ (x_2, f(x_2)), (x_4, f(x_4))$ نقط صغري نسبية. كذلك نجد أن:

$$f(x_3) = \mathrm{Max}\{f(x_1), f(x_3)\}$$

وتسمي النقطة $(x_3, f(x_3))$ نقطة عظمي مطلقة Global (Absolute) Maximum Point أي النهاية العظمي المطلقة هي أكبر قيمة في قيم النهايات العظمي النسبية للدالة $f(x)$. كذلك النقطة $(x_2, f(x_2))$ بحيث:

$$f(x_2) = \mathrm{Min}\{f(x_2), f(x_4), f(x_6)\}$$

وتسمي النقطة $(x_2, f(x_2))$ نقطة صغري مطلقة Global (Absolute) Minimum Point أي أن النهاية الصغري المطلقة هي أقل قيمة في قيم النهايات الصغري النسبية للدالة.

أما النقطة $x = x_5$ فنجد أن:

$$f(x_5) < f(x_5 + \Delta x) \quad , \ |\Delta x| \to 0$$

وفي نفس الوقت

$$f(x_5) > f(x_5 - \Delta x) \quad , \ |\Delta x| \to 0$$

أي أن النقطة $(x_5, f(x_5))$ ليست نقطة نهاية عظمي أو نهاية صغري حيث أنها لا تحقق الشروط السابق ذكرها أعلاه. وتسمي النقطة $x = x_5$ بنقطة أنقلاب Inflection Point.

ومما هو جدير بالذكر أن ميل Slop المماس لمنحني الدالة $f(x)$ عند النقط $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ يساوي صفر وتسمي جميع النقط التي عندها ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)$ يساوي صفر بنقط الاستقرار Stationary Point ، أي أن نقط الأستقرار هي نقط النهايات العظمي والصغري والأنقلاب. وتسمي أيضاً نقط النهايات العظمي والصغري بالنقط الطرفية Extreme Points.

نظرية (٣-١٠)

الشرط الضروري لتكون النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة أستقرار للدالة $f(x)$ أن تكون قيمة المشتقة الأولي للدالة عند النقطة $x = x_0$ تساوي صفر أو بعبارة أخري:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad (3.24)$$

الإثبات: أنظر مرجع [31]

مثال (٣-١٧)

إذا فرضنا الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

حدد أي النقط التالية تمثل نقط أستقرار للدالة $f(x)$.

$$\text{i) } x = 4 \qquad , \qquad \text{ii) } x = 3$$

الحل

بما أن

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x - 6$$

وعندما $x = 4$ نجد ان: 　　　　i)

$$\frac{df(x)}{dx} = 2(4) - 6 = 2 \neq 0$$

إذن النقطة $x = 4$ ليست نقطة أستقرار.

وعندما $x = 3$ نجد ان: 　　　　ii)

$$\frac{df(x)}{dx} = 2(3) - 6 = 0$$

إذن النقطة $(x = 3, f(3) = -4)$ نقطة أستقرار.

مثال (٣-١٨)

أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 20x$$

الحل

$$\frac{df(x)}{dx} = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20 = 0 \longrightarrow$$

$$(x-2)(x+2)(x-1)(x+5) = 0 \longrightarrow$$

$$x = 2 \,, x = -2 \,\,, x = 1 \,, x = -5$$

أي أن النقط:

$$(x = 1\,, f(1) = 10.2)\,, (x = -2 \,\,, f(-2) = -38.4)\,,$$

$$(x = 2\,, f(2) = 6.4)\,, (x = -5 \,\,, f(-5) = 75)$$

تمثل نقط أستقرار للدالة $f(x)$.

نظرية (٣-١١)

إذا فرضنا أن $x = x_0$ نقطة استقرار للدالة $f(x)$ فإن النقطة $x = x_0$ تكون:

١- نقطة نهاية عظمي إذا كان:

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0 \qquad (3.25)$$

٢- نقطة نهاية صغري إذا كان

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0 \qquad (3.26)$$

٣- نقطة أنقلأب inflection point أونقطة أرتكاز Saddle point

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad (3.27)$$

الإثبات: أنظر مرجع [31] .

وتحدد النظرية السابقة الشرط الكافي لتحديد نوع نقطة الاستقرار.

مثال (٣-١٩)

أعتبر المثال السابق وأختبر نوع نقط الاستقرار التي سبق تحديدها

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4x^3 + 12x^2 - 18x - 16$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4 + 12 - 18 - 16 = -18 < 0$$

إذن النقطة $x = 1$ نقطة نهاية عظمي.

٢- عند النقطة $x = -2$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4(-2)^3 + 12(-2)^2 - 18(-2) - 16$$
$$= -32 + 48 + 36 - 16 = -48 + 84 = 36 > 0$$

إذن النقطة $x = -2$ نقطة نهاية صغري.

٣- عند النقطة $x = 2$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4(2)^3 + 12(2)^2 - 18(2) - 16$$
$$= 32 + 48 - 36 - 16 = 80 - 52 = 28 > 0$$

إذن النقطة $x = 2$ نقطة نهاية صغري.

٤- عند النقطة $x = -5$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4(-5)^3 + 12(-5)^2 - 18(-5) - 16$$
$$= -500 + 60 + 90 - 16 = -366 < 0$$

إذن النقطة $x = -5$ نقطة نهاية عظمي.

مثال (٣-٢٠)

أختبر نقطة الأستقرار $(x = 0, f(0) = 0)$ للدالة

$$f(x) = x^5$$

الحل

نوجد $\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=0}$ على النحو التالي:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 5(4)x^3 = 20x^3 \longrightarrow$$

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$$

وبالتالي فإن النقطة $(x = 0, f(0) = 0)$ نقطة أنقلاب.

مثال (٣-٢١)

قدرت دالة التكلفة لأحدي المنتجات فكانت على النحو التالي:

$$C(x) = 1500 + 2x^2 - 20000x$$

حيث x تشير إلى عدد الوحدات المنتجة.

المطلوب: أوجد أقل تكلفة ممكنه – وحدد عدد الوحدات في هذه الحالة.

الحل

$$\frac{d}{dx}C(x) = 4x - 20000 = 0 \longrightarrow$$

$$x = \frac{20000}{4} = 5000$$

$$\frac{d^2}{dx^2}C(x) = 4 > 0$$

إذن النقطة $(x = 5000, C(5000) = 49,901,500)$ تمثل أقل تكلفة عند انتاج عدد 5000 وحدة.

مثال (٣-٢٢)

إذا فرضنا أن P تشير إلى سعر الوحدة المباعة من أحدي المنتجات بالدولار.
حيث P دالة في الكمية المطلوبة x حيث:

$$P = 100e^{-0.0001x} \qquad , 0 \le x \le 20,000$$

المطلوب:

١- أوجد دالة العائد $R(x)$ Revenue Function.

٢- أوجد العائد الحدي.

٣- أوجد أقصي عائد ممكن، وحدد الكمية المطلوبة عنده.

الحل

١- دالة العائد R حيث:

$$R(x) = Px = 100e^{-0.0001x}x$$

٢- العائد الحدي $R'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} R'(x) &= 100\left[-0.0001xe^{-0.0001x} + e^{-0.0001x}\right] \\ &= 100e^{-0.0001x}[1 - 0.0001x] \end{aligned}$$

٣- ولإيجاد أقصي عائد

$$R'(x) = 0 \longrightarrow = 100e^{-0.0001x}[1 - 0.0001x] = 0$$

$$1 = 0.0001x \longrightarrow$$

$$x = \frac{1}{0.0001} = 10000$$

نوجد

$$\begin{aligned} R''(x) &= 100\left[e^{-0.0001x}(-0.0001) + (1 - 0.0001x)(-0.0001e^{-0.0001x})\right] \\ &= 100(-0.0001)e^{-0.0001x}[1 - 0.0001x] \\ &= -0.01e^{-0.0001x}(2 - 0.0001x) \end{aligned}$$

وعندما $x = 10000$

$$\begin{aligned} R''(x = 10000) &= -0.01e^{-0.0001(10000)}(2 - 0.0001(10000)) \\ &= -0.01e^{-1}(2 - 1) \\ &= \frac{-0.01}{e} < 0 \end{aligned}$$

وبالتالي يكون العائد أكبر ما يمكن عندما تكون الكمية المطلوبة x بحيث:

$x = 10000$وحدة

(٣-٦) المشتقات من الترتيب الأعلى Higher-Order Derivatives

في الفصول الثلاثة السابقة أشرنا إلى تفاضل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x بالرمز $\frac{df(x)}{dx}$ أو $f'(x)$ أو $f^{(1)}(x)$. فإذا كانت $f'(x)$ دالة متصلة في المتغير x فإن تفاضلها بالنسبة للمتغير x يشار إليه بالرمز $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ أو $f''(x)$ حيث:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x) = \frac{d}{dx}\left[f'(x)\right] \qquad (3.28)$$

وتسمى $f''(x)$ بالمشتقة الثانية أي المشتقة من الترتيب الثاني وبصفة عامة فإن المشتقة من الترتيب (n) يرمز لها بالرمز $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ أو $f^{(n)}(x)$ حيث أن:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^{(n-1)}}{dx}f(x) \quad , \quad n = 2,3,\ldots \qquad (3.29)$$

مثال (٣-٢٣)

أوجد المشتقات من الترتيب الأعلى للدالة التالية:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$$

ثم حدد أعلى ترتيب لمشتقات الدالة.

الحل

$$\frac{d}{dx}f(x) = f^{(1)}(x) = 12x^3 - 6x^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = f^{(2)}(x) = 36x^2 - 12x$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = f^{(3)}(x) = 72x - 12$$

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x) = f^{(4)}(x) = 72$$

$$\frac{d^5}{dx^5} f(x) = f^{(5)}(x) = 0$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = 0 \qquad , \; n \geq 5$$

ومن ذلك يتضح أن أعلى ترتيب لمشتقة الدالة $f(x)$ هو الترتيب (4) حيث أن الدالة $f(x)$ من الدرجة(4).

تمرين (٦)

أوجد المشتقات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 10$, $f''(x)$

2) $f(x) = x^6 + \sqrt[5]{x^2}$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$

3) $f(x) = 5x^2 + 12x + \frac{5}{x^3}$, $f'''(x)$

4) $f(x) = (x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)$, $f^{(4)}(x)$

5) $f(x) = x^9 + 5x^3 + 2x - 10$, $f^{(5)}(x)$

6) $f(x) = x^{15} - 2x^{10} + 50 \quad , \quad f^{(10)}(x)$

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2}} + 10x + 3 \quad , \quad f^{(3)}(x)$

8) $f(x) = \dfrac{(2x^3 + 10)}{(x+1)^2} \quad , \quad f^{(6)}(x)$

9) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 4x^2} + \dfrac{4}{(x+1)^2} \quad , \quad \dfrac{d^5}{dx^5} f(x)$

10) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 7}}{\sqrt[5]{x^2 + 10}} \quad , \quad f'''(x)$

(٣-٧) التفاضل العددي Numerical Differentiation

في كثير من المشاكل الفعلية يكون المطلوب هو الحصول على القيمة العددية لمشتقة دالة معينة عند نقطة ما ويكون ذلك في الحالتين التاليتين:

١- عندما يكون غير ممكن إيجاد مشتقة الدالة باستخدام النظريات السابق عرضها.

٢- أو قد يكون الشكل الرياضي (الصياغة الرياضية) للدالة غير معلومة – ولكن لدينا قيم لهذه الدالة عند قيم معينة للمتغير المستقل.

في هذه الحالات يمكن الحصول على قيمة المشتقة عند نقطة ما باستخدام إيجاد المشتقة بأسلوب النهايات حيث يمكن إيجاد تفاضل الدالة $f(x)$ على النحو:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٣-٢٤)

أوجد التفاضل العددي للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = x^2\sqrt{x^3+1}$$

عند النقطة $x = 1$

الحل

بما أن $x = 1$ نوجد قيم $f(x)$ عندما x تقترب من (1) من اليمين أو اليسار كما هو موضح بالجدول التالي، ثم نوجد قيمة:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

عندما Δx تقترب من الصفر من اليمين أو اليسار على النحو الموضح في الجدول التالي:

Δx	$f(x=1)$	$f(1+\Delta x)$	$f(1+\Delta x)-f(1)$	$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
0.1	1.41423	1.847811	0.433112	4.33151
0.01	1.41423	1.453526	0.03929653	3.929653
0.001	1.41423	1.4184053	0.003875	3.875435←
-0.1	1.41423	1.065081	-0.349149298	3.491493
-0.01	1.41423	1.37574	-0.03855971	3.855971
-0.001	1.41423	1.4103287	-0.0003901328	3.901328721←

ومن الجدول يتضح أنه عندما $\Delta x \to 0$ من اليمين أو اليسار فإن:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx 3.9$$

مثال (٣-٢٥)

الجدول التالي يوضح الكميات المعروضة من سلعة معينة (بالألف وحدة) المناظرة لسعر الوحدة الواحدة بالجنيه، حيث أن الكميات المعروضة دالة في السعر أوجد المشتقة للكمية المعروضة عند الأسعار الموضحة بالجدول:

السعر (x) بالجنية	5.0	5.5	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.5
الكمية $f(x)$ المعروضة	123.7	141.01	151.4	154.9	158.4	161.92	165.42	175.85

الحل

نلاحظ أن دالة العرض غير موجودة ولكن يوجد بالجدول الكميات المعروضة المناظرة للأسعار المختلفة (x).

نكون الجدول التالي ومن الجدول نجد أن:

الفترة [1-2]	Δx	$f(1+\Delta x)-f(1)$	$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ متوسط تغير الكمية المعروضة بالنسبة للسعر في كل فترة
[5.0-5.5]	0.5	17.31	34.62
[5.5-5.8]	0.3	10.4	34.67
[5.8-5.9]	0.1	3.49	34.9
[5.9-6.0]	0.1	3.5	35.0 ←
[6.0-6.1]	0.1	3.52	35.2
[6.1-6.2]	0.1	3.5	35.0
[6.2-6.5]	0.3	10.43	34.8

ومن الجدول يتضح أن عند $x = 5.9$ فإن:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx 35.0$$

كذلك عند $x = 6.1$ فإن:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx 35$$

تمرين (٧)

١- أحسب $f'(a)$ عند النقطة $x = a$ باستخدام النهايات.

1) $f(x) = 3x + 1 \quad , \quad a = 1$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad a = 1$

3) $f(x) = \frac{3}{x+1} \quad , \quad a = 2$

٢- أوجد التفاضل العددي لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x) = 3x^2 + 1$, 2) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

3) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, 4) $f(x) = \dfrac{5}{3x-1}$

5) $f(x) = \sqrt[5]{2x+10}$, 6) $f(x) = \dfrac{10}{2x^2+3x}$

٣- الجدول التالي يوضح الكميات المطلوبة من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة بالجنية. أوجد المشتقة للكمية المطلوبة عند الأسعار الموضحة بالجدول

السعر (x) بالجنية	10	8	7	6	4	3	2
الكمية $f(x)$ المعروضة	100	120	150	200	210	250	300

(٣-٨) أمثلة تطبيقية   Applied Examples

تطبيق (٣-١)

في إحدى المحافظات بجمهورية مصر العربية وجد أن دالة الطلب (بالكيلو جرام) على إحدى المنتجات الغذائية دالة في سعر بيع الكيلو جرام الواحد من السلعة المنتجة محلياً بالجنية المصري (x)، كذلك دالة في سعر الكيلو الواحد من نفس السلعة المستوردة (y) بالجنية المصري.

فإذا فرضنا أن D تشير إلى الكمية المطلوبة على النحو التالي:

$$D = f(x, y) = 500 - 0.75x - 0.85y$$

المطلوب:

١- أوجد متوسط معدل التغير في الطلب بالنسبة لسعر بيع الوحدة من السلعة من المنتج المحلى والمستورد من $x = 2$ إلى $x = 5$ - مع اعتبار أن عدم تغير سعر بيع الوحدة من المنتج المستورد – ثم عقب على الناتج.

٢- أوجد متوسط معدل التغير في الطلب بالنسبة لسعر بيع الوحدة من المنتج المستورد من $y = 2$ إلى $y = 5$ - مع اعتبار أن عدم تغير سعر بيع الوحدة من المنتج المحلي – ثم عقب على الناتج.

الحل

١- إذا فرضنا أن (Δx) هو مقدار التغير في سعر بيع الوحدة من المنتج المحلي فإن:

$$\Delta x = 5 - 2 = 3 \text{ جنيه}$$

كذلك $(\Delta_1 D)$ هي مقدار التغير في الطلب الناشئ عن مقدار التغير (Δx) فإن:

$$\Delta_1 D = [500 - 0.75(5) + 0.85y] - [500 - 0.75(2) + 0.85y]$$
$$= -0.75(3) = -2.25 \text{ كيلوجرام}$$

أي أن زيادة سعر الوحدة من المنتج المحلي بمقدار 3جنيهات (مع ثبات سعر الوحدة من المنتج المستورد) سوف يؤدي إلى نقص في كمية المطلوب بمقدار 2.25 كيلوجرام.
وبالتالي فإن متوسط التغير بالنسبة لسعر الوحدة المحلي M_1 يصبح على النحو التالي:

$$M_1 = \frac{(\Delta_1 D)}{(\Delta x)} = \frac{-2.25}{3} = -0.75 \text{ كيلوجرام}$$

وهذا يعنى إذا زيادة سعر الوحدة من المنتج المحلي بجنية واحد في الفترة من $x = 2$ إلى $x = 5$ فإن الكمية المطلوبة سوف تنخفض بمقدار 0.75 كيلوجرام في المتوسط.

٢- بالمثل إذا فرضنا أن (Δy) هو مقدار التغير في سعر بيع الوحدة من المنتج المستورد فإن:

$$\Delta x = 5 - 2 = 3 \text{ جنيه}$$

كذلك $(\Delta_2 D)$ هي مقدار التغير في الكمية المطلوبة الراجع إلى مقدار التغير (Δx) فإن:

$$\Delta_2 D = [500 - 0.75x + 0.85(5)] - [500 - 0.75x + 0.85(2)]$$
$$= 0.85(3) = +2.55 \text{ كيلوجرام}$$

أي أن زيادة سعر الوحدة المستوردة بمقدار 3جنيهات سوف يؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة بـ 2.55 كيلوجرام عند ثبات سعر المنتج المحلي.

وبالتالي فإن متوسط معدل تغير الطلب بالنسبة لسعر الوحدة المستوردة M_2 يصبح على النحو التالي:

$$M_2 = \frac{(\Delta_2 D)}{(\Delta x)} = \frac{2.55}{3} = +0.85 \text{ كيلوجرام}$$

أي إذا زيادة سعر الوحدة المستوردة بجنية واحد في الفترة من $y = 2$ إلى $y = 5$ فإن الكمية المطلوبة سوف تزداد بمقدار 0.85 كيلوجرام في المتوسط.

تطبيق (٣-٢)

إذا كانت دالة الطلب D على شراء أجهزة الكمبيوتر من شركة معينة في أحدى الدول النامية على النحو التالي:

$$D = f(x) = \sqrt{500{,}000 - 200x}$$

حيث x هو سعر بيع الجهاز الواحد بالجنيه.

المطلوب:

١- أوجد الكمية المطلوبة عندما يكون سعر بيع الجهاز 1700 جنيه.

٢- أوجد مرونة الطلب عندما يكون $x = 1500$ ، $x = 2000$.

الحل

١- عندما (جنيه$x = 1700$) فإن:

$$D = f(x = 1700) = \sqrt{500000 - 200(1700)}$$
$$= \sqrt{160000} = 400 \text{ وحدة}$$

٢- إذا أشرنا إلى مرونة الطلب بالرمز $E(x)$ فإن:

$$E(x) = \frac{dD}{dx}\left(\frac{x}{D}\right)$$

وبما أن:

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}(500000 - 200x)^{-1/2}(-200)$$
$$= \frac{-100}{\sqrt{500000 - 200x}}$$

عندما $x = 2000$ فإن:

$$E(x = 2000) = \left(\frac{-100}{\sqrt{500000 - 200(2000)}}\right)\left(\frac{2000}{\sqrt{500000 - 200(2000)}}\right)$$

$$= \frac{-100(2000)}{500000 - 400000} = \frac{-200000}{100000} = -2$$

$$\longrightarrow$$

$$|E(x = 2000)| = 2 > 1$$

وبالتالي فإنه عند السعر $x = 2000$ يكون الطلب مرن.

وبالمثل عندما $x = 1500$ فإن:

$$E(x=1500)=\left(\frac{-100}{\sqrt{500000-200(1500)}}\right)\left(\frac{1500}{\sqrt{500000-200(1500)}}\right)$$

$$=\frac{-150000}{500000-300000}=\frac{-150000}{200000}=-0.75$$

$$\longrightarrow$$

$$|E(x=1500)|=0.75<1$$

وبالتالي فإن الطلب عند السعر $x=1500$ يكون غير مرن.

تطبيق (٣-٣)

إذا كانت كفاءة الأداء لأحد الطلاب y دالة في عدد ساعات الاستذكار اليومية للطالب (x) وتأخذ الشكل التالي:

$$y=f(x)=7x-0.5x^2$$

المطلوب:

١- أوجد معدل تغير كفاءة أداء الطالب عندما تكون عدد ساعات الاستذكار اليومية $x=5$ يومياً.

٢- أوجد أقصى مستوى كفاءة للطالب ثم حدد عدد ساعات الاستذكار اليومية التي تحقق هذا المستوى.

الحل

١- معدل تغير أداء الطالب التي تساوي y' حيث

$$y' = \frac{dy}{dx} = 7 - 1.0x$$

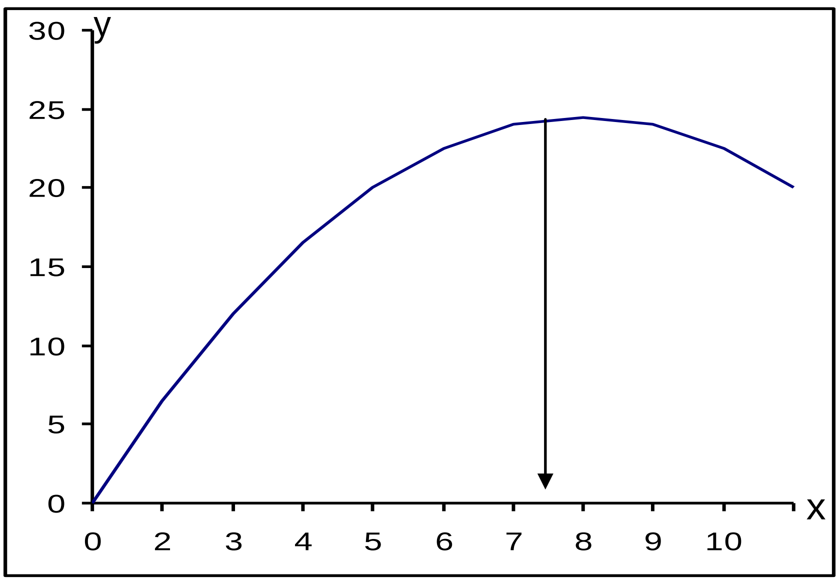
وعند $x = 5$ فإن

$$y'(x = 5) = 7 - 1.0(5) = 7 - 5 = 2 \text{ ساعة}$$

٢- لتحديد أقصى مستوى كفاءة للطالب نقوم برسم الدالة $f(x)$ باستخدام الجدول التالي:

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	12	16.5	20	22.5	24	24.4	24	22.5	20

والشكل التالي يوضح الدالة y



شكل (٣-٥)

ومن الشكل يتضح أن أقصى كفاءة أداء يساوى 24.5 وذلك عند استذكار عدد 7.5 ساعة يومياً.

تطبيق (٣-٤)

في إحدى الدراسات التربوية تم تقسيم مستوى تحصيل الطالب في المرحلة الابتدائية إلى المستوى y حيث $y = 0,1,2,3$ حيث يعتبر أقصى مستوى تحصيل للطالب (3). وتم التوصل إلى العلاقة بين كثافة الفصل (x) ومستوى تحصيل الطالب على النحو التالي:

$$y = f(x) = 4 - \frac{x}{30} \qquad\qquad x = 30,31,32,..,100$$

المطلوب:

١- تحديد المستوى الحدي لتحصيل الطالب بالنسبة لكثافة الفصل ثم عقب على الناتج.

٢- هل مستوى تحصيل الطالب يعتبر مرن بالنسبة لكثافة الفصل عند كثافة الفصل $x = 80$ طالب.

الحل

١- المستوى الحدي لتحصيل الطالب بالنسبة لكثافة الفصل هو y' حيث:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{30}$$

وهذا يعني أنه توجد علاقة عكسية بين كثافة الفصل ومستوى تحصيل الطالب حيث زيادة (أو نقص) الفصل بتلميذ واحد سوف يؤدي إلى انخفاض (أو زيادة) مستوى تحصيل الطالب بمقدار $(\frac{1}{30})$.

٢- إذا أشرنا إلى مرونة مستوى تحصيل الطالب بالرمز $E(x)$ فإن:

$$E(x) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-1}{30}\left(\frac{x(30)}{120-x}\right) = \frac{-x}{120-x}$$

وعند $x = 80$ فإن:

$$E(x = 80) = \frac{-80}{120 - 80} = \frac{-80}{40} = -2 \longrightarrow$$

$$|E(x = 80)| = |-2| = 2 > 1$$

إذن مستوى التحصيل مرن عند كثافة الفصل $x = 80$.

(٣-٩) تمرينات Exercise

(٣-١) أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدوال التالية عندما يتغير المتغير المستقل x خلال الفترة من $x = -2$ إلى $x = +2$.

1) $f(x) = 4x^2 + 1$ ، 2) $f(x) = 3x^3 - 1$

3) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ، 4) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{x^3 + 1}$

6) $f(y) = y^3 + 2y - 10 \quad , y = x - 1$

7) $f(y) = y^2 - 10 \quad , y = 10x^2 + 5$

8) $f(x) = 3e^{5x} + 10x^2$ ، 9) $f(x) = 3\ln(x^2 + 1)$

10) $f(x) = x^2 e^{x-5} + 4e^{2x}$ ، 11) $f(x) = 4x - 2x\ln(x+5)$

(٣-٢) أوجد تفاضل كل دالة من الدوال التالية (المشتقة الأولى) عند النقط التالية $x = 1, -1, 2, -2$

1) $f(x) = 4x + 4$ ، 2) $f(x) = 50$

3) $f(x) = 7x^2 - 3$ ، 4) $f(x) = -9x^2 + 1$

5) $f(x) = 3x^4 - 5x + 10$ ، 6) $f(x) = 5x^3$

7) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، 8) $f(x) = 5^{3x+1}$

9) $f(x) = \ln(3x+1)$ ، 10) $f(x) = 3x + e^{x^2-1}$

11) $f(x) = (x+1)(3x-5)$ ، 12) $f(x) = \frac{(2x^2+5x-3)^2}{(x-3)^2}$

13) $f(x) = \sqrt{(9x-3)^8}$ ، 14) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x^5}}$

15) $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\ln(3x^2+7x-1)}$ ، 16) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x^2-1)}$

17) $f(x) = \{\ln(x-3)\}\, e^{x+1} + 10$ ، 18) $f(x) = \frac{\ln 7}{\ln(x+1)}$

19) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(3x-10)^3}}{\sqrt{x+3}}$

(٣-٣) ترغب إحدى الشركات في زيادة إيراداتها من بيع سلعها عن طريق خفض سعر بيع الوحدة. فإذا كانت دالة الطلب على هذه السلعة على النحو التالي:

$$D = f(x) = 120{,}000x^2$$

حيث D تشير إلى الطلب بالوحدة، x تشير إلى سعر بيع الوحدة من السلعة.

المطلوب:

١- أوجد معدل تغير الطلب بالنسبة للسعر عندما $x = 5$.

٢- أوجد مرونة الطلب بالنسبة للسعر ثم حدد المرونة عند $x = 5$.

٣- هل تنجح الشركة في زيادة إيراداتها عن طريق سياستها المقترحة.

(٣-٤) في إحدى الدراسات السكانية بإحدى الدول وجد أن عدد السكان (بالمليون) y دالة في الزمن x (بالسنوات) على النحو التالي:

$$y = f(x) = 5 + \frac{e^{x}}{100x + 1}$$

المطلوب:

١- إذا كان تعداد السكان سنة 1980 يساوي 6 مليون، قدر عدد السكان سنة 2010.

٢- أوجد متوسط معدل التغير لعدد السكان بالنسبة للزمن خلال الفترة 1980 – 1990 – ثم عقب على الناتج.

٣- أوجد الزيادة المتوقعة للسكان في السنة بعد 5 سنوات من الآن.

٤- أوجد المرونة في دالة السكان سنة 1990.

(٣-٥) في أحد الأحياء الراقية تم فتح مركز لعلاج السمنة والدالة التالية تعطى العدد المتوقع للمترددين على المركز. حيث:

$$f(x) = 1000(64 + 4t)^{2/3} \qquad 0 \le t \le 52$$

حيث $f(t)$ تشير إلى عدد المترددين المتوقع في بداية الأسبوع t (للمتردد).

المطلوب:

١- أوجد معدل تغير عدد المترددين في الأسبوع العاشر أي $t = 10$.

٢- حدد عدد المترددين عند بدء فتح المركز.

٣- حدد معدل تغير عدد المترددين بعد الأسبوع الـ20.

الباب الرابع
المشتقات الجزئية وتطبيقاتها
Partial Derivatives And Its Applications

(٤-١) تعريف المشتقة الجزئية

Definition of A Partial Derivative

في الباب السابق تناولنا بالتفصيل تفاضل الدالة $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة في متغير واحد (x) أو ما يسمي بمشتقة الدالة $f(x)$ ويرمز لها بالرمز $\frac{df(x)}{dx}$ أو بالرمز $f^{/}(x)$ ويتم حسابه من العلاقة التالية:

$$\frac{df(x)}{dx} = f^{/}(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولكن إذا أعتبرنا الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ دالة متعددة المتغيرات في (n) من المتغيرات.

وفي حالة إيجاد تفاضل الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j، $j = 1,2,...,n$ مع عدم حدوث تغير في باقي المتغيرات وعددها $(n-1)$ في النقطة التي يحدث فيها التفاضل – فيسمي هذا التفاضل بالمشتقة الجزئية للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j، ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}$ وتقرأ المشتقة الجزئية للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j، ويمكن تعريفها على النحو التالي:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_j}$$

$$j = 1,2,\ldots,n \quad (4.1)$$

بالمثل يمكن إيجاد المشتقة الجزئية من ترتيب أعلى، فعلى سبيل المثال:

<u>أولاً:</u> المشتقة الجزئية من الترتيب الثاني للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j، ويرمز لها بالرمز $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^2}$ حيث:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}\right], \; j = 1,2,...,n \qquad (4.2)$$

<u>ثانياً:</u> وبصفة عامة يمكن إيجاد المشتقة الجزئية من الترتيب (r) للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j حيث:

$$\frac{\partial^r f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^r} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial^{r-1} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^{r-1}}\right], \; \begin{matrix} j = 1,2,..,n \\ r = 1,2,..... \end{matrix} \qquad (4.3)$$

ملحوظة (١):

$$\frac{\partial^0 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^0} = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4.4)$$

<u>ثالثاً:</u> إذا كانت $f(x, y)$ دالة في متغيران فإنه يمكن إيجاد المشتقات الجزئية المختلطة من الترتيب الثاني Mixed-Second Order Partial Derivatives ويرمز لها بالرمز $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$. وتقرأ المشتقة الجزئية الثانية للدالة $f(x, y)$ بالنسبة للمتغير x والمتغير y، حيث:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]$$

ملحوظة (٢): ويلاحظ أن الترتيب لا يؤثر على إيجاد المشتقات الجزئية أو بعبارة أخري:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \qquad (4.5)$$

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لأي دالة في عدة متغيرات ويمكن أعتبار الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ في (n) من المتغيرات فإن:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad i \neq j \qquad (4.6)$$

ملحوظة (٣): وبصفة عامة فإن الترتيب في إيجاد المشتقات الجزئية المختلطة من أي ترتيب (أعلى من 2) لا يؤثر على المشتقة الجزئية المطلوب إيجادها من أي ترتيب.
وسوف نوضح ذلك بالتفصيل في الفصل التالي.

تمرين (١)

(١) حدد المشتقة بالنسبة لأي متغير (أو أكثر من متغير)، ثم أوجد ترتيب المشتقة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}$, 2) $\frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^3}$

3) $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$, 4) $\frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2 \partial x_2}$

5) $\frac{\partial^4 f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial^2 x_1 \partial^2 x_3}$, 6) $\frac{\partial^3 f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4^3}$

7) $\dfrac{\partial^{n-1} f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{(n-1)}}$, 8) $\dfrac{\partial^{n} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 .....\partial x_n}$

9) $\dfrac{\partial^{k} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2}$, $k = 2,3,4,5$

10) $\dfrac{\partial^{r} f(x, y, z)}{\partial z^{r}}$, $r = 1,2,.....,10$

11) $\dfrac{\partial^{0} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j^{0}}$, $j = 1,2,..., n$

12) $\dfrac{\partial^{0} f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{0} \partial x_2^{0}}$

13) $\dfrac{\partial^{h} f(x, y, z)}{\partial x^{3} \partial y^{2} \partial z^{h-5}}$, $h = 5,6,7,8$

(٤-٢) إيجاد المشتقات الجزئية Finding Partial Derivatives

في هذا الفصل سوف نوضح بالتفصيل كيفية الحصول على المشتقات الجزئية من أي ترتيب – من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٤-١)

إذا أعتبرنا الدالة $f(x,y)$ التالية:

$$f(x,y) = 5 + 3x^2 + 7xy + 2y^3$$

أوجد ما يلي:

1) $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x}$	2) $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$	3) $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}$
4) $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$	5) $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$	6) $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}$
7) $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}$	8) $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y \partial x^2}$	9) $\dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$

الحل

$$1)\ \frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = 6x + 7y$$

$$2)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[6x + 7y]$$

$$3)\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[6]$$

ملحوظة: يلاحظ أن أكبر درجة للمتغير x في الدالة $f(x,y)$ تساوي 2 وبالتالي فإن المشتقات الجزئية من الترتيب 3 ، 4 ، ... بالنسبة للمتغير x تساوي صفر.

$$4)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[7x + 6y^2\right] = 7$$

$$5)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 7$$

ملحوظة: $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$

$$6)\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[7x + 6y^2\right]\right]$$

$$7)\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[7x + 6y^2\right] = \frac{\partial}{\partial x}[7] = 0$$

$$8)\ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[6] = 0$$

ملحوظة: من (7 ، 8) نجد أن:

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y \partial x^2}$$

$$9)\ \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x^2}[12y] = 0$$

مثال (٤-٢)

أعتبر الدالة التالية:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 100 + 3x_1^2 + 2x_1^2 x_2 x_3 + 4x_2^3 x_3 x_4 + x_3^5 + x_4^2$$

اوجد ما يلي:

1) $\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1^2}$ 2) $\dfrac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2^3}$

3) $\dfrac{\partial^4 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$

الحل

$$\Theta\ f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 100 + 3x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 4x_2^3x_3x_4 + x_3^5 + x_4^2$$

1) $$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1} = 6x_1 + 4x_1x_2x_3 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1^2} = 6 + 4x_2x_3$$

2) $$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2} = 2x_1^2x_3 + 12x_2^2x_3x_4 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2^2} = 24x_2x_3x_4 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2^3} = 24x_3x_4$$

3) $$\frac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 4x_1 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial^4 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} = 0$$

مثال (٤-٣)

أعتبر الدالة $f(x,y)$ حيث:

$$f(x,y)=e^{xy}+\frac{x}{y}$$

أوجد ما يلي:

$$1)\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\quad ,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$2)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\quad ,\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

$$3)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\quad ,\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}$$

الحل:

$$1)\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{1}{y}=ye^{xy}+y^{-1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xe^{xy}-xy^{-2}$$

$$2)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=x^2e^{xy}+2xy^{-3}$$

$$3)\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[xe^{xy}-xy^{-2}\right]$$

$$=\left[yxe^{xy}+e^{xy}-y^{-2}\right]=e^{xy}[xy+1]-y^{-2}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[xe^x - xy^{-2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[xe^x + e^x - y^{-2}\right]$$
$$= \left[xe^x + e^x + e^x\right] = xe^x + 2e^x = e^x[x+2]$$

تمرين (٢)

(١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى First Partial Derivatives لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x,y) = 2x + 3y + 5$ 2) $f(x,y) = 2xy$

3) $g(x,y) = 2x^2 + 4y + 1$ 4) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y}$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ 6) $f(x,y) = x\sqrt{1+y^2}$

7) $f(x,y) = e^{xy+1}$ 8) $f(x,y) = (e^x + e^y)^5$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الأول والثاني لكل دالة من الدوال التالية عند النقط المناظرة لكل دالة.

1) $f(x,y) = x^2y + xy^2$, (1,2)

2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - y$, (-1,2)

3) $f(x,y) = x\sqrt{y} + y^2$, (2,1)

4) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (3,4)

5) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $(1,2)$

6) $f(x,y) = e^{xy+2}$, $(1,1)$

7) $f(x,y) = e^{x}\ln y$, $(0,e)$

8) $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2$, $(1,1,2)$

(٣) أوجد المشتقات الجزئية الممكنة لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + xz + yz + z^2$

2) $f(x,t,k) = xtz + 2t^2 + 3k^4 + x^2k$

3) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + c$

4) $f(x,y,z) = 2xe^{3xyz} + 3ye^{xy}$

5) $f(x,y) = 3\ln(2x + y) + 3\sqrt{x^2 \ln y}$

6) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^2y^2$

7) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} + x^2y^2z^2$

8) $f(x,y,z) = xyz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(٤-٣) الدالة الحدية والمرونة الجزئية

Marginal Function And Partial Elasticity

في الباب السابق تناولنا الدالة الحدية (أو المعدل الحدى) والمرونة بالنسبة للدالة في متغير واحد. وفي هذا الفصل سوف نتناول بالدراسة الدوال الحدية (أو المعدلات الحدية) والمرونات الجزئية بالنسبة للدالة في عدة متغيرات.

وتعتبر المعدلات الحدية والمرونات الجزئية عند قيم معينة ذو أهمية بالنسبة للدراسات التطبيقية بشكل عام وبالنسبة للدراسات الاقتصادية بشكل خاص كما سوف نوضح في الأمثلة التطبيقية.

أولاً: الدالة الحدية

إذا أعتبرنا الدالة $f(x,y)$ فإن المشتقة الجزئية الأولى للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x عند نقطة ما ولتكن $(x=a, y=b)$ ونرمز لها بالرمز $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x=a,y=b)}$ تسمى بالمعدل الحدى Marginal Rate لتغير $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x عند النقطة $(x=a, y=b)$. بالمثل نرمز للمعدل الحدي لتغير $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y عند النقطة $(x=a, y=b)$ بالرمز $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x=a,y=b)}$

ملحوظة: ويلاحظ أن $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ دوال في المتغيران x, y أيضاً.

وبصفة عامة إذا كانت الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ دالة في (n) متغير، وإذا رمزنا للمعدل الحدي للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتغير x_j بالرمز (MJ)

$$(MJ) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.7)$$

مثال (٤-٤)

في أحدى المحافظات وجد أن الكمية المطلوبة (z) بالطن على الدقيق تعتبر دالة في سعر الطن من الدقيق المحلي (x) وسعر الطن من الدقيق المستورد (y) بالجنيه على النحو التالي:

$$z = f(x, y) = 500 - 0.75x + 0.85y$$

المطلوب:

١- أوجد الطلب الحدي للكمية المطلوبة بالنسبة لسعر طن الدقيق المحلي (x) – ثم عقب على الناتج.

٢- أوجد الطلب الحدي للكمية المطلوبة بالنسبة لسعر طن الدقيق المستورد (y) – ثم عقب على الناتج.

الحل:

١- الطلب الحدي بالنسبة لسعر الوحدة المحلية (أي بالنسبة للمتغير x) هو $\frac{\partial z}{\partial x}$ حيث:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -0.75 \text{ طن}$$

وهذا يعنى إذا زاد سعر بيع الوحدة المنتجة محلياً بجنيه سوف يؤدي ذلك إلى نقص الكمية المطلوبة بمقدار 0.75 طن (أو إذا نقص سعر الوحدة المنتجة محلياً بجنية واحد سوف يؤدي ذلك إلى زيادة الكمية المطلوبة بمقدار 0.75 طن) وذلك في حالة عدم حدوث تغير في سعر بيع الوحدة المستوردة.

٢- بالمثل الطلب الحدي بالنسبة لسعر الوحدة المستوردة (أي بالنسبة للمتغير y) هو $\frac{\partial z}{\partial y}$ حيث:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0.85 \text{ طن}$$

وهذا يعنى إذا زاد سعر بيع الوحدة المستوردة بجنيه سوف يؤدي ذلك إلى زيادة الكمية المطلوبة بمقدار 0.85 طن (أو إذا نقص سعر بيع الوحدة المستوردة بمقدار جنية واحد سوف يؤدي ذلك إلى نقص الكمية المطلوبة بمقدار 0.85 طن).

مثال (٤-٥)

في أحدى شركات قطاع الأعمال وجد أن عدد الوحدات الممكن أنتاجها (z) من أحدى السلع الأنتاجية دالة في عدد الوحدات المطلوبة من مستلزمات الأنتاج (x) كذلك عدد ساعات التشغيل المطلوبة (y) حيث:

$$z = f(x,y) = 100 - 0.5x^2 + 4xy + 40x - y^2$$

المطلوب:

١- أوجد الانتاجية الحدية بالنسبة لمستلزمات الأنتاج (x) عندما $x = 50, y = 10$ - ثم عقب على الناتج.

٢- أوجد الانتاجية الحدية بالنسبة لساعات التشغيل (y) عندما $x = 50, y = 10$ - ثم عقب على الناتج.

الحل:

-١

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -0.5(2)x + 4y + 40 \longrightarrow$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x=50,y=10)} = -0.5(2)(50) + 4(10) + 40 = -50 + 40 + 40 = 30$$

وحدة

وهذا يعنى أنه إذا أزدادت مستلزمات الانتاج بوحدة واحدة فهذا سوف يؤدي إلى زيادة الوحدات المنتجة بـ 30 وحدة وذلك عندما $x = 50, y = 10$.

٢-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y \longrightarrow$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x=50,y=10)} = 4(50) - 2(10) = 200 - 20 = 180$$ وحدة

وهذا يعنى أنه إذا أزدادت ساعات العمل ساعة واحدة فهذا سوف يؤدي إلى زيادة الوحدات المنتجة بـ 180 وحدة وذلك عندما $x = 50, y = 10$.

ثانياً: المرونة الجزئية

وكما سبق أن عرفنا المرونة في الباب السابق بالنسبة للدالة في متغير واحد بأنها نهاية التغير النسبي في الدالة بالنسبة للتغير النسبي في المتغير. وكما سبق أن أشرنا لمرونة الدالة $f(x)$ بالرمز $E(x)$ حيث:

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{df(x)}{dx}\left(\frac{x}{f(x)}\right)$$

أما إذا اعتبرنا الدالة $f(x,y)$ دالة في المتغيران x,y فإن المرونة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x ونرمز لها بالرمز $E_x(x,y)$ حيث:

$$E_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(\frac{x}{f(x,y)}\right) \tag{4.8}$$

بالمثل بالنسبة لمرونة الدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y ونرمز لها بالرمز $E_y(x,y)$ حيث:

$$E_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left(\frac{y}{f(x,y)}\right) \tag{4.9}$$

مثال (٤-٦)

في المثال السابق (٤-٥) أوجد مرونة حجم الإنتاج بالنسبة لعدد وحدات مستلزمات الانتاج ثم أوجد مرونة حجم الإنتاج بالنسبة لساعات التشغيل وذلك عندما $x = 50, y = 10$.

الحل:

إذا رمزنا لمرونة حجم الانتاج بالنسبة لعدد وحدات مستلومات الانتاج بالرمز $E_x(x = 50, y = 10)$

$$\begin{aligned}
E_x(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(\frac{x}{f(x,y)}\right)\\
&= (-0.5(2)x + 4y)\left(\frac{x}{100 - 0.5x^2 + 4xy + 40x - y^2}\right)\\
&= (-50 + 4(10))\left(\frac{50}{100 - 1250 + 2000 + 2000 - 100}\right)\\
&= (-10)\left(\frac{50}{2750}\right) = -0.182
\end{aligned}$$

وبما أن:

$$|E_x(x,y)| = |-0.182| < 1$$

إذن حجم الانتاج غير مرن بالنسبة لمستلزمات الانتاج.

بالمثل بالنسبة لساعات التشغيل

$$E_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left(\frac{y}{f(x,y)}\right)$$

$$= (4x - 2y)\left(\frac{y}{100 - 0.5x^2 + 4xy + 40x - y^2}\right)$$

$$= \left(4(50) - 2(10)\right)\left(\frac{10}{100 - 0.5(2500) + 4(50)(10) + 40(50) - 100}\right)$$

$$= (180)\left(\frac{10}{2750}\right) = 0.655$$

وبما أن:

$$E_y(x,y) = 0.655 < 1$$

إذن حجم الانتاج غير مرن بالنسبة لساعات التشغيل.

وبصفة عامة يمكن تعريف مرونة الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ دالة في (n) من المتغيرات بالنسبة للمتغير x_j بالرمز (EJ) فإن:

$$(EJ) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right) \quad , j = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.10)$$

تمرين (٣)

(١) إذا كانت دالة التكلفة $C(x,y)$ لأحدى المنتجات دالة في تكلفة الوحدة من مستلزمات الانتاج (x) بالجنيه، وتكلفة ساعة العمل (y) بالجنيه حيث:

$$C(x,y) = 2500 + 20x + 18y$$

المطلوب:

١- أوجد التكلفة الحدية بالنسبة لتكلفة الوحدة من مستلزمات الانتاج – ثم عقب على الناتج عندما $x = 10\,,\, y = 5$.

٢- أوجد التكلفة الحدية بالنسبة لتكلفة ساعة العمل – ثم عقب على الناتج عندما $x = 10\,,\, y = 5$.

٣- أوجد مرونة التكلفة بالنسبة لتكلفة مستلزمات الانتاج وتكلفة ساعة العمل - ثم عقب على الناتج عندما $x = 10\,,\, y = 5$.

(٢) إذا فرضنا أن مستوى تركيز أحد الملوثات z بأحد الانهار دالة في بعد مصدر التلوث عن موضع قياس مستوى تركيز التلوث (x) كذلك دالة في زمن قياس مستوي التلوث t ، على النحو التالي:

$$z = f(x,t) = p_0(x - ct)e^{-\mu t}$$

حيث كل من μ, c, p_0 مقادير ثابتة. ومستوى تركيز التلوث $z = p_0$ عند بدأ القياس أي عندما $t = 0$.

المطلوب:

١- أوجد مستوى تركيز التلوث الحدي بالنسبة لموقع مصدر التلوث.

٢- أوجد مستوى تركيز التلوث الحدي بالنسبة لزمن قياس مستوى التركيز.

٣- أوجد مرونة مستوى تركيز الملوث بالنسبة لموقع مصدر التلوث عندما $x = 100, t = 3$.

(٣) إذا فرضنا أن L يشير إلى عدد ساعات العمل ، K يشير إلى حجم الاستثمار بالمليون جنيه. فإذا كان حجم الانتاج (P) دالة في عدد ساعات العمل، وحجم الاستثمار (بالمليون جنيه) على النحو التالي:

$$P = f(L, K) = L^{0.75}K^{0.25}$$

المطلوب:

١- أوجد الانتاجية الحدية بالنسبة لساعات العمل $\frac{\partial P}{\partial L}$ ، كذلك بالنسبة للأستثمار $\frac{\partial P}{\partial K}$. وذلك عندما $L = 100, K = 1000$.

٢- أوجد ملاونة الانتاج بالنسبة لكل من ساعات العمل، وحجم الاستثمار عندما $L = 5, K = 100$.

(٤) في أحدى شركات أنتاج الأثاث تقوم الشركة بانتاج نوعين من المنتجات - فإذا كان الرمز x يشير إلى سعر الوحدة من النوع الأول، y يشير إلى سعر الوحدة من النوع الثاني. فإذا كان حجم الطلب z على منتجات هذه الشركة دالة في x, y على النحوالتالي:

$$z = f(x, y) = 200 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}y$$

المطلوب:

١- أوجد الطلب الحدي بالنسبة لسعر الوحدة من النوع الأول ثم أوجد مرونة الطلب عند $x = y = 10$.

٢- أوجد الطلب الحدي بالنسبة لسعر الوحدة من النوع الثاني ثم أوجد مرونة الطلب عند $x = y = 10$.

٣- أوجد المرونات الجزئية للطلب عندما $x = y = 10$ ثم عقب على الناتج.

(٤-٤) مشاكل الأمثلية Optimization Problems

في الباب السابق تناولنا بالتفصيل عملية التفاضل بالنسبة للدالة في متغير واحد ولتكن الدالة f(x)، كذلك تناولنا سلوك الدالة f(x) من حيث القيم العظمي والصغري في الفصل (٣-٥) نظراً لأهمية هذه القيم في حل العديد من المشاكل الاقتصادية، السياسية، الاجتماعية، ... الخ.

بالمثل يعتبر دراسة سلوك الدوال الرياضية متعددة المتغيرات ذو أهمية بالغة لمتخذ القرار، وتلعب المشتقات الجزئية التي تم تناولها في الفصول السابقة في هذا الباب دور هام في دراسة سلوك الدوال متعددة المتغيرات.

وتسمي المشاكل التي يرغب فيها متخذ القرار Decision Maker من الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة محل الدراسة بمشاكل الأمثلية Optimization Problems حيث يرغب متخذ القرار فى تحديد القيم العظمي أوالصغري للدوال. وفي كثير من المشاكل الفعلية تكون الدوال دوال متعددة المتغيرات وغير خطية في نفس الوقت [31, 26].

ويمكن تقسيم المشاكل متعددة المتغيرات غير الخطية Nonlinear Problems وعادة تسمي بمشاكل البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming Problems إلى نوعين هما:

النوع الأول: المشاكل غير المقيدة Unrestricted Problems.

النوع الثاني: المشاكل المقيدة Restricted Problems.

وسوف نتناول في الفصل التالي (٤-٥) بعض أنواع طرق حل المشاكل غير المقيدة، كذلك نتناول في الفصل (٤-٦) بعض أنواع وطرق حل المشاكل المقيدة.

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكن تحويل المشاكل المقيدة إلى أخري غير مقيدة والعكس صحيح - أيضاً فأنه يمكن تحويل المشاكل غير المقيدة إلى أخرى مقيدة في بعض الحالات. وسوف نوضح ذلك في الفصل (٤-٦).

(٤-٥) القيم العظمي والصغري للدوال متعددة المتغيرات

Maxima& Minima Values of Several Variables Functions

في الباب السابق تم تعريف وتحديد نقط الاستقرار Stationary Points والقيم العظمي والصغري Maximum and Minimum Values للدالة في متغير واحد. وفي هذا الفصل سوف نتناول تعريف نقط الاستقرار والقيم العظمي والصغري للدالة متعددة المتغيرات – ثم نوضح كيفية الاستفادة من هذه النقط في المجالات التطبيقية [23].

تعريف (٤-١)

إذا فرضنا أن الدالة $f(x,y)$ فإن النقطة (x_0,y_0) يقال لها نقطة عظمي نسبية Relative (Local) Maximum Point إذا كان:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \qquad (4.11)$$

حيث $\Delta x, \Delta y$ مقادير صغيرة جداً تؤول إلى الصفر، أو بعبارة أخري:

$$|\Delta x| \to 0 \quad , \quad |\Delta y| \to 0$$

تعريف (٤-٢)

إذا فرضنا أن الدالة $f(x,y)$ فإن النقطة (x_0,y_0) يقال لها نقطة نهاية صغري نسبية Relative (Local) Minimum Point إذا كان:

$$f(x_0,y_0) \leq f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \qquad (4.12)$$

تعريف (٤-٣)

إذا أعتبرنا كل من النقط K التالية:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_k, y_k)$$

بحيث كل منها نقطة نهاية عظمي نسبية فإن النقطة (x^*, y^*) تسمي نقطة نهاية عظمي مطلقة Absolute (or Global) Maximum Point إذا كانت:

$$f(x^*, y^*) = \text{Max}\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots\ldots, f(x_k, y_k)\} \qquad (4.13)$$

تعريف (٤-٤)

بالمثل تسمي النقطة (x^*, y^*) نقطة نهاية صغري مطلقة Absolute (or Global) Minimum Point إذا كانت:

$$f(x^*, y^*) = \text{Mim}\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots\ldots, f(x_k, y_k)\} \qquad (4.14)$$

حيث كل نقطة من النقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_k, y_k)$ تمثل نقطة نهاية صغري نسبية.

ويمكن تعميم التعريفات (٤-١) – (٤-٤) بالنسبة للدالة في أكثر من متغيرين على النحو التالي:

تعريف (٤-٥)

إذا فرضنا أن الدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة في (n) متغير فإن النقطة $(x_1^\backslash, x_2^\backslash, \ldots, x_n^\backslash)$ يقال لها نقطة نهاية عظمي نسبية إذا كان:

$$f(x_1^\backslash, x_2^\backslash, \ldots, x_n^\backslash) \geq f(x_1^\backslash + \Delta x_1, x_2^\backslash + \Delta x_2, \ldots, x_n^\backslash + \Delta x_n) \qquad (4.15)$$

كذلك يقال لها نقطة نهاية صغري نسبية إذا كان:

$$f(x_1^\backslash, x_2^\backslash, \ldots, x_n^\backslash) \le f(x_1^\backslash + \Delta x_1, x_2^\backslash + \Delta x_2, \ldots, x_n^\backslash + \Delta x_n) \qquad (4.16)$$

تعريف (٤-٦)

يقال أن النقطة $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ نقطة نهاية عظمي مطلقة إذا كانت:

$$f(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) = \text{Max}\left\{f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, .., x_n^{(1)}), f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, .., x_n^{(2)}), \ldots\right\} (4.17)$$

حيث $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ ، $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ ، ... الخ نقط عظمي نسبية.

بالمثل يقال أن النقطة $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ نقطة نهاية صغري مطلقة إذا كانت:

$$f(x_1^*, x_2^*, .., x_n^*) = \text{Min}\left\{f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, .., x_n^{(1)}), f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, .., x_n^{(2)}), \ldots\right\} (4.18)$$

ملحوظة: من التعريفات المذكورة أعلاه نجد أن النقط العظمي والصغري للدالة في متغير واحد - التي سبق تناولها في الفصل (٣-٥) - هي حالة خاصة للنقط العظمي والصغري للدالة متعددة المتغيرات. هذا وأحياناً تسمي النقط العظمي والصغري للدالة بالنقط الطرفية Extreme Points أيضاً.

وفيما يلي سوف نتناول النظريات التي يمكن باستخدامها تحديد النقط الطرفية (أو النقط العظمي والصغري للدالة).

نظرية (٤-١)

الشرط الضروري Necessary Condition لكي تكون النقطة (أو النقط) $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ نقطة (أو نقط) أستقرار Stationary Points للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ أن تكون:

$$\left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right|_{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)} = 0 \quad , \ j = 1,2,\ldots n \qquad (4.19)$$

ومجموعة المعادلات (4.19) وعددها n تعني أن المشتقات الجزئية الأولي للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ عند النقطة (أو النقط) $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ يجب أن تساوي صفر. وبعبارة أخري للحصول على نقطة (أو نقط) الأستقرار للدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ نوجد المشتقات الجزئية الأولي ونساويها بالصفر ثم بحل مجموعة المعادلات (4.19) نحصل على نقطة (أو نقط) الأستقرار.

الإثبات: أنظر المرجع [31].

ملحوظة: وكما ذكرنا في الباب السابق أن نقطة الاستقرار قد تكون نقطة طرفية نهاية عظمي أو صغري، وقد تكون نقطة أرتكاز Saddle Point. وبالتالي لتحديد هل النقطة عظمي أو صغري لأبد من تحقيق الشرط الكافي Sufficient Condition كما سوف نوضح فيما بعد.

مثال (٤-٧)

أوجد نقط الاستقرار للدالة $f(x, y)$ التالية:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 5xy + 5y + 2y$$

الحل:

نوجد المشتقات الجزئية الأولي بالنسبة للمتغير x ، والمتغير y على التوالي ثم مساوتها بالصفر

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y + 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 5x + 5 = 0 \qquad (2)$$

ونلاحظ أن المعادلتين (2) ، (1) معادلتين خطيتين في x, y بحلهما معاً نجد أن:

$$x = -1 \qquad , \qquad y = 0$$

وبالتالي فإن النقطة $(x = -1, y = 0, z = 4)$ نقطة أستقرار.

مثال (٤-٨)

أوجد نقط الاستقرار للدالة z حيث:

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 5x_2x_3 - 6x_1 - 10x_2 - 4x_3$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 - 5x_3 - 10 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_1 - 5x_2 - 4 = 0 \qquad (3)$$

وبحل المعادلات (3) – (1) نجد أن:

$$x_1 = \frac{23}{7} \quad , \quad x_2 = \frac{2}{7} \quad , \quad x_3 = \frac{-4}{7}$$

وبالتالي فإن النقطة $\left(x_1 = \frac{23}{7}, x_2 = \frac{2}{7}, x_3 = \frac{-4}{7}, z = \frac{-129}{49}\right)$ نقطة استقرار

ويتطلب تحديد الشرط الكافي لتحديد النقط الطرفية العظمي والصغري. تعريف مصفوفة المشتقات من الترتيب الثاني أولاً.

مصفوفة المشتقات الثانية:

إذا اعتبرنا الدالة z حيث:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

دالة في (n) من المتغيرات فإن مصفوفة المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني ونرمز لها بالرمز H حيث:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{n.n} \qquad (4.20)$$

وتسمي المصفوفة H بالمصفوفة الهيسينية Hessian Matrix وهي مصفوفة مربعة من الترتيب $(n.n)$ ومتماثلة ويمكن تجزئتها إلى عدد (n) من المصفوفات المربعة المتماثلة أيضاً $h_1, h_2, \ldots, h_n$ حيث:

$$h_1 = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]_{1.1} \tag{4.21}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{2.2} \tag{4.22}$$

وهكذا فإن h_r حيث $n \geq r$ تصبح على النحو:

$$h_r = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r^2} \end{bmatrix}_{r.r} \tag{4.23}$$

ويلاحظ أن $h_r = H$

وتسمي محددات المصفوفات الجزئية $|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|$ بالمحيددات الأساسية Principle Minors.

نظرية (٤-٢)

إذا اعتبرنا الدالة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ دالة في (n) متغير، فإن نقطة الاستقرار $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$:

١- تكون نقطة نهاية عظمى نسبية إذا كانت قيم المحيددات $|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|$ عند النقطة $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ بحيث:

$$|h_1| < 0, |h_2| > 0, |h_3| < 0, \ldots \qquad (4.24)$$

أي قيمة سالبة يليها قيمة موجبة وهكذا

٢- تكون نقطة الاستقرار نقطة نهاية صغري نسبية إذا كانت قيم المحيددات $|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|$ عند نقطة الاستقرار $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ بحيث:

$$|h_1| > 0, |h_2| > 0, |h_3| > 0, \ldots \qquad (4.25)$$

أي قيمة كل منهم قيمة موجبة

٣- إذا لم يتحقق الشرطين السابقين في هذه النظرية فإن نقطة الاستقرار $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ لا تعتبر نقطة عظمي أو صغري وتكون نقطة أرتكاز Saddle Point.

الإثبات: أنظر المرجع [31].

مثال (٤-٩)
أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل منها

$$z = f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 15x - 20y$$

الحل:

١- نوجد المشتقات الجزئية الأولي بالنسبة لكل من x, y ونساويها بالصفر على النحو التالي:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 15 = 0 \longrightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10y - 20 = 0 \longrightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

وبالتالي فإن النقطة $(x = \frac{5}{2}, y = 2, z = \frac{-155}{4})$

٢- نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني وتكون المصفوفة H على النحو التالي:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$h_1 = |6| = 6 > 0$$

$$h_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 60 > 0$$

وبالتالي فإن النقطة$(x = \frac{5}{2}, y = 2, z = \frac{-155}{4})$ نقطة نهاية صغري.

مثال (٤-١٠)

أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$$

الحل:

١- نوجد المشتقات الجزئية الأولي ثم نساويها بالصفر للحصول على نقط الاستقرار على النحو التالي:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 4x_2 + 12x_3 = 0 \qquad (3)$$

بحل المعادلات (3) – (1) نجد أن:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

وبالتالي فإن النقطة $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, y = 0)$ نقطة استقرار.

٢- نوجد مصفوفة المشتقات الثانية H على النحو التالي:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$h_1 = |2| = 2 > 0$$

$$h_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0$$

$$h_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 2(36 - 16) + 3(-36) = +40 - 108 = -68 < 0$$

إذن النقطة $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ تعتبر نقطة ارتكاز Saddle Point وليست عظمي أو صغري.

مثال (٤-١١)

إذا كان عدد الوحدات المطلوبة (y) من سلعة ما دالة في سعر بيع الوحدة من السلعة (x_1)، وسعر الوحدة الواحدة من منتجين مكملين وليكونا (x_2, x_3) على الترتيب حيث:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 5000 - x_1^3 - 0.5x_2^3 - x_3^3 + 27x_1 + 25x_2 + 75x_3$$

أوجد سعر الوحدة الواحدة من السلعة وكذلك أسعار السلع المكملة التي تجعل الكمية المطلوبة من السلعة أكبر ما يمكن ثم عقب على الناتج.

الحل:

١- نوجد نقط الاستقرار بإيجاد المشتقات الجزئية للدالة y ثم مساوتها بالصفر:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 27 = 0 \longrightarrow x_1 = \pm 3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -0.5(3)x_2^2 + 25 = 0 \longrightarrow x_2 = \pm 4.08$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -3x_3^2 + 75 = 0 \longrightarrow x_3 = \pm 5$$

وبالتالي يكون لدينا عدد يساوي $2^3 = 8$ من نقط الاستقرار على النحو التالي:

$$(x_1 = 3, x_2 = 4.08, x_3 = 5) \quad , \quad (x_1 = -3, x_2 = 4.08, x_3 = 5)$$

$$(x_1 = 3, x_2 = -4.08, x_3 = 5) \quad , \quad (x_1 = 3, x_2 = -4.08, x_3 = -5)$$

$$(x_1 = -3\,, x_2 = -4.08\,, x_3 = -5)\,,(x_1 = 3\,, x_2 = 4.08\,, x_3 = -5)$$

$$(x_1 = -3\,, x_2 = -4.08\,, x_3 = 5)\,,(x_1 = -3\,, x_2 = 4.08\,, x_3 = -5)$$

وبما أن الأسعار x_1, x_2, x_3 قيم موجبة، وبالتالي فأننا نرفض جميع النقط التي يكون فيها واحد على الأقل من x_1, x_2, x_3 سالبة. وبالتالي يكون لدينا نقطة استقرار واحد مقبولة هي:

$$(x_1 = 3\,, x_2 = 4.08\,, x_3 = 5)$$

٢- نوجد المصفوفة H حيث:

$$H = \begin{bmatrix} -6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -6x_3 \end{bmatrix}$$

وعند نقطة الاستقرار $(x_1 = 3\,, x_2 = 4.08\,, x_3 = 5)$ نجد أن:

$$H = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12.24 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$|h_1| = |-12| = -12 < 0$$

$$|h_2| = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12.24 \end{vmatrix} = + > 0$$

$$|h_3| = \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12.24 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = - < 0$$

إذن النقطة $(x_1 = 3 , x_2 = 4.08 , x_3 = 5)$ نقطة نهاية عظمي، وبالتالي تكون الكمية المطلوبة أكبر ما يمكن عندما يكون سعر الوحدة من السلعة $x_1 = 3$، وسعر الوحدة من السلعتين المكملتين $x_2 = 4.08$، $x_3 = 5$ على الترتيب

وتكون الكمية المطلوبة:

$$y = f(x_1 = 3, x_2 = 4.08, x_3 = 5) = 5372.04 \approx 5372$$ وحدة

تمرين (٥)

(١) حدد القيم العظمي والصغري لكل دالة من الدوال التالية:

$$1 - f(x_1, x_2) = 50 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$

$$2 - f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_2x_3 - x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3$$

$$3 - f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 15x_2^2 + 5x_3^2 - 60x_1 + 90x_2 - 40x_3 + 15000$$

$$4 - f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$$

$$5 - f(x_1, x_2, x_3) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

(٢) إذا كانت دالة التكلفة لثلاثة أنواع من المنتجات A, B, C التي تنتجها أحدى الشركات على النحو التالي:

$$C(x,y,z) = 10x^2 + 30y^2 + 20z^2 - 400x - 900y$$
$$- 1000z + 800{,}000$$

حيث: x,y,z عدد الوحدات من كل منتج على التوالي.

المطلوب: تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(٣) إذا كانت دالة العائد السنوي $R(x,y)$ لمنتجات أحدي الشركات على النحو:

$$R(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y$$

حيث x,y هي عدد الوحدات من المنتج A,B على الترتيب، كذلك دالة التكلفة السنوية $C(x,y)$ على النحو:

$$C(x,y) = 180x + 140y + 5000$$

المطلوب:

١- تحديد دالة الربح $P(x,y)$.

٢- تحديد قيم x,y التي تجعل الربح السنوي أكبر ما يمكن.

(٤) إذا كانت أحدي المحطات للتليفزيون تخدم مدينتين A,B حيث تبعد المسافات x,y بالكيلومتر عن كل من A,B. والمطلوب تحديد موقع المحطة فإذا كانت الدالة $f(x,y)$ تشير إلى بعد المحطة عن المدينتين بالكيلومتر

$$f(x,y) = (x-30)^2 + (y-20)^2 + (x+20)^2 + (y-10)^2$$
$$+ (x-10)^2 + (y+10)^2$$

أوجد x,y التي تجعل المسافة $f(x,y)$ أقل ما يمكن.

(٤-٦) طريقة لأجرانج Lagrange Method

في الفصل السابق تناولنا إيجاد القيم العظمي والصغري للدوال غير الخطية وتسمي عادة بمشاكل البرمجة غير الخطية غير المقيدة، أي الدوال التي لا تخضع لقيود. وفي هذا الفصل نتناول المشاكل غير الخطية التي تخضع لبعض القيود – وتوجد طرق متعددة لحل هذا النوع من المشاكل، سوف نتناول في هذا الفصل طريقة لأجرانج نسبة إلى عالم الرياضيات لأجرانج (١٧٣٦-١٨١٣).

وسوف نعتبر الحالة عندما تكون دالة الهدف تخضع لقيد في شكل معادلة Equality Constraint.

الحالة الأولي: إذا أعتبرنا المشكلة إيجاد قيم x, y التي تجعل الدالة

$$\text{Max}(\text{or min.})Z = f(x,y) \qquad (4.26)$$

S.T.

$$g(x,y) = C \qquad (4.27)$$

وتعتبر المشكلة (4.26) – (4.27) مشكلة مقيدة - وتتلخص طريقة لأجرانج في تحويل المشكلة المقيدة إلى مشكلة غير مقيدة وذلك بتكوين دالة $L(x,y,\lambda)$ المسماه بدالة لأجرانج حيث:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - C] \qquad (4.28)$$

حيث يسمي λ بمعامل لأجرانج Lagrange Multiplier.

وتعتمد طريقة لأجرانج على أن القيم العظمي والصغري لدالة لأجرانج $L(x,y,\lambda)$ هي نفس القيم العظمي والصغري للدالة $f(x,y)$ تحت القيد (4.27). ولتحديد القيم العظمي والصغري للدالة $L(x,y,\lambda)$ نتبع الخطوات التالية:

١- نوجد المشتقات الجزئية التالية ونساويها بالصفر على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

٢- وبحل المعادلات (2.29) نحصل على نقطة أو نقط الأستقرار (x^*,y^*,λ^*) Stationary Points للدالة $L(x,y,\lambda)$ التي هي نقط أستقرار للدالة $f(x,y)$.

٣- لتحديد نوع النقطة (أو النقط) (x^*,y^*) عظمي أو صغري أو غير ذلك نكون المصفوفة الهيسية الحدودية Bordered Hessian Matrix وسوف نرمز لها بالرمز H_B عند النقطة (x^*,y^*,λ^*) حيث:

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L(x,y,\lambda)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \qquad (4.30)$$

٤- نوجد قيمة المحدد $|H_B|$ عند النقطة (x^*,y^*,λ^*)

أ- إذا كان $|H_B| > 0$ تكون النقطة نهاية عظمي Maximum Point.

ب- إذا كان $|H_B| < 0$ تكون النقطة نهاية صغري Minimum Point.

مثال (٤-١٢)

أعتبر المشكلة التالية:

$$\text{MaxZ} = f(x,y) = 50 - x_1^2 - x_2^2$$

$$\text{S.T.}$$

$$2x + y = 4$$

أوجد الحل باستخدام طريقة لأجرانج

الحل:

١- نكون دالة لأجرانج $L(x,y,\lambda)$ حيث:

$$L(x,y,\lambda) = 50 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda(2x + y - 4)$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية ونساويها بالصفر

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= -2x - 2\lambda = 0 && (1)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -2y - \lambda = 0 && (2)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(2x + y - 4) = 0 && (3)
\end{aligned}\right\}$$

٣- بحل المعادلات $(3)-(1)$ نحصل على:

$$x^* = 1.6 \quad , \quad y^* = 0.8 \quad , \quad \lambda^* = -1.6$$

٤- نوجد المصفوفة الهيسية الحدودية H_B حيث:

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3.3}$$

٥- وبما أن $|H_B| = 10$ أي أن $|H_B| > 0$

إذن النقطة $(x = 1.6\ ,\ y = 0.8\ ,\ z = 46.8)$ نقطة نهاية عظمي.

الحالة الثانية: إذا أعتبرنا المشكلة إيجاد قيم $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ التي تجعل الدالة

$$\text{Max.(or min.)}Z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (4.31)$$

S.T.

$$g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = C \qquad (4.32)$$

فللحصول على النقطة (أو النقط) $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda^*)$ التي تجعل الدالة Z نهاية عظمي أو صغري تحت القيد (4.23) نتبع الخطوات التالية:

١- إيجاد دالة لأجرانج $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ حيث:

$$L(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, .., x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, .., x_n) - C] \quad (4.33)$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية الأولي للدالة L ونساويها بالصفر

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0 \qquad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

٣- بحل المعادلات (4.34) نحصل على نقط الأستقرار $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda^*)$.

٤- نكون المصفوفة الهيسية عند النقطة $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ على النحو:

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(n+1)(n+1)} \tag{4.35}$$

٥- لتحديد نوع النقطة (أو النقط) $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ نوجد المحيددات الرئيسية للمصفوفة H_B، فإذا أعتبرنا المحيددات الرئيسية هي $|H_2|, \ldots, |H_n|$ عند النقطة بحيث:

$$|H_2| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{3.3} \tag{4.36}$$

$$|H_3| = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{4.4} \qquad (4.37)$$

وهكذا حيث:

$$|H_n| = |H_B| = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(n+1).(n+1)} \qquad (4.38)$$

٦- إذا كان

$$|H_2| > 0 \,, |H_3| < 0 \,, |H_4| > 0 \,, ... \qquad (4.39)$$

تكون النقطة $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ نقطة نهاية عظمي.

وإذا كان:

$$|H_2| < 0 \,, |H_3| < 0 \,, ... \,, |H_n| < 0 \qquad (4.40)$$

تكون النقطة $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda^*)$ نقطة نهاية صغري.

مثال (٤-١٣)

أعتبر المشكلة التالية:

$$Max.Z = f(x_1, x_2, x_3) = 30x_1x_2x_3$$

$$S.T.$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24$$

الحل:

١- نكون دالة لأجرانج

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 30x_1x_2x_3 - \lambda[x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 24]$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية الأولي ونساويها بالصفر

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 30x_2x_3 - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 30x_1x_3 - 2\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 30x_1x_2 - 3\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -[x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 24] = 0 \qquad (4)$$

بحل المعادلات (4) – (1) نجد أن:

$$x_3 = \frac{8}{3} \ , \ x_2 = \frac{8}{2} \ , \ x_1 = 8 \ , \ \lambda = 320$$

٣- نوجد المصفوفة الهيسية الحدودية H_B عند النقطة:

$$x_1 = 8, x_2 = \frac{8}{2}, x_3 = \frac{8}{3}, \lambda = 320$$

$$|H_B| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{4.4}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 80 & 120 \\ 2 & 80 & 0 & 240 \\ 3 & 120 & 240 & 0 \end{bmatrix}$$

٤- وبالتالي

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 80 \\ 2 & 80 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 80 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 80 \end{vmatrix} = -160 + 160 = 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 80 & 120 \\ 2 & 80 & 0 & 240 \\ 3 & 120 & 240 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 80 & 120 \\ 80 & 0 & 240 \\ 120 & 240 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 120 \\ 1 & 80 & 240 \\ 2 & 120 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 80 \\ 2 & 80 & 0 \\ 3 & 120 & 240 \end{vmatrix}$$

$$= -4608000 - 67200 - 57600 = - < 0$$

وبما أن: $|H_2| = 0$ ، $|H_3| < 0$

إذن النقطة $x_1 = 8, x_2 = \frac{8}{2}, x_3 = \frac{8}{3}, z = 2560$ نقطة أرتكاز وليست نقطة نهاية عظمي أو صغري.

ورغم أن طريقة لأجرانج تعتبر بسيطة ولكنها قد تفشل عندما تكون معادلات الاستقرار معادلات غير خطية يصعب حلها Analytical.

تمرين (٦)

(١) استخدام طريقة لأجرانج أوجد النقط الطرفية ثم حدد نوع كل منها

1) $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 20x_1x_2$

S.T.

$$x_1 + x_2 = 100$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$

S.T.

$$x_1 + x_2 = 6$$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2$

S.T.

$$x_1 + x_2 = 42$$

4) $f(x_1, x_2) = 24x_1x_2 - 6x_2^2 - x_1^2$

S.T.

$$x_1 + x_2 = 16$$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

S.T.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$

S.T.

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 16$$

7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18$$

(٢) تقوم أحدي الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات A, B. فإذا كانت دالة التكلفة C دالة في عدد الوحدات المنتجة من النوع A ونرمز لها بالرمز (x)، وعدد الوحدات المنتجة من النوع B ونرمز لها بالرمز (y) على النحو التالي:

$$C(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 1000$$

فإذا كان المطلوب إنتاج عدد 500 وحدة من النوعين معاً.

المطلوب: حدد عدد الوحدات من كل نوع بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(٣) تقوم أحدي الشركان بإنتاج نوعين من المنتجات A, B. فإذا كانت دالة الإيراد السنوية $R(x, y)$ على النحو التالي:

$$R = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2$$

حيث x, y عدد الوحدات المباعة من النوع A, B على الترتيب. فإذا كان عدد الوحدات المباعة سنوياً يساوي 10,000 وحدة.

المطلوب: حدد العدد x, y الذي يجعل دالة الإيراد أكبر ما يمكن.

(٤-٧) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٤-١)

تنتج أحدي الشركات نوعين من المنتجات A,B. فإذا كان الربح السنوي للشركة دالة في عدد الوحدات المنتجة من كل نوع، فإذا رمزنا لدالة الربح بالرمز $R(x,y)$ حيث:

$$R(x,y) = -1200 + 2x^2 + 3y^2 + 2xy$$

المطلوب:

١- أوجد الربح الحدي بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة من النوع A عندما $x = 100\,, y = 100$ - ثم عقب على الناتج.

٢- أوجد الربح الحدي بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة من النوع B عندما $x = 100\,, y = 100$ - ثم عقب على الناتج.

٣- حدد أي نوع من المنتجات أفضل للمنتج زيادة الأنتاج منه.

الحل

١- الربح الحدي بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة من النوع A يساوي $\frac{\partial R}{\partial x}$ حيث:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4x + 2y$$

عندما $x = 100\,, y = 100$ فإن:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4(100) + 2(100) = 400 + 200 = 600 \text{جنيه}$$

وهذا يعني في حالة زيادة (أو نقص) عدد الوحدات من النوع A بوحدة واحدة عند مستوي الانتاج $x = 100\,, y = 100$ فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة (أو نقص) الربح بـ 600 جنيه.

٢- بالمثل الربح الحدي بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة من النوع B يساوي $\frac{\partial R}{\partial y}$ حيث:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 6y + 2x$$

عند مستوي الانتاج $x = 100 , y = 100$ فإن:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 6(100) + 2(100) = 800 \text{جنيه}$$

وهذا يعني في حالة زيادة (أو نقص) عدد الوحدات من النوع B بوحدة واحدة عند مستوي الانتاج $x = 100 , y = 100$ فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة (أو نقص) الربح بـ 800 جنيه

٣- من (١) و (٢) نجد أن الربح الحدي بالنسبة للمنتج B أكبر من الربح الحدي للمنتج A عند مستوي الانتاج $x = 100 , y = 100$، وبالتالي يكون أفضل للمنتج زيادة الأنتاج من النوع B.

تطبيق (٤-٢)

في أحدي الشركات ترتبط أيرادات الشركة السنوية (بالألف جنيه) بمقدار المنفق على المنفق من الدعاية (بالألف جنيه) فإذا كانت دالة الأيراد $R(x,y)$ على النحو:

$$R(x,y) = 50{,}000 - 49y + 10x^2 + 20y^2 - 10xy$$

حيث x تشير إلى المنفق على الدعاية عن طريق التليفزيون، y تشير إلى المنفق على باقي وسائل الدعاية الأخري.

المطلوب:

١- أوجد أقل أيراد ممكن.

٢- إذا كان أقصي أنفاق على وسائل الأعلان بساوي 10ألف جنيه. أوجد أقل أيراد ممكن الوصول إليه.

الحل

(١

١- نوجد نقط الاستقرار

$$\frac{\partial R}{\partial x} = +20x - 10y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -49 + 40y - 10 = 0 \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن:

$$x = 0.7 \quad , \quad y = 1.4$$

٢- نوجد المصفوفة الهيسية H عند النقطة $(x = 0.7 , y = 1.4)$ على النحو التالي:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 40 \end{bmatrix}$$

٣- بما أن:

$$|H_1| = 20 > 0$$

$$|H_2| = 800 - 100 = 700 > 0$$

٤- وبالتالي أقل أيراد ممكن عند النقطة $(x = 0.7 , y = 1.4)$، وفي هذه الحالة قيمة الأيراد R تساوي:

$$R(x = 0.7, y = 1.4) = 50,000 - 49(1.4) + 10(0.7)^2$$
$$+ 20(1.4)^2 - 10(0.7)(1.4) = 49,965.7 \text{ ألف جنيه}$$
$$= 49,965,700 \text{ جنيه}$$

٢)

$$MinR(x, y) = 50,000 - 49y + 10x^2 + 20y^2 - 10xy$$
$$S.T.$$
$$x + y = 10$$

١- نكون دالة لأجرانج على النحو التالي:

$$L(x, y, \lambda) = 50000 - 49y + 10x^2 + 20y^2 - 10xy$$
$$- \lambda[x + y - 10]$$

٢- نوجد نقط الاستقرار للدالة $L(x, y, \lambda)$ ثم نساويها بالصفر

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 20x - 10y - \lambda = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -49 + 40y - 10x - \lambda = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \qquad (3)$$

وبحل المعادلات $(1) - (3)$ نجد أن:

$$x = 5.64 \quad , \quad y = 4.36 \quad , \quad \lambda = 69.2$$

٣- نكون المصفوفة الهيسية الحدودية H_B حيث:

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 20 & -10 \\ 1 & -10 & 40 \end{bmatrix}$$

$$|H_B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 20 & -10 \\ 1 & -10 & 40 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 50 + (-10 - 20) = 50 - 30 = 20 > 0$$

وبما أن: $|H_B| > 0$

إذن النقطة $x = 5.64 , y = 4.36$ نقطة نهاية صغري.

تطبيق (٤-٣)

أوجد نقط الاستقرار للدالة y حيث:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 + 6x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 6x_3^2 + 5$$

ثم حدد نقط النهاية العظمي والصغري.

الحل

١- نوجد المعادلات التفاضلية الجزئية الأولي ونساويها بالصفر

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -6x_1^2 + 6x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 6x_1 - 12x_3 = 0 \qquad (3)$$

وبحل المعادلات (3) – (1) نجد:

$$(0,1,0)\ ,\ (1/2,1,1/4)$$

٢- نوجد المصفوفة الهيسية H حيث:

$$H=\begin{bmatrix}-12x_1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{bmatrix}$$

٣- عند النقطة (0,1,0) نجد أن:

$$|H_1| = |-12(0)| = 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix}-12x_1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix}-12x_1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{vmatrix} = 72$$

وبما ان: $|H_1| = 0\ ,\ |H_2| = 0\ ,\ |H_3| = 72$

إذن النقطة (0,1,0) نقطة استقرار وليست عظمي أو صغري.

٤- نوجد المصفوفة H عند النقطة $(1/2,1,1/4)$

$$H=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 6 & 0 & -12\end{bmatrix}$$

حيث:

$$|H_1| = |-6| = -6 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -72 < 0$$

وبما ان: $|H_1| < 0 \;,\; |H_2| > 0 \;,\; |H_3| < 0$

إذن النقطة $(1/2, 1, 1/4)$ نقطة نهاية عظمي.

تطبيق (٤-٤)

تقوم أحدي الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات A, B. فإذا كانت دالة الأيراد السنوي $R(x, y)$ بالألف جنيه على النحو النالي:

$$R(x, y) = 400x - 4x^2 + 1952y - 8y^2$$

حيث x, y عدد الوحدات المنتجة من A, B (بالألف وحدة) على الترتيب.

المطلوب:

١- أوجد أقصي أيراد ممكن.

٢- أوجد دالة الربح $P(x, y)$ ثم أوجد أقصي ربح يمكن تحقيقه.

الحل

أ) لتحديد فيم x, y التي تجعل الدالة $R(x, y)$ نهاية عظمي، أي

$$MaxR(x, y) = 400x - 4x^2 + 1952y - 8y^2$$

نوجد المشتقات الجزئية الأولي ونساويها بالصفر

$$\frac{\partial R}{\partial x}=400-8x=0\longrightarrow x=50$$
$$\frac{\partial R}{\partial y}=1952-16y=0\longrightarrow y=122$$

إذن النقطة $(x=50\,,\,y=122\,,\,R(50.122)=129{,}072)$

ب) لتحديد نوع النقطة $(x=50\,,\,y=122\,,\,R(50.122)=129{,}072)$

نوجد المصفوفة H عند النقطة

$$H=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}$$

نجد أن:

$$|H_1|=|-8|=-8<0$$
$$|H_2|=\begin{vmatrix}-8 & 0\\ 0 & 16\end{vmatrix}=128>0$$

إذن النقطة $(x=50\,,\,y=122\,,\,R(50.122)=129{,}072)$ نقطة نهاية عظمي، أي لكى يصل الربح إلى (129072) ألف جنيه أي 129072000 جنيه يجب إنتاج عدد (ألف وحدة $x=50$) أي يساوي الانتاج من الوحدات A 50,000 وحدة، وعدد 122,000 وحدة من المنتج B.

تطبيق (٤-٥)

تقوم أحدي دور النشر بطرح طبعات فاخرة (A) وطبعات عادية (B) من أحدي القواميس، فإذا كان العائد اليومي للمبيعات بالجنيه يساوي $R(x,y)$ حيث x تشير إلى عدد النسخ المباعة من الطبعة الفاخرة، y عدد النسخ المباعة من الطبعة

العادية، كذلك إذا كانت $C(x,y)$ تشير إلى دالة التكلفة اليومية لعدد x,y من المطبوعات حيث:

$$R(x,y) = -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 20x + 15y$$

$$C(x,y) = 6x + 3y + 200$$

المطلوب:

١- أوجد دالة الربح اليومي.

٢- أوجد الربح الهامشي بالنسبة لعدد النسخ من الطبعة الفاخرة عندما $x = 100\,,\, y = 1000$.

٣- أوجد الربح الهامشي بالنسبة لعدد النسخ من الطبعة العادية عندما $x = 100\,,\, y = 200$.

٤- أوجد عدد الوحدات التي يجب بيعها يومياً من A,B حتى يصل الربح اليومي إلى أكبر قيمة ممكنة - ثم عقب على التايج.

الحل

١- إذا أشرنا إلى دالة الربح بالرمز $P(x,y)$ فنجد أن:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= R(x,y) - C(x,y) \\ &= -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 20x \\ &\quad + 15y - 6x - 3y - 200 \\ &= -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 14x - 12y - 200 \end{aligned}$$

٢- الربح الهامشي بالنسبة لعدد الوحدات الفاخرة $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ حيث:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -0.010x - 0.002y + 20$$

عندما $x = 100 , y = 1000$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -0.010(100) - 0.002(1000) + 20 = -1 - 2 + 20 = 17$$

جنيه

وهذا يعني أن زيادة المطروح للبيع نسخة واحدة من الطبعة الفاخرة سوف يؤدي إلى زيادة الربح بـ 7 جنيه وذلك عند طرح عدد $x = 100 , y = 1000$.

٣- بالمثل الربح الهامشي لعدد النسخ من الطبعة العادية $\frac{\partial P}{\partial y}$ حيث:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -0.006y - 0.002x - 12$$

عند النقطة $x = 100 , y = 1000$ نجد أن:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -0.006(200) - 0.002(100) - 12 = -1.2 - 0.2 - 12$$

$= -13.4$ جنيه

وهذا يعني أن زيادة نسخة واحدة من الطبعة العادية سوف يؤدي إلى نقص الربح بما يساوي 13.4 جنيه وذلك عندما يكون عدد النسخ المطبوعة من الطبعة الفاخرة $x = 100$ والطبعة العادية $y = 200$.

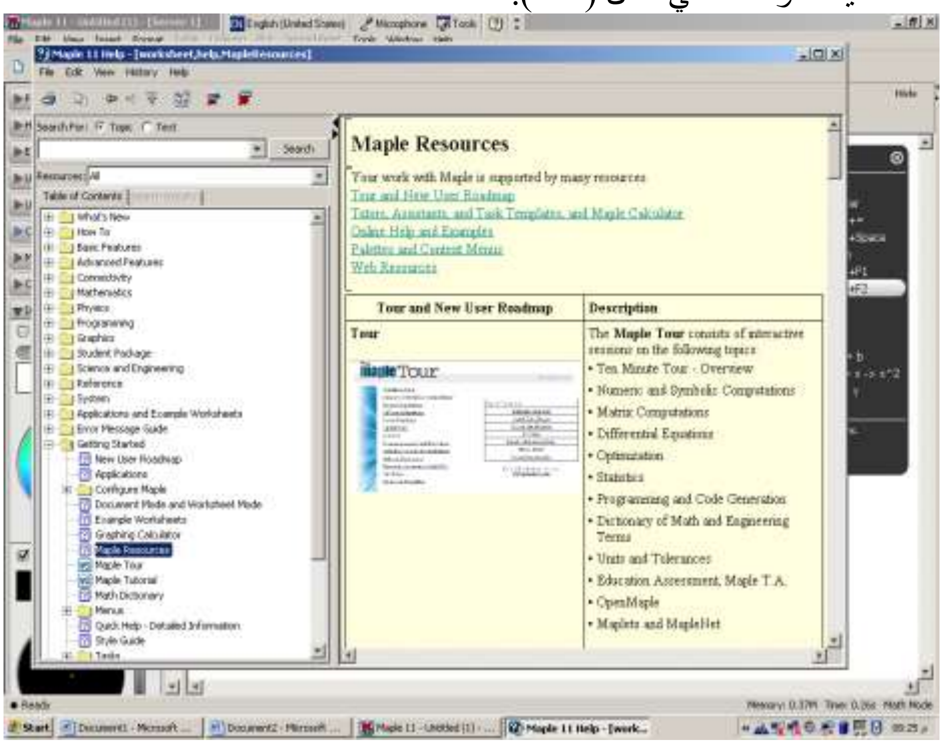
(٤-٨) استخدام الحزمة الرياضية

Using The Mathematical Package

في هذا الفصل سوف نتناول بأسلوب مبسط استخدام حزمة **Maple 11** في إيجاد المشتقات الجزئية من ترتيب معين للدالة $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ وتعتبر الدالة $f(x)$ الدالة في متغير واحد Single Variable Function حالة خاصة من الدالة $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.

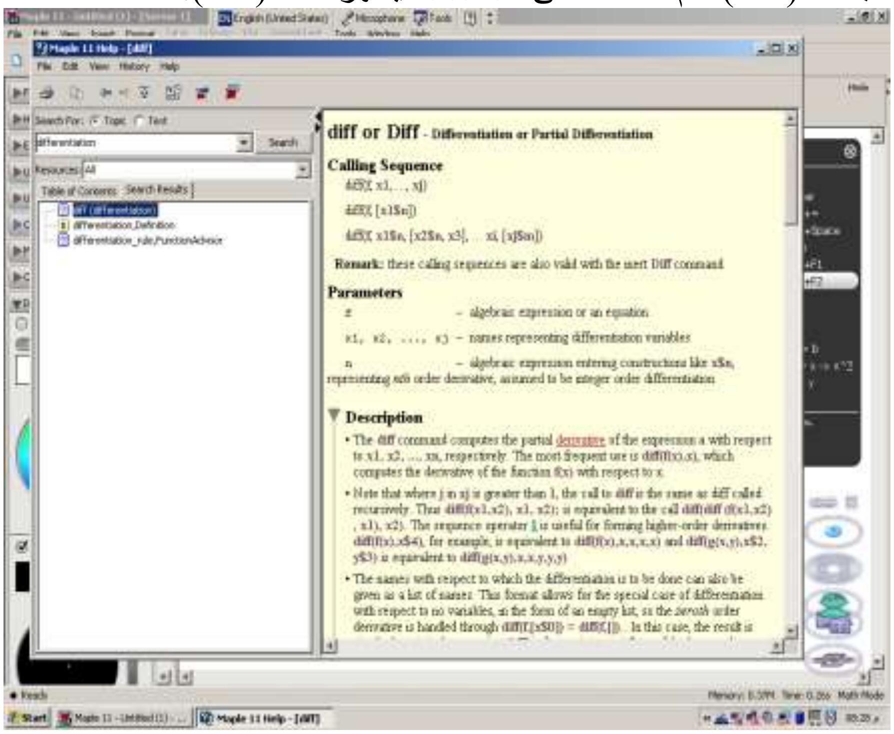
ولإيجاد المشتقات باستخدام **Maple 11** نتبع الخطوات التالية:

١- فتح برنامج **Maple 11** كما هو موضح في ملحق (١) – فتظهر الصفحة التالية الموضحة في شكل (٤-١).



شكل (٤-١)

٢- في شكل (٤-١) يتم كتابة Differentiation في المستطيل في يسار الصفحة بشكل (٤-١)، ثم نضغط على Search فيظهر شكل (٤-٢).



شكل (٤-٢)

٣- في يمين الصفحة في شكل (٤-٢) يوجد توصيف لأوامر ادخال البيانات وعديد من الأمثلة المحلوله. وفيما يلي بعض من أوامر الأدخال.

- إذا كان المطلوب $\frac{d}{dx}f(x)$ فإن أمر أدخال البيانات يكون على النحو التالي:

$$> \text{diff}(f(x),x); \qquad (4.41)$$

- كذلك إذا كان المطلوب $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ فإن أمر أدخال البيانات يكون على النحو:

$$> \text{diff}(f(x),x\$n); \qquad (4.42)$$

أو

$$> \mathrm{diff}(f(x),\underbrace{x, x,\ldots, x}_{n}); \qquad (4.43)$$

- كذلك إذا كان المطلوب $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ فإن أمر أدخال البيانات يكون على النحو:

$$> \mathit{diff}\ (f(x,y),x,y); \qquad (4.44)$$

- بالمثل كذلك إذا كان المطلوب $\dfrac{\partial^{n+m} f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m}$ فإن أمر أدخال البيانات يكون على النحو:

$$> \mathrm{diff}(f(x,y),[x\$n],[y\$m]) \qquad (4.45)$$

أو

$$> \mathrm{diff}(f(x,y),[\underbrace{x,x,\ldots,x}_{n}],[\underbrace{y,y,\ldots,y}_{m}]); \qquad (4.46)$$

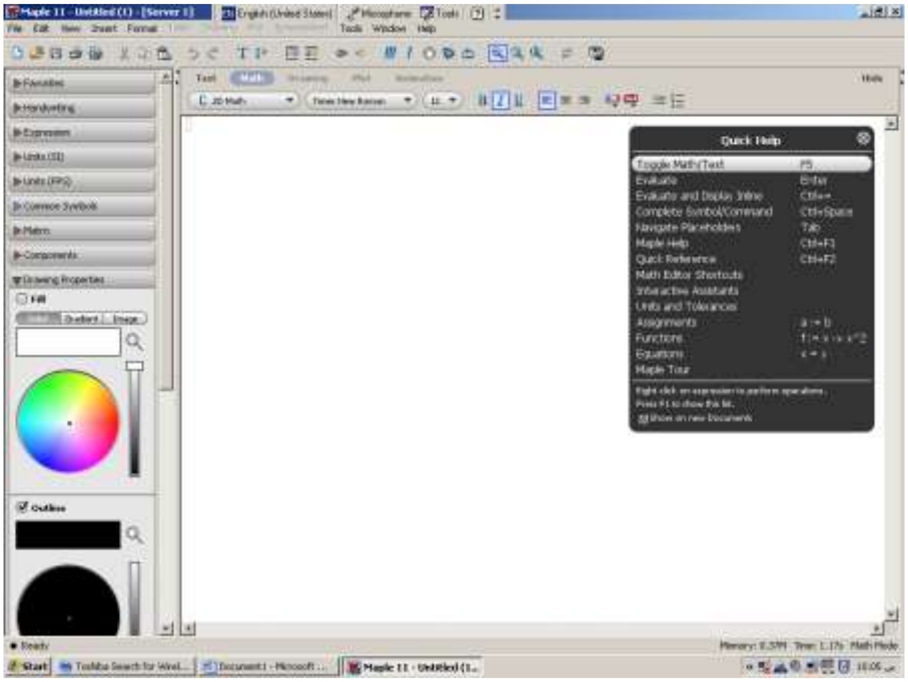
وهكذا بالنسبة لأوامر الأدخال بالنسبة للدالة $f(x_1, x_3,\ldots, x_n)$ للحصول على المشتقات Derivatives بالنسبة لمتغيرات معينة.

وكما سبق يمكن تنفيذ عملية التفاضل (أو المشتقات) من ترتيب معين باستخدام حزمة Maple 11 بطريقتين:-

الطريقة الأولي

ويستخدم هذه الطريقة المجيدين لكتابة الأوامر في الحزمة.

٤- يتم استدعاء **Maple 11** من الشريط أسفل الصفحة في شكل (٤-٢) – فيظهر شكل (٤-٣) حيث يوجد المستطيل النشط كما هو موضح بشكل (٤-٣).



شكل (٤-٣)

٥- يكتب في المستطيل النشط أوامر أدخال البيانات (بالأسلوب الموضح في الخطوة (٢)) وكتابة الدالة المطلوب تفاضلها.

٦- ثم نضغط على مفتاح Enter فيظهر الناتج المطلوب.

الطريقة الثانية

وتستخدم هذه الطريقة بالنسبة للمستخدمين للحزمة من غير المجيدين الأجادة المطلوبة بالنسبة لكتابة أوامر الأدخال. فإنه يمكن أتباع ما يلي:

٤- أخذ نسخة Copy من الأمثلة المحلوله (والتي تتماثل فيها العملية التفاضلية في المثال المحلول مع العملية المطلوب إجرائها) في صفحة التوصيف (أرجع إلى الخطوة ٣).

٥- أستدعاء Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة بشكل (٤-٢) فيظهر شكل (٤-٣) حيث يوجد المستطيل النشط.

٦- لصق Paste الأمثلة المحلولة في المستطيل النشط.

٧- مسح الدالة في المثال المحلول (المتماثل فيه العملية التفاضلية مع العملية المطلوب إجرائها) وكتابة الدالة المطلوب إيجاد مشتقاتها - وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

٨- الضغط على مفتاح Enter فيظهر الحل.

مثال (٤-١٤)

أوجد $\frac{d}{dx}f(x)$ ، حيث:

$$f(x) = x^4$$

الحل

بإتباع أحدي الطريقتين أعلاه نحصل على الحل باستخدام Maple 11 كما هو موضح في شكل (٤-٥)

`> diff(x^4,x);`	$4x^3$

شكل (٤-٥)

مثال (٤-١٥)

أوجد $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ ، حيث:

$$f(x) = 2x^2 + 5x^3 + 10$$

الحل

بالمثل باستخدام أحدي الطريقتين نجد الحل الموضح في الشكل التالي:

```
> diff(2*x^2+5*y^3,x,x);        4
```

شكل (٤-٦)

مثال (٤-١٦)

أوجد $\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z}$ ، حيث:

$$f(x,y,z) = 100x^4 + 2y^5 + z^3 + 2x^3yz + 4y^2z^2$$

الحل

بالمثل باستخدام أحدي الطريقتين نجد الحل الموضح في الشكل التالي:

```
> diff(100*x^4+2*y^5+z^3+2*x^3*z+4*y^2*z^2+4*y^2*z^2,[x,y,z]);
```

$$6x^2$$

شكل (٤-٧)

مثال (٤-١٧)

باستخدام Maple 11 أوجد تفاضل كل من الدوال التالية:

$$1 - f(x) = e^{x^5} \qquad 2 - f(x) = \ln(x^5 - 2x^2)$$

الحل

الشكل التالي يوضح أوامر الأدخال والحل:

$$diff(\exp(x^5), x);$$

$$5\,x^4\,e^{x^5} \qquad (1)$$

$$diff(\ln(x^5 - 2\,x^2), x);$$

$$\frac{5\,x^4 - 4\,x}{x^5 - 2\,x^2} \qquad (2)$$

شكل (٤-٨)

مثال (٤-١٨)

باستخدام Maple 11 أوجد ما يلي:

1) $\dfrac{d}{dx}(\ln x^2 + 5x - 7e^x)$

2) $\dfrac{d^2}{dx^2}(\ln x^2 + 5x - 7e^x)$

3) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{3x^2 - 5\ln x^2}{10x^5 + 9x^3 z}\right]$

الحل

الشكل التالي يوضح أوامر الأدخال والحل:

$diff\left(\ln(x^2) + 5\,x - 7\exp(x), x\right);$

$$\frac{2}{x} + 5 - 7\,e^{x} \qquad \textbf{(1)}$$

$diff\left(\ln(x^2) + 5\,x - 7\exp(x), x\$2\right);$

$$-\frac{2}{x^2} - 7\,e^{x} \qquad \textbf{(2)}$$

$diff\left(\dfrac{(3\,x^2 - 5\ln(x^2))}{(10\,x^5 + 9\,x^3 z)}, x\right);$

$$\frac{6\,x - \frac{10}{x}}{10\,x^5 + 9\,x^3\,z} - \frac{(3\,x^2 - 5\ln(x^2))\,(50\,x^4 + 27\,x^2\,z)}{(10\,x^5 + 9\,x^3\,z)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

شكل (٤-٩)

(٤-٩) تمرينات Exercises

(٤-١) حدد نقط الاستقرار لكل دالة من الدوال التالية ثم حدد نوع كل نقطة

$$1-f(x,y)=1-2x^2-3y^2$$

$$2-f(x,y)=x^2-2xy+y^2+1$$

$$3-f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+1$$

$$4-f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xy+5xz+3yz-4x+8y-1$$

$$5-f(x,y,z)=2x^3+y^3+2z^2-3xy-3xz-5$$

$$6-f(x,y)=5y^3-7y^2-12y+4x^2-6x+2$$

$$7-f(x,y)=xy+\frac{4}{x}+\frac{2}{y}$$

$$8-f(x,y)=x^2-ey^2$$

$$9-f(x,y)=\frac{x}{y^2}+xy$$

$$10-f(x,y)=e^{x^2+y^2}$$

$$11-f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$$

$$12-f(x,y)=xy+\ln x+2y^2$$

(٤-٢) أستخدم طريقة لأجرانج لحل المشاكل التالية:

1) $\text{Min}Z = f(x,y) = 2x^2 + y^2$

S.T.

$x + y = 1$

2) $\text{Min}.f(x,y,z) = 2xy + 6yz + 8xz$

S.T.

$xyz = 12000$

3) $\text{Max}f(x,y) = \frac{-1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 500$

S.T.

$x + y - 230 = 0$

4) $\text{Max}f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$

S.T.

$200x + 300y = 60{,}000 = 0$

5) $\text{Min}f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

S.T.

$x + y - 1 = 0$

(٤-٣) في أحدي الشركات كان أجمالي المخصص شهرياً للأنفاق على الأعلان يساوي 60,000 جنيه. فإذا كان المخصص على الأعلان في TV يساوي x والمخصص لباقي وسائل الأعلان y. حيث تعتبر الشركة أن قيمة الإيرادات (بالجنيه) من المبيعات دالة في كل من x,y على النحو التالي:

$$Z = f(x,y) = 90x^{1/4}y^{3/4}$$

حدد كل من x,y.

(٤-٤) تقوم أحدي الشركات بإنتاج ثلاثة نماذج A,B,C من التليفزيون المحمول. فإذا كان الإيراد اليومي (بالألف جنيه) من بيع عدد x,y,z من الأنواع الثلاثة على النحو التالي:

$$R(x,y,z) = x + 2y - 3z$$

$$\text{S.T.}$$

$$z = 4x^2 + y^2$$

أوجد أقصي أيراد ممكن.

(٤-٥) أستخدم Maple 11 في الحصول على ما يلي:

$$1- \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^3e^{5x} + \ln x^3 + 9x^{-7})$$

$$2- \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[5x^3y^2 + 7\ln(x-y) + 9y^5\right]$$

$$3- \frac{\partial^5}{\partial x^5}\left[\frac{8\ln(x^3+5) - 9x}{10x^2+3}\right]$$

$$4- \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}\left[7e^{x^2z} - x^2z^2 + 15z^4\right]$$

الباب الخامس
التكامل (العملية العكسية للمشتقات)
Integration (Antiderivatives)

(٥-١) مفهوم التكامل	Concept of Integration
(٥-٢) القواعد الأساسية للتكامل	Basic Rules of Integration
(٥-٣) التكامل المحدود	Definite Integration
(٥-٤) التكامل المزدوج	Double Integration
(٥-٥) أمثلة تطبيقية	Applied Examples
(٥-٦) استخدام الحزمة الرياضية	Using The Mathematical Package
(٥-٧) تمرينات	Exercises

(٥-١) مفهوم التكامل Concept of Integration

في الباب الثالث تناولنا بالتفصيل عملية التفاضل، فإذا فرضنا أن $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ هي المشتقة الأولي للدالة $f(x)$ فباستخدام التفاضل يتم الحصول على المشتقة الأولي $f'(x)$ للدالة $f(x)$.

وتسمى العملية العكسية للتفاضل Antiderivative أي عملية الحصول على الدالة $f(x)$ باستخدام المشتقة لها $f'(x)$ بعملية التكامل Integration Process. وبالتالي فعملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

وكما أشرنا في الباب الثالث إلى عملية أجراء التفاضل للدالة $f(x)$ على النحو التالي:

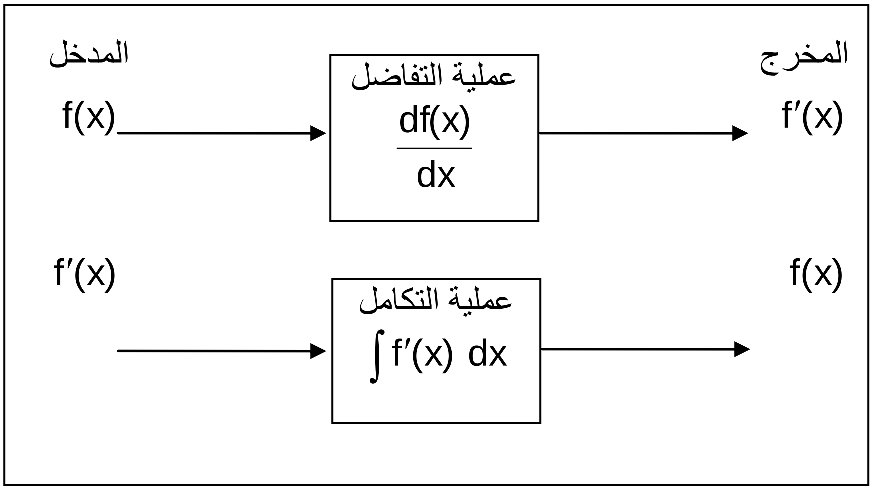
$$f'(x) \quad \text{أو} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

فإن عملية أجراء التكامل للدالة $f'(x)$ أو $\frac{df(x)}{dx}$ يشار إليها على النحو التالي:

$$\int f'(x)\, dx \qquad (5.1)$$

وتقرأ تكامل الدالة $f'(x)$ بالنسبة للمتغير x.

والشكل التالي يوضح المدخلات والمخرجات لعمليتي التفاضل والتكامل.



شكل (٥-١)

إذا فرضنا أن $f'(x)$ هي المشتقة الأولي للدالة $f(x)$ حيث:

$$f'(x) = 10$$

وبالتالي فإنه يمكن الحصول على الدالة $f(x)$ باستخدام عملية التكامل على النحو التالي:

$$f(x) = \int 10\,dx = 10x$$

أو

$$f(x) = \int 10\,dx = 10x + 1$$

أو

$$f(x) = \int 10\,dx = 10x + 5$$

أو

$$\vdots$$

وبصفة عامة يمكن كتابة الدالة $f(x)$ على النحو

$$f(x) = 10x + c$$

حيث c مقدار ثابت يسمى بثابت التكامل Constant of Integration.

مثال (٥-١)

أوجد الدوال التى لها المشتقات التالية:

1) $f'(x) = 3x + 5$ 2) $f'(x) = 5x^4 - 4x^3$

الحل

١- بما أن: $f'(x) = 3x + 5$ فإن:

$$f(x) = \int (3x+5)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$$

٢- بما أن: $f'(x) = 5x^4 - 4x^3$ فإن:

$$f(x) = \int (5x^4 - 4x^3)\,dx = \frac{5}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4 + c = x^5 - x^4 + c$$

مثال (٥-٢)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية $f'(x)$ Marginal Cost لإحدى المنتجات دالة في عدد الوحدات المنتجة x على النحو التالي:

$$f'(x) = 300 + x$$

المطلوب:

١- اوجد دالة التكلفة $f(x)$.

٢- إذا كانت تكلفة 10 وحدات تساوى 10000 جنية، أوجد قيمة ثابت التكامل c

الحل

١- بما أن: $f'(x) = 300 + x$ فإن:

$$f(x) = \int (300 + x)\, dx = 300x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

٢- وبما أن: $f(x = 10) = 10000$ فإن:

$$f(x = 10) = 10000 = 300(10) + \frac{1}{2}(10)^2 + c$$
$$= 3000 + 50 + c$$

$$\therefore c = 6950$$ جنيه

مثال (٥-٣)

إذا كانت دالة العائد الحدي Marginal Revenue لإحدى المنتجات هي دالة في عدد الوحدات المنتجة x على النحو التالي:

$$f'(x) = (500 - x)$$

المطلوب: أوجد دالة العائد إذا كان العائد يساوى 50000 عندما x=5.

الحل

بما أن: $f'(x) = 500 - x$ فإن:

$$f(x) = \int (500 - x)\,dx = 500x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

وبما ان: $f(x=5) = 50000$ فإن:

$$f(x=5) = 50000 = 500(5) + \frac{1}{2}(5)^2 + c = 2500 + 12.5 + c$$
$$= 2512.5 + c$$
$$\therefore c = 47487.5$$

وبالتالي فإن دالة العائد إذا كان العائد يساوى 50000 عندما $x=5$ هي:

$$f(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2 + 47487.5$$

مثال (٥-٤)

إذا كانت المشتقة الأولي للدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f'(x) = (5x - 1)^2$$

أوجد الدالة $f(x)$.

الحل:

بما أن:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (5x - 1)^2\,dx = \int (25x^2 - 10x + 1)\,dx$$
$$= \frac{25}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + x + c$$

حيث c ثابت التكامل.
مما سبق يمكن تعريف عملية التكامل من خلال النظرية التالية:

نظرية (٥-١)

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في المتغير x فإن

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c \qquad (5.2)$$

حيث c مقدار ثابت، $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

الإثبات: أنظر المرجع [14].

تمرين (١)

١- أوجد الدالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f'(x) = 100$

2) $f'(x) = x^3 + 10$

3) $f'(x) = 5x$

4) $f'(x) = \dfrac{x^3}{3}$

5) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{5}$

6) $f'(x) = \sqrt[5]{x^2} + 2$

7) $f'(x) = \sqrt{5}\,x^8$

8) $f'(x) = x^3 + x^2 + 5x$

9) $f'(x) = \sqrt[9]{x} - 10$

10) $f'(x) = 15x^{20} + 3x^{-2}$

٢- أوجد الدالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية عند النقطة التي تحقق $f(x)$ في كل حالة:

1) $f'(x) = 30 \quad , \quad (1,30)$

2) $f'(x) = -10x \quad , \quad (-2,10)$

3) $(3,-9)$, $f'(x) = 9 - x + x^2$

4) $(-2,100)$, $f'(x) = 5x^2$

5) (2.20) , $f'(x) = \sqrt[3]{x^5}$

٣- إذا كان العائد الحدي لأحد المنتجات $f'(x)$ دالة في عدد الوحدات المباعة x.

حدد العائد الكلي كدالة في x.

٤- إذا كانت دالة التكلفة الحدية لأحد المنتجات $C'(x)$ دالة في عدد الوحدات المنتجة x على النحو التالي:

$$C'(x) = +10x + 1000$$

اوجد دالة التكلفة الكلية – حيث أن تكلفة 50 وحدة تساوى 90,000جنيه.

٥- إذا كان الربح الهامشي لأحدى المنتجات $P'(x)$ دالة في عدد الوحدات المباعة x حيث:

$$P'(x) = -5x + 100$$

أوجد دالة الربح – حيث أن الربح يساوي 20000 جنيه في حالة بيع 250 وحدة.

(٥-٢) القواعد الأساسية للتكامل Basic Rules Of Integration

سوف نقدم في هذا الفصل أهم القواعد التي يمكن أتباعها لإيجاد تكامل بعض الدوال الأكثر استخداما.

قاعدة (١)

إذا فرضنا أن k مقدار ثابت فإن:

$$\int k\,dx = kx + c \tag{5.3}$$

حيث c ثابت التكامل

مثال (٥-٥)

أوجد التكاملات التالية

1) $\int \frac{8}{9}\,dx$

2) $\int (-15)\,dx$

3) $\int \sqrt[3]{10}\,dx$

4) $\int 0\,dx$

الحل

1) $\int \frac{8}{9}\,dx = \frac{8}{9}x + c$

2) $\int (-15)\,dx = -15x + c$

3) $\int \sqrt[3]{10}\,dx = \sqrt[3]{10}\,x + c$

4) $\int 0\,dx = 0(x) + c = c$

قاعدة (٢)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (5.4)$$

$n \neq -1$

مثال (٥-٦)

أوجد كل مما يلي:

1) $\int x \, dx$

2) $\int x^5 \, dx$

3) $\int x^{3/2} \, dx$

4) $\int x^{-5} \, dx$

الحل

بتطبيق القاعدة (٢) نحصل على:

1) $$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

2) $$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + c$$

3) $$\int x^{3/2} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{5/2} + c$$

4) $$\int x^{-5} \, dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{-1}{4} x^{-4} + c$$

قاعدة (٣)

إذا كان k مقدار ثابت فإن:

$$\int k f'(x)\,dx = k\int f'(x)\,dx = kf(x) + c \qquad (5.5)$$

مثال (٥-٧)

أوجد كل مما يلي:

1) $\int 100x^3\,dx$ 2) $\int -7x^8\,dx$

3) $\int x\sqrt{x^3}\,dx$ 4) $\int -9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل

1) $\int 100x^3\,dx = 100\int x^3\,dx = 100\frac{x^4}{4} + c = 25x^4 + c$

2) $\int -7x^8\,dx = -7\int x^8\,dx = -7\frac{x^9}{9} + c = \frac{-7}{9}x^9 + c$

3) $\int x\sqrt{x^3}\,dx = \int x\,x^{3/2}\,dx = \int x^{5/2}\,dx = \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + c = \frac{2}{7}x^{7/2} + c$

4) $\int -9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int -9(x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -9\int (x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -9\,x^{1/2} + c$

قاعدة (٤)

إذا كان $f_1(x)\,,\,f_2(x)$ دالتين في المتغير x فإن:

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \qquad (5.6)$$

مثال (٥-٨)

أوجد ما يلي:

$$1)\ \int (x^2 + 7x)\,dx \qquad 2)\ \int (10x^2 - 4\sqrt{x} + 2x^5)\,dx$$

الحل

$$1)\ \int (x^2 + 7x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 7x\,dx = \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + c$$

$$2)\ \int (10x^2 - 4\sqrt{x} + 2x^5)\,dx = \int 10x^2\,dx - \int 4\sqrt{x}\,dx + \int 2x^5\,dx$$

$$= 10\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + 2\frac{x^6}{6} + c$$

$$= \frac{10}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^6 + c$$

قاعدة (٥)

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + c \qquad (5.7)$$

قاعدة (٦)

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad (5.8)$$

قاعدة (٧)

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , \ n \neq -1 \qquad (5.9)$$

مثال (٥-٩)

أوجد ما يلي:

1) $\int (x-1)^5\, dx$

2) $\int (5x^2+2x)^{10}(10x+2)\, dx$

3) $\int \sqrt[3]{(x^2+x)^5}\,(2x+1)\, dx$

الحل

بتطبيق القاعدة (٧)

1) $$\int (x-1)^5\, dx = \frac{(x-1)^6}{6} + c$$

2) $$\int (5x^2+2x)^{10}(10x+2)\, dx = \frac{(5x^2+2x)^{11}}{11} + c$$

3) $$\int \sqrt[3]{(x^2+x)^5}\,(2x+1)\, dx = \int (x^2+x)^{5/3}(2x+1)\, dx$$

$$= \frac{(x^2+x)^{5/3+1}}{5/3+1} + c = \frac{3}{8}(x^2+x)^{8/3} + c$$

قاعدة (٨)

$$\int \frac{f_1'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c \qquad (5.10)$$

مثال (٥-١٠)

أوجد ما يلي:

1) $\int \frac{1}{(x+1)}\, dx$

2) $\int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+1)}\, dx$

$$\int \frac{(60x+90)}{(10x^2+30x)}\,dx \quad 3) \qquad \int \frac{1/4(6x^2+10x)}{\sqrt[4]{(2x^3+5x^2)^3}\sqrt[4]{(2x^3+5x^2)}}\,dx \quad 4)$$

الحل

$$\int \frac{1}{(x+1)}\,dx = \ln(x+1)+c \quad 1)$$

$$\int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+1)}\,dx = \ln(x^2-3x+1)+c \quad 2)$$

$$3)\ \int \frac{(60x+90)}{(10x^2+30x)}\,dx = 3\int \frac{(20x+30)}{(10x^2+30x)}\,dx$$

$$= 3\ln(10x^2+30x)+c = \ln(10x^2+30x)^3+c$$

$$4)\ \int \frac{1/4(6x^2+10x)}{\sqrt[4]{(2x^3+5x^2)^3}\sqrt[4]{(2x^3+5x^2)}}\,dx$$

$$= \int \frac{1/4(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2)^{3/4}(2x^3+5x^2)^{1/4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1/4(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(2x^3+5x^2)\right]+c$$

القاعدة (٩)

$$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c \qquad (5.11)$$

مثال (٥-١١)

أوجد ما يلي:

1) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$ 2) $\int (10x+3)\, e^{5x^2+3x}\, dx$ 3) $\int \frac{1}{x}\, e^{\ln x}\, dx$

الحل

1) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + c$

2) $\int (10x+3)\, e^{5x^2+3x}\, dx = e^{5x^2+3x} + c$

3) $\int \frac{1}{x}\, e^{\ln x}\, dx = e^{\ln x} + c$

ملحوظة:

لأختبار صحة التكامل يمكن إجراء عملية التفاضل للدالة التى تم الحصول عليها من عملية التكامل فإذا تساوت مع الدالة التي تم تكاملها كان التكامل صحيح – أو بعبارة أخرى، إذا كان:

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

فإن عملية التكامل تكون صحيحة إذا كان:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

وتكون غير صحيحة في حالة إذا كان:

$$\frac{df(x)}{dx} \neq f'(x) \qquad (5.12)$$

تمرين (٢)

١- أوجد التكاملات التالية

1) $\int 3\,dx$

2) $\int \sqrt{2}\,dx$

3) $\int x^6\,dx$

4) $\int 2x^3\,dx$

5) $\int 4t^{-6}\,dx$

6) $\int 3t^{-7}\,dx$

7) $\int \frac{2}{x^3}\,dx$

8) $\int e\sqrt{x}\,dx$

9) $\int \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$

10) $\int e^3\sqrt{x}\,dx$

11) $\int (3-5x)\,dx$

12) $\int (10+x+x^2)\,dx$

13) $\int (1+2x+4x^2)^5(2+8x)\,dx$

14) $\int 5e^x\,dx$

15) $\int e^{5x}\,dx$

16) $\int (1+x+xe^{x^2})\,dx$

17) $\int (\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x^3})\,dx$

18) $\int (\frac{x^3+2x^2-x}{3x})\,dx$

19) $\int \frac{x^4-1}{x^2}\,dx$

20) $\int \frac{dt}{(t+1)^{-2}}\,dx$

21) $\int (\sqrt{x}+\frac{3}{3}-2e^x)\,dx$

22) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}\,dx$

23) $\int (x+1)^2(1-\frac{1}{x})\,dx$

٢- أوجد $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f'(x) = 2x+1 \quad , \quad f(1)=3$

2) $f'(x) = 3x^2-6x \quad , \quad f(2)=4$

3) $f'(x) = 3x^2+4x-1 \quad , \quad f(2)=9$

4) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad f(4)=2$

5) $f'(x) = e^x-2x \quad , \quad f(0)=2$

6) $f'(x) = \frac{x-3}{x} \quad , \quad f(1)=2$

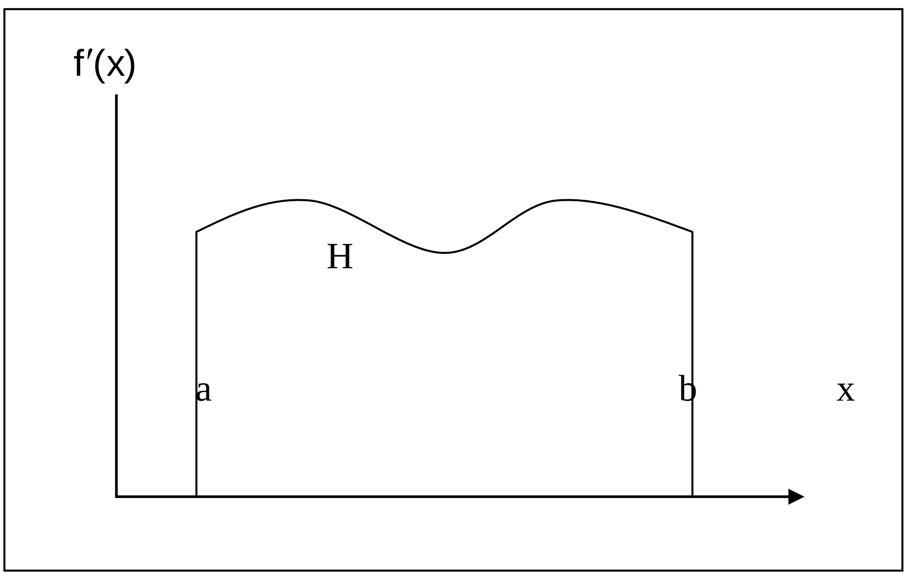
7) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad , \quad f(2)=\sqrt{2}$

8) $f'(x) = t^2-2t+3 \quad , \quad f(1)=2$

(٥-٣) التكامل المحدود Definite Integral

في الفصل السابق تناولنا عملية التكامل لبعض أنواع من الدوال الأكثر شيوعاً ويطلق على عملية التكامل هذه بالتكامل غير المحدود Indefinite Integral وذلك لتمييزها عن نوع أخر من عملية التكامل تسمى بالتكامل المحدود definite Integration. وفي هذه الفصل سوف نتناول بالدراسة مفهوم التكامل المحدود وأهميته من الناحية التطبيقية.

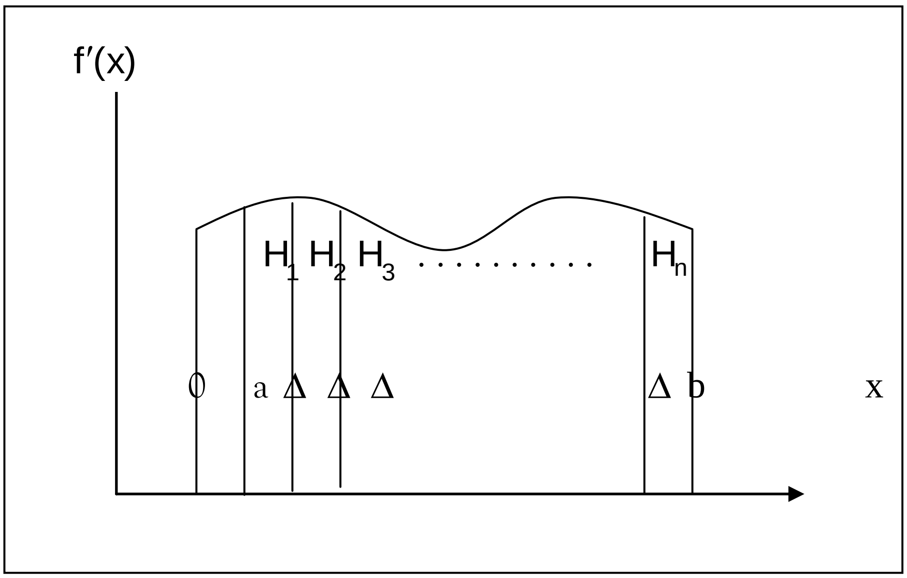
فإذا فرضنا أن الدالة $f'(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ فإن المساحة المحصورة بين محور المتغير (x) في الفترة $a \le x \le b$ ومنحنى الدالة $f'(x)$ ولتكن H، كما هو موضح بالشكل التالي:



شكل (٥-٢): يوضح المساحة المحصورة بين محور x في الفترة $[a,b]$ ومنحنى الدالة $f'(x)$ والتي تساوى H.

ويمكن حساب المساحة H بتجزيئها إلى عدد n من المستطيلات المتلاصقة والمتساوية في القاعدة حيث قاعدة كل مستطيل تساوى Δ ومساحة كل منها H_i، $i = 1,2,...,n$ وذلك بتجزئة الفترة $[a,b]$ إلى عدد n من الفترات المتساوية طول كل منها يساوى Δ كما هو موضح في الشكل التالي حيث:

$$\Delta = \frac{b-a}{n} \tag{5.13}$$



شكل (٥-٣): يوضح تجزئ المساحة H إلى عدد n من مساحات المستطيلات الجزئية قاعدة كل منها تساوى Δ

وعندما $0 \to \Delta$ فإن $n \to \infty$.

وبما أن مساحة المستطيل رقم i هو H_i حيث:

$$H_i = \Delta f'(x_i) \quad , \quad i = 1,2,...,n \tag{5.14}$$

كذلك

$$H = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} H_i \tag{5.15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\Delta f'(x_1) + \Delta' f(x_2) + \ldots + \Delta f'(x_n) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta f'(x_i) \tag{5.16}$$

وعندما يكون المتغير (x) متغير متصل فإن إشارة المجموع $\sum_{i=1}^{n}$ تستبدل باشارة التكامل $\int_a^b$ وبالتالي فإن:

$$H = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta f'(x_i) = \int_a^b f'(x)\, dx \tag{5.17}$$

وتسمى كل من b , a بحدود التكامل حيث (a) يمثل الحد الأدنى للتكامل Lower Limit Of Integration، و تسمى (b) بالحد الأعلى للتكامل Upper Limit Of Integration. والطرف الأيمن من العلاقة (5.16) يقرأ التكامل المحدود للدالة $f'(x)$ من الحد الأدنى (a) إلى الحد الأعلى (b).

نظرية (٥-٢)

إذا كانت الدالة $f'(x)$ دالة متصلة في الفترة [a,b] حيث:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

فإن:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(x=b) - f(x=a) \tag{5.18}$$

مثال (٥-١٢)

أوجد كل من التكاملات التالية ووضح ذلك بيانياً في $(1,2)$

$$1)\int_0^2 (x+5)\,dx \quad , \quad 2)\int_0^2 (x^2-4)\,dx$$

$$3)\int_4^6 \left[\frac{2x}{x^2-1}\right] dx \quad , \quad 4)\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$$

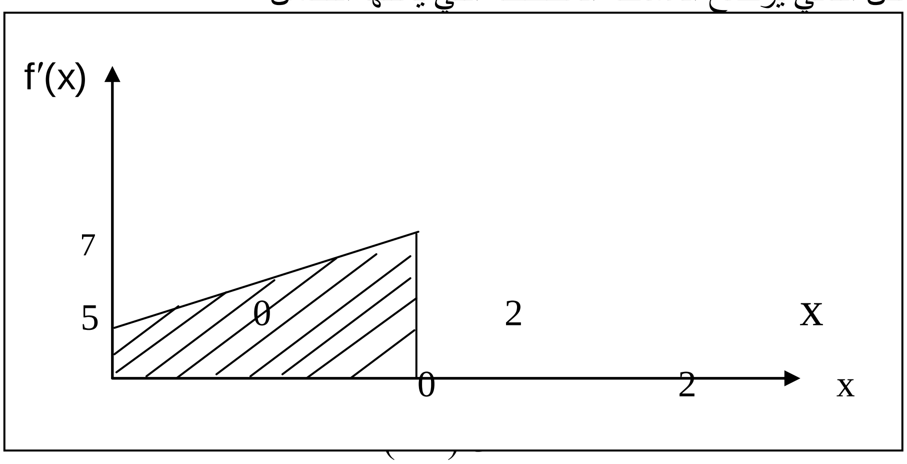
$$5)\int_0^3 (x^2+2x+1)^5(x+1)\,dx \quad , \quad 6)\int_0^\infty e^{-3x+1}\,dx$$

الحل

$$1)\int_0^2 (x+5)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{2^2}{2}+5(2)\right)-\left(\frac{0^2}{2}+5(0)\right) = 12-0 = 12$$

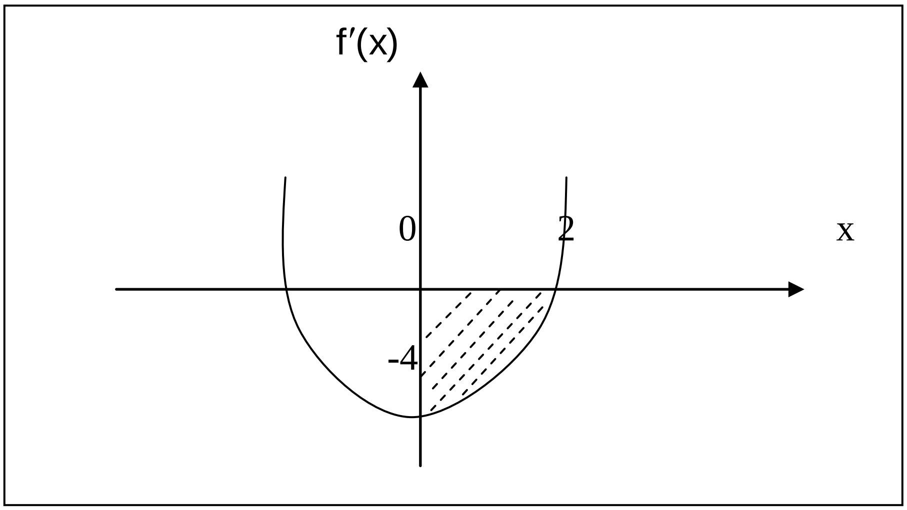
والشكل التالي يوضح المساحة المخططة التي يمثلها التكامل



$$2)\ \int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_0^2=\left(\frac{2^3}{3}-4(2)\right)-\left(\frac{0^3}{3}-4(0)\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}-8\right)-(0)=2.66-8=-5.34$$

والشكل التالي يوضح المساحة المخططة التي يمثلها التكامل



شكل (٥-٥)

$$3)\ \int_{4}^{6}\left[\frac{2x}{x^2-1}\right]dx=\ln(x^2-1)\Big|_4^6=\ln(6^2-1)-\ln(4^2-1)$$

$$=\ln(35)-\ln(15)=3.56-2.71=0.85$$

$$4)\ \int_{-\infty}^{0}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5}2e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2}\left[e^{0}-e^{-\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[1-0]=\frac{1}{2}$$

$$5)\ \int_0^3 (x^2+2x+1)^5(x+1)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^3 6(x^2+2x+1)^5(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+2x+1)^6\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[(3^2+2(3)+1)^6-(0^2+2(0)+1)^6\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[(16)^6-(1)^6\right]$$

$$= \frac{1}{6}[16777216-1]$$

$$= 27962025$$

$$6)\ \int_0^\infty e^{-3x+1}\,dx = \frac{1}{-3}\int -3\,e^{-3x+1}\,dx = \frac{-1}{3}(e^{-3x+1})\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{3}\left[e^{-3(\infty)+1}-e^{-3(0)+1}\right] = \frac{-1}{3}[0-e]$$

$$= \frac{-1}{3}(-2.718) = 0.906$$

خصائص التكامل المحدود

١- إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في المتغير x، ومعرفة في الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (5.19)$$

مثال (٥-١٣)

إذا كان:

$$\int_{-3}^{2} 30x^2\ dx = 30\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-3}^{2} = 10\left[2^3 - (-3)^3\right] = 10\,[8+27] = 350$$

(1)

كذلك نجد أن:

$$\int_{2}^{-3} 30x^2\ dx = 30\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{2}^{-3} = 10\left[(-3)^3 - 2^3\right] = 10\,[-\ 27 -\ 8] = -350$$

(2)

من (1) ، (2) نجد أن:

$$\int_{2}^{-3} 30x^2\ dx = -\int_{-3}^{2} 30x^2\ dx$$

٢- إذا كان c عدد حقيقي فإن:

$$\int_{c}^{c} f(x)\ dx = 0 \qquad (5.20)$$

مثال (٥-١٤)

$$\int_{10}^{10} (x^5 + 3)\ dx = \left(\frac{x^6}{6} + 3x\right)\Bigg|_{10}^{10}$$

$$= \left(\frac{(10)^6}{6} + 3(10)\right) - \left(\frac{(10)^6}{6} + 3(10)\right) = 0$$

٣- إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة ومعرفة في الفترة $[a,b]$، c نقطة بحيث $a \le c \le b$ فإن:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (5.21)$$

مثال (٥-١٥)

أثبت أن:

$$\int_1^3 6x^5\,dx = \int_1^2 6x^5\,dx + \int_2^3 6x^5\,dx$$

الحل

الطرف الأيسر

$$\begin{aligned}\int_1^3 6x^5\,dx &= (x^6)\Big|_1^3 \\ &= (3)^6 - (1)^6 = 729 - 1 = 728\end{aligned} \qquad (1)$$

الطرف الأيمن

$$\begin{aligned}\int_1^2 6x^5\,dx + \int_2^3 6x^5\,dx &= (x^6)\Big|_1^2 + (x^6)\Big|_1^3 \\ &= (2^6 - 1^6) + (3^6 - 2^6) \\ &= 64 - 1 + 729 - 64 = 728\end{aligned} \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن:

$$\int_1^3 6x^5\,dx = \int_1^2 6x^5\,dx + \int_2^3 6x^5\,dx$$

٤- إذا كان c مقدار ثابت فإن

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_b^a f(x)\,dx \qquad (5.22)$$

مثال (٥-١٦)

أوجد

$$\int_3^5 100(x^2 - x + 1)\,dx = 100\int_3^5 (x^2 - x + 1)\,dx$$

$$= 100\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_3^5$$

$$= 100\left\{\left(\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2} + 5\right) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\right)\right\}$$

$$= 100\{(41.7 - 12.5 + 5) - (9 - 4.5 + 3)\}$$

$$= 100\{(34.2) - (7.5)\}$$

$$= 2670$$

تمرين (٣)

١- أوجد كل مما يلي:

1) $\int_{2}^{4} 10\, dx$

2) $\int_{-1}^{3} (-5)\, dx$

3) $\int_{1}^{3} (2x+5)\, dx$

4) $\int_{-1}^{0} (4-x)\, dx$

5) $\int_{-1}^{3} x^2\, dx$

6) $\int_{0}^{2} 10\, x^4\, dx$

7) $\int_{1}^{8} 4\, x^{1/3}\, dx$

8) $\int_{1}^{4} 2\, x^{-3/2}\, dx$

9) $\int_{0}^{1} \sqrt{2x}\, (\sqrt{x}+\sqrt{2})\, dx$

10) $\int_{1}^{4} \frac{3x^2 - 2x^2 + 4}{x^2}\, dx$

٢- تقوم أحدى شركات أنتاج الأدوات الكهربائية المنزلية بإنتاج الأفران الكهربائية المنزلية. فإذا قدرت أدارة الإنتاج التكلفة الهامشية للإنتاج اليومي بالدالة $C'(x)$ حيث (x) عدد الوحدات المنتجة يومياً بحيث

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.12x + 20$$

فإذا كانت التكلفة اليومية الثابتة للإنتاج تساوى 5000 جنيه. أوجد:

أ- دالة التكلفة الكلية اليومية.

ب- التكاليف الكلية إذا كان الحد الأدنى للإنتاج اليومي 30 وحدة والحد الأعلى 50 وحدة.

٣- أوجد كل مما يلي

1) $\int_{-1.3}^{2.5} (0.2x^4 - 0.32x^3 + 1.2x - 1)\,dx$

2) $\int_{1}^{3} x(x^4 - 1)^{3.2}\,dx$

3) $\int_{0}^{2} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

(٥-٤) التكامل المزدوج Double Integration

في الفصول السابقة عرفنا عملية التكامل للدالة $f(x)$ (حيث $f(x)$ دالة في متغير واحد x) بأنها عملية الحصول على الدالة $F(x)$ التي تفاضلها يساوي $f(x)$ أو بعبارة أخري:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{5.23}$$

كذلك:

$$F(x) = \int f(x)\ dx \tag{5.24}$$

ولكن في كثير من التطبيقات الفعلية كما سوف نوضح في الأمثلة التالية يكون المطلوب إيجاد الدالة $F(x,y)$ باستخدام الدالة $f(x,y)$ حيث كل من الدالتين $f(x,y)$ ، $F(x,y)$ دالة في المتغيرين x,y.

ويسمي إيجاد الدالة $F(x,y)$ باستخدام الدالة $f(x,y)$ بالتكامل المزدوج Double Integral ويرمز لهذه العملية بالرمز:

$$\int_y\int_x f(x,y)\ dx\,dy \tag{5.25}$$

حيث أن:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y) = f(x,y) \tag{5.26}$$

أو بعبارة أخري:

$$F(x,y) = \int_y\int_x f(x,y)\ dx\,dy \tag{5.27}$$

ويمكن الحصول على التكامل المزدوج بإيجاد $\int_x f(x,y)\,dx$ أولاً فيصبح دالة

في المتغيرين x, y ولنرمز لها بالرمز $g(x,y)$، حيث:

$$g(x,y) = \int_x f(x,y)\,dx \qquad (5.28)$$

وبالتالي فإن:

$$F(x,y) = \int_y [\int_x f(x,y)\,dx]\,dy = \int_y g(x,y)\,dy \qquad (5.29)$$

حيث يمكن الحصول على $\int_y g(x,y)\,dy$ باستخدام الطرق السابق تقديمها في الفصلين

السابقين.

ملحوظة: إذا كان التكامل بالنسبة لـ x تكامل محدود فإن الدالة $g(x,y)$ تصبح دالة في

y فقط.

مثال (٥-١٧)

أوجد ما يلي:

$$\iint (3x + 5y)\;dx\,dy$$

حيث: $1 \le y \le 2 \quad , \quad 1 \le x \le 4$

الحل

$$\int_1^2 [\int_1^4 (3x + 5y)\,dx]\,dy = \int_1^2 [\frac{3}{2}x^2 + 5xy]_1^4\,dy \qquad (1)$$

وبما أن:

$$\left[\frac{3}{2}x^2 + 5xy\right]_1^4 = \left(\frac{3}{2}(4)^2 + 5(4)y\right) - \left(\frac{3}{2}(1)^2 + 5(2)y\right)$$

$$= (24 + 20y) - (\frac{3}{2} + 5y) = (\frac{45}{2} - 15y) \qquad (2)$$

بالتعويض في (1) بـ (2) نجد أن:

$$\int_1^2 [\int_1^4 (3x + 5y)\, dx]\, dy = \int_1^2 (\frac{45}{2} - 15y)\, dy = \left[\frac{45}{2}y - \frac{15}{2}y^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{45}{2}(2) - \frac{15}{2}(2)^2\right] - \left[\frac{45}{2}(1) - \frac{15}{2}(1)^2\right]$$

$$= [45 - 30][\frac{45}{2} - \frac{15}{2}] = [15] - [15] = 0$$

نظرية (٥-٣)

أ) إذا فرضنا أن $g_1(x), g_2(x)$ دوال متصلة في الفترة $[a,b]$، والمنطقة R Region معرفة بحيث:

$$R = \{(x,y) \mid g_1(x) \le y \le g_2(x); a < x < b\} \qquad (5.30)$$

فإن:

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b [\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy]\, dx \qquad (5.31)$$

ب) بالمثل إذا فرضنا أن $h_1(y), h_2(y)$ دوال متصلة في الفترة $[c,b]$، بحيث:

$$R = \{(x,y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y); c \le y \le d\} \qquad (5.32)$$

فإن:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\Big]\,dy \qquad (5.33)$$

مثال (٥-١٨)

أوجد

$$\iint_R x\,e^y\;dx\,dy$$

حيث: $x^2 \le y \le 4 \quad , \quad 0 \le x \le 2$

الحل

$$\int_0^2\int_{x^2}^4 x\,e^y\;dx\,dy = \int_0^2 x\,\Big[\int_{x^2}^4 e^y\;dy\Big]\,dx \qquad (1)$$

وبما أن:

$$\int_{x^2}^4 e^y\;dy = \left[e^y\right]_{x^2}^4 = e^4 - e^{x^2} \qquad (2)$$

بالتعويض في (1) بـ (2) نجد أن:

$$\int_0^2 x(e^4 - e^{x^2})\,dx = \int_0^2 xe^4\;dx - \int_0^2 xe^{x^2}\;dx$$

$$= e^4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^2$$

$$= e^4\left[\frac{(2)^2}{2} - 0\right] - \frac{1}{2}\left[e^4 - e^0\right]$$

$$= 2e^4 - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}$$

مثال (٥-١٩)

إذا اعتبرنا مدينة ما مركزها النقطة $(0,0)$ حيث المحورين x, y يمثلان المستوي الذي تقع فيه مساحة المدينة. فإذا فرضنا أن الدالة $f(x, y)$ تمثل الكثافة السكانية بالألف نسمة في الموضع (x, y)، وبالتالي فإن عدد السكان في المنطقة R هو عبارة عن الدالة $F(x, y)$ حيث:

$$F(x, y) = \iint_R f(x, y)\ dx\,dy \qquad (5.34)$$

فإذا فرضنا دالة الكثافة السكانية $f(x, y)$ حيث:

$$f(x, y) = 50{,}000e^{-0.3x-0.2y}$$

كذلك:

$$R = \{\ (x,y)\ |\ -10 \le x \le 10\ \ , -5 \le y \le 5\}$$

أوجد عدد السكان في المساحة R_1 حيث:

$$R_1 = \{\ (x, y)\ |\ 2 \le x \le 5\ \ , 0 \le y \le 5\}$$

وبالتالي عدد السكان في المساحة R_1 يساوي $F(x, y)$ حيث:

$$F(x, y) = \iint_R f(x, y)\ dx\,dy = \int_0^{15} [\int_2^5 50{,}000e^{-0.3x-0.2y}\ dx]\ dy$$

$$= \int_0^5 50{,}000e^{-0.2y}\left[e^{-0.3x}\ dx\right]_2^5\ dy$$

$$= \int_0^5 50{,}000e^{-0.2y}(1.08561)dy = \int_0^5 (54{,}280.5)e^{-0.2y}\ dy$$

$$= (54,280.5)\left[\frac{-1}{0.2}e^{-0.2}\right]_0^5 = (-271{,}402.5)\left[e^{-0.2}\right]_0^5$$

$$= (-271.402.5)(-0.63212559) = 171{,}560.47 \text{ ألف نسمة}$$

تمرين (٤)

(١) أوجد ما يلي

$$1)\ \iint_R (4 - 2x - y)\ \ dx\,dy$$

بحيث:

$$R = \{\,(x,y)\,|\,0 \le x \le 1\ \ ;0 \le y \le 2\}$$

$$2)\ \iint_R (x^2 + y^2)\ \ dx\,dy$$

حيث R تمثل مستطيل رؤسة النقاط التالية:

$$(0,0)\ ,(1,0),(1,2),(0,2)$$

$$3)\ \iint_R e^{x+2y}\ \ dx\,dy$$

حيث R تمثل مثلث رؤسة النقاط التالية:

$$(0,0)\ ,(1,0),(0,1)$$

$$4)\ \iint_R (6x^2y^3)\ \ dx\,dy$$

بحيث:

$$R = \{\,(x,y)\,|\,0 \le x \le 2\ \ ;0 \le y \le 3\}$$

$$5)\ \iint_R \ln x\ dx\,dy$$

بحيث:

$$2x \le y \le 0 \quad , \quad 1 \le x \le 3$$

(٢) إذا كانت دالة كثافة السكان في أحدي المدن $f(x,y)$ على النحو:

$$f(x,y) = \frac{50{,}000\, xy}{(x^2+20)(y^2+30)}$$

حيث:

$$R = \{\, (x,y) \mid -20 \le x \le 20\,,\ -15 \le y \le 15 \}$$

أوجد عدد سكان هذه المدينة.

(٥-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٥-١)

إذا كان العائد الهامشى الحدي اليومى عبارة عن دالة $R^{\backslash}(x)$ حيث (x) عدد الوحدات المباعة في اليوم من إحدى السلع

$$R^{\backslash}(x) = -0.1x + 40$$

حيث $R^{\backslash}(x)$ تقاس بالجنيه للوحدة.

١- أوجد العائد الكلي $R(x)$ عند بيع عدد 50 وحدة في اليوم.

٢- أوجد العائد اليومي عند مستوى بيع من 200 إلى 300 وحدة.

الحل

١- بما أن:

$$R(x) = \int R^{\backslash}(x)\,dx = \int (-0.1x + 40)\,dx = -0.1\frac{x^2}{2} + 40x + c$$

كذلك $R(x = 0) = 0$ فإن

$$R(x = 0) = 0 = c \quad \rightarrow$$

$$R(x) = -0.05x^2 + 40x$$

٢- عند مستوى بيع من 200 إلى 300 فإن العائد في هذه الحالة يصبح على النحو

$$\int_{200}^{300} R^{\backslash}(x)\,dx = (-0.05x^2 + 40x)\Big|_{200}^{300}$$

$$= (-0.05(300)^2 + 40(300)) - (-0.05(200)^2 + 40(200))$$

$$= 1500 \text{ جنيه}$$

تطبيق (٥-٢)

في التطبيق السابق، إذا كانت $P^{\backslash}(x)$ تشير إلى دالة الربح الهامشي الحدي اليومى في حالة بيع عدد (x) من الوحدات المنتجة حيث:

$$P^{\backslash}(x) = -0.0003(x)^2 + 0.02x + 20$$

فإذا كانت التكاليف الثابتة تساوى 800، وبالتالي فإن دالة الربح عند $x = 0$ تساوي (-800) أى ان:

$$P(x = 0) = -800$$

١- أوجد دالة الربح اليومي بالجنيه – ثم أوجد الربح عند بيع عدد 200 وحدة يومياً.

٢- أوجد الربح اليومي إذا زادت المبيعات من 200 وحدة إلى 220 وحدة في اليوم.

الحل

١- إذا فرضنا أن $P(x)$ هي دالة الربح فإن:

$$\int P^{\backslash}(x)\,dx = \int (-0.0003x^2 + 0.02x + 20)\,dx$$
$$= -0.0001x^3 + 0.01x^2 + 20x + c$$

وبما أن:

$$P(x=0) = -800$$

فإن:

$$c = -800 \quad \rightarrow$$
$$P(x) = -0.0001x^3 + 0.01x^2 + 20x - 800$$

وعند بيع 200 وحدة فإن الربح في هذه الحالة يساوى

$$= P(x=200)$$
$$P(x=200) = -0.0001(200)^3 + 0.01(200)^2 + 20(200) - 800$$
$$= -800 + 400 + 4000 - 800 = 2800 \text{ جنيه}$$

٢- الربح عند زيادة الوحدات المباعة من 200 وحدة إلى 220 يساوى

$$\int_{200}^{220} P^{\backslash}(x)\,dx = (-0.0001x^3 + 0.01x^2 + 20x)\Big|_{200}^{220}$$
$$= [-0.0001(220)^3 + 0.01(220)^2 + 20(220)] -$$
$$[-0.0001(200)^3 + 0.01(200)^2 + 20(200)]$$
$$= 38192 - 3600 = 2192 \text{ جنيه}$$

تطبيق (٥-٣)

في إحدى الدول المتقدمة تم تقدير عدد السكان في سن 65 سنة فأكثر بالمليون في السنة t من خلال الدالة

$$f(t) = \frac{85}{1 + 1.859e^{-0.66t}} \quad , \ 0 \le t \le 5$$

حيث t تقاس بالعشر سنوات، كذلك $t = 0$ في عام 2000.

المطلوب: أوجد متوسط عدد السكان في سن 65 سنة فأكثر خلال الفترة من 2000 إلى 2030.

الحل

١- متوسط عدد السكان في السنة خلال الفترة من 2000 إلى 2030 في سن 65 سنة فأكثر يساوى

$$\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \{85(e^{0.66t}) / e^{0.66t} + 1.859\}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \{(85e^{0.66t})(e^{0.66t} + 1.859)^{-1}\}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{85}{0.66}\{(0.66e^{0.66t})(e^{0.66t} + 1.859)^{-1}\}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{85}{0.66})\ln(e^{0.66t} + 1.859)\Big|_0^3$$

$$= 42.9293\{\ln(9.102) - \ln(1.859)\} = 42.9293\ln(\frac{9.102}{1.859})$$

$$= 42.9293(1.5884) = 68.19 \text{ مليون نسمة}$$

تطبيق (٥-٤)

إذا فرضنا أن معدل تدفق الدم في الشريان يساوي V حيث

$$V = \int_0^R \frac{k}{L} x\,(R^2 - x^2)\, dx$$

حيث تقاس V بالسنتمتر المكعب في الثانية، L طول الشريان، R نصف قطر الشريان

الحل

$$V = \int_0^R \frac{k}{L} (R^2x - x^3)\, dx = \int_0^R \frac{k}{L} R^2x\, dx - \int_0^R \frac{k}{L} x^3\, dx$$

$$= \frac{k}{L}\left\{ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R \right\} = \frac{k}{L}\left\{ \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right\}$$

$$= \frac{k}{L}\left\{ \frac{2R^2 - R^4}{4} \right\} = \frac{k}{4L} R^2(2 - R^2)$$

تطبيق (٥-٥)

إذا كان عدد الوحدات الموجودة في المخزن في الزمن t يشار إليه بالدالة $f(t)$ حيث

$$f(t) = H - r\sqrt{t}$$

حيث يتم نقل الشحنة المكونة من H من الوحدات إلى المخزن فور خروج آخر وحدة من المخزون في المخزن. فإذا كان معدل السحب للوحدات من المخزون غير ثابت.

١- أوجد الزمن T المطلوب لوصول الشحنة التالية للمخزن.

٢- أوجد متوسط $f(t)$ خلال الفترة $[0,t]$.

الحل

١- تصل الوحدة الثانية للمخزن عندما

$$f(t) = 0 = H - r\sqrt{t} \qquad \to \qquad \frac{H}{r} = \sqrt{t}$$

$$\therefore\ T = t = \frac{H^2}{r^2}$$

٢- متوسط $f(t)$ خلال الفترة $[0,T]$ يساوى:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (H - r\,t^{1/2})\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\int_0^T H\,dt - \int_0^T r\,t^{1/2}\,dt\right\} = \frac{1}{T}\left\{H(t)\Big|_0^T - \frac{r}{3/2}\left(t^{1\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^T\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{HT - \frac{3}{2}rT^{1\frac{1}{2}}\right\} = \frac{T}{T}\left\{H - \frac{2r}{3}\sqrt{T}\right\} = H - \frac{2r}{3}\sqrt{T}$$

تطبيق(٥-٦)

إذا فرضنا أن العدد المتوقع للأشخاص الذين يموتون غرقاً في جمهورية مصر العربية في نهاية العام t دالة في t وسوف نشير إلى هذا العدد بالرمز $f(t)$ حيث

$$f(t) = 502t^2 - 600t + 250 \quad , \quad 0 \le t \le 5$$

حيث $t = 0$ في بداية عام ٢٠٠٧.

أ- أوجد العدد المتوقع للذين يموتون غرقاً في نهاية عام ٢٠٠٩.

ب- أوجد العدد المتوقع للغرقى من بداية عام ٢٠٠٨ إلى نهاية عام ٢٠١٠.

الحل

أ- العدد المتوقع للغرقى في عام ٢٠٠٩ يساوى $f(t=2)$ حيث نجد أن $t=2$ في بداية عام ٢٠٠٩

$$f(t=2) = 502(2)^2 - 600(2) + 250 = 2008 - 1200 + 25 = 1058$$
شخص

ب- العدد المتوقع للغرقى من بداية عام ٢٠٠٨ إلى نهاية عام ٢٠١٠ يساوى

بما أن t في بداية عام ٢٠٠٨ يساوى (1) كذلك t في نهاية عام ٢٠١٠ يساوى (4). وبالتالي فإن العدد المتوقع للغرقى من بداية عام ٢٠٠٨ إلى نهاية عام ٢٠١٠ يساوى

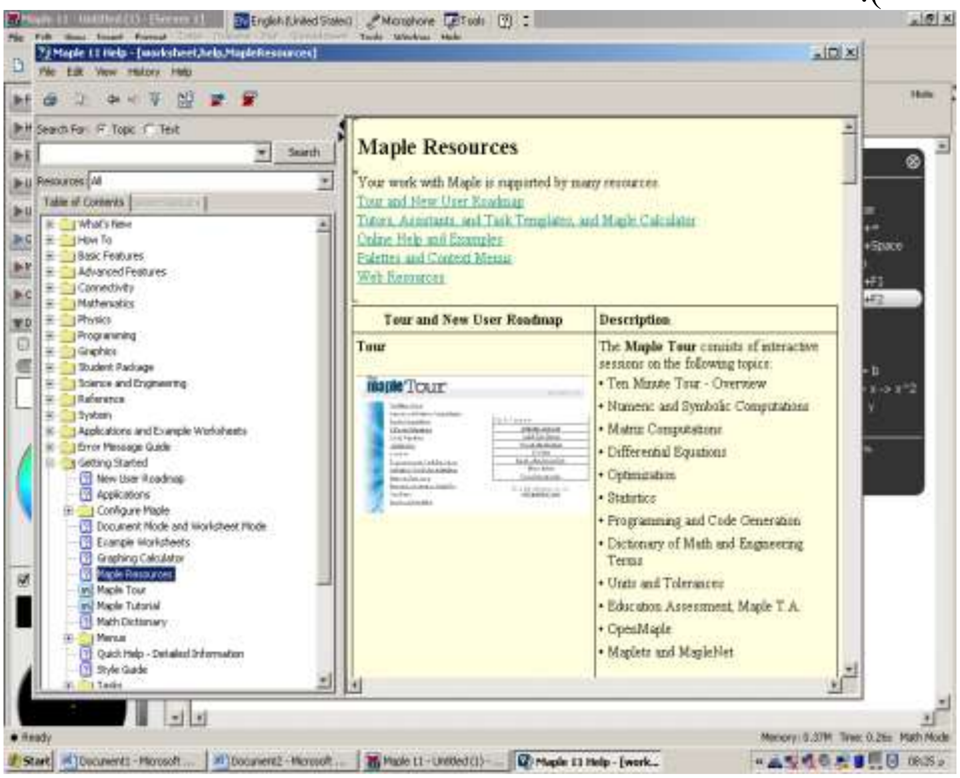
$$\int_1^4 f(t)\,dt = \int_1^4 ((502)t^2 - 600t + 250)\,dt$$
$$= \left[502\frac{t^3}{3} - 600\frac{t^2}{2} + 250t\right]_1^4$$
$$= \left[167.33(4)^3 - 300(4)^2 + 250(4)\right] - \left[167.33(1)^3 - 300(1)^2 + 250(1)\right]$$
$$= 6909.12 - 117.33 = 6791.79 \approx 6{,}791$$
غريق

(٥-٦) استخدام الحزمة الرياضية

Using The Mathematical Package

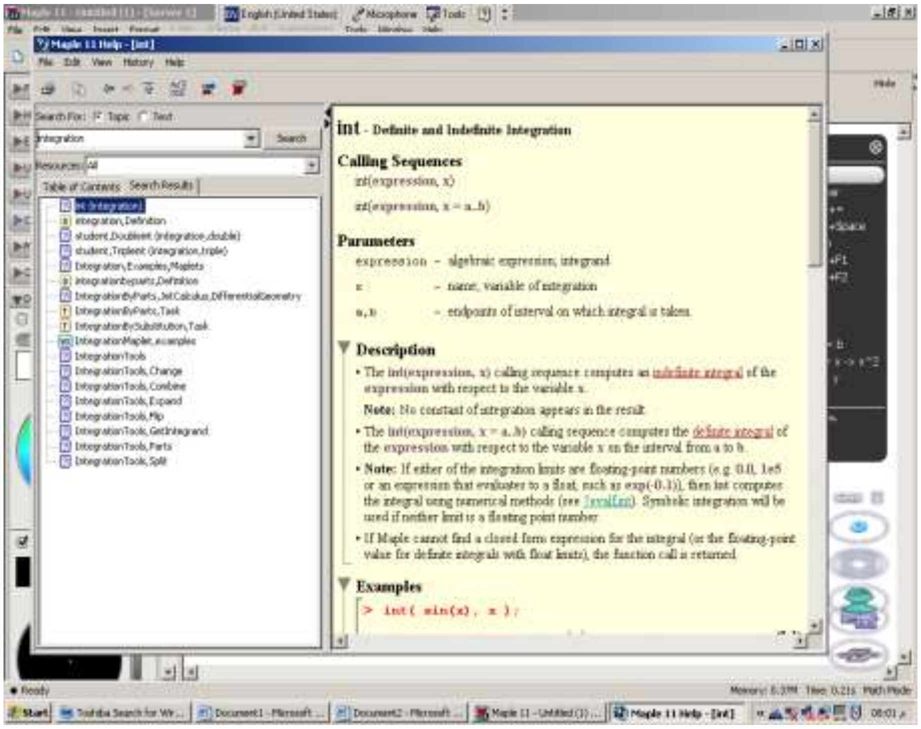
وفي هذا الفصل سوف نتناول استخدام الحزمة الرياضية **Maple 11** لإيجاد التكامل غير المحدود والتكامل المحدود والتكامل المزدوج وذلك بأتباع الخطوات التالية:

١- أستدعاء **Maple 11** كما هو موضح بملحق (١) – فنحصل على الشكل (٥-٦).



شكل (٥-٦)

يتم كتابة Integration في المستطيل في يسار الصفحة في شكل (٥-٦) ثم نضغط على Search فيظهر شكل (٥-٧).



شكل (٥-٧)

٢- وفي شكل (٥-٧) يمين الصفحة نجد توصيف لأوامر أدخال الدوال المراد تكاملها ومجموعة من الأمثلة المحلولة. وفيما يلي بعض هذه الأومر:

أ) إذا كان المطلوب تكامل الدالة $f(x)$ أي المطلوب $\int f(x)\,dx$ حيث المطلوب تكامل غير محدود Indefinite Integral فيكتب الأمر على النحو التالي:

```
> int(f(x),x);
```
(5.35)

ب) أما إذا كان التكامل محدود Definite Integral أي إيجاد $\int_a^b f(x)\,dx$ فيكتب الأمر على النحو التالي:

```
> int(f(x),x=a..b);
```
(5.36)

ج) أما إذا كان المطلوب تكامل مزدوج للدالة f(x,y) أي المطلوب $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ فيكتب الأمر على النحو التالي:

```
> int(int(f(x,y),x),y);
```
(5.37)

د) أما إذا كان المطلوب تكامل مزدوج محدود للدالة f(x,y) أي المطلوب $\int_a^b\int_c^y f(x,y)\,dx\,dy$ فيكتب الأمر على النحو التالي:

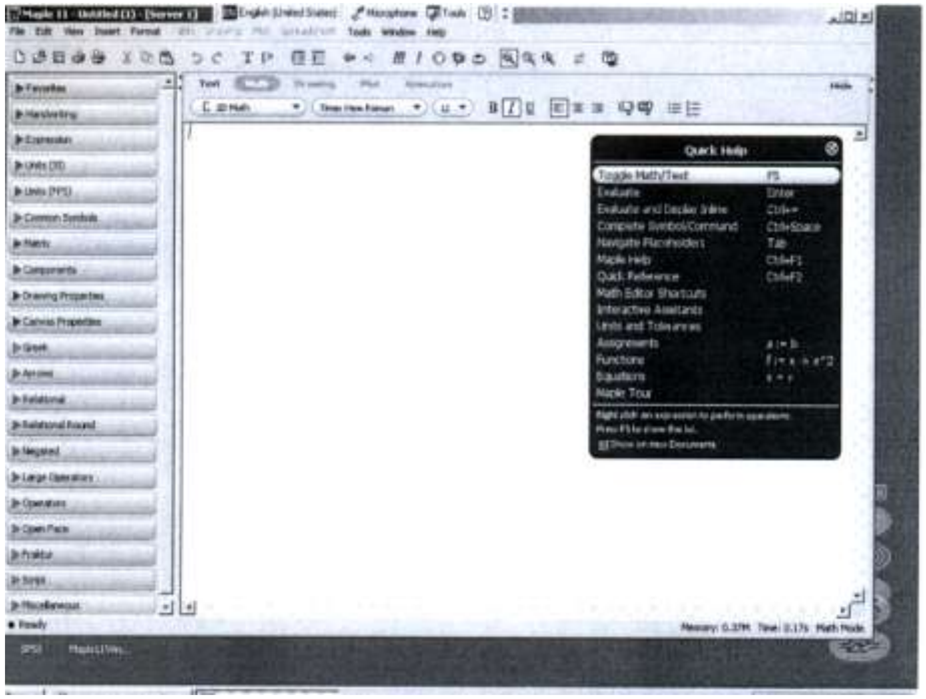
```
> int(int(f(x,y),x=c..y),y=a..b);
```
(5.38)

وكما وضحنا سابقاً توجد طريقتين للحصول على التكامل

الطريقة الأولي

٣- أستدعاء المستطيل النشط بالضغط على أيقونة Maple 11 في الشريط أسفل الصفحة بشكل (٥-٧) فنحصل على شكل (٥-٨).

ويتم كتابة أمر الأدخال في المستطيل النشط كما سبق التوضيح بالخطوة ٢ – ثم نضغط على مفتاح Enter فنحصل على التكامل المطلوب.



شكل (٥-٨)

الطريقة الثانية

٣- يتم أخذ نسخة (Copy) من الأمثلة المحلولة في (٢) ثم استدعاء المستطيل النشط كما هو موضح في الشكل (٥-٨).

٤- لصق (Paste) الأمثلة الماخوذة في(٣) في المستطيل النشط في شكل(٥-٨)

٥- اختيار المثال المناسب (المتماثل فيه أمر الأدخال) ثم تغير الدالة في المثال بالدالة المراد تكاملها.

٦- الضغط على مفتاح Enter فنحصل على التكامل المطلوب.

وفيما يلي سوف نقدم بعض الأمثلة.

مثال (٥-٢٠)

باستخدام Maple 11 أوجد ما يلي:

$1 - \int (x^3 - 1)\,dx \qquad 2 - \int e^{-5x}\,dx \qquad 3 - \int e^{-x}\,x^3\,dx$

الحل

باستخدام الطريقة الأولي أو الثانية نحصل على الحل في الشكل التالي:

```
> int( (x^3-1), x );
```

$$\frac{1}{4}x^4 - x \qquad (1.4)$$

```
> int( exp(-5*x), x );
```

$$-\frac{1}{5}e^{-5x} \qquad (1.5)$$

```
> int( exp(-x)*(x)^3, x );
```

$$-(6 + 6x + 3x^2 + x^3)\,e^{-x} \qquad (1.6)$$

شكل (٥-٩)

مثال (٥-٢١)

أوجد ما يلي:

$1 - \int\int x\,y^2\,dx\,dy \qquad 2 - \int \left(\frac{1}{t^2} + 5t\right) dt \qquad 3 - \int_{-2}^{2}\int_{0}^{y} 2\,x\,y^2\,dx\,dy$

الحل

باستخدام الطريقة الأولي أو الثانية نحصل على الحل في الشكل التالي:

A double integral

```
> int(int(x*y^2, x ), y );
```

$$\frac{1}{6}x^2y^3 \qquad (1.10)$$

```
> int((1/t^2)+5*t, t );
```

$$-\frac{1}{t}+\frac{5}{2}t^2 \qquad (1.9)$$

A double integral

```
> int(int(2*x*y^2, x = 0..y), y = -2..2);
```

$$\frac{64}{5} \qquad (1.10)$$

The same integral using numerical methods

```
> int(int(2*x*y^2, x = 0.0..y), y = -2.0..2.0);
```

$$12.80000000 \qquad (1.11)$$

شكل (٥-١٠)

(٥-٧) تمرينات Exercises

(٥-١) أوجد الدالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f'(x) = 3e^{x} + x \quad , \quad f(0) = 4$

2) $f''(x) = 12 \quad , \quad f'(0) = 2 \quad , \quad f(0) = 3$

3) $f''(x) = 2x \quad , \quad f'(0) = -3 \quad , \quad f(0) = 2$

(٥-٢) أوجد ما يلي:

1) $\int x^{1/4}(x^{5/4} - 4)\, dx$

2) $\int \frac{e^{x} + 3}{e^{x}}\, dx$

3) $\int (\sqrt{x^{3}} + 4)\, dx$

4) $\int x^{2/3}(x^{-4/3} - 3)\, dx$

5) $\int \frac{4}{\sqrt{1 - x^{2}}}\, dx$

6) $\int (2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$

7) $\int \frac{x + x^{3/4}}{x^{5/4}}\, dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt[8]{x^{3}}}\, dx$

(٥-٣) أوجد كل مما يلي:

1) $\int_{1}^{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{x^{2}})\, dx$

2) $\int_{0}^{4} e^{-2x}\, dx$

3) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{x}\, dx$

4) $\int_{0}^{3} xe^{5x}\, dx$

5) $\int_{0}^{2} (\sqrt{x^{2} + 1}\, dx$

6) $\int_{0}^{2} (\sqrt{x} + 1)^{2}\, dx$

$$\int_1^4 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx \quad 7)$$

$$\int_0^{\ln 2} (e^{t/2})^2\,dx \quad 8)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \quad 9)$$

$$\int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx \quad 10)$$

(٥-٤) في أحدى مخازن البضائع يتم نقل الكمية Q من الوحدات إلى المخزن بمجرد سحب أخر وحدة في المخزن حيث أن معدل السحب للوحدات غير ثابت Unconstant فإذا كان $f(t)$ تشير إلى عدد الوحدات في المخزن في الزمن t حيث:

$$f(t) = Q - r\sqrt{t}$$

١- أوجد الزمن t المطلوب لوصول الشحنة التالية للمخزن.

٢- أوجد متوسط $f(t)$ على الفترة $[0,T]$.

(٥-٥) إذا كان العدد المتوقع للأفراد المصابين بأصابات خطيرة نتيجة حوادث الطريق في العام بجمهورية مصر العربية يمكن صياغته كدالة في الزمن (t)، وسوف نشير إليه بالرمز $f(t)$ حيث:

$$f(t) = -53.2t^4 + 673.7t^3 - 2801.07t^2 + 8833.38t + 8000$$

$$0 \le t \le 10$$

حيث $t = 0$ في بداية عام ٢٠٠٥.

أ- أوجد العدد المتوقع للمصابين في بداية عام ٢٠٠٩.

ب- أوجد العدد المتوقع للمصابين من بداية عام ٢٠٠٨ إلى نهاية عام ٢٠١٠.

(٥-٦) أوجد ما يلي:

1) $\iint (3x^2 + y)\ dx\,dy \quad , \ 0 \le x \le y \ , \ 5 \le y \le 10$

2) $\iint \frac{x+y}{(x-y)}\ dx\,dy \quad , \ 1 \le x \le 4 \ , \ 0 \le y \le 10$

3) $\iint e^{5x+7y}\ dx\,dy \quad , \ 0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le 3$

4) $\iint e^{x^2+y^2}\ dx\,dy \quad , \ 0 \le x \le y \ , \ -1 \le y \le -2$

5) $\iiint (3x^2 + 4y^2 - 2z^2)\ dx\,dy\,dz \quad , \ 0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le z$
$1 \le z \le 5$

6) $\iiint e^{x+y+z}\ dx\,dy\,dz \ , \ 0 \le x \le 1, 5 \le y \le 10, 1 \le z \le 2$

7) $\iint \ln(x+y)\ dx\,dy \quad , \ 2 \le x \le y \ , \ 3 \le y \le 5$

الباب السادس
أساليب التكامل
Integration's Techniques

(٦-١) التكامل بالتعويض — Integration By Substitution

(٦-٢) التكامل بالتجزئ — Integration By Parts

(٦-٣) التكامل باستخدام الكسور الجزئية — Integration By Partial Fractions

(٦-٤) جداول التكامل — Tables of Integration

(٦-٥) التكامل العددي — Numerical Integration

(٦-٦) أمثلة تطبيقية — Applied Examples

(٦-٧) تمرينات — Exercises

(٦-١) التكامل بالتعويض Integration By Substitution

في الباب السابق تناولنا بالتفصيل أهم القواعد التي باستخدامها يمكن إيجاد تكامل الدالة $f(x)$ حيث ترتبط هذه القواعد بقواعد التفاضل المناظرة لها مباشرة التي سبق تناولها في الباب الثالث، ولكن في كثير من الحالات لا تكون الدالة المراد تكاملها في شكل صريح من أشكال الدوال التي سبق تفاضلها. وفي هذه الحالات يمكن استخدام بعض الأساليب التي سوف نعرض أهمها في هذا الباب.

وفي هذا الفصل سوف نتناول أحد هذه الأساليب وهو التكامل بالتعويض كما سوف نوضح فيما يلي:

نظرية (٦-١)

إذا فرضنا أن $g(x)$ دالة في المتغير x، كذلك $F(g(x))$ دالة في المتغير $g(x)$ فإن:

$$\int F^{\backslash}(g(x))g^{\backslash}(x)dx = F(g(x)) + c \qquad (6.1)$$

الإثبات

إذا فرضنا أن $u = g(x)$ فإن $du = g^{\backslash}(x)dx$ وبالتالي فإن:

$$\int F^{\backslash}(u)du = F(u) + c \rightarrow \int F^{\backslash}(g(x))g^{\backslash}(x)dx = F(g(x)) + c$$

مثال (٦-١)

أوجد ما يلي:

$$1)\int 2x(x^2+3)^4\,dx \qquad 2)\int 3\sqrt{3x+1}\,dx$$

$$3)\int e^{-3x}\,dx$$

الحل

١- إذا فرضنا أن:

$$u = (x^2 + 3) \rightarrow du = 2x\,dx$$

فإن

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + c$$

٢- إذا فرضنا أن:

$$u = 3x + 1 \rightarrow du = 3\,dx$$

فإن

$$\int 3\sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = u^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{(3x+1)^3} + c$$

٣- إذا فرضنا أن: $u = -3x \rightarrow du = -\,3\,dx$

فإن

$$\int e^{-3x}\,dx = \int e^{u}\left(\frac{-1}{3}\right)du = \frac{-1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{-1}{3}e^{u} + c$$
$$= \frac{-1}{3}e^{-3x} + c$$

مثال (٦-٢)

إذا كان معدل التكلفة لإنتاج أحد المنتجات البترولية في السنة t يساوي $c^{\backslash}(t)$ في السنة t، $C(t)$ هي دالة التكلفة بالمليون جنيه في السنة t حيث:

$$c^{\backslash}(t) = \frac{50}{(3t+2)^2} \qquad 0 \le t \le 20$$

المطلوب:

أوجد دالة التكلفة $C(t)$، ثم أحسب التكاليف عندما t=15 إذا كان $C(t=0) = 10$

الحل

بما أن:

$$C(t)=\int c^{\backslash}(t)\,dt=\int \frac{50}{(3t+2)^2}\,dt$$

وإذا فرضنا أن:

$$u=3t+2 \;\rightarrow\; du=3dt$$

فإن

$$\int \frac{50}{(3t+2)^2}\,dt = \int \frac{50/3}{u^2}\,dt=\frac{50}{3}\int u^{-2}\,dt$$

$$=\frac{-\,50}{3}u^{-1}+c=\frac{-\,50}{3(3t+2)}+c$$

وبما أن $C(t=0)=10$ فإن:

$$10=\frac{-50}{3(2)}+c=\frac{-50}{6}+c \;\rightarrow\; c=10+\frac{50}{6}=\frac{110}{6}$$

وبالتالي فإن:

$$C(t)=\frac{-50}{3(3t+2)}+\frac{110}{6}$$

وعند $t=15$ فإن:

$$C(t=15)=\frac{-50}{3(3(15)+2)}+\frac{110}{6}=\frac{-50}{141}+\frac{110}{6}=17.97872$$ مليون جنيه

تمرين(١)

أوجد ما يلي:

1) $\int 6(6x+4)^3\,dx$, 2) $\int 4x(2x^2+1)^5\,dx$

3) $\int (x^3+7x)^4(3x^2+7)\,dx$, 4) $\int \frac{3x^2+3}{(x^3+3x)}\,dx$

5) $\int \frac{4x}{(2x^2+3)^3}\,dx$, 6) $\int 3x^2(x^3+2)^{3/2}\,dx$

7) $\int 4x(x^2-4)^{12}\,dx$, 8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}\,dx$

9) $\int \frac{3x^2}{(x^3+3)^4}\,dx$, 10) $\int \frac{x^2}{x^3-2}\,dx$

11) $\int e^{3x}\,dx$, 12) $\int e^{5-x}\,dx$

13) $\int \frac{(e^{3x}+x^2)}{(e^{3x}+x^3)^3}\,dx$, 14) $\int \frac{(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^{3/2}}\,dx$

15) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(٦-٢) التكامل بالتجزئ Integration By Parts

نظرية (٦-٢)

إذا فرضنا أن $f^{\backslash}(x)$ ، $g^{\backslash}(x)$ هما تفاضل كل من $f(x)$ ، $g(x)$ فإن

$$\int f(x)g^{\backslash}(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f^{\backslash}(x)g(x)\,dx$$

أو (6.2)

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)$$

الإثبات

بما أن:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g^{\backslash}(x) + f^{\backslash}(x)g(x)$$

$$\int d\left[f(x)g(x)\right] = \int f(x)g^{\backslash}(x)\,dx + \int f^{\backslash}(x)g(x)\,dx$$

$$\left[f(x)g(x)\right] = \int f(x)g^{\backslash}(x)\,dx + \int f^{\backslash}(x)g(x)\,dx$$

$$\int f(x)g^{\backslash}(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f^{\backslash}(x)g(x)\,dx$$

مثال (٦-٣)

أوجد

$$\int xe^{x}\,dx$$

الحل

إذا فرضنا أن:

$$g(x) = e^{x}\ ,\ f(x) = x \ \rightarrow\ g^{\backslash}(x) = e^{x}\ ,\ f^{\backslash}(x) = 1$$

وبالتالي فإن:

$$\int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - \left[e^{x} + c_1\right] = e^{x}[x-1] + c$$

حيث c_1 ، c مقادير ثابتة

ملحوظة:

استخدام طريقة التجزئ لإيجاد التكامل يتطلب اختيار كل من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ بحيث يمكن إيجاد التكامل $\int f^{\backslash}(x)g(x)\,dx$. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال السابق. فمثلاً إذا فرضنا أن:

$$g(x) = x^2 \to g^{\backslash}(x) = 2x \quad , \quad f(x) = e^x \to f^{\backslash}(x) = e^x$$

وبالتالي فإن:

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2}\int 2xe^x dx = \frac{1}{2}\left[x^2e^x - \int x^2e^x dx\right] = \frac{x^2}{2}e^x - \left[\int x^2e^x dx\right]$$

فنجد أن إيجاد $\int x^2e^x dx$ أصعب من إيجاد $\int xe^x dx$

مثال (٦-٤)

أوجد كل من:

$$\text{i) } \int \ln x\, dx \qquad , \qquad \text{ii) } \int x^2 \ln x\, dx$$

باستخدام التجزئ

الحل

إذا فرضنا أن

$$\text{i) } f(x) = x \to f^{\backslash}(x) = 1$$

$$g(x) = \ln x \to g^{\backslash}(x) = \frac{1}{x}$$

وبالتالي فإن

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

كذلك

$$ii)\ f(x)=\frac{x^3}{3}\to f^{\backslash}(x)=x^2$$
$$g(x)=\ln x\to g^{\backslash}(x)=\frac{1}{x}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}\int x^2\ln x\,dx&=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx\\&=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx\\&=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c\\&=\frac{x^3}{3}\left[\ln(x)-\frac{1}{3}\right]+c\end{aligned}$$

تمرين (٢)

أوجد ما يلي:

1) $\int xe^{2x}\,dx$, 2) $\int x^2e^{-2x}\,dx$

3) $\int xe^{x^2}\,dx$, 4) $\int x^2e^{x^3}\,dx$

5) $\int x^3e^{x}\,dx$, 6) $\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$

7) $\int_0^1 x^2e^{x}\,dx$, 8) $\int x^3\ln x\,dx$

9) $\int_{3}^{5} x^3 e^{2x}\, dx$, 10) $\int_{0}^{1} \ln(1+x^2)\, dx$

11) $\int_{1}^{2} x^n e^x\, dx$, 12) $\int_{2}^{3} x^n \ln x\, dx$

(٦-٣) التكامل باستخدام الكسور الجزئية
Integration By Partial Fractions

كثير من الدوال النسبية Rational Function يكون من الصعوبة إيجاد تكامل هذه الدوال باستخدام قواعد التكامل التي تم تناولها في الباب السابق أو باستخدام أساليب التكامل التي تم تناولها في هذا الباب، لذا يتم تقسيم الدالة النسبية إلى مجموعة من الكسور الجزئية حيث أن:

$$\frac{p(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2).....(a_nx+b_n)} = \frac{c_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{c_2}{(a_2x+b_2)} + ... + \frac{c_n}{(a_nx+b_n)} \qquad (6.3)$$

حيث a_i, b_i, c_i ، $i = 1,2,\ldots n$ مقادير ثابتة، $p(x)$ دالة في x. وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

ملحوظة:

مع مراعاة أن درجة كثيرة الحدود في البسط $p(x)$ تكون أقل من أو تساوي درجة كثيرة الحدود في المقام. فإذا كان درجة $p(x)$ أعلى من المقام فإنه يتم القسمة أولاً.

مثال (٦-٥)

أوجد

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\, dx$$

الحل

بما أن:

$$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx = \int \left(\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{(x-1)} + \frac{c_3}{(x+1)}\right) dx$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} 3x^2-7x-2 &= c_1(x-1)(x+1) + c_2x(x+1) + c_3x(x-1) \\ 3x^2-7x-2 &= (c_1+c_2+c_3)x^2 + (c_2-c_3) - c \end{aligned} \qquad (6.4)$$

وبمساواة معامل x^2 في الطرفين في المعادلة (6.4) نجد أن:

$$3 = c_1 + c_2 + c_3$$

وبالمثل بمساواة معامل x في الطرفين، والمقدار الثابت في الطرفين في المعادلة (6.4) فنجد أن:

$$-7 = c_2 - c_3 \qquad (6.5)$$

$$-2 = -c_1 \qquad (6.6)$$

وبحل المعادلات (6.4) – (6.6) نجد أن:

$$c_1 = 2 \quad , \quad c_2 = -3 \quad , \quad c_3 = 4$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-7x-2}{x(x-1)(x+1)}\,dx &= \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-3}{(x-1)}\,dx + \int \frac{4}{(x+1)}\,dx \\ &= 2\ln|x| - 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c \end{aligned}$$

مثال (٦-٦)

أوجد

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx$$

الحل

نلاحظ أن بسط التكامل عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والمقام كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أي أن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نقوم أولاً بقسمة البسط على المقام على النحو التالي:

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2 - 2x - 8 & 2x^3 - 4x^2 - 15x + 5 \\ & \underline{2x^3 - 4x^2 - 16x} \\ & 0 + 0 + x + 5 \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx = \int [2x + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}] dx$$

وبما أن

$$\frac{x+5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x+5}{(x-4)(x+2)} = \frac{c_1}{(x-4)} + \frac{c_2}{(x+2)}$$

$$x + 5 = c_1(x+2) + c_2(x-4) = (c_1 + c_2)x + (2c_1 + 4c_2)$$

$$1 = c_1 + c_2$$

$$5 = 2c_1 - 4c_2$$

$$c_1 = 1\frac{1}{2} \quad , \quad c_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{x+5}{(x-4)(x+2)} = \frac{1.5}{(x-4)} + \frac{-0.5}{(x+2)}$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx = \int [2x + \frac{1.5}{(x-4)} - \frac{0.5}{(x+2)}]\,dx$$

$$= \int 2x\,dx + \int \frac{1.5}{(x-4)}\,dx - \int \frac{0.5}{(x+2)}\,dx$$

$$= x^2 + 1.5\ln|x-4| + 0.5\ln|x+2| + c$$

تمرين (٣)

أوجد ما يلي:

1) $\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$, 2) $\int \frac{1}{4x^2 - 9}\,dx$

3) $\int \frac{3}{x^2 + x - 2}\,dx$, 4) $\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

5) $\int \frac{5}{2x^2 + x - 1}\,dx$, 6) $\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\,dx$

7) $\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\,dx$, 8) $\int \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2}\,dx$

9) $\int \frac{x+2}{x^2 - 4x}\,dx$, 10) $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx$

(٦-٤) جداول التكامل Integration Tables

في كثير من المشاكل الاقتصادية والاجتماعية ... الخ فإن صياغة المشكلة يتضمن تكامل لدوال معقدة ويصعب إيجادها بالقواعد والأساليب السابق الإشارة إليها. لذلك قام الرياضيين Mathematicians بإيجاد التكامل لكثير من الدوال المعقدة بأساليب رياضية متنوعة وفي سنة ١٩٦٩ قدم كل من Ryzlinkand and Gerodshteyv جداول تشتمل على تكاملات هذه الدوال [24]، يستخدمها الرياضيين وغير الرياضيين من إحصائيين واقتصاديين ومهندسين وغيرهم في إيجاد تكامل الدوال (بدون الرجوع إلى الإثبات).

وفيما يلي سوف نقدم جزء من هذه الجداول:

المسلسل	الدالة المراد تكاملها تتضمن الدالة (a+bu)
1-	$\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}[a+bu-a\ln\|a+bu\|]+c \qquad (6.5)$
2-	$\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^2}[(a+bu)^2-4a(a+bu)+ 2a^2\ln\|a+bu\|]+c \qquad (6.6)$
3-	$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bu}+\ln\|a+bu\|\right]+c \qquad (6.7)$
4-	$\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{\frac{3}{2}}+c \qquad (6.8)$
5-	$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+c \qquad (6.9)$

6-	$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left\lvert\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right\rvert + c \qquad (6.10)$
الدالة المراد تكاملها تتضمن الدالة $\sqrt{a^2+u^2}$	
7-	$\int \sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\right\rvert + c \qquad (6.11)$
8-	$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{8}\ln\left\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\right\rvert + c \qquad (6.12)$
9-	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\right\rvert + c \qquad (6.13)$
10-	$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right\rvert + c \qquad (6.14)$
11-	$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + c \qquad (6.15)$
12-	$\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + c \qquad (6.16)$
الدالة المراد تكاملها تتضمن الدالة $\sqrt{u^2-a^2}$	
13-	$\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert + c \qquad (6.17)$

14-	$\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left\|u+\sqrt{u^2-a^2}\right\| + c \qquad (6.18)$
15-	$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2} + \ln\left\|u+\sqrt{u^2-a^2}\right\| + c \qquad (6.19)$
16-	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left\|u+\sqrt{u^2-a^2}\right\| + c \qquad (6.20)$
17-	$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + c \qquad (6.21)$
18-	$\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + c \qquad (6.22)$
الدالة المراد تكاملها تتضمن الدالة $\sqrt{a^2-u^2}$	
19-	$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right\| + c \qquad (6.23)$
20-	$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right\| + c \qquad (6.24)$
21-	$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + c \qquad (6.25)$
22-	$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + c \qquad (6.26)$

الدالة المراد تكاملها تتضمن الدالة lnu أو e^{au}		
23-	$\int u\, e^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au-1)\, e^{au} + c$	(6.27)
24-	$\int u^n\, e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n\, e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}\, e^{au}\, du$	(6.28)
25-	$\int \frac{du}{1+be^{au}} = u - \frac{1}{a}\ln(1+be^{au}) + c$	(6.29)
26-	$\int \ln u\, du = u \ln u - u + c$	(6.30)
27-	$\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\left[(n+1)\ln u - 1\right] + c \quad ,n \neq -1$	(6.31)
28-	$\int \frac{du}{u \ln u} = \ln\left\|\ln u\right\| + c$	(6.32)
29-	$\int (\ln u)^n\, du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\, du$	(6.33)

مثال (٦-٧)

استخدم جداول التكامل لإيجاد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{3x}{\sqrt{3+x}}\, dx$, 2) $\int x^2\sqrt{3+x^2}\, dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{50-2x^2}}$, 4) $\int e^{2x}\sqrt{5+2e^2}\, dx$

الحل

بما أن:

1) $\int \frac{3x}{\sqrt{3+x}}\, dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{3+x}}\, dx$

ومن جدول التكامل نجد أنه يمكن تطبيق العلاقة (6.9)

وبما أن:
$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+c$$

وفي هذه الحالة نجد أن u=x , a=3 , b=1 وبالتالي فإن

$$3\int \frac{x}{\sqrt{3+x}}\,dx = 3\left[\frac{2}{3}(x-6)\sqrt{3+x}\right]+c = 2(x-6)\sqrt{3+x}+c$$

بالمثل

2) $\int x^2\sqrt{3+x^2}\,dx$

في هذه الحالة يمكن تطبيق العلاقة (6.12) حيث

$$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{8}\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right|+c$$

وفي هذه الحالة نجد أن: u=x ، $a=\sqrt{3}$ وبالتالي فإن

$$\int x^2\sqrt{3+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(3+2x^2)\sqrt{3+x^2} - \frac{3}{8}\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|+c$$

كذلك

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{50-2x^2}}$

في هذه الحالة يمكن تطبيق العلاقة (6.25) حيث

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{50-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$$

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + c$$

وفي هذه الحالة نجد أن: $a=5$, $u=x$ وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{25-x^2}}{(25)x}\right] + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(25)}\left[\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right] + c$$

كذلك

4) $\int e^{2x}\sqrt{5+2e^2}\ dx$

إذا فرضنا أن $u = e^x$ فإن $du = e^x dx$ بالتالي فإن:

$$\int e^{2x}\sqrt{5+2e^x}\ dx = \int u\sqrt{5+2u}\ du$$

وفي هذه الحالة يمكن تطبيق العلاقة (6.8) حيث: $b=2$, $a=5$

$$\int u\sqrt{5+2u}\ du = \frac{2}{15(4)}\left[3(2)u-2(5)\right](5+2u)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{30}(6u-10)(5+2u)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{15}(3e^x-5)(5+2e^x)^{\frac{3}{2}} + c$$

تمرين (٤)

أوجد ما يلي

1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2+9x^2}}\,dx$, 2) $\int \sqrt{3+x^2}\,dx$

3) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{3+2\ln x}}\,dx$, 4) $\int (\ln x)^3\,dx$

5) $\int \frac{\sqrt{2-2x-x^2}}{x+1}\,dx$, 6) $\int \frac{e^x}{(1-e^{2x})^{3/2}}\,dx$

7) $\int \frac{x}{(x^4-6x+10)^2}\,dx$, 8) $\int \frac{x}{x^4-6x^2+10}\,dx$

9) $\int (2x-3)^2\sqrt{(2x-3)^2+4}\,dx$, 10) $\int \frac{e^{3x}}{(1+e^x)^3}\,dx$

(٦-٥) التكامل العددي Numerical Integration

في بعض الأحيان يكون الحصول على قيمة التكامل المحدود definite Integration للدالة $f(x)$ خلال الفترة $[a,b]$ (أي المساحة المحصورة بين محور x ومنحنى الدالة $f(x)$) سهل الحصول عليه في حالة سهولة إيجاد تكامل الدالة $f(x)$.

ولكن في كثير من الأحيان وبصفة خاصة في المشاكل التطبيقية يكون من الصعب الحصول على تكامل الدالة. في هذه الحالات يمكن استخدام التكامل العددي للحصول على قيمة التكامل المحدد.

وتوجد ثلاثة طرق تقريبية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة التكامل المحدود وهي:

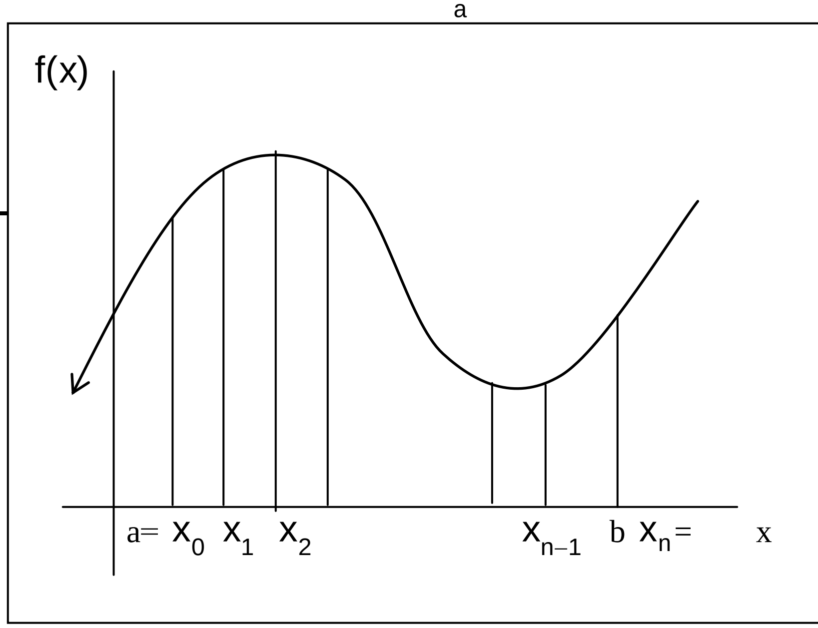
١- طريقة التقريب باستخدام المستطيلات
Approximation By Rectangles

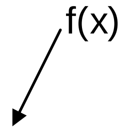
٢- طريقة التقريب باستخدام شبة المنحرف
Approximation By Trapezoidal Rule

٣- طريقة التقريب باستخدام القطع المكافئ
Approximation By Parabolic Arc

<u>أولاً:</u> طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

إذا اعتبرنا الدالة $f(x)$، $f(x) > 0$ معرفة في الفترة $[a,b]$ فإن كما هو موضح في الشكل (٦-١) فإن المساحة المحصورة بين المحور x ومنحنى الدالة في الفترة $[a,b]$ هي عبارة عن: $\int_a^b f(x)\,dx$





شكل (٦-١)

فإن هذه المساحة تساوي تقريباً مجموع مساحات المستطيلات الموضحة في الشكل فإذا قسمنا المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور الأفقي إلى عدد n من المستطيلات متساوية القاعدة لكل منها وتساوى Δx حيث:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad (6.34)$$

وإذا اعتبرنا أن X_k^* تشير إلى أقصى نقطة في اليمين للفترة الجزئية رقم k التي تمثل قاعدة المستطيل رقم k، وبالتالي فإن مساحة المستطيل رقم k تساوى

$$f(x_k^*)\,\Delta x \qquad (6.35)$$

وبالتالي فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \ldots. + f(x_n^*)\,\Delta x$$

$$= \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \qquad (6.36)$$

مثال (٦-٨)

أوجد القيمة الصحيحة والتقريبية لـ $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$

الحل

١- القيمة الصحيحة

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left[(2)^3 - (-1)^3\right] = \frac{1}{3}\left[8 - (-1)\right] = 3$$

٢- القيمة التقريبية باستخدام تقريب المستطيلات T_n حيث:

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx \approx T_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

فإذا فرضنا أن $n=4$ بالتالي:

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$X_k^* = a + k\,\Delta x \quad , \quad (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*) = (\frac{-1}{4}, \frac{2}{4}, 1\frac{1}{4}, 2)$$

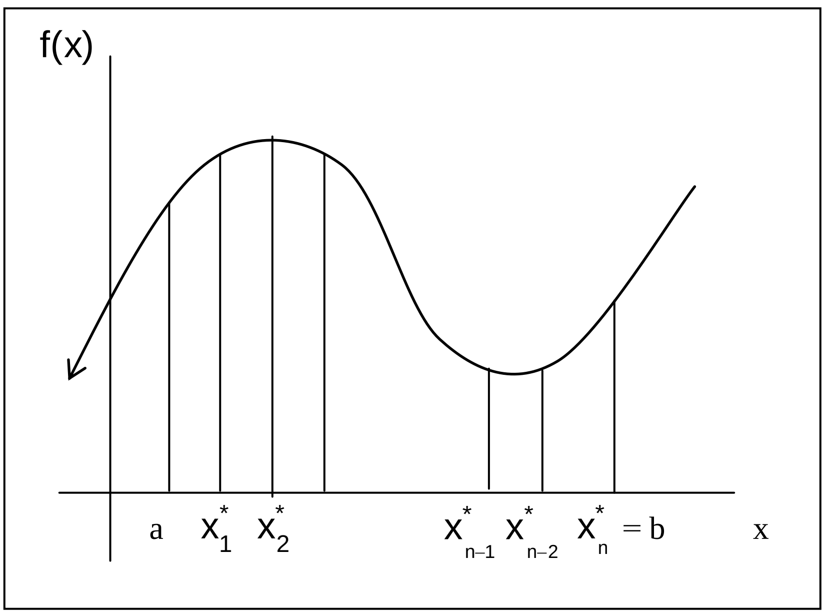
$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx \approx \frac{3}{4}\left[f(\frac{-1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(1\frac{1}{4}) + f(2) \right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[(\frac{-1}{4})^2 + (\frac{2}{4})^2 + (\frac{5}{4})^2 + (2)^2 \right] = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{25}{16} + \frac{64}{16} \right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{94}{16} \right] = \frac{282}{64} = 4.41$$

<u>ثانياً:</u> طريقة التقريب باستخدام شبة المنحرف

إذا اعتبرنا أن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ، $f(x) \geq 0$ ومحور x مقسمة إلى عدد n من مساحات شبة المنحرف ارتفاع كل منها يساوى Δx حيث: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



شكل (٦-٢)

فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{1}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]\Delta x + ...$$
$$+\frac{1}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}\Delta x\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+....+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

(5.37)

ملحوظة: $x_0 = a$ ، $x_n = b$

مثال (٦-٩)

في المثال السابق أوجد القيمة التقريبية للتكامل باستخدام شبة المنحرف

الحل

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)\left[f(-1)+2f\left(\frac{-1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{5}{4}\right)+f(2)\right]$$
$$= \frac{3}{8}\left[(-1)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{5}{4}\right)^2+2\left(\frac{5}{4}\right)^2+(2)^2\right]$$
$$= \frac{3}{8}\left[1+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+3.125+4\right] = 3.28125$$

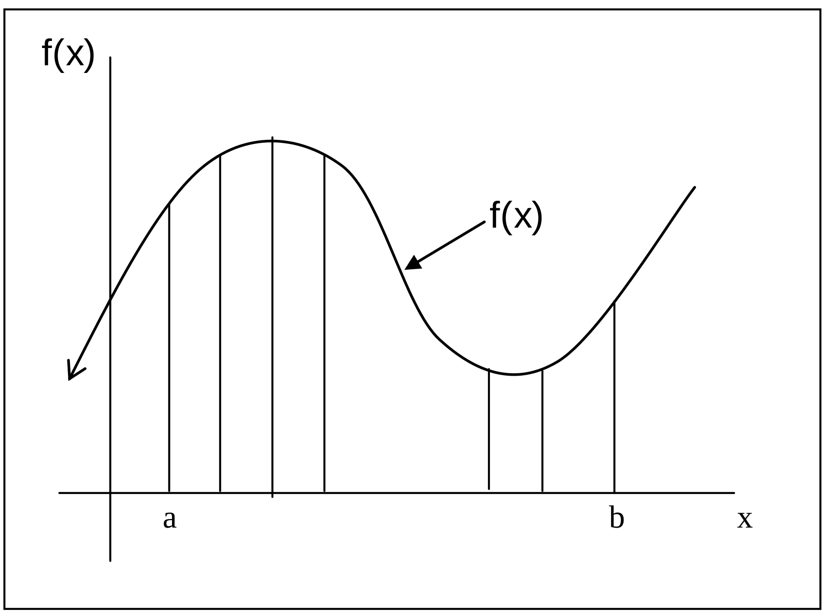
ويتضح أن استخدام طريقة شبة المنحرف تعطى نتيجة تقريبية أقرب إلى القيمة الصحيحة من استخدام التقريب بطريقة المستطيلات.

ثالثاً: طريقة التقريب باستخدام القطع المكافئ

وتسمي طريقة التقريب باستخدام القطع المكافئ بقاعدة Simpson Rule نسبة إلى عالم الرياضيات الإنجليزي Thomas Simpson (١٧١٠-١٧٦١).

وقبل عرض إجراءات هذه الطريقة نجد أن طريقة شبة المنحرف اعتمدت على التقريب الخطى للدالة f(x) بين كل نقطتين داخل الفترة [a,b]. فمن شكل (٦-٢) يتضح استخدام التقريب الخطى للدالة f(x) بين النقط:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots\ldots, (x_{n-1}, x_n)$$



شكل (٦-٣)

ولكن تعتمد طريقة Simpson على تقريب الدالة $f(x)$ إلى دالة من الدرجة الثانية خلال النقط (x_0, x_1, x_2)، (x_1, x_2, x_3)، .....، (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). كما هو موضح في شكل (٦-٣) حيث يتم تقسيم المساحة بين منحنى الدالة والمحور الأفقي x إلى عدد n من القطع المكافئ مساحة كل منها على الترتيب:

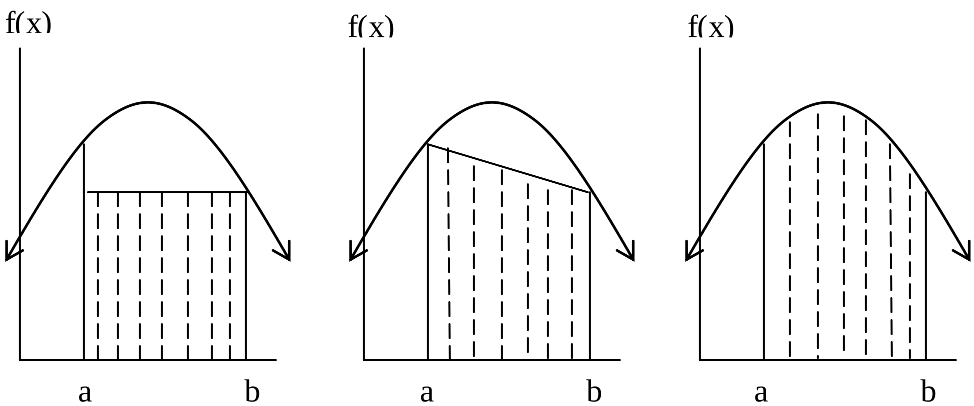
$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \\
&\frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] \\
&\vdots \\
&\frac{\Delta x}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

وبالتالي فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots\ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \tag{6.39}$$

ملحوظة: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، n عدد زوجي

والشكل التالي يوضح الفرق بين التقريبات باستخدام الطرق الثلاثة السابقة [3].



(٣) التقريب باستخدام طريقة القطع المكافئ　　(٢) التقريب باستخدام طريقة شبة المنحرف　　(١) التقريب باستخدام طريقة المستطيلات

شكل (٦-٤)

مثال(٦-١٠)

أعتبر المثال السابق – أوجد $\int_{-1}^{2} x^2\, dx$ باستخدام طريقة القطع المكافئ – ثم قارن القيمة الفعلية للتكامل بالقيمة التقريبية وأوجد الخطأ.

الحل:

نفرض أن n=4 بالتالي فإن:

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$f(x_0 = -1) = (-1)^2 = 1 \qquad f(x_1) = -0.25$$

$$f(x_2 = 0.5) = (0.5)^2 = 0.25 \qquad f(x_3 = 1.25) = (1.25)^2 = 1.5625$$

$$f(x_4 = b = 2) = (2)^2 = 4$$

وبما أن:

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$= \frac{0.75}{3}\left[1 + 4(-0.25) + 2(0.25) + 4(1.5625) + 4\right]$$

$$= 0.25[1 - 1.00 + 0.50 + 6.2500 + 4] = 0.25[10.75]$$

$$= 2.6875$$

ويتضح أن التقريب باستخدام طريقة القطع المكافئ تعطى نتيجة أقرب إلى القيمة الصحيحة من طريقة المستطيلات – وتقترب من طريقة شبة المنحرف.

خطأ التقريب error Approximation

وفيما يلي سوف نتناول نظرية تحديد الحد الأقصى لخطأ التقريب بدون أثبات*.

نظرية: إذا فرضنا أن $f(x)$ دالة متصلة في الفترة [a,b] وإذا اشرنا للخطأ في التقريب بالرمز E_n فإن:

$$1)\ \left|E_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M \qquad (6.40)$$

في حالة استخدام تقريب شبة المنحرف

$$M = \max\left|f''(x)\right|$$

في الفترة [a,b]

$$2)\ \left|E_n\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} K \qquad (6.41)$$

* حيث أن الإثبات يتطلب معرفة في الرياضيات في مستوى أعلى من هذا الكتاب [3].

في حالة استخدام طريقة القطع المكافئ

$$K = \max\left|f^{(4)}(x)\right|$$

في الفترة [a,b]

مثال (٦-١١)

نعتبر مثال (٦-٨) في حالة استخدام التقريب باستخدام قاعدة شبة المنحرف.

أوجد الحد الأعلى للخطأ.

الحل:

بما أن:

$$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; {}^{/}f(x) = 2x\,,\; {}^{//}f(x) = 2$$

وبالتالي فإن:

$$M = \max\left|f''(x)\right| = 2$$

بالتالي فإن:

$$\left|E_n\right| \le \frac{(2-(-1))^3}{12(4)^2}(2) \;\rightarrow\; \left|E_n\right| \le \frac{27}{96} \;\rightarrow\; \left|E_n\right| \le 0.2812\text{5}$$

ملحوظة: في المثال السابق نجد أن الدالة $f(x) = x^2$ هي دالة من الدرجة الثانية وبالتالي غير قابلة للتفاضل من الترتيب (4). لذا تعذر إيجاد الحد الأعلى للخطأ في حالة استخدام قاعدة القطع المكافئ.

تمرين (٥)

استخدم قاعدة شبة المنحرف وقاعدة Simpson لإيجاد القيم التقريبية للتكاملات المحدودة التالية:

1) $\int_{0}^{2} x^2 \, dx \quad , \; n = 6$

2) $\int_{1}^{3} (x^2 - 1) \, dx \quad , \; n = 4$

3) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} \, dx \quad , \; n = 4$

4) $\int_{0}^{2} x\sqrt{2x^2 + 1} \, dx \quad , \; n = 6$

5) $\int_{0}^{1} x \ln(x^2 + 1) \, dx \quad , \; n = 8$

6) $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} \, dx \quad , \; n = 4$

7) $\int_{0}^{1} e^{x^2} \, dx \quad , \; n = 6$

8) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{\ln x} \quad , \; n = 6$

9) $\int_{-1}^{2} x^5 \, dx \quad , \; n = 10$

10) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x} \, dx \quad , \; n = 10$

(٦-٦) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٦-١)

في أحد الدول المنتجة للبترول قدر معدل إنتاج البترول في السنة t ورمز له بالرمز R(t) فكان على النحو التالي:

$$R(t) = 200t\ e^{-0.02t}$$

بالألف برميل في السنة t.

والمطلوب: تقدير حجم الإنتاج في السنة t.

الحل

إذا فرضنا أن حجم الإنتاج P(t) فإن:

$$P^{\backslash}(t) = R(t) = 200t\ e^{-0.02t}$$

$$P(t) = \int 200t\ e^{-0.02t}\ dt = 200\int te^{-0.02t}\ dt$$

وباستخدام أسلوب التكامل بالتجزئ حيث يمكن افتراض أن

$$u = t\ \ ,\ \ dv = e^{-0.02t}\ dt\ \rightarrow\ v = \frac{-1}{0.02}e^{-0.02t} = -50e^{-0.02t}$$

$$\begin{aligned}200\int t\ e^{-0.02t}\ dt &= 200\left|t(-50e^{-0.02t}) - \int -50e^{-0.02t}\ dt\right| \\ &= 200\left[-50te^{-0.02t} - 2500e^{-0.02t}\right] + c \\ &= 200\left[-50\,e^{-0.02t}(t+50)\right] + c\end{aligned}$$

وإذا كان حجم الإنتاج في السنة t=0 يساوى 0 أي أن $P(t=0)=0$ فإن

$$0 = 200\left[-50e^{-0.02(0)}(0+50)\right] + c \rightarrow 0 = 200\left[-50(50)\right] + c$$

$$0 = 200\left[-2500\right] + c \;\rightarrow\; c = 500.000 \text{ برميل}$$

بالتالي فإن:

$$P(t) = 200\left[-50e^{-0.02t}(t+50)\right] + 500000$$
$$= 10000\left\{\left[-e^{-0.02t}(t+50)\right] + 50\right\}$$

تطبيق (٦-٢)

إذا أشرنا إلى معدل تركيز أحد العقارات في الدورة الدموية للمريض (بملي جرام/ميلي لتر) بعد t ساعة من تعاطى العقار بالرمز $c(t)$ حيث:

$$c(t) = 3t\, e^{\frac{-t}{3}}$$

أوجد متوسط تركيز العقار بالدورة الدموية للمريض بعد 9ساعات من تعاطيه.

الحل

إذا اعتبرنا أن تركيز العقار في دم المريض بعد t ساعة من تعاطيه هو $D(t)$ حيث:

$$D(t) = \int c(t)\,dt \;\rightarrow\; D(t) = \int 3t\, e^{\frac{-t}{3}}\,dt$$

باستخدام أسلوب التكامل بالتجزئ حيث:

$$D(t)=\int 3t\, e^{\frac{-t}{3}}\, dt=\int t d\left(-9\, e^{\frac{-1}{3}t}\right) dt=-9t\, e^{\frac{-t}{3}}-\int -9\, e^{\frac{-t}{3}}\, dt$$

$$=-9t\, e^{\frac{-t}{3}}-\left(27 e^{\frac{-t}{3}}\right)+c=-9\, e^{\frac{-t}{3}}(t+3)+c$$

وبالتالي فإن متوسط التركيز بعد 9ساعات يساوى:

$$=\frac{1}{9}\int_0^9 3t^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{-t}{3}}\, dt=\left[-9\, e^{\frac{-t}{3}}(t+3)\right]_0^8$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\left[-9\, e^{-3}(9+3)\right]-\left[-9\, e^{0}(3)\right]\right\}=\frac{1}{9}\left\{-9(12)(0.04979)+27\right\}$$

$$=\frac{1}{9}\{-5.377+27\}=\frac{1}{9}\{21.623\}=2.4026$$ ميلي جرام/ميلي متر في الساعة

تطبيق (٦-٣)

أوجد عدد الفترات الجزئية (n) التي تجعل الخطأ أقل من 0.00005 في تقريب $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ باستخدام تقريب شبة المنحرف في الفترة $[1,2]$.

الحل

بما أن:

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\ \rightarrow\ {}^{/}f(x)=-x^{-2}\ ,\ {}^{//}f(x)=2x^{-3}$$

$$M=\max\left|{}^{//}f(x)\right|={}^{//}f(1)=2$$

وبالتالي فإن:

$$|E_n| \le \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \rightarrow 0.00005 \le \frac{1}{6n^2} \rightarrow 3n^2 > 10000$$

$$n^2 > 3{,}333 \rightarrow n > \sqrt{3{,}333} = 57.735 \rightarrow \therefore n \ge 58$$

تطبيق (٦-٤)

١- باستخدام طريقة القطع المكافئ أوجد القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

٢- ثم أوجد الحد الأعلى لخطأ التقريب

الحل

١- إذا فرضنا أن n=10 بالتالي فإن:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

كذلك

$$f(x_0 = 1) = \frac{1}{1} \;,\; f(x_1 = 1.1) = \frac{1}{1.1} \;,\; f(x_2 = 1.2) = \frac{1}{1.2}$$

$$f(x_3 = 1.3) = \frac{1}{1.3} \;,\; f(x_4 = 1.4) = \frac{1}{1.4} \;,\; f(x_5 = 1.5) = \frac{1}{1.5}$$

$$f(x_6 = 1.6) = \frac{1}{1.6} \;,\; f(x_7 = 1.7) = \frac{1}{1.7} \;,\; f(x_8 = 1.8) = \frac{1}{1.8}$$

$$f(x_9 = 1.9) = \frac{1}{1.9} \qquad , \qquad f(x_{10} = 2) = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)$$
$$+2f(x_6)+4f(x_7)+2f(x_8)+4f(x_9)+f(x_{10})]$$
$$=\frac{0.1}{3}[\frac{1}{1}+\frac{4}{1.1}+\frac{2}{1.2}+\frac{4}{1.3}+\frac{2}{1.4}+\frac{4}{1.5}+\frac{2}{1.6}+\frac{4}{1.7}$$
$$+\frac{2}{1.8}+\frac{4}{1.9}+\frac{1}{2}]=0.6931502$$

٢- بما أن:

$$f^{(1)}(x)=-x^{-2}\ ,\ f^{(2)}(x)=2x^{-3}\ ,\ f^{(3)}(x)=-6x^{-4}\ ,\ f^{(4)}(x)=24x^{-5}$$

وبالتالي:

$$K=\max\left|f^{(4)}(x)\right|$$

في الفترة $[1,2]$

$$K=24(1)=24$$

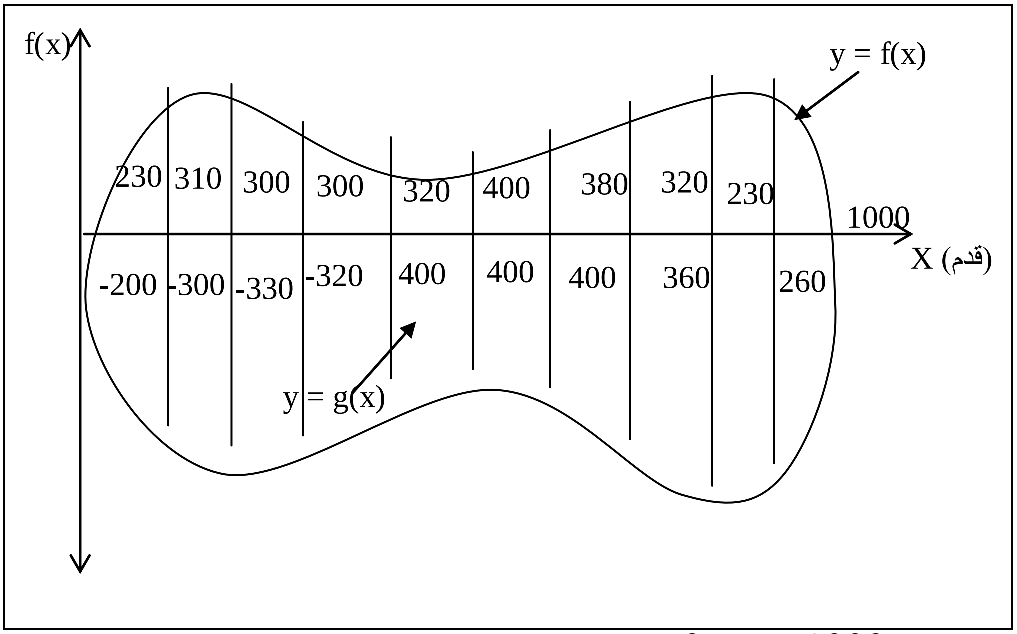
وبالتالي فإن:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}K=\frac{24}{180(10000)}$$

$$|E_n|\le\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}K \longrightarrow$$
$$|E_n|\le\frac{24}{1800000}=0.000013$$

تطبيق (٦-٦)

تسرب من أحدى حاملات البترول كمية من الزيت شكلت بقعة في مياه أحد البحار. وباستخدام القمر الصناعي تم تصوير البقعة في نقاط مختلفة وتحديد أطوالها فكانت كما هو موضح بالشكل التالي [1]



$0 \le x \le 1000$ ، n=100

الحل

إذا اعتبرنا أن المساحة المتأثرة ببقعة الزيت والموضحة في الشكل (٦-٥) يحدها من أعلى المنحنى $f(x)$، ومن أسفل المنحنى $g(x)$ بالنسبة للمحور x وبالتالي تصبح الدالة y حيث:

$$y = f(x) - g(x)$$

كذلك

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1000}{10} = 100$$

وتصبح مساحة البقعة هي A حيث:

$$\begin{aligned}
A = \int_0^{1000} [f(x) - g(x)]\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[(f(x_0) - g(x_0)) + 4(f(x_1) - g(x_1)) \\
+ 2(f(x_2) - g(x_2)) + 4(f(x_3) - g(x_3)) + 2(f(x_4) - g(x_4)) \\
+ 4(f(x_5) - g(x_5)) + 2(f(x_6) - g(x_6)) + 4(f(x_7) - g(x_7)) \\
+ 2(f(x_8) - g(x_8)) + 4(f(x_9) - g(x_9)) + f(x_{10})]
\end{aligned}$$

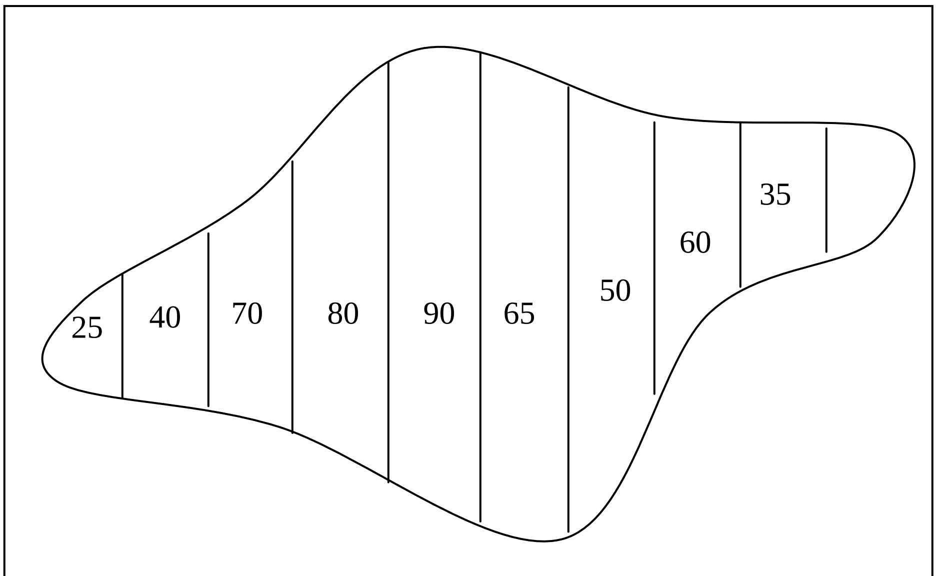
$$\begin{aligned}
= \frac{100}{3}[(0-0) + 4(230 - (-200)) + 2(310 - (-300)) \\
+ 4(300 - (-330)) + 2(300 - (-320)) + 4(320 - (-350)) \\
+ 2(400 - (-400)) + 4(380 - (-400)) + 2(320 - (-360)) \\
+ 4(230 - (-260)) + (0-0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{100}{3}[0 + 4(430) + 2(610) + 4(630) + 2(620) + 4(670) + 2(800) \\
+ 4(780) + 2(680) + 4(490) + 0] = \frac{100}{3}(17420) = 580.667
\end{aligned}$$

قدم مربع

تطبيق (٦-٧)

الشكل التالي يوضح مساحة بحيرة صناعية أقيمت في إحدى الحدائق – وبتصويرها أمكن تحديد اتساع البحيرة في المناطق المختلفة لها. بحيث أن طول الفترات المقسمة إليها البحيرة 15 قدم.



شكل ([illegible])

المطلوب: باستخدام طريقة القطع المكافئ أوجد مساحة البحيرة بافتراض أن n=10.

الحل

$$\Delta x = \frac{15-0}{10} = 1.5 \text{ قدم}$$

$$\int_0^{15} f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4)$$

$$+ 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + 2f(x_8) + 4f(x_9) + f(x_{10})]$$

$$= \frac{1.5}{3}[0 + 4(25) + 2(40) + 4(70) + 2(80) + 4(90) + 2(65)$$

$$+ 4(50) + 2(60) + 4(35) + 0]$$

$$= \frac{1.5}{3}[1570] = 785$$ قدم مربع

(٦-٧) تمرينات Exercises

(٦-١) أوجد باستخدام أسلوب التكامل بالتجزئ التكاملات التالية:

1) $\int xe^{2x}\,dx$ 2) $\int xe^{-x}\,dx$

3) $\int 6xe^{3x}\,dx$ 4) $\int (e^{-x}-x)^2\,dx$

5) $\int (e^{-x}+x)^2\,dx$ 6) $\int (x+1)\,e^{x}\,dx$

7) $\int x(x+1)^{\frac{-3}{2}}\,dx$ 8) $\int x(x+4)^{-2}\,dx$

9) $\int x\sqrt{x-5}\,dx$ 10) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

11) $\int x\ln 2x\,dx$ 12) $\int x^2\ln 2x\,dx$

13) $\int \sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,dx$ 14) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

15) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ 16) $\int \ln x\,dx$

17) $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$ 18) $\int x(\ln x)^2\,dx$

19) $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$ 20) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

(٦-٢) استخدم جداول التكاملات لإيجاد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{2x}{2+3x}\,dx$ 2) $\int \frac{x}{(1+2x)^2}\,dx$

3) $\int \frac{3x^2}{2+4x}\,dx$　　4) $\int \frac{x^2}{3+x}\,dx$

5) $\int x^2\sqrt{9+4x^2}\,dx$　　6) $\int x^2\sqrt{4+x^2}\,dx$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x}}$　　8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+8x^2}}$

9) $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$　　10) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

11) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$　　12) $\int \frac{dx}{(4-2)^{3/2}}$

13) $\int xe^{2x}\,dx$　　14) $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

15) $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(1+x)}$　　16) $\int \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,dx$

17) $\int \frac{e^{2x}}{(1+3e^x)^2}\,dx$　　18) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1+3e^x}}\,dx$

19) $\int \frac{3e^x}{1+e^{1/2x}}\,dx$　　20) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2e^{-x}}}$

21) $\int \frac{\ln x}{x(2+3\ln x)}\,dx$　　22) $\int_1^4 (\ln x)^2\,dx$

23) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$　　24) $\int x^2e^{2x}\,dx$

25) $\int x^2\ln x\,dx$　　26) $\int x^3\ln x\,dx$

(٦-٣) باستخدام طريقة شبه المنحرف والقطع المكافئ:

أ) أوجد القيم التقريبية للتكاملات المحدودة التالية.

ب) ثم قارنها بالقيمة الصحيحة للتكامل.

ج) أوجد الحد الأعلى لخطأ التقريب في كل حالة.

1) $\int_0^2 x^2\,dx \quad ,n=6$　　　2) $\int_1^2 (x^2-1)\,dx \quad ,n=4$

3) $\int_0^1 x^3\,dx \quad ,n=4$　　　4) $\int_1^2 x^2\,dx \quad ,n=6$

5) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \quad ,n=4$　　　6) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \quad ,n=8$

7) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \quad ,n=4$　　　8) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \quad ,n=4$

9) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx \quad ,n=8$　　　10) $\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx \quad ,n=6$

11) $\int_0^1 e^{-x}\,dx \quad ,n=6$　　　12) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx \quad ,n=6$

13) $\int_1^2 \ln x\,dx \quad ,n=4$　　　14) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx \quad ,n=8$

الباب السابع
المتسلسلات اللانـهائيـة
Infinite Series

(٧-١) المتتابعات (المتواليات) Sequences

(٧-٢) المتسلسلات اللانـهائية Infinite Series

(٧-٣) أختبار التكامل وأختبار النسبة

The Integral Test and Ratio Test

(٧-٤) متسلسلة تيلور Taylor Series

(٧-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

(٧-٦) تمرينات Exercises

(٧-١) المتتابعات (المتواليات) Sequences

في كثير من التطبيقات يكون من الأهمية إيجاد مجموع عدد لانهائي Sum of Infinitely من القيم المرتبطة ببعضها. وفي بعض هذه الحالات يكون المجموع اللانهائي عدد نهائي (أي عدد محدود) Finite. ومن امثلة ذلك المثال التالي:

إذا وجد مصدر للتلوث لأحد الملوثات في منطقة ما (مثل مخلفات مصنع الأسمنت مثلاً) بحيث ينتشر هذا الملوث في الجو. وإذا حددت أجهزة الرصد في المنطقة ان كمية الملوث المنبعثة أسبوعياً في الجو تساوي k جرام بحيث أن 2% من كمية الملوث تتسرب إلى المناطق الأخري المجاورة.

فإذا كان في بداية الأسبوع الأول لقياس الملوث بالمنطقة كانت الكمية $S_1 = k$. وبالتالي في بداية الأسبوع الثاني تكون كمية الملوث تساوي S_2 حيث:

$$S_2 = k + 0.98k \tag{7.1}$$

حيث الكمية $(0.98k)$ من الأسبوع السابق، k من الأسبوع الثاني.

بالمثل في بداية الأسبوع الثالث تكون كمية الملوث في المنطقة تساوي S_3 حيث:

$$S_3 = k + (k + 0.98k)(0.98) \tag{7.2}$$

$$= k + (0.98)k + (0.98)^2 k \tag{7.3}$$

وبالمثل تكون كمية الملوث في المنطقة بالجرام في بداية الأسبوع (n) تساوي S_n حيث:

$$S_n = k + (0.98)k + (0.98)^2 k + \dots + (0.98)^{n-1} k \tag{7.4}$$

وبالتالي إذا كان المطلوب إيجاد كمية الملوث المتراكمة في المنطقة في المدي الطويل Long Rage أي عندما $n \to \infty$، فإن كمية الملوث المتراكمة في المنطقة تساوي $S_{+\infty}$ حيث:

$$S_{+\infty} = k + (0.98)k + (0.98)^2 k + \ldots + (0.98)^n k + \ldots \qquad (7.5)$$

وبالمثل تكون كمية الملوث المتراكمة المتسربة عبر الجو إلى المناطق الأخري في المدي الطويل تساوي $H_{+\infty}$ حيث:

$$H_{+\infty} = (0.02)k + (0.02)^2 k + (0.02)^3 k + \ldots \qquad (7.6)$$

وتصبح من الأهمية إيجاد المجموع $S_{+\infty}$ كذلك $H_{+\infty}$.

ويهدف هذا الباب إلى تقديم دراسة نظرية وتطبيقية للمجاميع اللانهائية Infinite Sums والتي يشار إليها بالمتسلسلات اللانهائية Infinite Series. لذلك سوف نعرف أولاً المتتابعات (المتواليات).

المتتابعة: هي مجموعة من الأعداد المرتبطة ببعضها بقاعدة معينة، فإذا كان n عدد صحيح موجب فإن الأعداد المرتبطة ببعضها

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (7.7)$$

تسمي متتابعة وتسمي العناصر $a_1, a_2, \ldots$ بحدود المتتابعة، وللتبسيط تكتب المتتابعة على النحو $\{a_n\}$ حيث a_n هو الحد العام General Term للمتتابعة. وعن طريق الحد العام يمكن إيجاد باقي حدود المتتابعة.

مثال (٧-١)

إذا أعتبرنا الحد العام لأحدي المتتابعات a_n على النحو التالي:

$$1)\ a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad , \qquad 2)\ a_n = (2)^n$$

أوجد الثلاثة حدود الأولي من المتتابعة

الحل

$$1)\ a_1 = \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

وبالتالي تصبح المتتابعة على النحو $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\ldots$

$$2)\ a_1 = (2) = 2$$

$$a_2 = (2)^2 = 4$$

$$a_3 = (2)^3 = 8$$

وبالتالي تصبح المتتابعة على النحو $2,4,8,\ldots$

وبالرجوع إلى تعريف الدالة في الباب الأول نجد أن المتتابعة هي دالة كما سوف نوضح في التعريف التالي.

تعريف (٧-١)

المتتابعة $\{a_n\}$ هي دالة نطاقها فئة الأعداد الصحيحة غير السالبة ومداها (نطاقها المصاحب) فئة جزئية من فئة الأعداد الحقيقية وتأخذ القيم $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ وحدها العام a_n.

نهاية المتتابعة The Limit of A Sequence

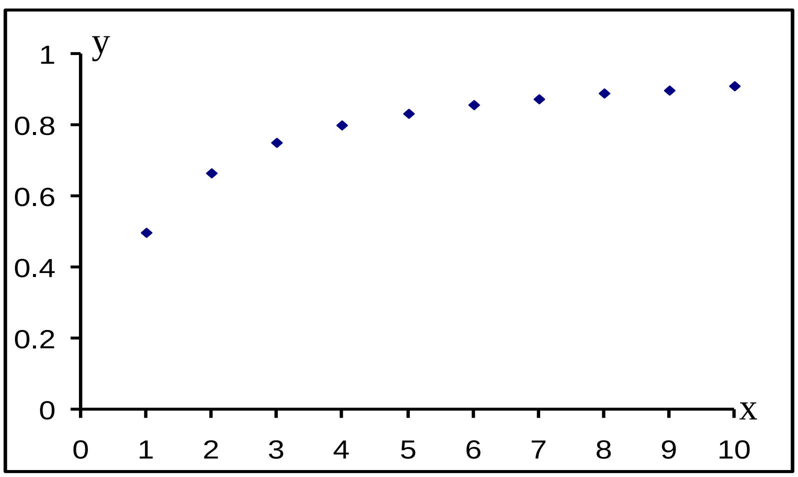
إذا أعتبرنا المتتابعة $\{a_n\}$ حيث:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

وبالتالي تصبح حدود المتتابعة على النحو:

$$a_1 = \frac{1}{2} \ , a_2 = \frac{2}{3} \ , a_3 = \frac{3}{4} \ \ldots.$$

ويلاحظ أنه كلما زاد n ، زاد قيمة الحد a_n كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل (٧-١)

ونلاحظ من الرسم كلما زاد n اقترب قيمة الحد a_n من الواحد.

وبصفة عامة إذا أقتربت قيم حدود المتتابعة من قيمة معينة ولتكن L كلما زاد n. فإنه يقال أن المتتابعة تتقارب من L أي The Sequence Converges to The Limit L وتكتب على النحو:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \tag{7.8}$$

وبالتالي في المثال السابق نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

تعريف (٧-٢)

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}$ متتابعة تقاربية Convergent Sequence للعدد L:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

إذا كان $\varepsilon > 0$ ، N عدد صحيح موجب بحيث:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad , \ n > N \tag{7.9}$$

وإذا لم يتحقق الشرط في (7.9) فإنه يقال أن المتتابعة تباعدية Divergent Sequence.

نظرية (٧-١)

وتسمي هذه النظرية بنظرية النهايات للمتتابعات Limit Theorem for Sequences.

إذا فرضنا أن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ , \ \lim_{n\to\infty} b_n = m \quad \text{then}$$

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(r\,a_n + t\,b_n) = r\,L + t\,m \qquad (7.10)$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n\,b_n) = L\,m \qquad (7.11)$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{m} \quad ,\ m \neq 0 \qquad (7.12)$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[c]{a_n} = \sqrt[c]{L} \qquad (7.13)$$

الإثبات:

يمكن الإثبات بسهولة باستخدام قواعد النهايات المقدمة في لباب الثاني من هذا الكتاب.

مثال (٧-٢)

أعتبر المتتابعات التقاربية التالية:

$$1)\ \left\{\frac{200}{n}\right\} \qquad , \qquad 2)\ \left\{\frac{5n^2+6n-8}{n^3}\right\}$$

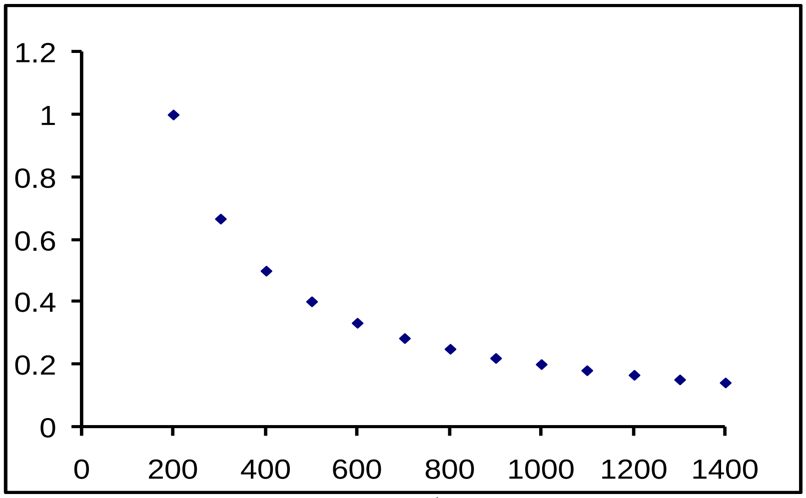
$$3)\ \left\{\frac{6n^4+2n-2}{10n^4+4n^2+2}\right\}$$

أوجد نهايات المتتابعات اعلاه –ث ثم وضح ذلك بيانياً.

الحل

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{200}{n}\right) = 0$$

والشكل التالي يوضح شكل المتتابعة $\left\{\dfrac{200}{n}\right\}$

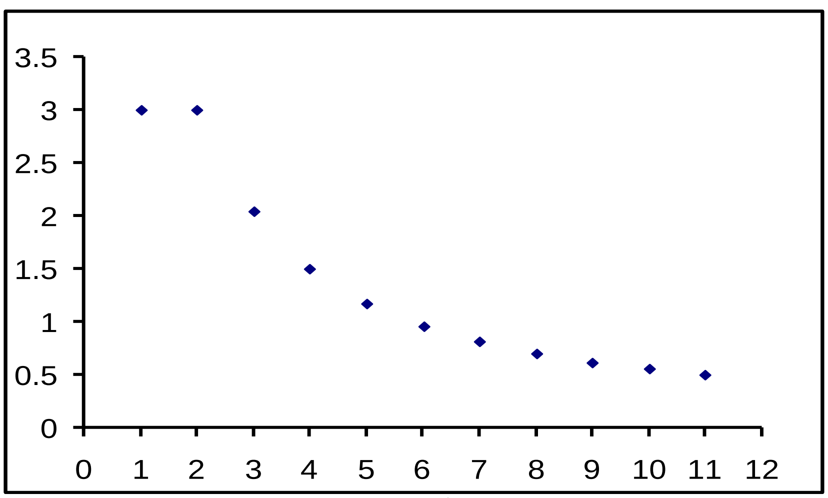


شكل (٧-٢)

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+6n-8}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^3}-\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}+0-0=0$$

والشكل التالي يوضح المتتابعة $\left\{\frac{5n^2+6n-8}{n^3}\right\}$

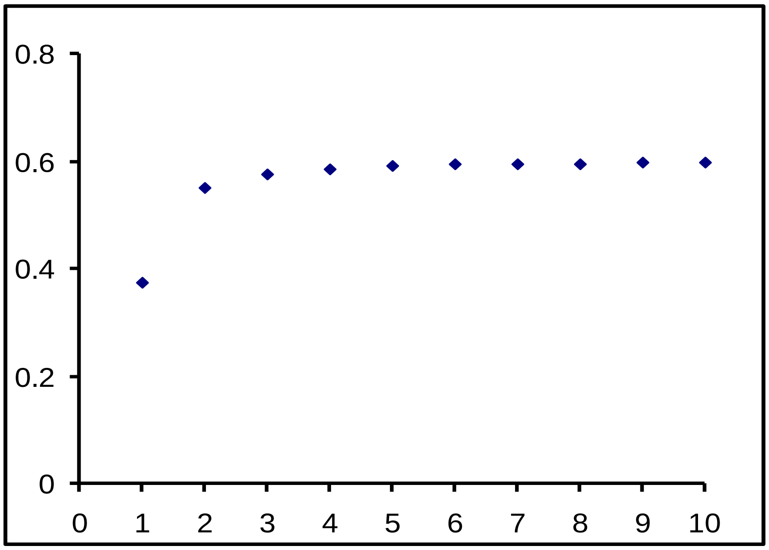


شكل (٧-٣)

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6n^4+2n-2}{10n^4+4n^2+2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+2/n^3-2/n^4}{10+4/n^2+2/n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6}{10} = \frac{6}{10}$$

والشكل التالي يوضح شكل المتتابعة $\left\{\dfrac{6n^4+2n-2}{10n^4+4n^2+2}\right\}$



شكل (٧-٤)

مثال (٧-٣)

وضح أن كل متتابعة من المتتابعات التالية متتابعة تباعدية

$$1)\ \{(-1)^n\} \qquad , \qquad 2)\ \left\{\frac{n^4+n^3+5}{5n^3+n^2+8}\right\}$$

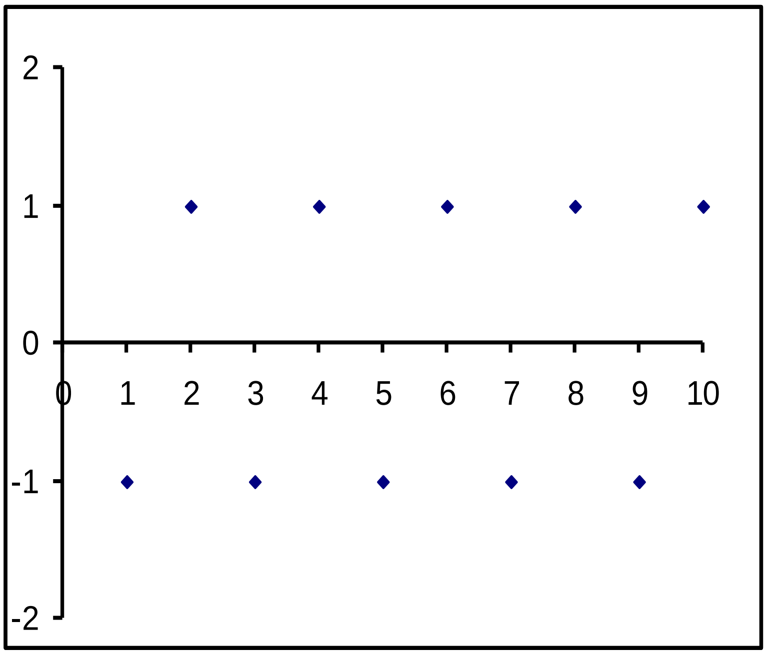
الحل

١- بالنسبة للمتتابعة $\{(-1)^n\}$ نجد أن:

$$a_n = 1 \text{ or } -1$$

وبالتـالي فـإن a_n لا يمكـن أن يتقـارب مـن قيمـة واحـدة محـددة L عنـدما $x \to \infty$.
وبالتالي فإن $\{(-1)^n\}$ متتابعة تباعدية.

والشكل التالي يوضح ذلك



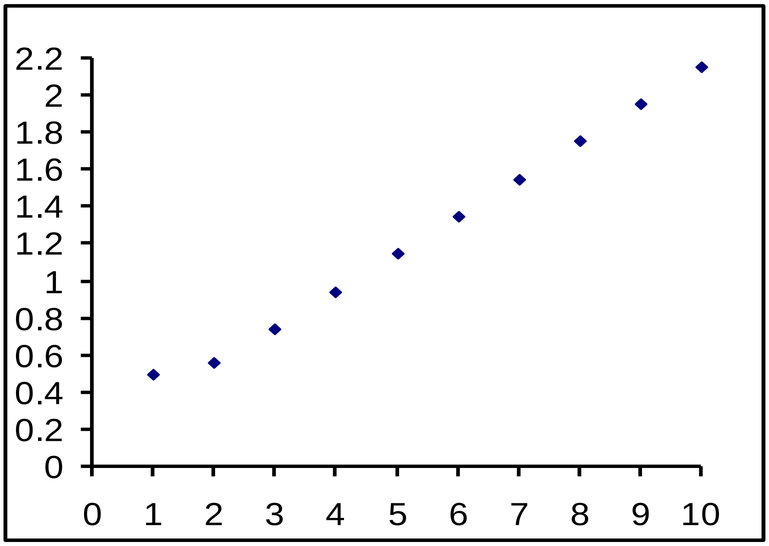
شكل (٧-٥)

٢-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^4+n^3+5}{5n^3+n^2+8}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n+5/n^4}{5/n+1/n^2+8/n^4}$$

فنجد ان نهاية البسط تؤول إلى (1) عندما $x \to \infty$ وبالتالي فالمتتابعة متتابعة تباعدية.

والشكل التالي يوضح ذلك

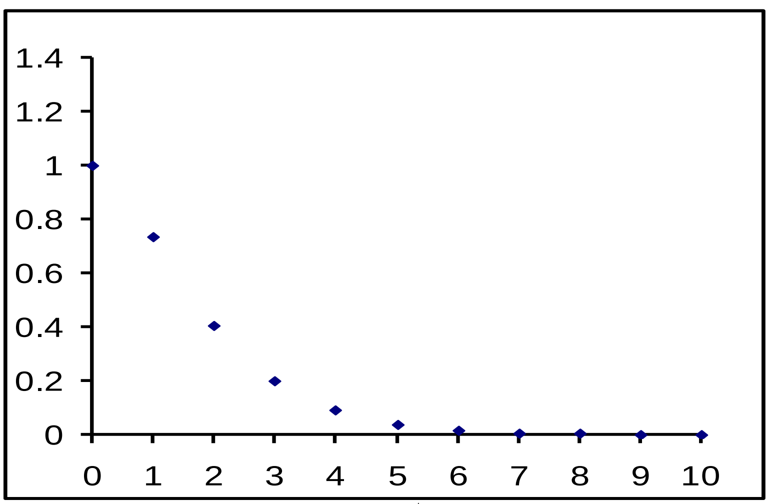


شكل (٧-٦)

مثال (٧-٤)

أعتبر المتتابعة: $\left\{\frac{n+1}{e^n}\right\}$ وضح أن المتتابعة تقاربية – ووضح ذلك بيانياً.

الحل



شكل (٧-٨)

من الرسم يتضح أنه عندما $n \to \infty$ فإن $a_n = 0$ رغم أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

ولكن باستخدام قاعدة لوبيتال (أنظر الباب الثالث) نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dn}(n+1)}{\frac{d}{dn}(e^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

تمرين (١)

(١) أكتب الأربع حدود الأولي من المتتابعات التالية:

1) $\{5 + (-1)^n\}$, 2) $\left\{\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right\}$

3) $\left\{\frac{5n+1}{n+3}\right\}$, 4) $\left\{\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right\}$

5) $\{a_n\}$, $a_1 = 256$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, $n \ge 2$

6) $\{a_n\}$, $a_1 = -1$, $a_n = n + a_{n-1}$, $n \ge 2$

7) $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_n = (a_{n-1})^2 + a_{n-1} + 1$, $n \ge 2$

(٢) أوجد نهايات المتتابعات التقاربية التالية:

1) $\left\{\frac{6n-8}{n}\right\}$, 2) $\left\{\frac{10+5n}{n+6}\right\}$

3) $\left\{\dfrac{10-5n}{7+n}\right\}$, 4) $\left\{\dfrac{5n^2+20n-100}{10n^2-150n+3}\right\}$

5) $\left\{\dfrac{\ln n}{n^2}\right\}$, 6) $\left\{\dfrac{5n}{n+3\sqrt{n}}\right\}$

7) $\left\{5^{4/n}\right\}$, 8) $\left\{n^{4/n}\right\}$

9) $\left\{\dfrac{8n-100\sqrt{n}}{4n+200\sqrt{n}}\right\}$, 10) $\left\{\int_0^\infty e^{-nx}\,dx\right\}$

11) $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$, 12) $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$

(٧-٢) المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

المتسلسلة اللانهائية هي عبارة عن:

$$a_1 + a_2 + ... = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad (7.14)$$

والمجموع الجزئي لـ n حد الأولي من الحدود – وسوف نشير له بالرمز S_n حيث:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (7.15)$$

ويقال ان المتسلسلة في (7.13) تتقارب لـ S إذا كانت المتتابعة للمتسلسلات الجزئية $\{S_n\}$ تتقارب لـ S أو بعبارة أخري:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (7.16)$$

وإذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ غير متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تكون متباعدة Divergent.

ملحوظة: في حالة إذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة فإن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i) \qquad (7.17)$$

مثال (٧-٥)

وضح أن المتسلسلة التالية تقاربية [14] .

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

الحل

هذه المتسلسلة تتضمن المتسلسلات الجزئية التالية:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) = 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربية ومجموعها يساوي واحد.

مثال (٧-٦)

وضح أن المتسلسلة التالية تقاربية وأوجد مجموعها [ ] .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$$

الحل

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2 + k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\} \\
&= \left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\right\} \\
&= \left\{1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\
&= \left\{1-\frac{1}{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ متسلسلة تقاربية ومجموعها يساوي واحد.

مثال (٧-٧)

وضح أن المتسلسلة التالية تقاربية – ثم أوجد مجموعها.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{8}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right]$$

الحل

بما أن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{8}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right]=8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

من المثالين (٧-٥) ، (٧-٦) نجد أن كل من المتسلسلتين:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

متسلسلتين تقاريبيتين ومجموع كل منهما يساوي واحد، وبالتالي:

$$8\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2+1}\right]-6\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k}\right]=8(1)-6(1)=2$$

وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{8}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right]$ متسلسلة تقاربية ومجموعها يساوي (2)

المتسلسلة الهندسية Geometric Series

المتسلسلة الهندسية هي متسلسلة لانهائية تكون النسبة بين كل حدين متتاليين نسبة ثابتة. فإذا كانت النسبة الثابتة تساوي r فإن المتسلسلة الهندسية تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a+ar+ar^2+\ldots+ar^n+\ldots. \quad , \quad a\neq 0 \qquad (7.18)$$

ملحوظة: النسبة الثابتة (r) ممكن تكون مقدار سالب أو موجب.

مثال (٧-٨)

أعتبر المتسلسلة التالية

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{(-3)^i}=\sum_{i=0}^{\infty}2(-3)^{-i}$$
$$=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\ldots..$$

فنجد أن المتسلسلة متسلسلة هندسية

$$r=\frac{-1}{3} \quad , \quad a=2$$

نظرية (٧-٢)

إذا أعتبرنا المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^i$$

بحيث $a \neq 0$

فإن المتسلسلة تكون:

١- تباعدية إذا كان $|r| \geq 1$.

٢- تقاربية إذا كان $|r| < 1$.

وفي هذه الحالة يكون

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r} \qquad (7.19)$$

الإثبات:

بما أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

$$r\,S_n = ar + ar^2 + ... + ar^n$$

وبالتالي فإن:

$$r\,S_n - S_n = (ra + r^2a + ... + r^na) - (a + ra + ...)$$

$$S_n(r-1) = ar^n - a \longrightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$

وفي حالة إذا كان $|r| \geq 1$ فإن متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ ليس لها نهاية. ولكن في حالة إذا كان $|r| < 1$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a r^i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{r^i - 1}{r-1}\right)$$
$$= a\left(\frac{0-1}{r-1}\right) = \frac{a}{1-r}$$

مثال (٧-٩)

حدد أي من المتسلسلات التالية متسلسلة تقاربية أو تباعدية.

$$1)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{5}{3}\right)^i \quad , \quad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^k$$

الحل

١- بما أن المتسلسلة:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{5}{3}\right)^i$$

متسلسلة هندسية حيث $r = \frac{5}{3} > 1$

إذن المتسلسلة تباعدية (نظرية)

٢- كذلك بما أن المتسلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^k$$

متسلسلة هندسية حيث $|r| = \frac{1}{4} < 1$

إذن المتسلسلة متسلسلة تقاربية بحيث:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^k = \frac{5}{1-(\frac{-1}{4})} = \frac{5}{1+(\frac{1}{4})} = \frac{5}{5/4} = 4$$

تمرين (٢)

١- وضح الفرق بين كل من المتتابعة ، والمتسلسلة.

٢- حدد أي المتسلسلات الهندسية التالية متقاربة وأيهما متباعد، وفي حالة التقارب أوجد مجموع المتسلسلة.

1) $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{i}$, 2) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{6}\right)^{i}$

3) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{5}{2^{i}}$, 4) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{(-2)^{i}}$

5) $\sum_{i=1}^{\infty}5(0.9)^{i}$, 6) $\sum_{i=1}^{\infty}e^{-0.2i}$

7) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2^{k+1}}{3^{k-3}}$

٣- حدد أي المتسلسلات التالية تقاربية وأوجد مجموعها وأي منها تباعدية.

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^{0.1}}-\frac{1}{(k+1)^{0.1}}\right]$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right]$

3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^{2}(k+1)^{2}}$

ملحوظة: $\sqrt{k^{2}+k}=\sqrt{k}\sqrt{k+1}$

(٧-٣) أختبار التكامل وأختبار النسبة
The Integral Test and Ratio Test

وكما ذكرنا سابقاً أنه يمكن تحديد أي المتسلسلات تقاربية وأيها تباعدية يعتمد على تقارب أو تباعد متتابعة المجاميع الجزئية أي المتتابعة $\{S_n\}$. ولكن في بعض الحالات نحتاج إلى طرق غير مباشرة لتحديد هل المتسلسلة تقاربية أو تباعدية. وتسمي هذه الطرق بأختبارات التقارب.

وفي هذا الفصل سوف نقدم الأختبارات التالية:

١- أختبار التكامل Integral Test.

٢- أختبار النسبة Ratio Test.

أولاً: أختبار التكامل

نظرية (٧-٣)

وتسمي هذه النظرية بأختبار التباعد Divergence Test. إذا كانت المتسلسلة $\sum a_i$ متسلسلة تقاربية فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (7.20)$$

والعكس صحيح، إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \qquad (7.21)$$

فإن المتسلسلة $\sum a_i$ تكون متسلسلة تباعدية.

الإثبات:

إذا فرضنا سلسلة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تقاربية بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \tag{7.22}$$

كذلك بما أن: $S_k - S_{k-1} = a_k$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1}$$
$$= L - L = 0$$

مثال (٧-١٠)

وضح أن المتسلسلة التالية متسلسلة تباعدية

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-500}{3n+700}$$

الحل

بما أن:

$$a_k = \frac{k-500}{3k+700}$$

وبما أن:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k-500}{3k+700} = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k-500}{3k+700}.\frac{1/k}{1/k}\right] = \frac{1}{3} \neq 0$$

إذن المتسلسلة متسلسلة تباعدية.

ملحوظة: النظرية السابقة تستخدم لأختبار التباعد فقط ولكن لا يمكن استخدامها لأختبار التقارب.

نظرية (٧-٤)

وتسمي هذه النظرية بأختبار التكامل The Integral Test. إذا فرضنا:

$$a_k = f(k) \quad , \quad k = 1,2,....$$

حيث الدالة f دالة موجبة Positive ومتصلة Continuous ومتناقصة Decreasing بالنسبة للمتغير x ، $1 \le x$ فإن كل من المتسلسلة والتكامل التاليين:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{and} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \tag{7.23}$$

يكونا متقاربين أو يكونا متباعدين معاً.

الإثبات: أنظر مرجع [14].

مثال (٧-١١)

أعتبر المتسلسلة التوافقية التالية:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

أختبر تقارب المتسلسلة.

الحل

باستخدام أختبار التكامل حيث أن الدالة $f(x)$ المناظرة على النحو:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

فنجد أن الدالة $f(x)$ دالة موجبة ومتصلة ومتناقصة عندما $x \ge 1$ وبالتالي يمكن أن نستخدم النظرية السابقة على النحو التالي:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln 1] = \infty$$

وبالتالي فإن التكامل تباعدي وبالتالي المتسلسلة تباعدية.

مثال (٧-١٢)

أختبر تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k/3}}$$

الحل:

الدالة المناظرة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{x}{e^{x/3}} = xe^{-x/3}$$

حيث $f(x)$ دالة موجبة ، متصلة عندما $x \geq 1$.

ولتحديد الدالة متناقصة أم لا توجد نقطة الأستقرار حيث:

$$f'(x) = 0 \longrightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{3}e^{-x/3}\right) + e^{-x/3} = 0 \longrightarrow$$

$$e^{-x/3}\left[\frac{-x}{3} + 1\right] = 0 \longrightarrow$$

$$\left[\frac{-x}{3} + 1\right] = 0 \longrightarrow x = 3$$

وبما أن:

$$f''(x) = x\left(\frac{1}{9}e^{-x/3}\right) + \left(\frac{-1}{3}e^{-x/3}\right) - \frac{1}{3}e^{-x/3}$$
$$= e^{-x/3}\left[\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}\right]$$

وبالتالي

$$f''(x=3) = e^{-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

إذن النقطة $x = 3$ نقطة نهاية عظمي.

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ عندما $x > 3$ تكون دالة متناقصة وبالتالي:

$$\int_3^\infty xe^{-x/3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b xe^{-x/3}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-3xe^{-x/3}\Big|_3^b - \int_3^b(-3e^{-x/3})dx\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-3xe^{-x/3} - 9e^{-x/3}\right]_3^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-3be^{-b/3} - 9e^{-b/3}\right] - \left[-3(3)e^{-1} - 9e^{-1}\right]\right\}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-3e^{-b/3}(b+3) + 18e^{-1}\right\}$$
$$= -3\lim_{b\to\infty}\frac{b+3}{e^{b/3}} + \frac{18}{e} = 18e^{-1}$$

ملحوظة: باستخدام قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b+3}{e^{b/3}} = \lim_{b\to\infty}\frac{3}{e^{b/3}} = 0$$

وتسمي المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \tag{7.24}$$

بمتسلسلة P-Seies وعندما $p=1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية التالية:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

نظرية (٧-٥)

إذا فرضنا المتسلسلة P على النحو التالي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$$

حيث P مقدار ثابت. فإن:

١- تكون المتسلسلة تقاربية عندما تكون $p>1$.

٢- وتكون المتسلسلة تباعدية عندما تكون $p\le 1$.

الإثبات:

١- باستخدام أختبار التكامل حيث يمكن أثبات ان الدالة $f(x)=\frac{1}{x^p}$ دالة متصلة، وموجبة، ومتناقصة عندما $x\ge 1$ ، $p>0$ - وبالتالي فإن:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & \text{if } p>1 \qquad (7.25)\\[2ex] \infty & \text{if } 0<p<1 \qquad (7.26)\end{cases}$$

٢- وسبق أن أثبتنا في المثال (٧-١١) أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ عندما $p=1$ متسلسلة تباعدية.

٣- وسوف نثبت فيما يلي أن المتسلسلة تباعدية أيضاً عندما $p=0$ كذلك عندما $p<0$ على النحو التالي

٤- عندما $p=0$ نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^0}=1+1+1+1+1.......$$

٥- كذلك عندما $p<0$ نجد أن:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}=\lim_{k\to\infty}x^{-p}=\infty$$

وبالتالي من (١) – (٥) نجد أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ تقاربية عندما $p>1$ ، وتباعدية عندما $p\le 1$.

مثال (٧-١٣)

أختبر تقارب كل من المتسلسلات

$$1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^5}} \qquad , \qquad 2)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{e^k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$$

الحل

١- بما ان المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^5}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}$$

وبما أن $1 < \frac{5}{2} = p$ وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربية (نظرية).

٢- بما أن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{e^k}-\frac{1}{k^{1/2}}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$$

وبما ان المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^k}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\ldots\ldots$$

متسلسلة هندسية أساسها يساوي $\frac{1}{e}$ أي أن $|r|<1$ وبالتالي فهي متسلسلة تقاربية.

أما المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$$

حيث $p=\frac{1}{2}$ أي $p<1$ إذن المتسلسلة تباعدية وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right)$$

متسلسلة تباعدية.

ثانياً: أختبار النسبة

نظرية (٧-٦)

إذا فرضنا المتسلسلة

$$\sum_{I=1}^{\infty}a_i \quad , \ a_i \neq 0$$

بحيث: $\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|=L$ فإن:

١- إذا كانت $L < 1$ تكون المتسلسلة تقاربية.

٢- إذا كانت $L > 1$ تكون المتسلسلة تباعدية.

٣- إذا كانت $L = 1$ فإن الأختبار يفشل في تحديد نوع المتسلسلة.

الإثبات:أنظر مرجع [ ] صفحة 658

مثال (٧-١٤)

استخدم أختبار النسبة لتحديد نوع المتسلسلة التالية تقاربية أو تباعدية.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k}$$

الحل

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{2^{(k+1)}}\cdot\frac{2^k}{(-1)^k k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)(k+1)}{2k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{-1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} < 0
\end{aligned}$$

إذن المتسلسلة تقاربية.

تمرين (٣)

(١) أخبر تقارب او تباعد المتسلسلات التالية:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad , \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{200}{\sqrt{k}}$$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$, 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k\sqrt{k}}$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5+3k)^2}$, 6) $\sum_{k=1}^{\infty} (3+k)^{-5/2}$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k^3+2}}$, 8) $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$, 10) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$, 12) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$

(٢) أستخدم أختبار النسبة لتحديد تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{1!}$, 2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{3^k}$

3) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{2k+1}$, 4) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 3^k}{2^k}$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$, 6) $\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1-3k}{5k}\right)^k$

7) $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$, 8) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^k}{k^{2k}}$

9) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)k}{\ln k}$, 10) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln k}$

(٧-٤) متسلسلة تيلور　Taylor Series

تسمي المتسلسلة التالية:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots.. \qquad (7.27)$$

بمتسلسلة القوي في $(x-c)$ وتكون المتسلسلة تقاربية عندما $x \in (c-r, c+r)$ حيث r تمثل نصف قطر التقارب Radius Convergence. وتتقارب المتسلسلة من الدالة $f(x)$ تقارب مطلق عندما $x \in (c-r, c+r)$ [, page 672] وبالتالي فإنه في الفترة $(c-r, c+r)$ فإن:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots..$$

كذلك

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (x-c)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots\ldots \qquad (7.28)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)(x-c)^{k-2} \\ &= 2a_2 + 3.2a_3(x-c) + 4.3a_4(x-c)^2 + \ldots\ldots \qquad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(x-c)^{k-3} \\ &= 3.2a_3 + 4.3.2a_4(x-c) + 5.4.3a_5(x-c)^2 + \ldots \qquad (2.30) \end{aligned}$$

وهكذا، وبالتالي عندما $x = c$ فإن:

$$f(c) = a_0$$

$$f'(c) = 1.a_1$$

$$f''(c) = 2.1.a_2 = 2!\,a_2$$

$$f'''(c) = 3.2.1.a_3 = 3!\,a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(c) = k!\,a_k \qquad (7.31)$$

وبالتالي:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \quad , \quad k = 0,1,2,.... \qquad (7.32)$$

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ يمكن كتبتها على النحو:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad (7.33)$$

وتسمي المتسلسلة في (7.33) بمفكوك متسلسلة تيلور Taylor Series Expansion نسبة إلى عالم الرياضيات Brook Taylor (١٦٨٥-١٧٣١) الذي قام باشتقاق صياغة الدالة $f(x)$ في (7.33).

ومما هو جدير بالذكر أننا سوف نستخدم متسلسلة القوي في الباب العاشر في أستكمال الدالة باستخدام طريقة نيوتن. ويمكن أثبات أن مفكوك تيلور $f(x)$ في (7.33) متسلسلة تقاربية. وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٧-١٥)

أوجد مفكوك تيلور للدالة

$$f(x) = e^x$$

حول $x = 0$ أي عندما $c = 0$

الحل

$$f'(x) = e^x \quad , \quad f''(x) = e^x \quad , \quad \ldots \quad \longrightarrow$$

$$f(x) = e^x \qquad , \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

وبالتالي فإن عندما $c = 0$ فإن:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^0}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

وباستخدام أختبار النسبة نجد أن:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!\,x^{k+1}}{(k+1)!\,x^k}\right| = |x| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right|$$

$$= |x|(0) = 0 < 1 \qquad \text{for all } x$$

وبالتالي متسلسلة تيلور $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ متسلسلة تقاربية لجميع القيم الحقيقية لـ x.

وتعرف المتسلسلة الجزئية Partial Series لمتسلسلة تيلور من الدرجة n على النحو التالي:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad (7.34)$$

ويلاحظ ان $P_n(x)$ كثيرة حدود Polynomial من الدرجة n.

نظرية (٧-٧)

إذا فرضنا $f(x)$ بحيث يوجد $f^{(n+1)}(x)$ من المشتقات في الفترة $(c-r, c+r)$ ، $r > 0$ فإنه لأي $x \in (c-r, c+r)$ فإن:

$$f(x) \approx P_n(x) \qquad (7.35)$$

والخطأ Error في استخدام $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ يساوي $R_n(x)$ حيث:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (7.36)$$

حيث z تقع بين x, c.

ويسمي حد الخطأ Error Term $R_n(x)$ بالحد الباقي Remainder Term.

حالة خاصة: الحالة الخاصة لمتسلسلة تيلور عندما $c = 0$ تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... \qquad (7.37)$$

وتسمي المتسلسلة في (7.37) بمتسلسلة مكلورين نسبة إلى عالم الرياضيات الاسكتلندي Colin Maclaurin (١٦٩٨-١٧٤٦).

مثال (٧-١٦)

أوجد متسلسلة مكلورين للدالة:

$$f(x) = e^x$$

الحل

بما أن:

$$f'(x) = e^x \quad , \quad f''(x) = e^x \quad , \quad \ldots \quad f^{(k)}(x) = e^x$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots.$$

$$= 1 + + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots.$$

وبالتالي فإن:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

مثال (٧-١٧)

أوجد متسلسلة تيلور للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \ln x$$

عندما $c = 1$

الحل

$$\Theta\ f(x) = \ln n \longrightarrow f(1) = 0$$

$$^{/}f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow {}^{/}f(1) = 1$$

$$^{//}f(x) = \frac{-1}{x^2} \longrightarrow {}^{//}f(1) = -1$$

$$^{///}f(x) = \frac{2}{x^3} \longrightarrow {}^{///}f(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \longrightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k} \longrightarrow f^{(k)}(-1)^{k+1}(k-1)! = -6$$

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}$$

وباستخدام اختبار النسبة يمكن أثبات أن متسلسلة تيلور للدالة $f(x) = \ln x$ تقاربية في الفترة $0 < x < 2$ على النحو التالي:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{\,k}}{k+1}}{\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}}\right| = |x-|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = 1$$

وهذا يعني أن متسلسلة القوي متقاربة عندما

$$|\,x-1\,| < 1$$

أي عندما تقع x في الفترة التالية:

$$0 < x < 2$$

تمرين (٤)

(١) أوجد متسلسلة مكلورين (أي متسلسلة تيلور عند $c = 0$ لكل دالة من الدوال التالية، كذلك تحديد الفترة التي تقع فيها x لكي تكون المتسلسلة تقاربية.

$1)\ f(x) = 2x \quad , \quad 2)\ f(x) = e^x$

$3)\ f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)} \quad , \quad 4)\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$5)\ f(x) = \ln(1+x) \quad , \quad 6)\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

(٢) أوجد متسلسلة تيلور من الدرجة (n) لكل دالة من الدوال التالية عند قيم n، c المنظرة لكل منها.

$1)\ f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad c = 1\ ,\ n = 6\ ,\ n = 8$

$2)\ f(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad , \quad c = 0\ ,\ n = 4\ ,\ n = 8$

$3)\ f(x) = e^x \quad , \quad c = 2\ ,\ n = 3\ ,\ n = 6$

$4)\ f(x) = e^{2x} \quad , \quad c = 0\ ,\ n = 5\ ,\ n = 6$

$5)\ f(x) = \ln x \quad , \quad c = 1\ ,\ n = 4\ ,\ n = 8$

(٣) أوجد متسلسلة مكلورين للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

حيث $a \neq 0$

(٤) أثبت أن متسلسلة مكلورين للدالة $(1+x)^r$ تساوي:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\ldots\ldots(r-k+1)}{k!} x^k$$

حيث r مقدار ثابت.

(٧-٥) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٧-١)

أودع شخص في أحد البنوك مبلغ 500 جنيه لأحد أبنائه عند مولده وديعة حتى يبلغ سن عشرون سنة تستحق فائدة مركبة كل ربع سنة. فإذا كان معدل الفائدة السنوي المعلن %12 سنوياً.

١- وضح أن جملة المبلغ المستحق لهذا الأبن في نهاية كل ربع سنة يمثل متتابعة.

٢- أوجد جملة المبلغ المستحق للأبن عند بلوغة 20 سنة.

٣- أوجد الفوائد التي حصل عليها الأبن عند بلوغه 20 سنة.

الحل

بما ان معدل الفائدة السنوي يساوي %12 ، بالتالي فغن المعدل الربع سنوي يساوي:

$$\frac{12\%}{4} = 3\% = 0.03$$

١- وبالتالي المبلغ في نهاية الربع الأول ونرمز له بالرمز a_1

$$a_1 = 5000 + 5000(0.03) = 5000(1.03)$$

وجملة المبلغ في نهاية الربع الثاني ويساوي a_2 حيث:

$$a_2 = \{5000(1.03)\} + \{5000(1.03)(0.03)\}$$
$$= 5000(1.03)[1 + 0.3] = 5000(1.03)^2$$

وهكذا يكون المستحق في نهاية الربع رقم (n) يساوى a_n حيث:

$$a_n = 5000(1.03)^n$$

وبالتالي فإن المستحق للأبن كل ربع سنة يكون على النحو:

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, \ a_{80}$$

$$5000(1.03)\,,\, 5000(1.03)^2\,,\,\ldots\ldots\,,\, 5000(1.03)^{80}$$

٢- وتصبح جملة المبلغ المستحق للأبن عند بلوغه 20 سنة تساوي a_{80} حيث:

$$a_{80} = 5000(1.03)^{80}$$

٣- وتكون الفوائد التي حصل عليها الأبن تساوي:

$$\begin{aligned} a_{80} - 5000 &= 5000(1.03)^{80} - 5000 = 5000[(1.03)^{80} - 1] \\ &= 5000[10.64089056 - 1] = 48{,}204.45 \text{ جنيه} \end{aligned}$$

تطبيق (٧-٢)

في أحد المصانع المقامة في أحدى المدن، أشارت أجهزة الارصاد وجود نسبة 0.5% من كمية الأبخرة السامة الناتجة تتسرب وتتفاعل بالهواء الجوي في المدينة. فإذا كانت كمية البخار السام المتكون يومياً تساوي m جرام.

بافتراض قياس أجهزة الأرصاد في اليوم الأول m جرام من البخار السام.

١- أوجد كمية المواد السامة في الهواء في اليوم العاشر للقياس.

٢- أوجد كمية المواد السامة في المدينة في الأجل الطويل.

الحل

١- نفرض أن كمية المواد السامة في اليوم الول تساوي S_1 حيث:

$$S_1 = m(0.005) \text{ جرام}$$

كمية المارد السامة في اليوم الثاني تساوي S_2 حيث:

$$S_2 = m(0.005) + m(0.005)](0.005) = m(0.005) + m(0.005)^2 \text{ جرام}$$

$$\vdots$$

وبالمثل في اليوم (n) تساوي S_n حيث:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} m(0.005)^n$$

١- وبالتالي كمية المواد السامة في نهاية اليوم العاشر تساوي S_{10} حيث:

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} m(0.005)^n \qquad (1)$$

ونلاحظ أن المتسلسلة في (1) متسلسلة هندسية أساسها (0.005) وبالتالي فإن:

$$S_{10} = m\left[\frac{1-(0.005)^{10}}{1-(0.005)}\right] = m\left[\frac{1}{0.995}\right] = 1.005025 \text{ جرام}$$

٢- كمية المواد السامة في المدينة في الأجل الطويل تساوي S_∞ حيث:

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} m(0.005)^n = m\left[\sum_{n=1}^{\infty}(0.005)^n\right]$$

ويمثل المقدار $\sum_{n=1}^{\infty}(0.005)^n$ متسلسلة هندسية أساسها (0.005)

$$S_\infty = m\left[0.005\left(\sum_{n=0}^{\infty}(0.005)^n\right)\right] = 0.005m\left[\frac{1}{1-0.005}\right]$$
$$= 0.005025125m \text{ مارج}$$

تطبيق (٧-٣)

أشترى أحد المصانع ماكينة بمبلغ 100,000 جنيه فإذا كان معدل الأهلاك السنوي لقيمة الماكينة يساوي 2% سنوياً من قيمتها.

١- أوجد قيمة الماكينة بعد 30 سنة.

٢- أوجد عدد السنوات التي بعدها قيمة الماكينة تساوي صفر.

الحل

١- بعد السنة الأولي تصبح قيمة الماكينة تساوي a_1 حيث

$$a_1 = 100{,}000(0.98)$$

بعد السنة الثانية تصبح قيمة الماكينة تساوي a_2 حيث

$$a_2 = 100{,}000(0.98)^2$$

وهكذا بعد n من السنوات تصبح قيمة الماكينة تساوي a_n حيث

$$a_n = 100{,}000(0.98)^n$$

وبالتالي عندما $n = 30$ فإن:

$$a_{30} = 100{,}000(0.98)^{30} = 54{,}548.43$$

٢- عندما قيمة الماكينة تساوي صفر فإن:

$$a_n = 0 \longrightarrow$$

$$100{,}000(0.98)^n = 0$$

$$\ln 100{,}0000 + n\ln(0.98) = 0$$

$$n = \frac{-\ln 100000}{\ln(0.98)} = \frac{-11.512926}{-0.02020271} = 569.83 = 570 \text{ سنة}$$

(٧-٦) تمرينات Exercises

(٧-١) أوجد متسلسلة مكلورين كتقريب للدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ثم حدد الفترة التي تقع فيها x لكل تكون المتسلسلة تقاربية.

(٧-٢) أوجد متسلسلة مكلورين لكل دالة من الدوال التالية:

1) e^{3x} , 2) e^{-x}

3) e^{x^2} , 4) xe^x

5) $e^{-x} + e^{2x}$, 6) $x^3 - 2x^2 + 5 - 5$

(٧-٣) أوجد مفكوك مكلورين لكل دالة من الدوال التالية – ثم أختبر تقارب المتسلسلة في كل حالة.

1) $f(x) = \sqrt{1+x}$, 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $f(x) = (1+x)^{3/2}$, 4) $f(x) = (5+x)^{-1/2}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, 6) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$

(٧-٤) حدد التقارب أو التباعد في كل متتابعة من المتتابعات التالية:

1) $\left\{\dfrac{(-2)^n}{n^2+1}\right\}$, 2) $\left\{\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{n}}\right\}$

3) $\left\{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n\right\}$, 4) $\left\{\dfrac{e^{0.1n}}{n^5-3n+1}\right\}$

5) $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$, 6) $\left\{\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^{2n}\right\}$

7) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$, 8) $\left\{\sqrt{n^4+2n^2}-n^2\right\}$

9) $\left\{1+(-1)^n\right\}$, 10) $\left\{\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n\right\}$

11) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}\right\}$, 12) $\left\{5^{2/n}\right\}$

(٧-٥) أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التقاربية التالية:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}4\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^k$

3) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k^2-1}$, 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{-3}{8}\right)^k+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2k}\right]$

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}$, 6) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{e^k+3^{k-1}}{6^{k+1}}$

(٧-٦) أختبر تقارب المتسلسلات التالية:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5^k k!}{k^k}$, 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k^3+4}}$

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{k}}$, 4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2 3^k}{k!}$

5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^2}{(k^2+1)^2}$, 6) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k(\ln k)^2}$

الباب الثامن
المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها
Differential Equations and its Applications

(٨-١) المعادلة التفاضلية Differential Equation

(٨-٢) نماذج النمو والاضمحلال الآسية
Exponential Growth and Decay Models

(٨-٣) المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة
Separable Differential Equations

(٨-٤) نماذج النمو الوجستية Logistic Growth Models

(٨-٥) المعادلات التفاضلية المتجانسة
Homogeneous Differential Equations

(٨-٦) الحلول العددية Numerical Solution

(٨-٧) أمثلة تطبيقية Applied Examples

(٨-٨) تمرينات Exercises

(٨-١) المعادلة التفاضلية Differential Equation

إذا اعتبرنا المتغير y دالة في المتغير x حيث:

$$y = f(x) \tag{8.1}$$

والصياغة الرياضية للدالة $f(x)$ غير معروف لنا Unknown ولكن متاح لدينا تفاضل y بالنسبة لـ x أي متاح $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ ، $i = 1,2,\ldots,n$ في حالة إذا كان x متجه بحيث [3]:

$$X = \lfloor x_1 \;\; x_2 \;\; ..... \;\; x_i \;\; ...... \; x_n \rfloor \tag{8.2}$$

والمعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تضمن تفاضل (أو مشتقات) دالة غير معروفة الصياغة الرياضية لها – فعلى سبيل المثال:

$$\frac{dy}{dx} = xe^x \tag{8.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = x^2 \tag{8.4}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy - 8 = 0 \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - 10 = 0 \tag{8.6}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + x_1 x_2 - 20 = 0 \tag{8.7}$$

نجد أن المعادلة (8.3) معادلة تحتوى على المشتقات الأولى لـ y بالنسبة لـ x فهي معادلة تفاضلية من الترتيب الأول، والمعادلة (8.4) معادلة تحتوى على المشتقة من الترتيب الثاني فهي معادلة تفاضلية من الترتيب الثاني. والمعادلة (8.5) معادلة تفاضلية من الترتيب (n)، والمعادلة (8.6) من الترتيب الثاني، والمعادلة (8.7) من الترتيب الثاني أيضاً. فترتيب المعادلة هو أعلى ترتيب للمشتقات بالمعادلة وحل المعادلة التفاضلية هو الحصول على الدالة التي تحقق المعادلة. وسوف نوضح ذلك خلال هذا الباب.

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الحصول على الدالة y (من أى درجة سواء الدرجة الأولى، أو الثانية،...الخ) باستخدام مشتقة (أو مشتقات الدالة). ومن الحل العام يمكن الحصول على أي حل خاص وفقاً للشروط المفروضة على الدالة y. وتلعب المعادلات التفاضلية وأساليب حلها دور هام في كثير من المشاكل الاقتصادية والاجتماعية والطبية، ... الخ.

ففي عام ١٩٩٣ [22] استخدم علماء الحفريات paleontologists المعادلات التفاضلية في تقدير أعمار بعض الكائنات الحية على سطح الكرة الأرضية وذلك عن طريق معرفة معدل تناقص (اضمحلال) الأحجار التي تحتوى على كربون 14 المشع. وسوف نوضح ذلك في مثال (٨-٢).

كذلك استخدم الباحثين الزراعيين أسلوب المعادلات التفاضلية في تحديد كمية مقدار الزيادة في أحد المحاصيل الزراعية نتيجة استخدام أحد الأسمدة. وسوف نوضح ذلك في مثال (٨-٨).

وسوف نقدم في الباب التالي كيفية استخدام الحزمة الرياضية Maple في حل المعادلات التفاضلية باستخدام الحاسب.

تمرين(١)

أثبت أن y هي حل المعادلة التفاضلية المناظرة لكل حالة من الحالات التالية:

1) $y = x^2 \quad , \quad xy' + y = 3x^2$

2) $y = e^x \quad , \quad y' - y = 0$

3) $y = \frac{1}{2} + c\,e^{-x^2} \quad , \quad y' + 2xy = x$

حيث c مقدار ثابت

4) $y = c\,e^{kx} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = ky$

حيث c مقدار ثابت

5) $y = e^{-2x} \quad , \quad y'' + y' - 2y = 0$

6) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad , \quad y'' - 3y' + 2y = 0$

7) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x\,e^{-2x} \quad , \quad y'' + 4y' + 4y = 0$

8) $y = c_1 + c_2 x^{1/3} \quad , \quad 3xy'' + 2y' = 0$

9) $y = \frac{c_1}{x} + c_2 \frac{\ln x}{x} \quad , \quad x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

10) $y = c_1 e^x + c_2 x\,e^x + c_3 x^2\,e^x \quad , \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

11) $y = c - A\,e^{kt} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = k(c - y)$

حيث c , A مقادير ثابت

12) $y = \frac{c}{1 + A\,e^{-ckt}} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = k + y(c - y)$

حيث c , A مقادير ثابت

(٨-٢) نماذج النمو والاضمحلال الآسية
Exponential Growth and Decay Models

إذا فرضنا أن $y(t)$ تشير إلى حجم مجتمع من المفردات في الزمن t. وإذا فرضنا أن حجم المجتمع يتزايد (أو يتناقص) في وحدة الزمن بمقدار يساوى نسبة ثابتة من حجم المجتمع في نفس الزمن وليكن المقدار $[k\,y(t)]$ فإذا كان $y^{\backslash}(t)$ هو معدل تغير $y(t)$ بالنسبة للزمن t فإن:

$$y^{\backslash}(t) = ky(t) \qquad (8.8)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{y^{\backslash}(t)}{y(t)} = k \qquad (8.9)$$

$$\int \frac{y^{\backslash}(t)}{y(t)} dt = \int k\,dx \qquad (8.10)$$

$$\int \frac{1}{y(t)} d\,y(t) = \int k\,dt \qquad (8.11)$$

$$\ln|y(t)| + c_1 = kt + c_2 \;\rightarrow\; \ln|y(t)| = kt + c \qquad (8.12)$$

حيث c_1 ، c_2 ، c مقادير ثابتة حيث: $c = c_2 - c_1$

وبما أن $y(t) > 0$ فإن:

$$\ln y(t) = kt + c \;\rightarrow\; y(t) = e^{kt+c} \;\rightarrow\; y(t) = e^{kt}e^{c} \;\rightarrow$$

$$y(t) = Ae^{kt} \qquad (8.13)$$

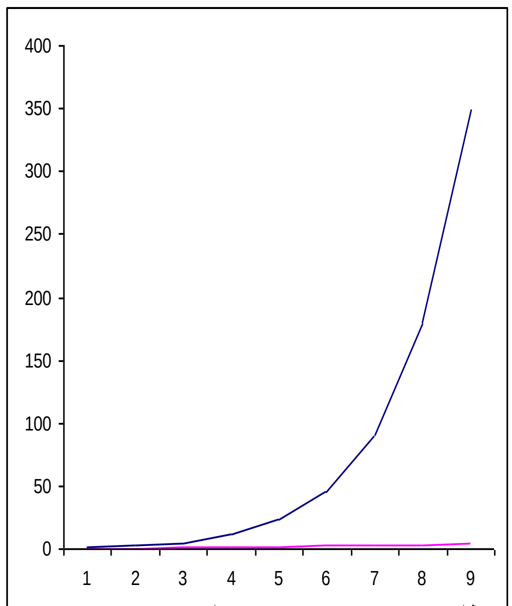
حيث A مقدار ثابت $A = e^c$

وتسمي الدالة في (8.13) بالحل العام للمعادلة التفاضلية في (8.8). وعندما $k > 0$ فإن (8.13) تسمي بنموذج النمو الأسي Growth Model وعندما $k < 0$ فإن (8.13) تسمي بنموذج الاضمحلال (أو التدهور) Decay Model الآسي.

مثال (٨-١)

الجدول التالي يوضح نمو أحد أنواع البكتريا في أحدى التجارب [14].

شكل (٨-١)



جدول (٨-١)

الزمن (بالساعة)	عدد البكتريا (بالمليون في الملي متر)
0	1.2
0.5	2.5
1	5.1
1.5	11.0
2	23.0
2.5	45.0
3	91
3.5	180.0
4	350

المطلوب: حدد حجم عدد البكتريا بعد 5 ساعات.

الحل

من الجدول يتضح أن الوحدة الزمنية $\frac{1}{2}$ ساعة كذلك يتضح أن النمو يحدث بمعدل ثابت كما هو موضح بشكل (٨-١) أيضاً، وبما أن:

$$y^{\backslash}(t) = ky(t)$$

ومن العمود الثاني بالجدول يتضح أن $K \approx 2.09$

ومن المعادلة (8.13) نجد أن:

$$y(t) = Ae^{kt}$$

ويمكن تحديد قيمة المقدار الثابت A على النحو التالي:

بما أن عندما t=0 من الجدول نجد أن $y(0) = 1.2$ بالتالي فإن:

$$y(0) = 2.1 = Ae^{2.09(0)} \rightarrow A = 2.1$$

وبالتالي يصبح نموذج النمو على النحو التالي:

$$y(t) = (2.1)\, e^{2.09t}$$

وبعد 5 سنوات تصبح t=10 فإن:

$$y(10) = (2.1)\, e^{2.09(10)} = 2{,}505{,}959{,}030$$

أي أن عدد البكتريا في الملي بعد 10 ساعات سوف يصبح 2,505,959,030.

مثال (٨-٢)

إذا فرضنا وجود قطعة من الكربون 14 وزنها 80 جرام، احسب وزنها بعد 100 سنة، إذا نقص الوزن وفقاً لنموذج الاضمحلال الآسي.

ملحوظة: مع الأخذ في الاعتبار أن أي كمية من الكربون 14 تصل إلى النصف فيما يقرب من 5730سنة.

الحل:

إذا فرضنا أن $y(t)$ هي كمية الكربون في الزمن t فإن:

$$y(t) = Ae^{kt}$$

وبالتالي فإن:

$$y(0) = 80 = Ae^{(0)} \rightarrow A = 80$$

وللحصول على قيمة K فإن نصف المقدار 80 جرام يحدث بعد 5730 سنة وبالتالي فإن:

$$40 = 80e^{k(5750)} \rightarrow \frac{40}{80} = e^{5750k}$$
$$\frac{1}{2} = e^{5750k} \rightarrow \ln(\frac{1}{2}) = 5750k$$
$$k = \frac{\ln(1/2)}{5750} = \frac{-0.69314718}{5750} = 0.00012054$$
$$\therefore y(t) = 80e^{-0.00012054t} \qquad t > 0$$

وبالتالي فإن كمية الكربون بعد 100 تساوى $y(100)$ على النحو التالي:

$$y(100) = 80e^{-0.00012054(100)} = 79.041 \text{ جرام}$$

مثال (٨-٣)

إذا فرضنا أن أحد العقارات ثمنه عند الشراء 100,000 جنية، وأن قيمته تتناقص بشكل مستمر مع الزمن بمعدل ثابت 24% سنوياً.

والمطلوب:

١- صيغ المشكلة السابقة كمعادلة تفاضلية.

٢- أوجد قيمة العقار بعد 20 سنة.

٣- أوجد مقدار الاستهلاك Depreciation بعد 20 سنة.

الحل:

١- إذا فرضنا أن $v(t)$ تشير إلى ثمن العقار في السنة t (أي بعد t من السنوات)، كذلك إذا فرضنا أن المعدل السنوي للاستهلاك المتصل يساوى r حيث $r = 0.24$. فإن:

$$v^{\backslash}(t) = r\,v(t) \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{v(t)}\,dv(t) = \int r\,d(t)$$

$$\ln v(t) = rt + c \quad \rightarrow \quad v(t) = e^{rt}A \quad \rightarrow \quad v(t) = Ae^{rt}$$

وبما أن عند الشراء ثمن العقار يساوى 100,000 فإن:

$$v(t=0) = Ae^{r(0)} \quad \rightarrow \quad 100{,}000 = A$$

وبالتالي فإن:

$$v(t) = 100{,}000e^{-0.24t}$$

٢- وبالتالي بعد 20سنة نجد أن قيمة العقار

$$v(20) = 100{,}000e^{-0.24(20)} = 82298 \text{ جنية}$$

٣- وبالتالي مقدار الاستهلاك (D) في 20 سنة على النحو:

$$D = v(t=0) - v(t=20) = 100000 - 82298 = 9917702$$ جنية

مثال (٨-٤)

أودع شخص مبلغ 200,000 جنيه بأحد البنوك الذي يعطى فائدة مركبة بشكل مستمر بمعدل 12% سنوياً. والمطلوب:

١- صيغ المشكلة السابقة كمعادلة تفاضلية.

٢- أوجد جملة المبلغ بعد 5سنوات.

٣- أوجد مقدار الفائدة المركبة بعد 5سنوات.

الحل:

١- إذا فرضنا أن $S(t)$ هي جملة المبلغ في الزمن t (أي بعد t من السنوات)، كذلك $S^{\prime}(t)$ هي معدل تغير الجملة، ومعدل الفائدة المركبة المستمر r حيث r = 0.12 فإن:

$$S^{\prime}(t) = r\,S(t) \rightarrow S(t) = A\,e^{rt}$$

وبما أن

$$S(t=0) = 200{,}000$$

بالتالي فإن:

$$S(t=0) = 200{,}000 = A \rightarrow$$

$$S(t) = 200{,}000e^{0.12t}$$

٢- جملة المبلغ بعد 5 سنوات

$$S(t = 5) = 200{,}000e^{0.12(5)} = 3{,}644{,}223.76 \text{ جنيه}$$

٣- مقدار الفائدة المركبة I حيث:

$$I = S(t = 5) - S(t = 0) = 364422376 - 200000 = 164{,}423.76 \text{ جنيه}$$

الفائدة المركبة Compound Interest

تعتبر الفائدة المركبة بشكل متصل Continuous Compounding من أهم التطبيقات لنماذج النمو الأسي Exponential Growth Models كما سوف نوضح فيما يلي:

إذا فرضنا أن أحد البنوك يعطى فائدة مركبة متصلة بمعدل سنوي يساوي $r\%$.

فإذا فرضنا أن أحد الأفراد سوف يودع مبلغ P لمدة t حيث يصبح جملة المبلغ في نهاية الفترة t يساوي $y(t)$.

فإذا فرضنا أن $y'(t)$ هي معدل تغير $y(t)$ بالنسبة لـ t فإن:

$$y'(t) = r\,y(t) \longrightarrow y(t) = A\,e^{rt}$$

وبما أن

$$y(0) = P$$

فإن:

$$y(0) = P = A\,e^{r(0)} \longrightarrow$$

$$A = P \longrightarrow y(t) = P\,e^{rt}$$

تمرين(٢)

١- يوجد نوع معين من الأدوية التي تعطى للأفراد فإذا كانت نصف كمية الدواء المعطاه للفرد في الدورة الدموية يتم إخراجها عن طريق الكلي كل ٤ ساعات. فإذا أعتبرنا أن كمية الدواء في بداية تناول الفرد لها تساوي 300 ميلى جرام.

أ) إذا أعتبرنا أن $y(t)$ هي كمية الدواء في الدورة الدموية للمتعاطى في الساعة t. أوجد الدالة $y(t)$.

ب)أوجد كمية الدواء في الدورة الدموية بعد 8 ساعات، بعد 24ساعة، بعد 72ساعة من التعاطى,

٢- في إحدى قرى الوجه القبلي بجمهورية مصر العربية وجد أن عدد سكان القرية يتزايد بمعدل مستمر 2.3% سنوياً. فإذا كان عدد سكان القرية في أول يناير سنة 1995 يساوي 20,000 نسمة.

أ) أوجد عدد السكان في السنة t.

ب)قدر عدد سكان القرية في سنة 2010، 2015.

٣- تتناقص كمية أحدى المواد المشعة بمعدل ثابت يساوي 0.350 كل ساعة.

أ) أوجد الفترة التي تصل فيها الكمية إلى النصف.

ب) أوجد الفترة التي تتلاشى فيها الكمية.

٤- في إحدى الدراست لتأثير حملات الدعاية التليفزيونية على الربح بالنسبة لسلعة ما وجد أن صافى الربح السنوي بدون دعاية يساوي 50,000 جنيه، فإذا كان الربح يتزايد بمعدل مستمر 0.25% سنوياً في حالة وجود دعاية تليفزيونية.

أ) أوجد باستخدام المعادلات التفاضلية حجم الربح السنوي في حالة وجود دعاية إعلانية.

ب) قدر الربح في حالة الدعاية بعد 5 سنوات.

(٨-٣) المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة
Separable Differential Equations

وكما سبق أن أوضحنا في الفصل (٨-١) انه يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية وفقاً لترتيب المشتقة (أو المشتقات) في المعادلة.

وبالنسبة للمعادلات التفاضلية من الترتيب الأول First Order Differential Equation فإنه في بعض الحالات يمكن كتابة المشتقة على النحو التالي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \tag{8.14}$$

وبالتالي يمكن إيجاد الحل لها على النحو التالي:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,d(x) \;\rightarrow\; \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,d(x) \tag{8.15}$$

مثال (٨-٥)

أوجد الحل العام للمعادلة التالية

$$y^{\backslash} = \frac{xy}{x^2+1}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)y \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx \;\rightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_2$$

حيث $c_2 - c_1 = \ln c$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln c \rightarrow \ln|y| = \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + \ln c \rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln c\sqrt{x^2+1}$$

$y > 0$ For

$$y = c\sqrt{x^2+1}$$

مثال (٨-٦)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y\,e^x + (y^2-1)y^\backslash = 0$$

التي تحقق الشرط $y(0) = 1$

الحل:

$$y\,e^x + (y^2-1)\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow$$

$$(y^2-1)\frac{dy}{y} = -e^x\,dx \longrightarrow$$

$$(\frac{y^2-1}{y})dy = -e^x\,dx \longrightarrow$$

$$(y-\frac{1}{y})dy = -e^x\,dx \longrightarrow$$

$$\int(y-\frac{1}{y})dy = \int -e^x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln|y| + c_1 = -e^x + c_2$$
$$y^2 - \ln y^2 = -2e^x + c$$

وبما أن $y(0) = 1$

$$1 - \ln 1 = -2(1) + c \rightarrow 1 - 0 = -2 + c \rightarrow c = 3$$

وبالتالي يصبح الحل الخاص

$$y^2 - \ln y^2 = -2e^x + 3$$

مثال (٨-٧)

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^\backslash = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$$

الحل

بما أن $\quad y^\backslash = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$

وبالتالي فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$$
$$\int y^2\, dy = \int (x^2 + 7x + 3)\, dx$$
$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7y^2}{2} + 3x + c$$

$$y^3 = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}$$

مثال (٨-٨)

أثبتت احدي الدراسات بالنسبة للتجارب الزراعية. أن أقصى كمية قمح ممكن أن يعطيها الفدان الواحد تساوى 150 أردب، فإذا كانت كمية المحصول دالة في كمية السماد المستخدم. فإذا أشرنا إلى كمية المحصول في الفدان الواحد بالاردب بالرمز $Q(x)$ حيث x تشير إلى كمية السماد في الفدان الواحد بالكيلوجرام.

كذلك وضحت التجربة أن 10كيلو من السماد للفدان تعطى 80 أردب قمح للفدان، كذلك 20 كيلو سماد تعطى 120 أردب للفدان.

فإذا كان معدل تغير كمية المحصول بالنسبة للسماد من القمح للفدان تأخذ الصياغة التالية [3].

$$\frac{dQ(x)}{dx} = K(150 - Q(x))$$

والمطلوب:

١- حل المعادلة التفاضلية.

٢- تحديد قيمة المقدار الثابت K.

٣- تحديد كمية المحصول إذا كانت كمية السماد 15 كيلو.

الحل:

بما أن

$$\frac{dQ(x)}{dx} = K(150 - Q(x))$$

وبالتالي فإن:

$$\int \frac{1}{150-Q}\, dQ = \int k\, dx$$

$$-\ln|150-Q| = Kx + c \quad \rightarrow \quad 150-Q = A\, e^{-kx}$$

حيث $A = e^{-c}$ بالتالي فإن:

$$Q = 150 - A\, e^{-kx}$$

وبما أن

$$Q(x=10) = 80$$

$$Q(x=20) = 120$$

وبالتالي فإن:

$$\longrightarrow \begin{array}{l} 80 = 150 - A\, e^{-10k} \\ 120 = 150 - A\, e^{-20k} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} A\, e^{-10k} = 150 - 80 = 70 \\ A\, e^{-20k} = 150 - 120 = 30 \end{array}$$

$$e^{-10k+20k} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3} \longrightarrow e^{10k} = 2.333$$

$$10K = \ln 2.333 = 0.8473 \longrightarrow$$

$$K = 0.085$$

بالتعويض في المعادلة (8.16) أو (8.17) نحصل على قيمة المقدار A على النحو التالي:

$$A\,e^{-10(0.085)} = 70 \longrightarrow A(0.4274) = 70 \longrightarrow$$

$$A = 163.8$$

١- وبالتالي يصبح حل المعادلة على النحو:

$$Q(x) = 150 - 163.8\,e^{-0.085x}$$

٢- $K = 0.085$

٣- وعندما $x = 25$ فإن:

$$Q(x = 25) = 150 - 163.8\,e^{-0.085(25)}$$
$$= 150 - 19.56 = 130.44$$

أردب

تمرين (٣)

١- أوجد الحل العام لكل معادلة تفاضلية من المعادلات التالية باستخدام أسلوب المتغيرات المنفصلة:

1) $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$, 2) $y' = \dfrac{x^2}{y}$

3) $y' = \dfrac{e^x}{y^2}$, 4) $y' = \dfrac{-x}{y}$

5) $y' = 2y$, 6) $y' = 2(y-1)$

7) $y' = x\,y^2$, 8) $y' = \dfrac{2y}{x+1}$

9) $y' = -2(3y+4)$, 10) $y' = \dfrac{2y+3}{x^2}$

11) $y' = \dfrac{x^2+1}{3y^2}$, 12) $y' = \dfrac{xe^x}{2y}$

13) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, 14) $y' = \dfrac{x\,y^2}{\sqrt{1+x^2}}$

15) $y' = \dfrac{y\,\mathrm{lin}x}{x}$, 16) $y' = \dfrac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}$

٢- أوجد حل المعادلات التالية عند القيم المبدئية المناظرة.

1) $y' = \dfrac{2x}{y}$, $y(1) = -2$, 2) $y' = x\,e^{-y}$, $y(0) = 1$

3) $y' = 2 - y$, $y(0) = 3$, 4) $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$

5) $y' = \dfrac{xy}{x^2+1}$, $y(0) = 1$, 6) $y' = x\,e^{-y}$, $y(0) = 1$

7) $y' = 3x^2\,e^{-y}$, $y(0) = 1$, 8) $y' = \dfrac{y^2}{x-2}$, $y(3) = 1$

(٨-٤) نماذج النمو اللوجستية   Logistic Growth Models

قدم عالم الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الاجتماعية Pierre Verhulst (١٨٠٤-١٨٤٩) أول نموذج لوجسيتى يمثل النمو الواقعي للسكان.

حيث أن نموذج النمو الآسي في المعادلة (8.8) يعتبر النمو نمو غير محدود Unlimited. ولكن في الواقع الفعلي غالباً يوجد حد أقصى لحجم المجتمع في أي فترة زمنية حيث يرتبط هذا الحد بمصدر النمو، فإذا فرضنا أن الحد الأقصى لحجم المجتمع في أي فترة زمنية يساوى Maximum Size M، في هذه الحالة يفترض أن معدل النمو في وحدة الزمن t أي $y^{\backslash}(t)$ يكون نسبة من حجم المجتمع $y(t)$.

كذلك يعتمد على الفرق بين أقصى حجم (M) وحجم المجتمع $y(t)$ أي أن[30].

$$y^{\backslash}(t) = Ky(t)\,(M - y(t)) \tag{8.18}$$

ويشار إلى المعادلة في (8.18) بالمعادلة اللوجستية. ويسمى النمو في هذه الحالة بالنمو اللوجستي، ويمكن حل المعادلة التفاضلية (8.18) للحصول على $y(t)$ علي النحو التالي:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ky(t)\,(M - y(t))$$

$$\int \frac{1}{y(t)\,(M - y(t))}\,dy(t) = \int k\,dt \tag{8.19}$$

وبما أن

$$\frac{1}{y(t)\,(M-y(t))}=\frac{1}{My(t)}+\frac{1}{M\,(M-y(t))} \qquad (8.20)$$

بالتعويض في الطرف الأيسر في المعادلة (8.19) بـ الطرف الأيمن في المعادلة (8.20) نجد أن:

$$\int\frac{1}{My(t)}\,dy(t)+\int\frac{1}{M\,(M-y(t))}\,dy(t)=Kt+c \longrightarrow$$

$$\frac{1}{M}\ln|y(t)|+\frac{-1}{M}\ln|M-y(t)|=Kt+c$$

وبما أن $0<y(t)<M$

$$\frac{1}{M}\ln y(t)+\frac{-1}{M}\ln M-y(t)=Kt+c \longrightarrow$$

$$\frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right)=Kt+c \longrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right)=KMt+c \longrightarrow$$

$$\frac{y(t)}{M-y(t)}=e^{KMt}A$$

حيث $A=e^{c}$

$$y(t)+y(t)Ae^{Mkt}=AMe^{Mkt}$$

$$y(t)\left[1+Ae^{Mkt}\right]=AMe^{Mkt}$$

$$y(t)=\frac{AMe^{Mkt}}{1+Ae^{Mkt}} \qquad (8.21)$$

مثال (٨-٩)

يقوم أحد المصانع بإنتاج نوع معين من السلع الاستهلاكية فإذا كان أقصى حجم إنتاج ممكن الوصول إليه 100 مليون وحدة. فإذا كان حجم الإنتاج بعد أول سنة يساوى 5 مليون أي $y(1) = 5$ ونسبة النمو $k = 0.005$ من حجم المنتج في الوحدة الزمنية، ومعدل الإنتاج السنوي يتناسب مع مستوى الإنتاج والحد الأقصى لحجم الإنتاج (100مليون وحدة).

والمطلوب:

١- إيجاد المعادلة اللوجستية

٢- حل المعادلة التفاضلية.

٣- قدر حجم الإنتاج بعد 10سنوات.

الحل

١- المعادلة اللوجستية

$$y^{\backslash}(t) = K(100 - y(t)) \longrightarrow$$

$$y(t) = \frac{AMe^{Mkt}}{1 + Ae^{Mkt}}$$

٢- وبما أن

$$y(t = 1) = 5 = \frac{A(100)e^{0.005(100)(1)}}{1 + Ae^{0.005(100)(1)}}$$

وبالتالي فإن:

$$5 = \frac{A(100)e^{0.5}}{1 + Ae^{0.5}}$$

$$5 = \frac{A(164.9)}{1 + A(1.649)}$$

$$5 + 8.245A = 164.9A \longrightarrow$$

$$5 = 156.66A \longrightarrow$$

$$A = 31.331 \longrightarrow$$

$$y(t) = \frac{31331e^{0.5t}}{1 + 31.331e^{0.5t}}$$

-٣

$$y(10) = \frac{31331e^{0.5(10)}}{1 + 31.331e^{0.5(10)}} = \frac{46499327}{465093} = 99.9786$$ مليون وحدة

تمرين (٤)

١- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$y' = (x^2 + 1)y$ 1) , $y' = 2x^2y^2$ 2)

$y' = 2x(y - 1)$ 3) , $y' = \dfrac{3x}{y + 1}$ 4)

$y' = \dfrac{2x\,e^y}{y\,e^y}$ 5) , $y' = \dfrac{2}{xy + y}$ 6)

٢- أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التالية:

$y' = 3y(2 - y)$, $y(0) = 1$ 1) , $y' = 2y(5 - y)$, $y(0) = 4$ 2)

$y' = y(3 - y)$, $y(0) = 2$ 3) , $y' = y(3 - y)$, $y(0) = 0$ 4)

(٨-٥) المعادلات التفاضلية المتجانسة
Homogeneous Differential Equations

إذا فرضنا أن المعادلة التفاضلية على النحو التالي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (8.22)$$

فإنه يقال أن المعادلة (8.22) معادلة تفاضلية متجانسة حيث $N(x,y)$ ، $M(x,y)$ دالتين في x,y . فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة في الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (8.23)$$

فإذا فرضنا أن: $v = \frac{y}{x} \rightarrow vx = y$

بالتالي فإن:

$$\frac{d}{dx}(vx) = \frac{dy}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad (8.24)$$

والمعادلة في الشكل (8.24) يمكن إيجاد حل لها عن طريق التكامل كما سوف نوضح في المثال التالي.

مثال (٨-١٠)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

الحل

بما أن: $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$$

وبقسمة البسط والمقام للطرف الأيمن على x^2 نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

فإذا فرضنا أن: $$v = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = vx$$

بالتالي فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2v}{1 + v^2}$$

$$\frac{d(vx)}{dx} = \frac{-2v}{1 + v^2}$$

$$v + x\frac{dvx}{dx} = \frac{-2v}{1 + v^2} \longrightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-2v}{1 + v^2} - v = \frac{-2v - v - v^3}{1 + v^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-3v - v^3}{(1 + v^2)x} \longrightarrow$$

$$-\int \frac{1+v^2}{v^3+3v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|v^3+3v\right| = \ln|x| + c$$

$$\ln\left|v(v^2+3)\right| = -3\ln|x| + c_1 \longrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\left[(\frac{y}{x})^2+3\right]\right| + 3\ln|x| = c_1 \longrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\left[(\frac{y}{x})^2+3\right]x^3\right| = c_1$$

$$\ln\left|(\frac{y^3}{x^3}+\frac{3y}{x})x^3\right| = c_1 \longrightarrow$$

$$\ln\left|y^3+3x^2y\right| = c_1 \longrightarrow$$

$$y^3+3x^2y = e^{c_1} \longrightarrow$$

$$y^3+3x^2y = c$$

حيث $c = e^{c_1}$

تمرين (٥)

١- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$xy\,dx = (x-5)dy$ 1) , $\frac{dy}{dx} = y\tan x$ 2)

$(e^{2x}+9)\frac{dy}{dx} = y$ 3) , $dx - x\sqrt{x^2-9}\,dy = 0$ 4)

$xy\frac{dy}{dx} = x^2+y^2+x^2y^2+1$ 5)

6) $(3x-y)dx+(x+3y)dy=0$

7) $xy\,dx-(2x^2+y^2)dy=0$

8) $(-6y^2+3xy+2x^2)\,dx+x^2dy=0$

٢- أوجد الحل الخاص لكل معادلة من المعادلات التالية:

1) $y(5x-y)dx-x(5x+2y)dy=0 \quad , \; x=1 \; , \; y=1$

2) $x\dfrac{dy}{dx}-3y=x^3 \quad , \; x=1 \; , \; y=1$

3) $\dfrac{dy}{dx}=1+3y\tan x \quad , \; x=0 \; , \; y=2$

4) $y\,e^x\,dy=(y^2+2y+2)dx \quad , \; x=0 \; , \; y=-1$

5) $(2xy+y^2+2x)dx+(x^2+2xy-1)dy=0 \quad , \; x=1 \; , y=3$

(٨-٦) الحلول العددية　Numerical Solution

في كثير من الحالات يكون غير ممكن الحصول على حلول صحيحة Exact Solutions للمعادلات التفاضلية، وفي هذه الحالات نقوم بإيجاد حلول تقريبية Approximate Solutions باستخدام الطرق العددية Numerical Methods وتعتبر طريقة Euler (١٧٠٧-١٧٨٣) من أهم الطرق العددية المستخدمة.

وفيما يلي سوف نتناول هذه الطريقة بأسلوب مبسط للقارئ:

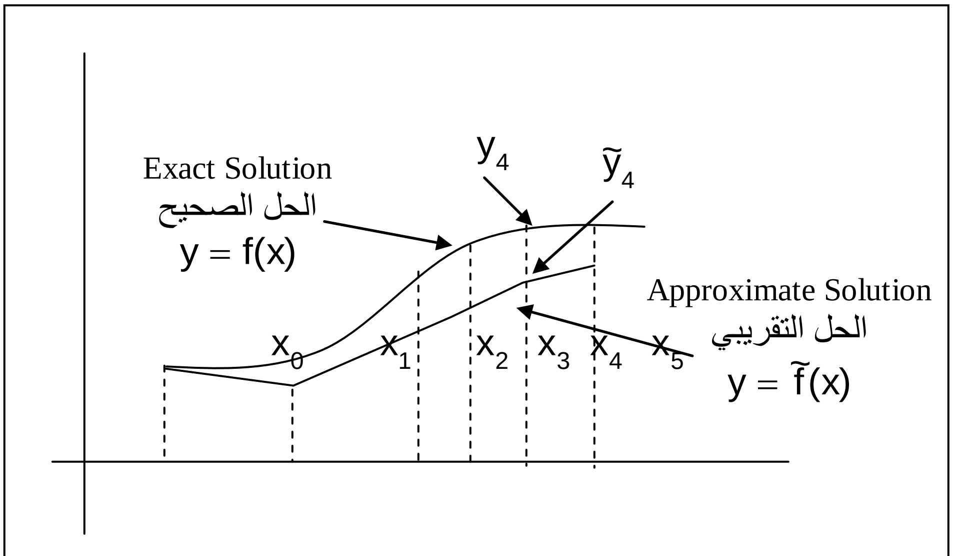
إذا فرضنا أن

$$y = f(x)$$

وبما أنه يمكن كتابة $y^{١}$ على النحو التالي:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \qquad , \; [\, y(x_0) = y_0 \,] \qquad (8.25)$$

فإذا تم تقسيم المحور x إلى فترات متساوية طول كل منها يساوى h حيث $h = x_i - x_{i-1}$، $i = 1,2,3,\dots,n$ وتعتمد طريقة أيلر على تقريب الدالة $\bar{f}(x)$ تقريب خطى $f(x)$ بين أي نقطتين متجاورتين، كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل (٨-١): يوضح الدالة الصحيحة $f(x)$ والدالة التقريبية $f(x)$

وبما أن معادلة الخط المستقيم باستخدام النقطتين (x,y)، (x_0,y_0) يمكن كتابتها على النحو:

$$y - y_0 = F(x_0,y_0)(x - x_0)$$

$$y = y_0 + F(x_0,y_0)(x - x_0)$$

فإذا كان تقريب الدالة في الفترة $]x_0,x_1[$ فإن:

$$\tilde{y}_1 = \tilde{f}_1(x) = y_0 + F(x_0,y_0)(x - x_0) = y_0 + F(x_0,y_0)h \qquad (8.26)$$

كذلك التقريب في الفترة $]x_1,x_2[$ على النحو

$$\tilde{f}_2(x) = \tilde{y}_1 + F(x_1,\tilde{y}_1)h$$

وبالمثل عند باقي الفترات نجد أن:

$$\tilde{y}_i = \tilde{f}_i(x) = \tilde{y}_{i-1} + F(x_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})h \qquad , \ i = 1,2,\ldots,n \qquad (8.27)$$

ويمكن تلخيص طريقة Euler في الخطوات التالية:

<u>الخطوة الأولى:</u> تحديد الدالة $F(x,y)$ حيث

$$F(x,y) = \frac{dy}{dx}$$

<u>الخطوة الثانية:</u> تحديد قيمة h (طول الفترة) حيث

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \qquad (8.28)$$

حيث $x_i = x_0 + ih$

<u>الخطوة الثالثة:</u> بما أن $\tilde{y}_0 = y_0$ فإن:

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + F(x_0, \tilde{y}_0)h$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + F(x_1, \tilde{y}_1)h$$

$$\vdots$$

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + F(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1})h$$

وسوف نوضح هذه الخطوات من خلال المثال التالي:

مثال (٨-١١)

١- باستخدام طريقة Euler أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = y(x) \quad , \quad y(0) = 1$$

٢- أوجد الحل الصحيح للمعادلة ثم قارن الحل التقريبي بالحل الصحيح، ووضح ذلك بيانياً

الحل

١- إذا فرضنا أن h=0.1 ، n=10 فإن:

$$\tilde{y}_0 = y_0 = 1$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + F(x_0, y_0)h = 1 + 1(0.1) = 1.1$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2 &= \tilde{y}_1 + F(x_1, \tilde{y}_1)h = 1.1 + 1.1(0.1) \\ &= 1.1 + 0.11 = 1.21\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{10} &= 2.3579477 + 2.3579477(0.1) \\ &= 2.5937425\end{aligned}$$

٢- بما أن:

$$y' = y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = x + c$$

إذا كانت $y > 0$ فإن:

$$\ln y = x + c \quad \rightarrow \quad y = e^{x+c} = Ae^{x}$$

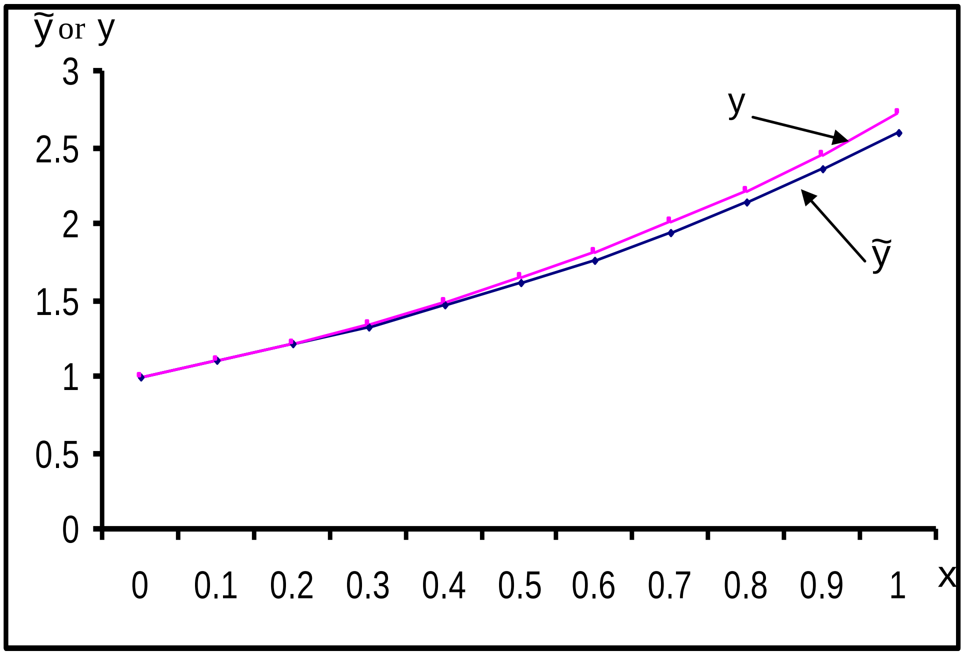
وبما أن $y_0 = 1$ فإن:

$$1 = Ae^{0} \quad \rightarrow \quad A = 1 \quad \rightarrow \therefore y = e^{x}$$

والجدول التالي يوضح القيم الصحيحة للدالة y والقيم التقريبية $\tilde{y}$ عند قيم x الموضحة بالجدول، كذلك يوضح الجدول الفرق بين القيمة الصحيحة والتقريبية الذي يمثل الخطأ (ε) Error.

جدول (٨-٢): يوضح الفرق بين الحل التقريبي والحل الصحيح للمعادلة التفاضلية

x	y	$\tilde{y}$	$\varepsilon = y - \tilde{y}$
0	1	1	0
0.1	1.10517	1.1	0.00517
0.2	1.22140	1.21	0.01140
0.3	1.34986	1.331	0.01886
0.4	1.49183	1.4641	0.02772
0.5	1.64872	1.61051	0.03821
0.6	1.82212	1.77156	0.05056
0.7	2.01375	1.94872	0.06503
0.8	2.22554	2.143359	0.08195
0.9	2.45960	2.35795	0.10165
1.0	2.71828	2.59374	0.12454



شكل (٨-٢): يوضح الدالة الصحيحة y وتقريبها $\tilde{y}$

تمرين (٦)

١- باستخدام طريقة أيلر Euler عند $h = 0.1$ ، $h = 0.05$ لتقريب $y(1)$، $y(2)$. ثم أوجد الخطوة الأولى والثانية يدوياً لكل من المعادلات التالية:

1) $y' = 2xy \quad , y(0) = 1$, 2) $y' = \dfrac{x}{y} \quad , y(0) = 2$

3) $y' = 4y - y^2 \quad , y(0) = 1$, 4) $y' = \dfrac{x}{y^2} \quad , y(0) = 2$

5) $y' = 1 - y + e^{-x} \quad , y(0) = 3$, 6) $y' = \sqrt{x + y} \quad , y(0) = 1$

7) $y' = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , y(0) = 4$

٢- أوجد الحلول الصحيحة لكل من 1 ، 2 في التمرين السابق (١). ثم قارن $y(1)$، $y(2)$ بالقيم التقريبية في (١).

٣- أوجد الحلول الصحيحة لكل من 3 ، 4 في (١). ثم قارن $y(1)$، $y(2)$ بالقيم التقريبية في (١).

(٨-٧) أمثلة تطبيقية Applied Examples

تطبيق (٨-١)

أستثمر أحد الأشخاص A مبلغ 10,000جنيه في بداية عام 1990، كذلك أستثمر الشخص B مبلغ 20,000جنيه في بداية عام 2009. فإذا كان معدل الفائدة المركبة المتصلة 12% سنوياً.

أوجد إجمالي الأستثمار لكل من A ، B في نهاية عام 2020, ثم أوجد الفائدة التي حصل عليها كل من A ، B.

الحل:

بما أن: $r = 0.12$

١- فإذا أشرنا إلى جملة الأستثمار لـ A في السنة t بالرمز $y_1(t)$، كذلك لـ B بالرمز $y_2(t)$.

فإن:

$$y_1^{\backslash}(t) = r y_1(t) \longrightarrow y_1(t) = A_1 e^{rt}$$

وبما أن:

$$y_1(0) = A_1 = 10{,}000$$

وبالتالي فإن:

$$y_1(t) = 10{,}000 e^{0.12t}$$

وبالتالي إذا فرضنا أن $t = 0$ في سنة 1990، بالتالي فإن t في سنة 2020 تصبح على النحو:

$$t = 2020 - 1990 = 30 \text{ سنة}$$

بالتالي جملة المبلغ سنة 2020 يساوي $y_1(t=30)$ حيث:

$$y_1(t=30) = 10{,}000e^{0.12(30)} = 10{,}000e^{3.60} = 365{,}982.3 \text{ جنيه}$$

٢- بنفس الطريقة نجد أن:

$$y_2^{\prime}(t) = ry_2(t) \longrightarrow y_2(t) = A_2e^{rt}$$

وبما أن:

$$y_2(0) = A_2 = 20{,}000$$

وبالتالي فإن:

$$y_2(t) = 20{,}000e^{0.12t}$$

فإذا فرضنا أن $t = 0$ في سنة 2009، فإن t في سنة 2020 تصبح على النحو:

$$t = 2020 - 2009 = 11 \text{ سنة}$$

بالتالي فإن جملة المبلغ لـ B في سنة 2020 يساوي $y_2(t=11)$ حيث:

$$y_2(t=11) = 20{,}000e^{0.12(11)} = 74{,}868.4 \text{ جنيه}$$

تطبيق (٨-٢)

بافتراض أن قيمة أحد الأجهزة الطبية 40,000 دولار بحيث أن الجهاز يستهلك وتتناقص قيمته بمعدل ثابت يساوي 10% سنوياً. أوجد:

١- قيمة الجهاز بعد 10 سنوات، ثم بعد 20 سنة.

٢- قيمة الأهلاك خلال 10 سنوات، ثم خلال 20 سنة.

الحل:

إذا أشرنا إلى قيمة الجهاز في السنة t هو $y(t)$ بالتالي فإن:

$$y^{\backslash}(t) = r = -0.10$$

وبما أن:

$$y(t) = Ae^{rt} \longrightarrow y(t) = Ae^{-0.10t}$$

وبما أن:

$$y(t = 0) = 40{,}000$$

وبالتالي فإن:

$$y(t) = 40{,}000e^{-0.10t}$$

١- قيمة الجهاز بعد 10 سنوات تساوي $y(t = 10)$ حيث:

$$y(t = 10) = 40{,}000e^{-0.10(10)} = 14{,}715.18 \text{ دولار}$$

وبالتالي قيمة الأهلاك خلال 10 سنوات يساوي:

$$y(t = 0) - y(t = 10) = 40{,}000 - 14{,}715.18 = 25{,}284.82 \text{ دولار}$$

٢- قيمة الجهاز بعد 20 سنوات تساوي $y(t = 20)$ حيث:

$$y(t = 20) = 40{,}000e^{-0.10(20)} = 5{,}413.41 \text{ دولار}$$

وبالتالي قيمة الأهلاك خلال 20 سنة يساوي:

$$y(t = 0) - y(t = 20) = 40{,}000 - 5{,}413.41 = 34{,}586.59 \text{ دولار}$$

تطبيق (٨-٣)

في أحدى التجارب على نوع معين من البكتريا وجد أن عدد مفردات البكتريا يتضاعف كل 4 ساعات. فإذا كان عدد مفردات البكتريا عند بدأ التجربة يساوي 100 وحدة,

١- أوجد باستخدام المعادلات التفاضلية عدد وحدات البكتريا في الساعة t.

٢- حدد الزمن الذي يصل فيه عدد وحدات البكتريا إلى 6000 وحدة.

الحل:

إذا فرضنا أن وحدة الزمن يساوي 4 ساعات. وإذا فرضنا أن $y(t)$ يساوي عدد وحدات البكتريا في الساعة t (أي بعد الفترة t من بدء التجربة). كذلك:

$$y(t=0) = 100 \text{مفردة}$$

وبما أن عدد المفردات يتضاعف كل 4 ساعات

$$y^{\backslash}(t) = 2y(t) \longrightarrow$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) \longrightarrow$$

$$\int \frac{1}{y(t)} dy(t) = \int 2\, dt$$

عندما $y(t) > 0$

$$\ln y(t) = 2t + c \longrightarrow$$

$$e^{\ln y(t)} = e^{2t} A \longrightarrow$$

$$y(t) = A\, e^{2t} \longrightarrow$$

وبما أن:

$$y(t=0) = 100 = A\, e^{2(0)} \longrightarrow A = 100$$

١- وبالتالي فإن عدد وحدات البكتريا في الساعة t يساوي:

$$y(t) = 100\,e^{2t}$$

٢- وعندما يصل عدد وحدات البكتريا إلى 6000 فإن:

$$6000 = 100\,e^{2t} \longrightarrow$$

$$\ln 60 = 2\,t \longrightarrow$$

$$4.094345 = 2\,t \longrightarrow$$

$$t = 2.04717$$

وبالتالي عدد الساعات التي يصل فيها عدد البكتريا إلى 6000 مفردة يساوي:

$$t \times 4 = 2.04717 \times 4 = 8.2 \text{ ساعة}$$

تطبيق (٨-٤)

يقوم أحد البنوك ببيع بعض الأوراق المالية قيمة أستحقاقها Maturity Value بعد 10سنوات 10,000. فإذا كان أحد الأشخاص يرغب في شراء هذه الوراق على أن يكون معدل أستثماره بفائدة مركبة متصلة 8% سنوياً.

أوجد القيمة الحالية Present Value للأوراق التي يمكن أن يشتري بها الشخص الأوراق.

الحل:

إذا فرضنا أن قيمة أستحقاق الأوراق $y(t)$ في السنة t. حيث:

$$y(t = 10) = 10{,}000$$

وبما أن:

$$y^{\backslash}(t) = 0.8$$

كذلك

$$y^{\backslash}(t) = r\, y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\, y(t)$$

$$\int \frac{1}{y(t)}\, dy(t) = \int r\, dt$$

وبما أن: $y(t) > 0$ فإن:

$$\ln y(t) = rt + c \longrightarrow y(t) = A\, e^{rt}$$

وحيث:

$$y(t = 10) = A\, e^{0.8(10)} \longrightarrow$$

ملحوظة: A تشير إلى القيمة الحالية

$$10{,}000 = A\, e^{0.8} \longrightarrow A = 4493.29 \text{جنيه}$$

وبالتالي لكي يحصل الشخص على معدل فائدة مركبة متصلة 8% سنوياً يجب أن يشتري الأوراق بـ 4493.29 جنيه فقط.

(٨-٨) تمرينات　　Exercises

(٨-١) أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية التي تحقق الشروط المناظرة لكل معادلة

$y^{\backslash} = 4y \quad , \quad y(0) = 2$ 1)

$y^{\backslash} = 3y \quad , \quad y(0) = -2$ 2)

$y^{\backslash} = 2y \quad , \quad y(1) = 2$ 3)

$y^{\backslash} = -3 \quad , \quad y(0) = 3$ 4)

$y^{\backslash} = xy \quad , \quad y(1) = 2$ 5)

(٨-٢) أوجد الحل العام للمعادلات التالية:

$x\,y^{\backslash} + 2y = 4x^2$ 1) , $y^{\backslash} = (x^2 + 1)y$ 2)

$y^{\backslash} = 2x(y-1)$ 3) , $y^{\backslash} = 2x^2y^2$ 4)

$y^{\backslash} = \dfrac{6x^2}{y(1+x^3)}$ 5) , $y^{\backslash} = x^2 - 2x + 1$ 6)

$y^{\backslash} = \dfrac{3x}{y+1}$ 7) , $y^{\backslash} = \dfrac{2x\,e^y}{y\,e^x}$ 8)

$y^{\backslash} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x\ln x}$ 9) , $y^{\backslash} = y^2 - y$ 10)

$y^{\backslash} = \dfrac{10}{xy+y}$ 11) , $y^{\backslash} = \dfrac{(y^2+1)\ln x}{4y}$ 12)

(٨-٣) أوجد الحلول الخاصة للمعادلات التالية

1) $y^{\prime} = 3(x+1)^2 y \quad , \quad y(0)=1$

2) $y^{\prime} = \dfrac{(x-1)}{y^2} \quad , \quad y(0)=2$

3) $y^{\prime} = \dfrac{4y}{x+3} \quad , \quad y(-2)=1$

4) $y^{\prime} = \dfrac{4x^2}{y} \quad , \quad y(0)=2$

5) $y^{\prime} = \dfrac{3x}{4y+1} \quad , \quad y(1)=4$

6) $y^{\prime} = y(2-y) \quad , \quad y(0)=1$

(٨-٤) في إحدى المزارع السمكية وجد أن عدد الأسماك يتزايد من شهر لآخر والجدول التالي يوضح عدد الأسماك خلال الفترة الزمنية t (وحدة الزمن شهر).

جدول (٨-٣)

t	2	3	4	5
y (t)	1197	1291	1380	1462

المطلوب:

١- استخدم المعادلة اللوجستية لتقدير عدد الأسماك في الشهر t علماً بأن عدد الأسماك في بداية الفترة $y(0)=1000$، ثم قدر عدد الأسماك في $t=12$.

٢- أوجد الحل التقريبي باستخدام طريقة أيلر ثم أوجد الخطأ ε بين القيم الفعلية لـ $y(t)$ والقيم التقريبية ووضح ذلك بيانياً.

(٨-٥) أوجد الحل العام للمعادلات التالية

1) $xy\,dx = (x-5)\,dy$

2) $9\,dx - x\sqrt{x^2-9}\,dy = 0$

3) $xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1$

4) $(3x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy = 0$

5) $xy\,dx - (2x^2 + y^2)\,dy = 0$

6) $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

7) $x\,dy - (y + \sqrt{xy})\,dx = 0$

8) $\left[\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\right]dx + \left[\dfrac{2y}{x^2 + y^2} - e^{-y}\right]dy = 0$

9) $$\left[(x + xy - 3)(1 + y) + x^2\sqrt{y}\right]dx + \left[x^2(y + 1) - 3x - \frac{x^3}{6\sqrt{y}}\right]dy = 0$$

10) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

(٨-٦) باستخدام طريقة أيلر أوجد الحل التقريبي للمعادلات التالية بافتراض أن h=0.05.

1) $y^{\backslash} = 2xy \quad , \quad y(0) = 1$

2) $y^{\backslash} = \dfrac{x}{y} \quad , \quad y(0) = 2$

3) $y^{\backslash} = 4y - y^2 \quad , \quad y(0) = 1$

4) $y^{\backslash} = \dfrac{x}{y^2} \quad , \quad y(0) = 2$

5) $y^{\backslash} = 1 - y + e^{-x} \quad , \quad y(0) = 3$

6) $y^{\backslash} = \sqrt{x+y} \quad , \quad y(0) = 1$

7) $y^{\backslash} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad y(0) = 4$

الباب التاسع

المعادلات التفاضلية من الترتيب الأعلى وتطبيقاتها

High order differential Equation and its Application

(٩-١) المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations

(٩-٢) الاستقلال وعدم الاستقلال الخطي

Linear Dependence and Independence

(٩-٣) المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الترتيب الثاني

Second order Homogeneous Linear differential Equations

(٩-٤) المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من ترتيب أعلى

Higher order Homogeneous Linear differential Equations

(٩-٥) استخدام الحزمة الرياضية

Using The Mathematical Package

(٩-٦) تمرينات Exercises

(٩-١) المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations

إذا فرضنا أن y دالة في المتغير (أو المتغيرات) x على النحو:

$$y = f(x) \tag{9.1}$$

فإن المشتقة التفاضلية للدالة y من الترتيب (n) يرمز لها بالرمز $y^{(n)}$ حيث:

$$y^{(i)} = \frac{d(y^{(i-1)})}{dx} \qquad , i = 2,3,4,\ldots,n \tag{9.2}$$

ويقال أن المعادلة التفاضلية من الترتيب (n) معادلة تفاضلية خطية من الترتيب (n) إذا أخذ الصياغة التالية:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots.. + a_1(x)\, y^{(1)} + a_0(x)\, y = R(x) \tag{9.3}$$

حيث $a_i(x)$ ، $i = 0,1,2,\ldots,n$ كذلك $R(x)$ دوال في المتغير (أو المتغيرات) X. وفي حالة إذا كان $R(x) = 0$ فإن المعادلة (9.3) تسمى معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الترتيب (n)، وتكون غير متجانسة إذا كان $R(x) \neq 0$.

وسوف نتناول في الفصل (٩-٣) بالتفصيل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة Homogeneous من الترتيب الثاني أي $n = 2$ وذلك نظراً لأهمية طرق حلها في حل المعادلات المتجانسة من ترتيب أعلى من (2). بالإضافة إلى ان بعض طرق حل المعادلات غير المتجانسة يعتمد على طرق حل المعادلات المتجانسة كما سوف يتضح ذلك في الفصول التالية.

تمرين (١)

(١) حدد أي المعادلات التفاضلية التالية تعتبر معادلات تفاضلية خطية وأيها غير ذلك كذلك أيها متجانسة وأيها غير متجانسة.

1) $y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0$

2) $(y''(x))^2 + 7y(x) = 15$

3) $y^{(3)}(x) + 8y^{(2)}(x) = 15$

4) $y^{(7)}(x) + 20(y^{(6)}(x))^2 + 10 = 0$

5) $(y(x))^8 + y'(x) = 0$

6) $(y^{(4)}(x)) + (y^{(3)}(x))^2 + y(x) = 0$

(٢) حدد ترتيب كل معادلة تفاضلية من المعالادت التالية:

1) $5y - 2x = 10$, 2) $3y^{(2)} + 3y - 10 = 0$

3) $y^{(3)} - 2xy^{(2)} + 3y^{(1)} = 20$, 4) $y^{(7)} - 5y^{(3)} + 8y = 0$

5) $y^2 + y^{(1)} - 2y = 0$, 6) $y^{(2)} - 10y^{(1)} = 100$

7) $5y^3 - 10y^{(8)} + 3y^{(6)} + 4y^{(5)} = 0$

8) $y^{(9)} - 7y^{10} + 8y^{(7)} + 4y^{(5)} = 0$

9) $y^{(3)} + 7y^{(1)} - 20y = 0$, 10) $y^5 - 2y^3 + 7y = 0$

(٩-٢) الاستقلال وعدم الاستقلال الخطي
Linear Dependence and Independence

ولتحديد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية من الترتيب (n) على النحو التالي:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_0(x)\, y = 0 \qquad (9.4)$$

يتطلب ذلك تعريف الاستقلال الخطي للدوال.

تعريف (٩-١):

يقال أن الدوال $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ مستقلة خطياً Linearly Independent إذا تحققت المعادلة:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n = 0 \qquad (9.5)$$

عندما $c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_n = 0$ فقط. أما إذا تحققت عند قيم أخرى لـ c_i، $i = 1, 2, \ldots, n$ فإن الدوال $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ تكون غير مستقلة خطياً. كما سوف نوضح في المثال التالي.

مثال (٩-١)

في كل حالة من الحالات التالية وضح أي الدوال مستقلة خطياً وأي منها غير مستقل خطياً.

1) $y_1 = \cos x \quad , \quad y_2 = x$

2) $y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = \sin^2 x \quad , \quad y_3 = \cos 2x$

3) $y_1 = x\, e^{2x} \quad , \quad y_2 = 5\, e^{-x}$

الحل

١- بما أن: $c_1y_1 + c_2y_2 = c_1(\cos x) + c_2x = 0$

في حالة واحدة فقط وهي $c_1 = c_2 = 0$ فقط، وبالتالي فإن الدالتين y_1, y_2 دوال مستقلة خطياً.

٢- بما أن: $c_1(1) + c_2(\sin^2 x) + c_3(\cos 2x) = 0$

في حالة $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ كذلك في حالة إذا كان

$c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = -1$ ، وبالتالي فإن y_1, y_2, y_3 دوال غير مستقلة خطياً.

٣- بما أن: $c_1(x\,e^{2x}) + c_2(5\,e^{-x}) = 0$

فقط في حالة إذا كانت $c_1 = c_2 = 0$ ، وبالتالي فإن y_1, y_2 دوال مستقلة خطياً.

وأثبت عالم الرياضيات Josef Hoëné Wronski (١٧٧٨-١٨٥٣) أن الدوال $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ تكون مستقلة خطياً إذا تحقق الشرط التالي:

$$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9.6)$$

كذلك إذا كان:

$$W(y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots. & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=0 \qquad (9.7)$$

فإن الدوال $y_1,y_2,\ldots\ldots,\ y_n$ تكون غير مستقلة خطياً

ويسمى المحدد $W(y_1,y_2,\ldots\ldots,\ y_n)$ بمحدد Wronski نسبة إلى عالم الرياضيات.

نظرية (٩-١)

إذا فرضنا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots..\ +a_0(x)\,y=0$$

والمتصلة داخل الفترة [c,d]، فإن حلول المعادلة $y_1,y_2,\ldots\ldots,\ y_n$ تكون مستقلة خطياً

إذا كان [1]:

$$W(y_1,y_2,\ldots\ldots,\ y_n)\neq 0$$

وغير مستقلة خطياً إذا كان:

$$W(y_1,y_2,\ldots\ldots,\ y_n)=0$$

مثال (٩-٢)

إذا كانت $y_1=5\,e^{-2x}\ ,\ y_2=2\,e^{-x}$ حلول لمعادلة تفاضلية متجانسة

معينة. أثبت أن حلول المعادلة مستقلة خطياً.

الحل

نوجد المحدد $W(y_1,y_2)$ حيث:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2e^{-x} & 5e^{-2x} \\ -2e^{-x} & -10e^{-2x} \end{vmatrix}=10e^{-3x}\neq 0$$

لجميع قيم x وبما أن $W(y_1,y_2)\neq 0$، إذن الحلول y_1,y_2 حلول مستقلة خطياً.

تمرين (٢)

(١) فيما يلي حلول لبعض المعادلات التفاضلية – أوجد محدد Wronsk ثم وضح أيهما مستقل خطياً.

1) $y_1(x)=e^{-2x} \quad , \quad y_2(x)=e^{3x}$

2) $y_1(x)=e^{-x} \quad , \quad y_2(x)=xe^{-x}$

3) $y_1(x)=e^{-x}\cos x \quad , \quad y_2(x)=e^{-x}\sin x$

4) $y_1(x)=xe^{x}\cos x \quad , \quad y_2(x)=xe^{x}\sin x$

5) $y_1(x)=e^{-3x} \quad , \quad y_2(x)=e^{-2x}$

6) $y_1(x)=5 \quad , \quad y_2(x)=e^{x}$

7) $y_1(x)=e^{-4x} \quad , \quad y_2(x)=8$

8) $y_1(x)=e^{x} \quad , \quad y_2(x)=xe^{x}$

(٢) أثبت الاستقلال أو عدم الاستقلال لفئات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية:

$[e^{-2x}\ ,\ e^{3x}]$ 1) ، $[e^{-x}\ ,\ xe^{-x}]$ 2)

$[e^{-x}\cos x\ ,\ e^{-x}\sin x]$ 3) ، $[e^{-x}, xe^{-x}, e^{3x}]$ 4)

$[e^{r_1x}\ ,\ e^{r_2x}]$ 5) ، $[e^{-3/2x}, xe^{-3/2x}, e^{-3/2x}]$ 6)

$[e^{-x}, e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}]$ 7)

(٩-٣) المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الترتيب الثاني

Second Order Homogeneous Linear differential Equation

لإيجاد الحل العام لمعادلة خطية متجانسة من الترتيب الثاني سوف نتناول أولاً النظرية التي يمكن باستخدامها الحصول على الحل العام من الحلول الخاصة ثم نتناول إيجاد الحلول الخاصة للمعادلة.

نظرية (٩-٢)

إذا فرضنا أن y_1, y_2 حلول مستقلة خطياً للمعادلة التالية:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (9.8)$$

فإن الحل العام للمعادلة لهذه المعادلة سوف نشير إليه بالرمز $y_3(x)$ على النحو التالي:

$$y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (9.9)$$

حيث c_1, c_2 مقادير ثابتة.

الإثبات

بما أن y_1 ، y_2 حلين مستقلين خطياً فإن:

$$y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) = 0 \qquad (9.10)$$

$$y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) = 0 \qquad (9.11)$$

وبافتراض أن y_3 بحيث:

$$y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (9.12)$$

فإن:

$$y_3'' + ay_3' + by_3 = [c_1y_1'' + c_2y_2''] + a[c_1y_1' + c_2y_2'] + b[c_1y_1 + c_2y_2]$$

ومن المعادلتين (9.10)، (9.11) نجد أن:

$$\begin{aligned} y_3'' + ay_3' + by_3 &= c_1[y_1'' + ay_1' + by_1] + c_2[y_2'' + ay_2' + by_2] \\ &= c_1[0] + c_2[0] = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن y_3 تعتبر الحل العام للمعادلة:

$$y'' + ay' + by = 0$$

بحيث

$$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$$

إيجاد الحل العام للمعادلة من الترتيب الثاني

إذا اعتبرنا بصفة عامة معادلة الترتيب الثاني على النحو:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (9.13)$$

حيث a, b, c مقادير ثابتة.

فإذا كانت $y_1(x)$، $y_2(x)$ حلول للمعادلة (9.13) فإن الحل العام للمعادلة (9.13)

يصبح على النحو التالي:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

حيث c_1, c_2 مقادير ثابتة.

والآن سوف نوضح إيجاد الحلول الخاصة $y_1(x)$، $y_2(x)$ على النحو التالي:-

بما أن المعادلة التفاضلية من الترتيب الأول على النحو:

$$y'(x) + ay(x) = 0$$

وكما أوضحنا في الباب السابق أن الحل العام لهذه المعادلة على النحو التالي:

$$y(x) = c\,e^{-ax}$$

حيث c مقدار ثابت.

فنجد أن حل المعادلة من الترتيب الأول دالة أسية وبالتالي فإن

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

يكون لها حل أو أكثر في شكل دالة أسية على النحو التالي:

$$y = e^{rx} \qquad (9.14)$$

فإذا كان $y = e^{rx}$ فإن:

$$y'(x) = re^{rx} \qquad (9.15)$$

كذلك

$$y''(x) = r^2e^{rx} \qquad (9.16)$$

وبالتعويض بالطرف الأيمن في المعادلات (9.16) – (9.14) في العادلة من الترتيب الثاني فنحصل على المعادلة التالية:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \qquad (9.17)$$
$$e^{rx}[ar^2 + br + c] = 0$$

وبما أن $e^{rx} \neq 0$ بالتالي فإن:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{9.18}$$

وبالتالي فإن $y = e^{rx}$ تكون حل للمعالة من الترتيب الثاني (9.13) إذا وإذا فقط تحققت المعادلة (9.18). وتسمى المعادلة (9.18) بالمعادلة المميزة Characteristic Equation للمعادلة (9.13).

وبإيجاد جذور المعادلة المميزة (9.18) حيث:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \tag{9.19}$$

ويوجد ثلاثة حالات لنوع جذور المعادلة (9.18):

الحالة الأولى: عندما يكون الجذرين حقيقيين ومختلفين أي $r_1 \neq r_2$ ويحدث ذلك عندما

$$b^2 - 4ac > 0$$

الحالة الثانية: عندما يكون الجذرين حقيقيين ومتساويين أي عندما $r_1 = r_2$ ويحدث ذلك عندما

$$b^2 - 4ac = 0$$

الحالة الثالثة: عندما يكون الجذرين r_1, r_2 تخيليين ويحدث ذلك عندما

$$b^2 - 4ac < 0$$

وسوف نتناول فيما يلي كل حالة على حدة والحل العام للمعادلة التفاضلية من الترتيب الثاني في كل حالة.

الحالة الأولى

في هذه الحالة يكون جذري المعادلة (9.18) حقيقيين ومختلفين أي $r_1 \neq r_2$

وهنا يكون الحلول الخاصة للمعادلة (9.13) على النحو التالي:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \qquad , \qquad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

ويكون الحل العام على النحو:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

مثال (٩-٣)

أوجد الحل العام للمعادلات التالية:

$$1)\ y'' - y' - 6y = 0 \qquad\qquad 2)\ y'' + 4y' - 2y = 0$$

الحل

١- نوجد المعادلة المميزة المناظرة للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 6y = 0$$

حيث $a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -6$

وتصبح المعادلة المميزة على النحو:

$$r^2 - r - 6 = 0 \longrightarrow$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = 3 \qquad , \qquad r_2 = -2$$

وبالتالي فإن الحلول الخاصة هي:

$$y_1(x) = e^{3x} \qquad , \qquad y_2(x) = e^{-2x}$$

وكذلك الحل العام:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

٢- بالمثل المعادلة المميزة المناظرة للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

والمعادلة المميزة المناظرة

$$r^2 + 4r - 2 = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2}$$
$$= -2 + \sqrt{6}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2}$$
$$= -2 - \sqrt{6}$$

وبالتالي فإن الحلول الخاصة هي:

$$y_1(x) = e^{(-2+\sqrt{6})x} \qquad , \qquad y_2(x) = e^{(-2-\sqrt{6})x}$$

وكذلك الحل العام:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}$$

الحالة الثانية

إذا كان الجذور للمعادلة المميزة $r_1 = r_2 = r$ فإن الحلول الخاصة في هذه الحالة تصبح على النحو التالي:

$$y_1(x) = e^{rx} \qquad , \qquad y_2(x) = xe^{rx}$$

ويصبح الحل العام في هذه الحالة:

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$$

مثال (٣-١٠)

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \quad 1)$$

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \quad 2)$$

الحل

١- بما أن المعادلة التفاضلية على النحو

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$$

بالتالي فإن المعادلة المميزة المناظرة لها على النحو التالي:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \longrightarrow$$
$$(r-3)(r-3) = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = r_2 = 3$$

وبالتالي فإن الحلول الخاصة هي:

$$y_1(x) = e^{3x} \qquad , \qquad y_2(x) = xe^{3x}$$

ويصبح الحل العام على النحو:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$$

٢- بما أن المعادلة التفاضلية

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة المناظرة:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \longrightarrow$$
$$(r+2)(r+2) = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = r_2 = -2$$

وبالتالي فإن الحلول الخاصة هي:

$$y_1(x) = e^{-2x} \qquad , \qquad y_2(x) = xe^{-2x}$$

ويصبح الحل العام على النحو:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

حالة خاصة

إذا فرضنا أن المعادلة التفاضلية على النحو:

$$y''(x) - y(x) = 0 \tag{9.20}$$

فإن الحل العام للمعادلة يصبح على النحو:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

الإثبات

بما أن المعادلة المميزة المناظرة للمعادلة (9.20) على النحو التالي:

$$r^2 - 1 = 0 \longrightarrow$$

$$r^2 = 1 \longrightarrow r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = -1$$

وبالتالي فإن الحلول الخاصة تصبح على النحو:

$$y_1(x) = e^{x} \qquad , \qquad y_2(x) = e^{-x}$$

وبالتالي فإن الحل العام يصبح:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

تمرين (٣)

١- أوجد الحل العام لكل معادلة من المعادلات التالية

$y''-2y'-8y=0$ 1) , $y''-2y'-6y=0$ 2)

$y''-4y'+4y=0$ 3) , $y''+2y'+6y=0$ 4)

$y''-2y'+5y=0$ 5) , $y''+6y'+9y=0$ 6)

$y''-2y'=0$ 7) , $y''-6y=0$ 8)

$y''-2y'-6y=0$ 9) , $y''+y'+3y=0$ 10)

$y''-\sqrt{8}\,y'+y=0$ 11) , $y''-\sqrt{5}\,y'+y=0$ 12)

٢- أوجد حل كل من المعادلات التالية عند النقطة المبدئية Initial Values المناظرة

$y''+4y=0 \quad , \ y(0)=2 \quad , \ y'(0)=-3$ 13)

$y''+2y'+10y=0 \quad , \ y(0)=1 \quad , \ y'(0)=0$ 14)

$y''-3y'+2y=0 \quad , \ y(0)=0 \quad , \ y'(0)=1$ 15)

$y''+y'-2y=0 \quad , \ y(0)=3 \quad , \ y'(0)=0$ 16)

$y''-2y'+5y=0 \quad , \ y(0)=2 \quad , \ y'(0)=0$ 17)

$y''-4y'+4y=0 \quad , \ y(0)=2 \quad , \ y'(0)=1$ 18)

$y''-2y'+y=0 \quad , \ y(0)=-1 \quad , \ y'(0)=2$ 19)

$y''+3y'=0 \quad , \ y(0)=4 \quad , \ y'(0)=0$ 20)

٣- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

1) $y'' + 2y' = 0$, 2) $5y'' + y' - 2y = 0$

3) $3y'' + 6y' + 5y = 0$, 4) $y'' + 8y = 0$

5) $y'' - 2y' - 8y = 0$, 6) $2y'' + 8y' + 16y = 0$

7) $2y'' - 5y' - 9y = 0$, 8) $6y'' + 11y' - 4y = 0$

9) $7y'' + 3y' + 5y = 0$, 10) $2y'' + 5y' + 8y = 0$

٤- أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

1) $2y'' - 20y' + 50y = 0 \quad , \; y(0) = 1 \quad , \; y'(0) = -1$

2) $3y'' + 48y' + 27y = 0 \quad , \; y(0) = 4 \quad , \; y'(0) = -3$

3) $-y'' + 12y' - 11y = 0 \quad , \; y(0) = 3 \quad , \; y'(0) = 11$

4) $y'' + 4y' + 5y = 0 \quad , \; y(0) = -2 \quad , \; y'(0) = 1$

5) $5y''' + 50y'' + 125y' = 0 \quad , y(0) = 3 , y'(0) = 3 , y''(0) = -1$

6) $8y^{(4)} - 8y^{(3)} = 0 \quad , \; y(0) = 0 \; , y^{(2)}(0) = 3 \; , y^{(3)}(0) = 4$

(٩-٤) المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من ترتيب أعلى
Higher order Homogeneous Linear differential Equations

يمكن الحصول على الحل العام للمعادلات التفاضلية المتجانسة الخطية من ترتيب أعلى من الترتيب الثاني بنفس الأسلوب الذي تم إتباعه في الفصل السابق (٩-٣) بالنسبة للمعادلات من الترتيب الثاني. على أن يتم إتباع الخطوات التالية:

١- إيجاد المعادلة المميزة المناظرة للمعادلة التفاضلية.

فإذا كانت المعادلة التفاضلية من الترتيب الثالث كانت المعادلة المميزة من الدرجة الثالثة، ويكون لها ثلاثة جذور r_1,r_2,r_3

- فإذا كان $r_1 = r_2$ فإن الحلول للمعادلة التفاضلية تصبح:

$$y_1 = e^{r_1 x}\ , \quad y_2 = xe^{r_2 x}\ , \quad y_3 = e^{r_3 x}$$

- أما إذا كانت الجذور الثلاثة متساوية $r_1 = r_2 = r_3$ فإن

$$y_1 = e^{r_1 x}\ , \quad y_2 = xe^{r_2 x}\ , \quad y_3 = x^2 e^{r_3 x}$$

بالمثل بالنسبة للمعادلة من الترتيب الرابع تكون المعادلة المميزة المناظرة لها من الدرجة الرابعة ويكون لها أربعة جذور r_1,r_2,r_3,r_4

- فإذا كانت الجذور متساوية $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ فإن

$$y_1 = e^{r_1 x}\ , \quad y_2 = xe^{r_2 x}\ , \quad y_3 = x^2 e^{r_3 x}\ , \quad y_4 = x^3 e^{r_4 x}$$

وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد حلول المعادلة من الترتيب (n)

٢- نوجد المحدد $W(y_1,y_2,\ldots\ldots, y_n)$ ويتم تحديد هل الحلول $y_1,y_2,\ldots\ldots, y_n$ مستقلة خطياً أم لا.

٣- إذا كان $W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \neq 0$ فأن الحلول تكون مستقلة خطياً، ويكون الحل العام للمعادلة هو:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_ny_n$$

مثال (٩-٤)

أوجد الحل العام للمعادلة التالية:

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة المناظرة

$$r^3 - 4r^1 = 0 \to r(r^2 - 4) = 0 \to \therefore r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام

$$\begin{aligned} y &= c_1(1) + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} \\ &= c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} \end{aligned}$$

مثال (٩-٥)

أوجد الحل العام للمعادلة التالية:

$$y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y^{(3)} = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة المناظرة لها

$$r^{(7)} + 8r^{(5)} + 16r^{(3)} = 0 \longrightarrow$$

$$r^3(r^4 + 8r^2 + 16) = 0 \longrightarrow$$

$$r^3(r^2 + 4)^2 = 0 \longrightarrow$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0\,, r_4 = r_5 = 2i\,, r_6 = r_7 = -2i$$

وبالتالي فإن الحل العام

$$y = c_1e^{0(x)} + c_2xe^{0(x)} + c_3x^2e^{0(x)} + c_4e^{2i} + c_5xe^{2i} + c_6e^{-2i} + c_7xe^{-2i}$$

تمرين (٤)

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y^{(4)} - 3y^{(2)} - 4y = 0$

2) $y^{(3)} - y^{(2)} - 9 = 0$

3) $y^{(8)} - 8y^{(6)} + 16y^{(4)} = 0$

4) $y^{(5)} - 7y^{(4)} + 10y = 0$

5) $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y^{(3)} = 0$

6) $y^{(16)} + 4y^{(9)} - 6y^{(8)} = 0$

7) $y^{(6)} - 5y^{(4)} + 10y^{(3)} = 0$

8) $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 20y = 0$

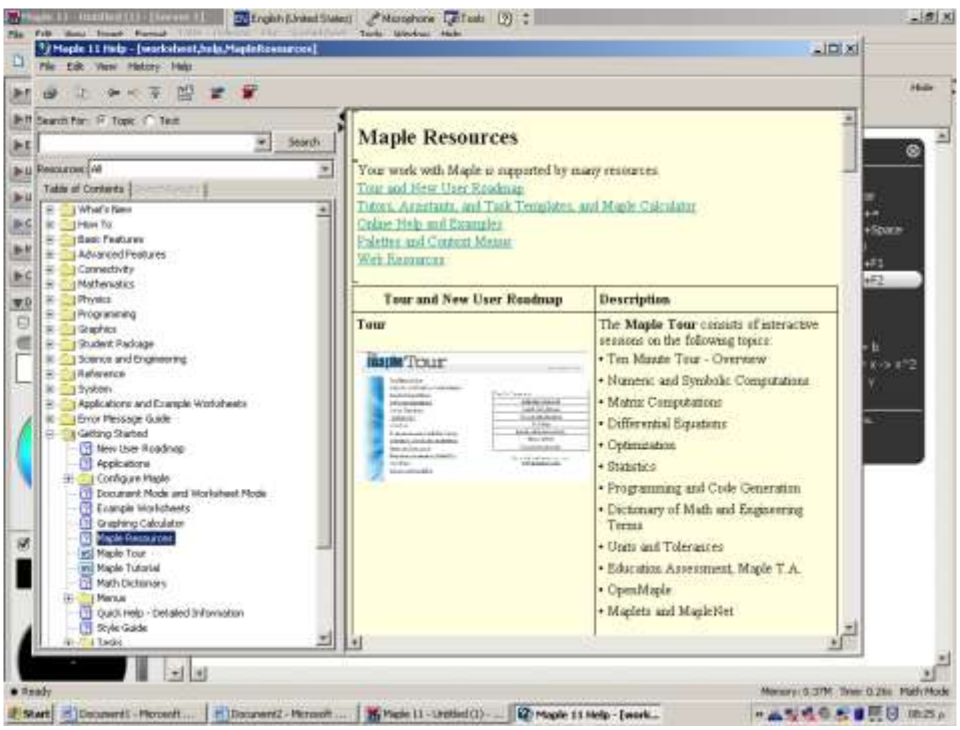
9) $y^{(3)} - 5y^{(2)} = 0$

10) $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 9y = 0$

(٩-٥) استخدام الحزمة الرياضية
Using The Mathematical Package

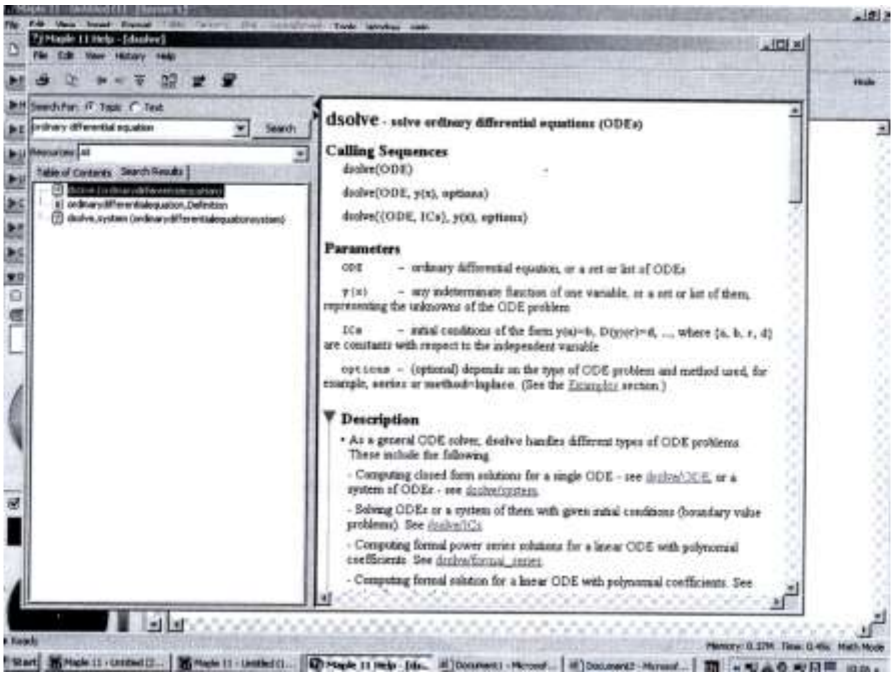
في هذا الفصل سوف نوضح كيفية استخدام حزمة **Maple 11** في حل المعادلات التفاضلية. ونظراً لأننا تناولنا في البابي الثامن والتاسع المعادلات التفاضلية للدوال في متغير واحد أو ما يسمي بالمعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential من أي ترتيب. لذلك سوف نتناول استخدام حزمة Maple 11 بالنسبة للمعادلات العادية – ولأستخدام الحزمة نتبع الخطوات التالية:-

١- تجهيز برنامج Maple 11 كما هو موضح في ملحق (١) – فتظهر الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (٩-١)



شكل (٩-١)

٢- يكتب في المستطيل في يسار الصفحة في شكل (٩-١) Ordinary Differential Equation فيظهر شكل (٩-٢).



شكل (٩-٢)

في الشكل (٩-٢) نجد توصيف لأوامر أدخال البيانات على النحو:

```
> ode:=diff(y(x),x,x)=......;
```
(9.21)

وكذلك توصيف لأمر الحل

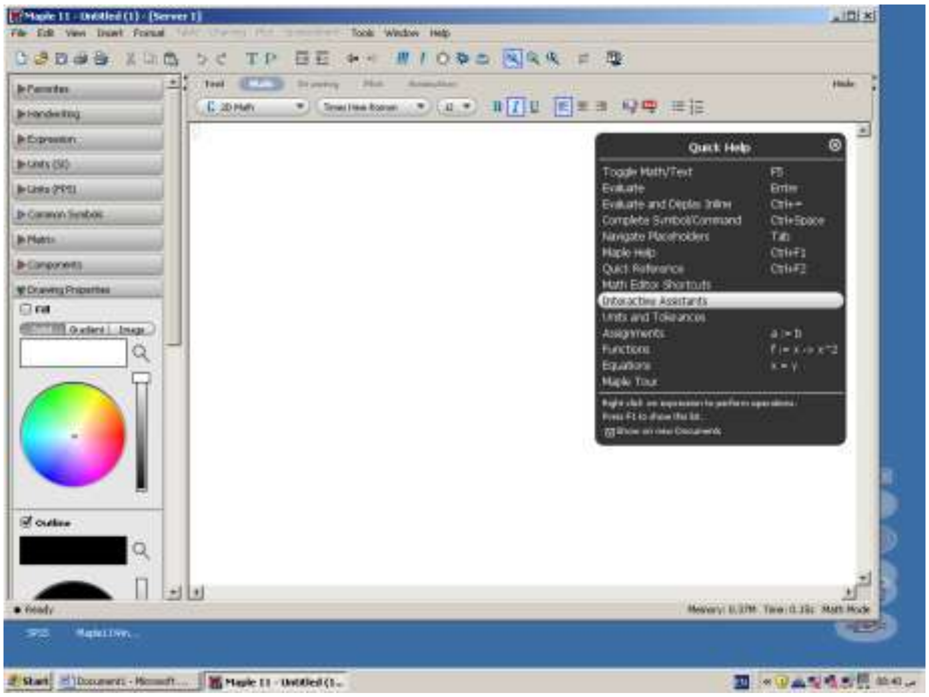
```
> dsolve (ode);
```
(9.22)

بالإضافة إلى وجود العديد من الأمثلة المحلولة.

ويمكن تنفيذ أمر أدخال البيانات وأمر الحل بطريقتين أيضاً.

الطريقة الأولي

٣- يتم أستدعاء Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة فيظهر الشكل (٩-٣) ويظهر المستطيل النشط.



شكل (٩-٣)

ويتم كتابة أمر الأدخال وكتابة المعادلة المطلوب حلها كما في المثال التالي:

```
> ode:=diff(y(x),x,x)=2*y(x)+1;
```

ثم نضغط على مفتاح Enter فتظهر المعادلة في الصيغة التالية:

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2y(x) + 1$$

٤- ثم يتم كتابة أمر الحل على النحو التالي:

```
Solve the ODE,ode;
> dsolve (ode);
```

ثم نضغط على مفتاح Enter

٥- يظهر الحل على النحو التالي:

$$y(x)=e^{\sqrt{2}\,x}c2+e^{-\sqrt{2}\,x}c1-\frac{1}{2}$$

حيث $c1, c2$ مقادير ثابتة ويمكن الحصول عليهم في حالة وجود شروط مبدئية.

٦- ثم يتم كتابةأمر أدخال الشروط المبدئية على النحو:

```
Define initial Conditions
> ics:=y(0)=1,D(y)(0)=0;
```

ثم الضغط على مفتاح Enter

٧- ثم كتابة أمر الحل في وجود الشروط المبدئية على النحو:

```
Solve ode sulyed to the initial conditions ics
> dsolve ({ode,ics});
```

٨- ثم الضغط على مفتاح Enter فيظهر الحل على النحو:

$$y(x)=\frac{3}{4}e^{\sqrt{2}\,x}+\frac{3}{4}e^{-\sqrt{2}\,x}-\frac{1}{2}$$

الطريقة الثانية

وبالنسبة للمستخدمين للحزمة من غير المجيدين الأجادة المطلوبة بالنسبة لكتابة أوامر الأدخال والحل كما ذكرنا سابقاً - يمكن أتباع الخطوات التالية:-

٣- أخذ نسخة Copy من أحد الأمثلة المحلولة (والتي تتماثل فيها المعادلة التفاضلية في المثال مع المعادلة المطلوب حلها من حيث الترتيب مثلاً) كما في الشكل التالي (٩-٤).

```
> ode := diff(y(x),x,x) = 2*y(x) + 1;
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 2\,y(x) + 1 \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Solve the ODE, **ode**.

```
> dsolve(ode);
```

$$y(x) = e^{\sqrt{2}\,x}\,\_C2 + e^{-\sqrt{2}\,x}\,\_C1 - \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Define initial conditions.

```
> ics := y(0)=1, D(y)(0)=0;
```

$$ics := y(0) = 1, \mathrm{D}(y)(0) = 0 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Solve **ode** subject to the initial conditions **ics**.

```
> dsolve({ode,ics});
```

$$y(x) = \frac{3}{4}\,e^{\sqrt{2}\,x} + \frac{3}{4}\,e^{-\sqrt{2}\,x} - \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

شكل (٩-٤)

٤- يتم أستدعاء Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة. ثم لصق Paste المثال المحلول في المستطيل النشط بشكل (٩-٣).

٥- يتم مسح مدخلات المثال وكتابة المعادلة التفاضلية المطلوب حلها – ثم الضغط على مفتاح Enter فيظهر حل المعادلة.

٦- في حالة وجود شروط مبدئية يتم مسح الشروط المبدئية في المثال وكتابة الشروط المبدئية للمعادلة المطلوبة ثم الضغط على مفتاح Enter فنحصل على حل المعادلة.

مثال (٩-٦)

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x) = x - 5$$

إذا كان: $y'(2) = 4$ ، $y(0) = 10$

الحل

باتباع الخطوات المذكورة أعلاه بالطريقة الأولي أو الثانية نحصل على الحل كما في الشكل التالي (٩-٥).

▼ Examples

▼ Solving an ODE

Define a simple ODE. To define a derivative, use the diff command.

```
> ode := diff(y(x), x,x) = x-5 ;
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = x - 5 \qquad (1.1.1)$$

Solve the ODE, ode.

```
> dsolve(ode);
```

$$y(x) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + \_C1\, x + \_C2 \qquad (1.1.2)$$

Define initial conditions.

```
> ics := y(0)=10, D(y)(2)=4;
```

$$ics := y(0) = 10, D(y)(2) = 4 \qquad (1.1.3)$$

Solve ode subject to the initial conditions ics.

```
> dsolve({ode,ics});
```

$$y(x) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 12 x + 10 \qquad (1.1.4)$$

شكل (٩-٥)

مثال (٩-٧)

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

إذا كان: $y(0) = 15$

الحل

شكل (٩-٦) يوضح الحل باتباع الخطوات بأحدي الطريقتين السابقتين.

▼ Examples

▼ Solving an ODE

Define a simple ODE. To define a derivative, use the diff command.

```
> ode := diff(y(x),x) = 3*x^2-2*x+5 ;
```

$$ode := \frac{d}{dx} y(x) = 3x^2 - 2x + 5 \qquad (1.1.1)$$

Solve the ODE, ode.

```
> dsolve(ode);
```

$$y(x) = x^3 - x^2 + 5x + \_C1 \qquad (1.1.2)$$

شكل (٩-٦)

مثال (٩-٨)

حل المعادلة التالية:

$$y^{(3)}(x) = 5x^6 + 8x^7 + 100$$

الحل

أنظر شكل (٩-٧).

▼ Examples

▼ Solving an ODE

Define a simple ODE. To define a derivative, use the diff command.

```
> ode := diff(y(x),x,x,x) = 5*x^6+8*x^7+100;
```

$$ode := \frac{d^3}{dx^3}\, y(x) = 5\,x^6 + 8\,x^7 + 100 \qquad (1.1.1)$$

Solve the ODE, ode.

```
> dsolve(ode);
```

$$y(x) = \frac{1}{90}\,x^{10} + \frac{5}{504}\,x^9 + \frac{50}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,\_C1\,x^2 + \_C2\,x + \_C3 \qquad (1.1.2)$$

شكل (٩-٧)

(٩-٦) تمرينات Exercises

(٩-١) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية المتجانسة من الترتيب الثاني:

1) $y'' + y' = 0$, 2) $y'' + y' - 2y = 0$

3) $y'' + 6y' + 5y = 0$, 4) $y'' + 4y = 0$

5) $2y'' + 5y' + 8y = 0$, 6) $7y'' + 3y' + 5y = 0$

7) $y'' - y' - 6y = 0$, 8) $y'' + 8y' + 16y = 0$

9) $2y'' - 5y' - 3y = 0$, 10) $y'' + 11y = 0$

(٩-٢) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1) $y^{(3)} + y^{(2)} = 0$, 2) $y^{(3)} + 4y^{(1)} = 0$

3) $y^{(4)} + y^{(3)} + 2y^{(2)} = 0$, 4) $y^{(4)} + 10y^{(2)} + 9y = 0$

5) $y^{(3)} + 2y^{(2)} - 5y^{(1)} - 6y = 0$, 6) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(٩-٣) أوجد الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية التالية وفقاً للشروط المبدئية المناظرة لكل معادلة:

1) $y^{(2)} - 10y^{(1)} + 25y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$

3) $y^{(3)} + 10y^{(2)} + 25y^{(1)} = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$

4) $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 4$

الباب العاشر
نظرية الأستكمال
Interpolation Theory

(١٠-١) الأستكمال وأهميته Interpolation and Its Importance

(١٠-٢) أستكمال كثيرة الحدود Polynomial Interpolation

(١٠-٣) طريقة لأجرانج Lagrange's Method

(١٠-٤) طريقة نيوتن للفروق المقسومة
Newton's Divided Differences Method

(١٠-٥) استخدام الحزمة الرياضية
Using The Mathematical Package

(١٠-٦) تمرينات Exercises

(١٠-١) الأستكمال وأهميته Interpolation and Its Importance

إذا فرضنا المتغير y دالة في المتغير x بحيث:

$$y = f(x)$$

أو

$$y_i = f(x_i) \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,n$$

فإذا كانت الصياغة الرياضية للدالة $f(x)$ غير معروفة أو معقدة بحيث يصعب استخدامها. ولكن متاح لنا $(n+1)$ من القيم المختلفة لـ x والقيم المناظرة لها لـ y داخل فترة معينة ولتكن $[a,b]$ – أي المتاح لنا داخل هذه الفترة النقاط التالية:

$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_i(x_i, y_i), \ldots, P_n(x_n, y_n)$$

أو بعبارة أخري

$$P_i(x_i, y_i) \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (10.1)$$

في هذه الحالة يمكن إيجاد كثيرة حدود من الدرجة n أي $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ داخل الفترة $[a,b]$ بحيث أن الدالة $P_n(x)$ تمر بالنقط (x_i, y_i)، $i = 0,1,2,\ldots,n$ أي:

$$P_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (10.2)$$

وتسمى عملية إيجاد الدالة التقريبية $P_n(x)$ بعملية أستكمال كثيرة الحدود Polynomial Interpolation من الدرجة n، وتعتبر عملية الأستكمال ذات أهمية في كثير من الاستخدامات أهمها:

١- بالنسبة للدوال المعقدة يمكن بالأستكمال تقريبها إلى دوال أبسط داخل فترة أو فترات معينة ويعتبر ذلك ذو أهمية في عملية التكامل العددي Numerical

Integration، أو التفاضل العددي Numerical Differentiation، أو حل المعادلات التفاضلية Equations Differentiation، .... الخ.

٢- في كثير من الدراسات الاقتصادية والسكانية، .... الخ تكون دوال السلاسل الزمنية مخزنه في شكل جداول Tabular Form، وعند وجود بعض القيم الناقصة يمكن بالأستكمال إيجاد القيم التقريبية لها. ومثال لهذه الجداول أيضاً جداول اللوغاريتمية عند نقط معينة موجودة بجداول اللوغاريتمات. وباستخدام عملية الأستكمال يمكن تحديد القيم الناقصة في الجداول.

وفي هذا الباب سوف نتناول أستكمال الدالة $P_n(x)$ عندما تكون $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة (n) حيث:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (10.3)$$

وبصفة عامة يمكن الإشارة إلى كثيرة الحدود من الدرجة n باستخدام النقاط :

$$P_k(x_k, y_k), P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots, P_{k+n}(x_{k+n}, y_{k+n})$$

بالرمز $P_{k,k+n}(x)$.

حيث تعتبر درجة كثيرة الحدود n حيث $((k+n) - k = n)$.

تمرين (١)

حدد درجة كثيرة الحدود في كل حالة من الحالات التالية:

$1 - P_{1,5}(x)$,	$2 - P_{10,15}(x)$
$3 - P_{2,7}(x)$,	$4 - P_{20,30}(x)$
$5 - P_{k,k+3}(x)$,	$6 - P_{m,m+3}(x)$
$7 - P_{0,10}(x)$,	$8 - P_{0,20}(x)$
$9 - P_{i+1,i+7}(x)$,	$10 - P_{i-2,i+4}(x)$

(١٠-٢) أستكمال كثيرة الحدود Polynomial Interpolation

إذا كان متاح لنا عدد $(n+1)$ من النقط المختلفة (x_i, y_i)، $i = 0,1,2,..., n$ فإننا يمكن إيجاد كثيرة الحدود $P(x)$ من الدرجة أقل من أو تساوي (n)، أي الحصول على قيم المعلمات $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

فبالتعويض بالنقاط $P_i(x_i, y_i)$ في كثيرة الحدود (10.3) على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{c} a_0 + a_1(x_0) + a_2(x_0^2) + ... + a_n(x_0^n) = y_0 \\ a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1^2) + ... + a_n(x_1^n) = y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0 + a_1(x_n) + a_2(x_n^2) + ... + a_n(x_n^n) = y_n \end{array}\right\} \qquad (10.4)$$

وبحل المعادلات الخطية (10.4) يتم الحصول على المعلمات $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. ونظام المعادلات الخطية (10.4) يمكن وضعة في شكل مصفوفات على النحو:

$$X a = Y$$

حيث:

$$X = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & x_0 & x_0^2 & .... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & .... & xn \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & .... & x_n^n \end{array}\right| , \ a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} , \ Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

نظرية (١٠-١)

إذا كان لدينا عدد $(n+1)$ من النقاط المختلفة (x_i, y_i)، $i = 0,1,2,\ldots,n$ فإن كثيرة الحدود $P(x)$ (من درجة أقل من أو تساوي n) التي تمر بالنقاط (x_i, y_i) تعتبر كثيرة حدود وحيدة Unique Polynomial.

الإثبات:

يمكن إثبات ذلك بأكثر من طريقة وسوف نقدم الطريقتين التاليتين:-

الطريقة (١)

بما أن محدد المصفوفة X في (10.5) يأخذ الشكل التالي:

$$|X| = \prod_{0 \le j \le i \le n} (x_i - x_j) \qquad (10.6)$$

وبما أن النقاط x_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$ نقاط مختلفة بالتالي:

$$|X| \neq 0 \qquad (10.7)$$

وبالتالي فإن المصفوفة X مصفوفة غير شاذة Nonsingular. وبالتالي يوجد حل وحيد لنظام المعادلات (10.4).

$$x\,a = y$$

وبالتالي فإن $P(x)$ كثيرة حدود وحيدة من درجة أقل من أو تساوي n.

الطريقة (٢)

إذا فرضنا أنه يوجد كثيرة حدود أخرى غير $P(x)$ ولتكن $Q(x)$ تمر بنفس النقط (x_i, y_i) وبالتالي فإن $H(x)$ حيث:

$$H(x) = P(x) - Q(x)$$

تكون كثيرة حدود من درجة أقل من أو يساوى n.

وبما أن:

$$H(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0 \qquad , \ i = 0,1,2,...,n \qquad (10.8)$$

وبما أن $H(x)$ حيث:

$$H(x) = 0 \qquad (10.9)$$

لجميع قيم $i = 0,1,2,\ldots,n$. بالتالي فإن:

$$P(x) = Q(x) \qquad (10.10)$$

مثال (١٠-١)

إذا كان لدينا النقاط التالية:

$$P_0(0,5) \ , \ P_1(1,11) \ , \ P_2(-1,5) \ , \ P_3(2,29)$$

١- حدد درجة كثيرة الحدود.

٢- أوجد كثيرة الحدود التي تمر بالنقاط السابقة.

الحل

بما أن المتاح لنا (4) نقاط إذن كثيرة الحدود التي يمكن أشتقاقها تكون من الدرجة الثالثة أو أقل.

نفترض أن:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

بالتعويض بالنقاط المعطاه في $P(x)$ نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1(0) + a_2(0^2) + a_3(0^3) &= 5 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1^2) + a_3(1^3) &= 11 \\ a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 &= 5 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2^2) + a_3(2^3) &= 29 \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

بحل المعادلات في (10.11) نجد أن:

$$a_0 = 5 \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 3 \quad , \quad a_3 = 1$$

وبالتالي فإن:

$$P(x) = 5 + 2x + 3x^2 + x^3$$

مثال (١٠-٢)

أعتبر الدالة التالية:

$$y = f(x) = e^x$$

أستكمل كثيرة حدود من الدرجة الثانية أو أقل في الفترة $0 \le x \le 2$ كتقريب للدالة $f(x)$، ثم وضح ذلك بيانياً.

الحل

بما أن النقط:

$$P_1(0,1) \ , \ P_2(1,2.718) \ , \ P_3(2,7.389)$$

تقع على منحنى الدالة $f(x)$ (أي المنحنى $f(x)$ يمر بالنقط الموضحه)

إذا أعتبرنا كثيرة الحدود $P_2(x)$ حيث:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

بالتعويض بالنقاط الموضحه أعلاه في الدالة $P_2(x)$ نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1(0) + a_2(0^2) &= 1 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1^2) &= 2.718 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 &= 7.389 \end{aligned}\right\}$$

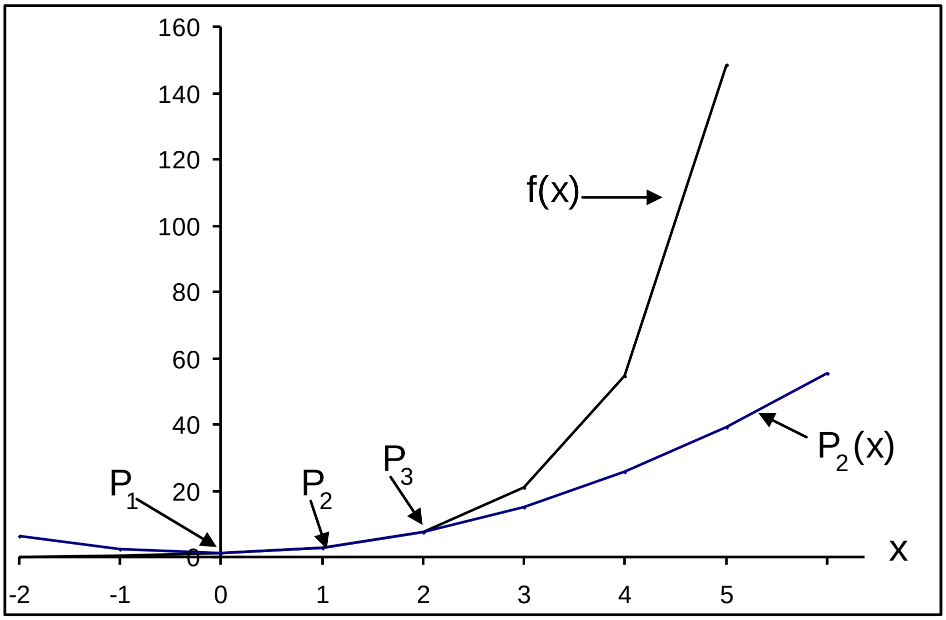
بحل المعادلات أعلاه نجد أن:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0.241 \quad , \quad a_2 = 1.4765$$

وبالتالي فإن:

$$P_2(x) = 1 + 0.241\,x + 1.477\,x^2$$

والشكل التالي يوضح منحنى الدالة $f(x)$ كذلك يوضح كثيرة الحدود $P_2(x)$ كتقريب لـ $f(x)$ داخل الفترة $(0 \le x \le 2)$.



شكل (١٠-١) يوضح $f(x)$، $P_2(x)$ خلال الفترة ($0 \le x \le 2$)

ومما هو جدير بالذكر أن حل المعادلات الخطية في المجاهيل $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لتحديد كثيرة الحدود $P_n(x)$ تعتبر طريقة كفء في الحصول على المعلمات $a_0, a_1, \ldots, a_n$. ولكنها تعتبر طريقة غير مناسبة في الاستخدامات العملية للأسباب التالية:-

١- بالرغم من تحديد الحد الأعلى لدرجة كثيرة الحدود ولكن لا يمكن تحديد درجة كثيرة الحدود قبل تحديد قيم المعلمات a_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$. فقد يكون من الأهمية تحديد درجة كثيرة الحدود $P(x)$ قبل تحديد قيم المعلمات a_i، $i = 0,1,2,\ldots,n$.

٢- تحديد العلاقة بين كثيرة الحدود من الدرجة (n) وكثيرات الحدود من درجات أقل من (n) وتمر بنفس النقاط المعطاه يعتبر ذو أهمية في كثير من

التطبيقات، لذا قدمت أكثر من صياغة يمكن بأستخدام كل منها الحصول على $P(x)$ في صيغة أكثر ملائمة في الاستخدام والتطبيق. وسوف نتناول في الفصلين التاليين الصيغتين التالبتين:

أ - صياغة لأجرانج　Lagrange's Form

ب- صياغة نيوتن للفروق المقسومة　Newton's Divided Differences Form

تمرين (٢)

١- إذا أعتبرنا النقاط التالية:

$$P_0(-1,1)\ ,\ P_1(0,3)\ ,\ P_2(1,13)\ ,\ P_3(2,67)\ ,\ P_4(3,225)$$

المطلوب:

أ) أوجد كل من $P_{0,2}(x)\ ,\ P_{0,3}(x)\ ,\ P_{0,4}(x)$

ب) أوجد كل من $P_{1,3}(x)\ ,\ P_{1,4}(x)\ ,\ P_{2,4}(x)$

٢ - أذا أعتبرنا الدالة:

$$y = f(x) = \sqrt{x}\, e^{2x}$$

المطلوب:

أ) وفق كثيرة حدود من الدرجة الأولى كتقريب للدالة $f(x)$ في الفترة ($0 \le x \le 3$)، ووضح ذلك بيانياً.

ب) وفق كثيرة حدود من الدرجة الثانية كتقريب للدالة $f(x)$ خلال الفترة ($1 \le x \le 4$)، ووضح ذلك بيانياً.

(١٠-٣) طريقة لأجرانج Lagrange's Method

إذا فرضنا الحالة الخاصة عندما y_i، $i = 0,1,2,\dots,n$ على النحو التالي:

$$y_i = 1 \qquad , \; y_j = 0 \quad \text{if} \;\; j \neq i \tag{10.12}$$

فإذا فرضنا كثيرة حدود من درجة أقل من أو تساوى (n) ورمزنا لها بالرمز $L_i(x)$

فإنه يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$L_i(x) = c(x - x_0)(x - x_1)\dots\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

حيث c مقدار ثابت فإذا فرضنا أن:

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_i \\ \\ 0 & \text{if } x = x_j \, , \, j \neq i \end{cases} \tag{10.13}$$

وعندما $L_i(x) = 1$ فإن:

$$c = \frac{1}{\prod\limits_{i \neq j}^{n}(x_i - x_j)} \tag{10.14}$$

وبالتالي فإن:

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_1 - x_j)}$$

$$\vdots$$

وبصفة عامة يمكن كتابة $L_i(x)$ على النحو:

$$L_i(x)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=i\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \qquad (10.15)$$

وباستخدام تعريف $L_i(x)$ في (10.13)، وبضرب طرفي العلاقة (10.15) في y_i نجد أن:

$$L_i(x)\,y_i=y_i=P(x_i) \qquad ,\ i=0,1,2,...,n \qquad (10.16)$$

وبالتالي يمكن كتابة $(n+1)$ من المعالادت الخطية في (10.4) في صورة مصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & \cdots\cdots & L_n(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & \cdots\cdots & L_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ L_0(x_n) & L_1(x_n) & \cdots\cdots & L_n(x_n) \end{bmatrix}_{(n+1)(n+1)} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{bmatrix} \qquad (10.17)$$

حيث أن مصفوفة العناصر $L_i(x)$، $i=0,1,2,\ldots,n$ تمثل مصفوفة الوحدة من الترتيب $(n+1)(n+1)$ حيث العناصر على القطر الرئيسي كل عنصر يساوي (1) وباقي العناصر كل منها يساوى (صفر).

ومن العلاقة (10.17) نجد أن:

$$y_0L_0(x_0) + y_1L_1(x_0) + ... + y_nL_n(x_0) = P(x_0)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_iL_i(x_0) = P(x_0)$$

بالمثل عند النقطة (x_j, y_j)

$$\sum_{j=0}^{n} y_jL_j(x_j) = P(x_j)$$

$$\vdots$$

وبصفة عامة عند أي نقطة (x, y) نجد أن:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_jL_j(x) \qquad (10.18)$$

وتسمى الصيغة (10.18) بصيغة لأجرانج نسبة إلى عالم الرياضيات لأجرانج أول من أشتق هذه الصياغة.

وتعتبر صياغة لأجرانج من الصياغات الأكثر ملائمة في الأستخدام لقيم بعض الدوال المخزنة في شكل جداول ويرجع ذلك إلى سهولة تناول صياغة لأجرانج باستخدام الكمبيوتر.

مثال (١٠-٣)

أعتبر النقاط التالية:

$$P_0(0,1) \ , \ P_1(-1,2) \ , \ P_2(1,3)$$

بأستخدام صياغة لأجرانج أوجد $P(x)$ من الدرجة الثانية أو أقل.

الحل

بما أن:

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

بالتالي

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{-1} = -x^2 + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$P(x) = (-x^2 + 1)(1) + \frac{x^2 - x}{2}(2) + \frac{x^2 + x}{2}(3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2$$

مثال (١٠-٤)

أعتبر النقاط التالية:

$$P_0(-1,2)\ ,\ P_1(0,0)\ ,\ P_2(1,14)\ ,\ P_3(2,128)$$

أوجد بأستخدام طريقة لأجرانج $P_{0,2}(x)$ ، $P_{1,3}(x)$

الحل

١- لإيجاد $P_{0,2}(x)$ نستخدم النقاط

$$P_0(-1,2)\ ,\ P_1(0,0)\ ,\ P_2(1,14)$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=-(x^2-1)=-x^2+1$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}$$

$$\begin{aligned}P_{0,2}(x)&=\frac{x^2-x}{2}(2)+(-x^2+1)(0)+\frac{x^2+x}{2}(14)\\&=x^2-x+0+7x^2+7x=8x^2+6x=2x(4x+3)\end{aligned}$$

١- لإيجاد $P_{1,3}(x)$ نستخدم النقاط

$$P_1(0,0)\ ,\ P_2(1,14)\ ,\ P_3(2,128)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{x^2+x-2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}$$
$$=-(x^2-2x)=-x^2+2x$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$P_{1,3}(x)=L_1(x)y_1+L_2(x)y_2+L_3(x)y_3$$
$$=\frac{x^2+x-2}{2}(0)+(-x^2+2x)(14)+\frac{x^2-x}{2}(128)$$
$$=-14x^2+28x+64x^2-64x=50x^2-36x$$

تمرين (٣)

أعتبر تمرين (٢) في الفصل السابق - أستخدم طريقة لأجرانج لإيجاد كثيرات الحدود في (١)، (٢).

(١٠-٤) طريقة نيوتن للفروق المقسومة
Newton's Divided Differences Method

في الفصل السابق تناولنا بالتفصيل طريقة لأجرانج لأستكمال كثيرة الحدود من الدرجة (n). ولكن صياغة كثيرة الحدود باستخدام طريقة لأجرانج لم تمكن من:

١- تحديد درجة كثيرة الحدود الأكثر موائمة للبيانات.

٢- تحديد العلاقة بين درجة كثيرة الحدود ولتكن (n) ودرجة كثيرات الحدود من درجات أقل من (n) وتمر بنفس النقاط المعطاه.

لذا قدم عالم الرياضيات Newton طريقة سوف نتناولها في هذا الفصل تسمى بطريقة نيوتن للفروق المقسومه نسبه لهذا العالم. حيث تمكننا هذه الطريقة من تحديد درجة كثيرة الحدود من الدرجة (n) وعلاقتها بكثيرات الحدود من درجات أقل من (n) وتمر بنفس النقاط المعطاه.

فإذا فرضنا أن $P_n(x)$ كثيرات حدود من الدرجة (n)، كذلك $P_{n-1}(x)$ كثيرة حدود من الدرجة ($n-1$) فإنه يمكن $P_n(x)$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{10.19}$$

أي ممكن كتابة $P_n(x)$ على النحو التالي:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + C(x) \tag{10.20}$$

حيث $C(x)$ كثيرة حدود من الدرجة (n) وتسمى حد التصحيح Correction Term.

من العلاقة (10.20) نجد أن:

$$C(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) \qquad (10.21)$$

وعندما تكون قيمة $C(x_i)$ عند النقطة (x_i, y_i) لجميع قيم $i = 0,1,2,\ldots,n$ تساوي صفر، أي عندما:

$$C(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

فهذا يعنى أن درجة كثيرة الحدود من درجة أقل من (n) (ممكن تكون من الدرجة $(n-1)$ أو من درجة أقل)

فإذا كان $C(x)$ من الدرجة (n) فمن العلاقة (10.19) نجد أن:

$$c(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1).....(x - x_{n-1}) \qquad (10.22)$$

فإذا كانت $P_n(x)$ من الدرجة (n) فإن:

$$P_n(x_n) = f(x_n) = y_n \qquad (10.23)$$

بالتعويض في (10.22) بـ (10.21) ، (10.23) نجد أن:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{C(x_n)}{(x - x_0)(x - x_1).....(x - x_{n-1})} \\ &= \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)(x - x_1).....(x - x_{n-1})} \end{aligned} \qquad (10.24)$$

ويسمى المعامل a_n بفرق نيوتن المقسوم من الترتيب (n) The n^{th} Order Newton's Divided Difference وسوف نرمز له بالرمز $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ وأحياناً بالرمز $\Delta^{(n)}$ حيث:

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \Delta^{(n)} \tag{10.25}$$

ويمكن أثبات أن:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \Delta^{(n)} = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{10.26}$$

وبصفة عامة يمكن كتابة كثيرة الحدود وفقاً لصياغة نيوتن على النحو التالي:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ + \ldots\ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned} \tag{10.27}$$

حيث

$$P_0(x) = f(x_0) \tag{10.28}$$

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] \tag{10.29}$$

وهكذا، حتي كثيرة الحدود من الدرجة (n) أي $P_n(x)$ في المعادلة (10.27).

والجدول التالي – جدول (١٠-١) – يوضح كيفية حساب الفروق حتي الترتيب الثالث $(\Delta^{(3)})$عند النقط المختلفة المعطاه.

جدول (١٠-١)

مثال (١٠-٥)

فيما يلي بيانات (x_i, y_i) للمتغيرين x, y حيث x هو المتغير المستقل بحيث:

(1 , 0.7651977) , (1.3 , 0.6200860) , (1.6 , 0.4554022) ,
(10 , 0.2818186) , (2.2 , 0.1103623)

وفق كثيرة حدود من الدرجة الرابعة بأستخدام طريقة نيوتن.

الحل

بما أن كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة تأخذ الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
& + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
& + +(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]
\end{aligned}
$$

لذا نكون الجدول التالي – جدول (١٠-٢) – لحساب الفروق حيث تم حساب الفروق على النحو الموضح فيما يلي:

١- فنجد أن عناصر العمود الرابع تم حسابها على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.6200860 - 0.7651977}{1.3 - 1.0} \\
&= -0.4837057
\end{aligned}
$$

وبالمثل باقي العناصر فنجد أن العنصر الأخير في هذا العمود

$$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}=\frac{0.1103623-0.2818186}{2.2-1.9}$$
$$=-0.5715210$$

٢- بالمثل بالنسبة لعناصر العمود رقم (5) نجد أن:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\Delta^{(2)}=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$
$$=\frac{-0.5489460-(-0.4837057)}{1.6-1}=-0.1087338$$

وهكذا بالمثل

$$f[x_2,x_3,x_4]=\Delta^{(2)}=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$$
$$=\frac{-0.5715210-(-0.5786120)}{2.2-1.6}=0.0118183$$

٣- بالمثل بالنسبة لعناصر العمود رقم (6) نجد أن:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\Delta^{(3)}=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$
$$=\frac{-0.0494433-(0.1087339)}{1.9-1}=0.0658784$$

كذلك

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\Delta^{(3)}=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$$
$$=\frac{0.0118183-(-0.0494433)}{2.2-1.3}=0.0680684$$

٤- وبالنسبة لعناصر العمود رقم (7) نجد أن:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \Delta^{(4)} = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4] - f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4 - x_1}$$

$$= \frac{0.0680685 - 0.0658784}{2.2 - 1.0} = 0.0018251$$

ومن الجدول نجد أن:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) \\ &- 0.1087338(x - 1.0)(x - 1.3) \\ &+ 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\ &+ 0.0018251(x - 1)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9) \end{aligned}$$

تمرين (٤)

١- باستخدام طريقة نيوتن للفروق أوجد تقريب كل من الدوال التالية إلى كثيرة حدود من الدرجة الثانية في الفترات المناظرة لكل دالة

1) $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad 0 \le x \le 3$

2) $f(x) = e^x \quad , \quad -1 \le x \le 1$

3) $f(x) = x\sqrt{2x} \quad , \quad 1 \le x \le 4$

٢- باستخدام طريقة نيوتن أوجد كل مما يلي:

$$P_{0,2}(x)\ ,\ P_{0,3}(x)\ ,\ P_{0,4}(x)\ ,\ P_{1,2}(x)\ ,\ P_{1,3}(x)\ ,\ P_{2,4}(x)$$

حيث

$$P_0(0,3) \quad , \quad P_1(1,6) \quad , \quad P_2(-1,4) \quad , \quad P_3(2,11) \quad , \quad P_4(3,18)$$

٣- باستخدام طريقو نيوتن أوجد كثير الحدود من الدرجة الثانية كتقريب للدوال التالية في الفترات المناظرة.

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x\ln x} \quad , \quad 2 \le x \le 4$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+1}{\ln x}} \quad , \quad 3 \le x \le 5$

3) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{5e^{3x^2}} \quad , \quad -1 \le x \le 1$

جدول (١٠-١)

x	$f(x) = y$	First Divided Differences الفروق المقسومة من الترتيب الأول $\Delta^{(1)}$	Second Divided Differences الفروق المقسومة من الترتيب الثاني $\Delta^{(2)}$	Third Divided Differences الفروق المقسومة من الترتيب الثالث $\Delta^{(3)}$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_4,x_3]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_5,x_4]-f[x_4,x_3]}{x_5-x_3}$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_5,x_4] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		

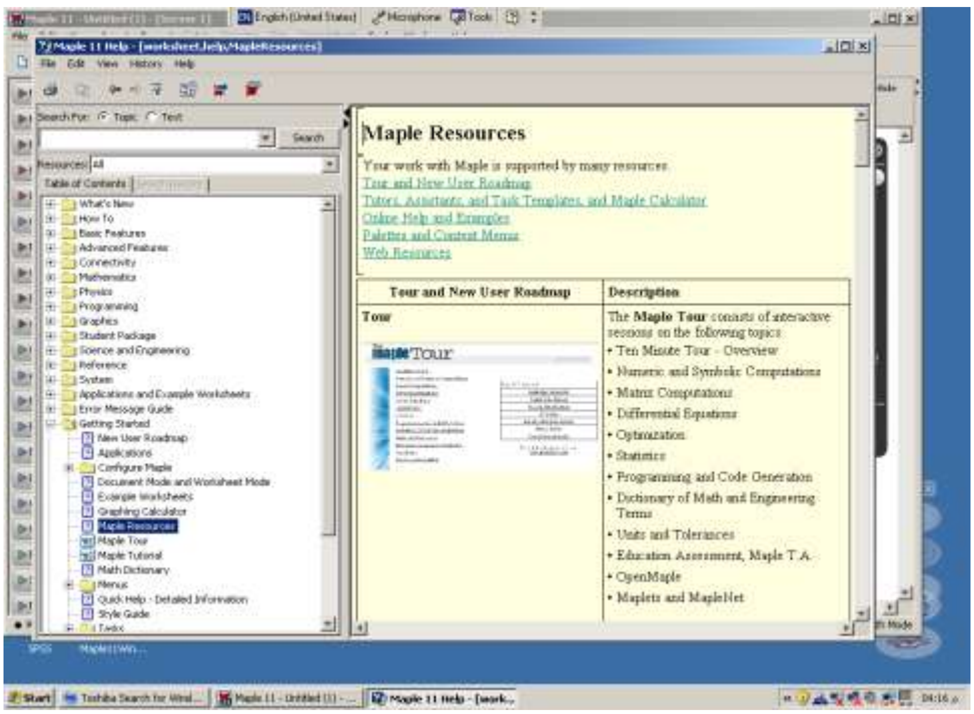
جدول (١٠-٢)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
i	x_i	$f[x_i]$	$\Delta^{(1)}$ $f[x_{i-1},x_i]$	$\Delta^{(2)}$ $f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$\Delta^{(3)}$ $f[x_{i-3},\ldots,x_i]$	$\Delta^{(4)}$ $f[x_{i-4},\ldots,x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

(١٠-٥) استخدام الحزم الرياضية
Using The Mathematical Packadge

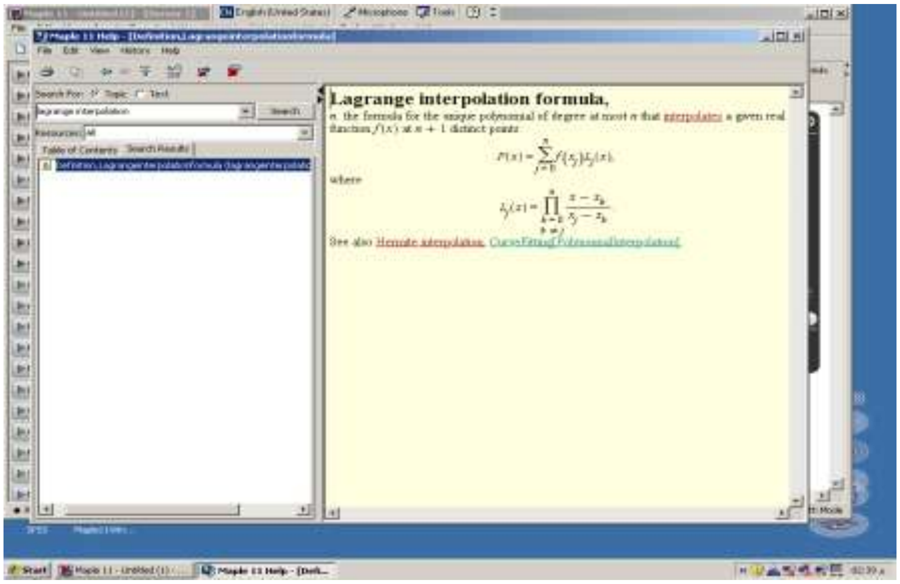
لاستخدام **Maple 11** في الأستكمال لكثيرات الحدود Polynomials. يمكن أتباع أكثر من طريقة، وأحد هذه الطرق سوف نتبعه فيما يلي:

١- نعد استخدام برنامج **Maple 11** كما هو موضح في ملحق (١) فتظهر الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (١٠-١).



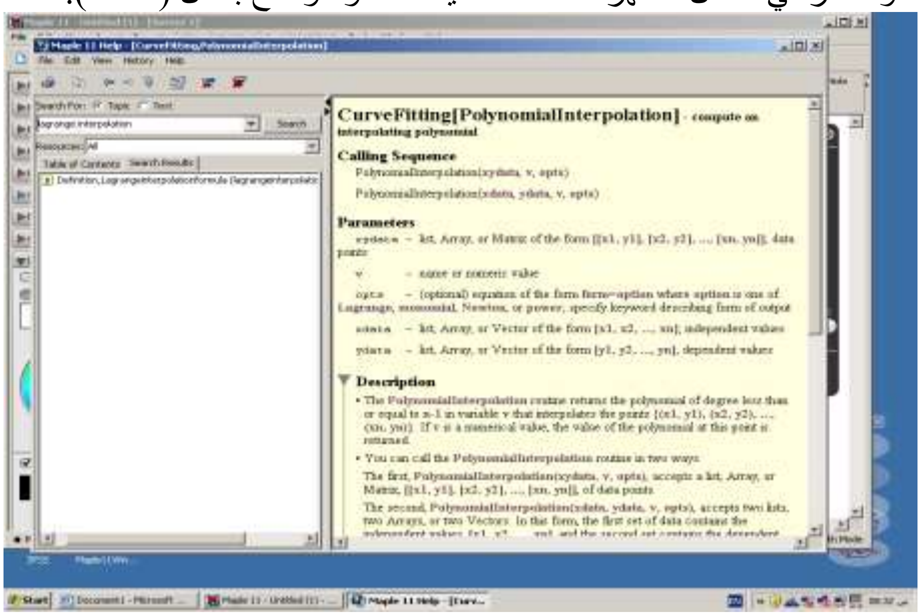
شكل (١٠-١)

٢- نكتب في المستطيل في أعلى يمين الصفحة في شكل (١٠-١) Lagrange Interpolation كما هو موضح بشكل (١٠-٢).



شكل (١٠-٢)

في شكل (١٠-٢) في يمن الصفحة يتم الضغط على Polynomial Interpolation كما هو مشار في الشكل فتظهر الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (١٠-٣).

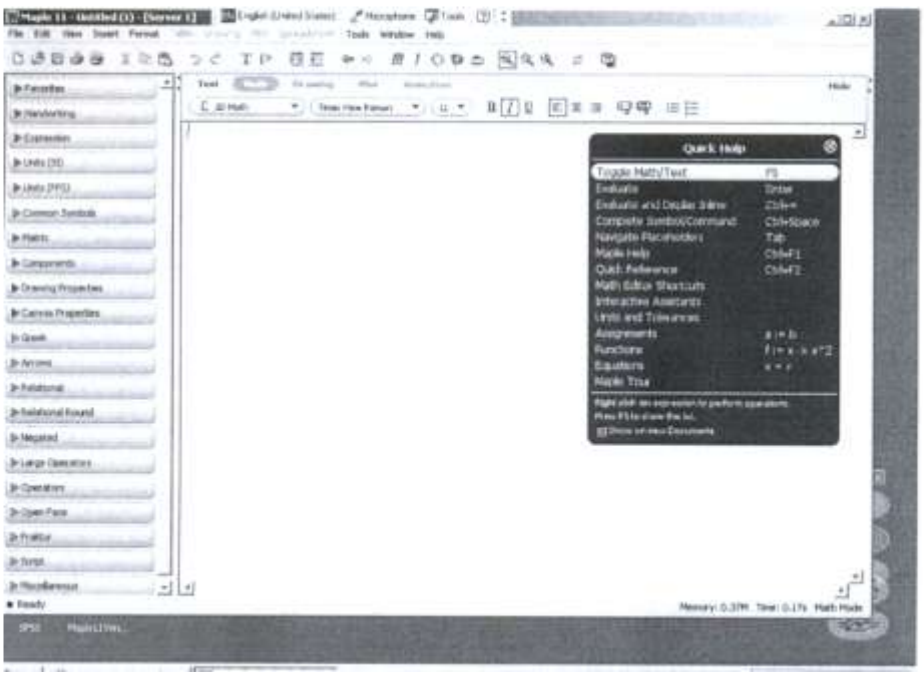


شكل (١٠-٣)

- في شكل (١٠-٣) الصفحة على اليمين وصف لكتابة أوامر الأدخال و بيانات المتغير المستقل (x) والمتغير التابع (y) في شكل متجهات.
- وفي نهاية الصفحة على اليمين توجد أمثلة متعددة .

٣- يتم أخذ نسخة Copy من الأمثلة.

٤- يتم فتح البرنامج بالضغط على أيقونة Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة في شكل(١٠-٣) كما هو موضح بالشكل فتظهر الصورة الموضحة بشكل(١٠-٤).



شكل (١٠-٤)

٥- يتم لصق (Paste) نسخة الأمثلة في المستطيل النشط في الشكل (١٠-٤).

٦- يتم إلغاء البيانات بالأمثلة ووضع البيانات المطلوب أستكمالها.

٧- يتم الضغط على مفتاح Enter فيتم التنفيذ.

مثال (١٠-١)

باستخدام Maple 11 أوجد كثيرات الحدود المستكملة في كل حالة من الحالات التالية:

(١) الجدول التالي يوضح قيم المتغير المستقل (x) وقيم المتغير (y) المناظرة لها.

x	0	1	2	3
y	0	3	1	3

أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة.

(٢) فيما يلي قيم المتغير المستقل (z) حيث:

$$z = [0,2,4,7]$$

كذلك قيم المتغير التابع المناظر لها:

$$y = [2, a,1,3,]$$

أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة باستخدام صياغة لأجرانج.

الحل

١- يتم إدخال البيانات وفقاً للخطوات السابق عرضها أعلاه.

٢- بعد إدخال البيانات لكل من مثالي (١) ، (٢) يتم الضغط على مفتاح Enter في نهاية كل أمر فنحصل على النتائج التالية في (1.1) ، (1.2).

▼ Examples

```
> with(CurveFitting):
  PolynomialInterpolation([[0,0],[1,3],[2,1],[3,3]], z);
```

$$\frac{3}{2} z^3 - 7 z^2 + \frac{17}{2} z \tag{1.1}$$

```
> PolynomialInterpolation([0,2,4,7], [2,a,1,3], z, form=
  Lagrange );
```

$$-\frac{1}{28} (z-2) (z-4) (z-7) + \frac{1}{20} a z (z-4) (z-7) - \frac{1}{24} z (z-2) (z-7) + \frac{1}{35} z (z-2) (z-4) \tag{1.2}$$

شكل (١٠-٥)

مثال (١٠-٢)

فيما يلي بيانات عن المتغير المستقل (x) والقيم المناظرة لها للمتغير التابع (y):

(0,10) , (-1,10) , (1,14) , (2,184) , (-2,-116) , (-0.5,9.625) , (0.5,313)

استخدام Maple 11 كثيرة الحدود المستكملة في:

١- الشكل النهائي.

٢- شكل صياغة لأجرانج.

الحل

١- يتم إدخال البيانات للحصول على كثيرة الحدود في الشكل النهائي.

٢- كذلك يتم إدخال البيانات مرة أخرى للحصول على شكل صياغة لأجرانج.

٣- يتم الضغط على مفتاح Enter بعد نهاية الأمر الأول، كذلك يتم الضغط على مفتاح Enter بعد نهاية الأمر الثاني.

فنحصل على الشكل النهائي لكثيرة الحدود في الدالة (1.1)، كذلك نحصل على كثيرة الحدود في شكل صياغة لأجرانج في الدالة (1.2).

▼ Examples

```
> with(CurveFitting):
  PolynomialInterpolation([[0,10],[-1,10],[1,14],[2,184],[-2,
  -116],[-.5,9.625],[.5,313]], z);
```

$$214.8444444\, z^6 + 113.6444444\, z^5 - 1072.888888\, z^4 - 543.8888886\, z^3 + 860.0444439\, z^2 + 432.2444442\, z + 10 \qquad \mathbf{(1.1)}$$

```
> PolynomialInterpolation([0,-1,1,2,-2,-.5,.5], [10,10,14,184,
  -116,9.625,313], z, form=Lagrange );
```

$$-10.00000000\,(z+1)\,(z-1)\,(z-2)\,(z+2)\,(z-0.5)\,(z+0.5) - 2.222222222\,z\,(z-1)\,(z-2)\,(z+2)\,(z-0.5)\,(z+0.5) - 3.111111111\,z\,(z+1)\,(z-2)\,(z+2)\,(z-0.5)\,(z+0.5) + 2.044444444\,z\,(z+1)\,(z-1)\,(z+2)\,(z-0.5)\,(z+0.5) - 1.288888889\,z\,(z+1)\,(z-1)\,(z-2)\,(z-0.5)\,(z+0.5) + 6.844444444\,z\,(z+1)\,(z-1)\,(z-2)\,(z+2)\,(z-0.5) + 222.5777778\,z\,(z+1)\,(z-1)\,(z-2)\,(z+2)\,(z+0.5) \qquad \mathbf{(1.2)}$$

```
>
```

شكل (١٠-٦)

(١٠-٦) تمرينات Exercises

(١٠-١) حدد درجة كثيرة الحدود في كل حالة من الحالات التالية:

1) $P_{2,3}(x)$, 2) $P_{5,7}(x)$

3) $P_{5,8}(x)$, 3) $P_{k-1,k+5}(x)$

(١٠-٢) أعتبر النقاط التالية:

$$P_0(0,3) \quad , \quad P_1(1,6) \quad , \quad P_2(-1,4) \quad , \quad P_3(2,11) \quad , \quad P_4(3,18)$$

١- أوجد كل من $P_{0,2}(x)$, $P_{0,3}(x)$, $P_{0,4}(x)$

٢- أوجد كل من $P_{1,2}(x)$, $P_{1,3}(x)$, $P_{1,4}(x)$

(١٠-٣) إذا أعتبرنا الدالة

$$y = f(x) = \sqrt{x}\ln(x+2)$$

١- وفق كثيرة حدود من الدرجة الأولي، والثانية كتقريب للدالة $f(x)$ خلال الفترة $0 \le x \le 4$ ووضح ذلك بيانياً.

٢- وفق كثيرة حدود من الدرجة الثانية كتقريب للدالة $f(x)$ خلال الفترة $2 \le x \le 5$ ووضح ذلك بيانياً.

(١٠-٤) أعتبر التمرينين (١٠-٢) ، (١٠-٣) – استخدم طريقة لأجرانج لإيجاد كثيرات الحدود في (١) ، (٢).

(١٠-٥) أعتبر التمرينين (١٠-٢) ، (١٠-٣) – استخدم طريقة نيوتن لإيجاد كثيرات الحدود في (١) ، (٢).

ملحق (١)
استخدام حزمة برامج Maple 11

الـ **Maple 11** هي مجموعة من الحزم (البرامج) الجاهزة المستخدمة في الرياضيات، الإحصاء، الفيزياء، ... الخ. وتعتبر برامج **Maple 11** من البرامج الجاهزة التي يسهل تناولها بالنسبة للمستخدمين سواء متخصصين أو غير متخصصين.

ومما هو جدير بالذكر أن كلمة Maple ليست أختصار لعبارة ما ولكن سميت الحزمة باسم Maple نسبة إلى زهرة الـ Maple وهذه الزهرة هي شعار الجمهورية الكندية بالعلم الكندي.

وفي هذا الكتاب يتم استخدام **Maple 11** في حل المشاكل المتعلقة بالموضوعات المقدمة في كل باب على حده من خلال العديد من الأمثلة التفصيلية.

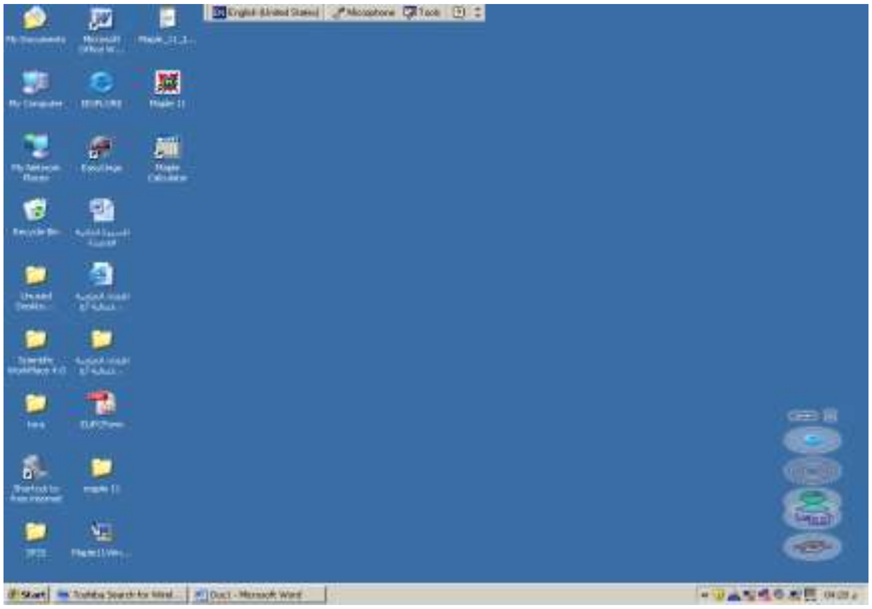
وفي هذا الملحق سوف نقدم كيفية استخدام **Maple 11** قبل استخدامها في حل أي مشكلة من المشاكل الموضحة بأبواب الكتاب كل في مكانه.

ويمكن أعداد برامج **Maple 11** للأستخدام بأكثر من طريقة. وفيما يلي سوف نوضح خطوات أعداد استخدام أي برنامج من برامج **Maple 11** بأسلوب بسيط وسهل التناول على النحو التالي:

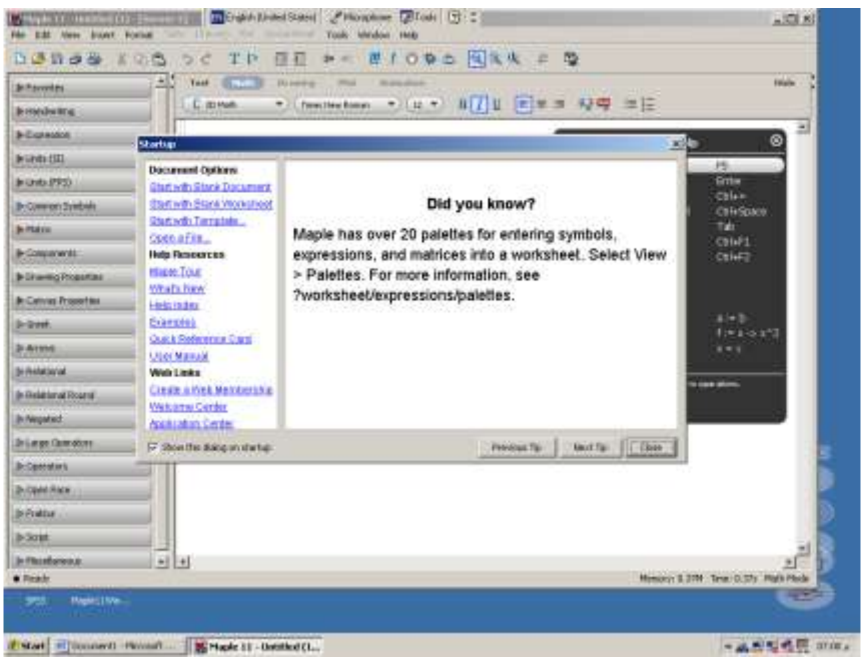
الخطوات

١- تحميل الجهاز ببرنامج Maple 11 فتظهر أيقونة Maple 11 كما هو موضح بشكل (١).

٢- الضغط على أيقونة Maple 11 كما هو موضح بشكل (١) التالي فيظهر شكل (٢).

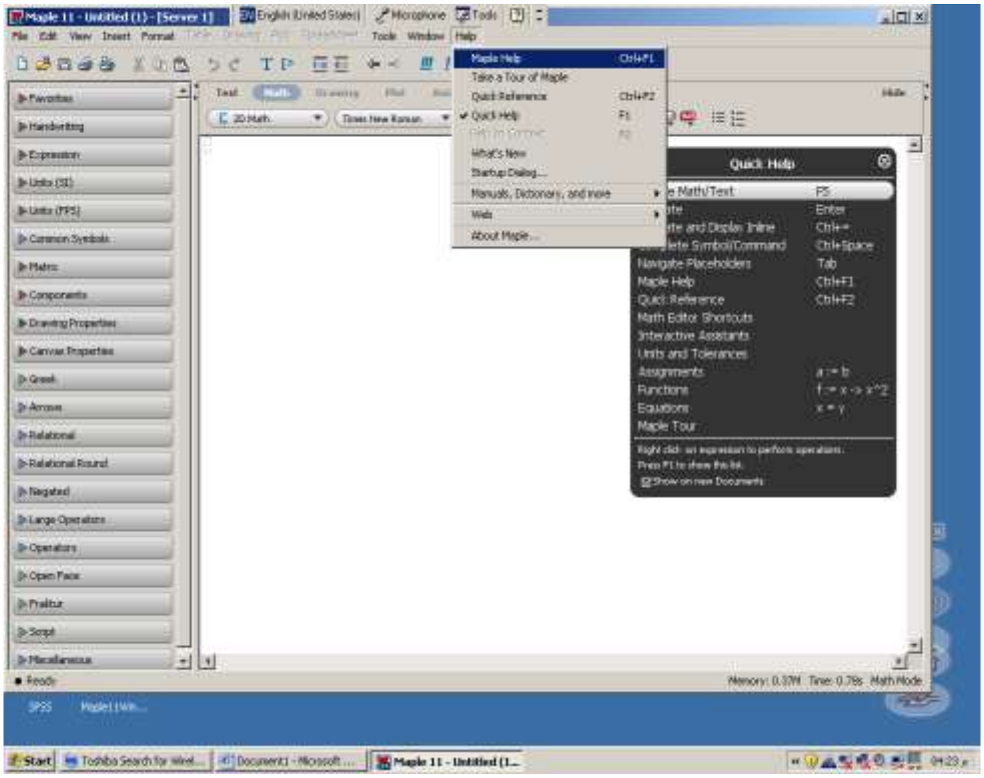


شكل (١)


Did you know?
Maple has over 20 palettes for entering symbols, expressions, and matrices into a worksheet. Select View > Palettes. For more information, see ?worksheet/expressions/palettes.

شكل (٢)

٣- نضغط على Close في شكل (٢)، ثم الضغط على Help بشريط الأدوات أعلى الصفحة فيتم فتح القائمة الفرعية كما هو موضح بشكل (٣).

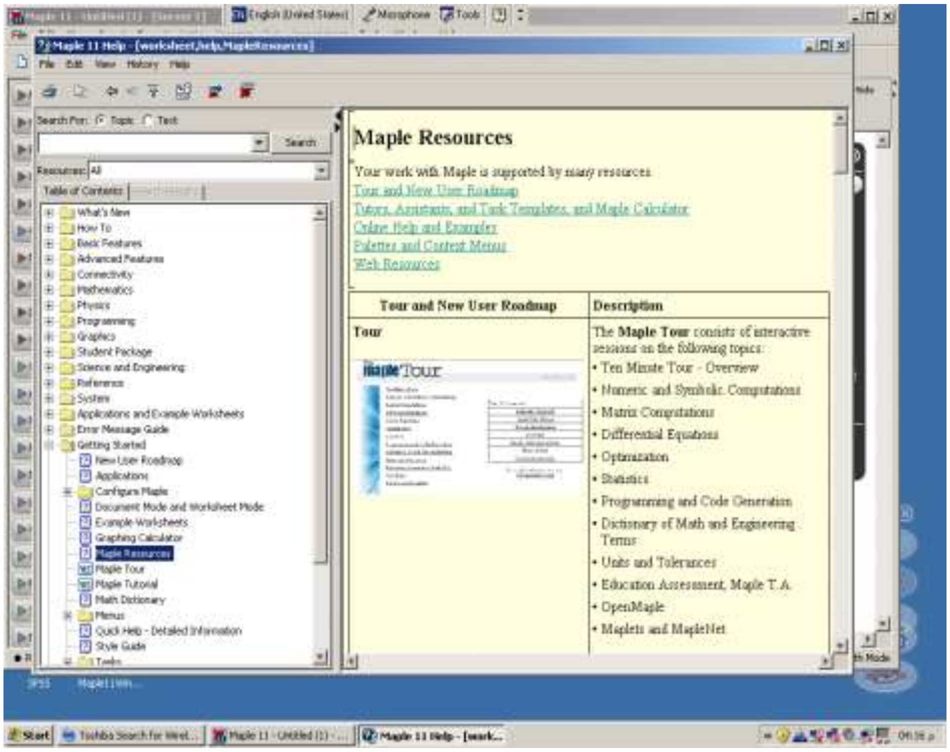


شكل (٣)

٤- نضغط على Maple Help في القائمة الفرعية كما هو موضح بشكل (٣). فتظهر لنا في الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (٤).

- حيث يوضح يمين الصفحة في أعلى Maple Resources.

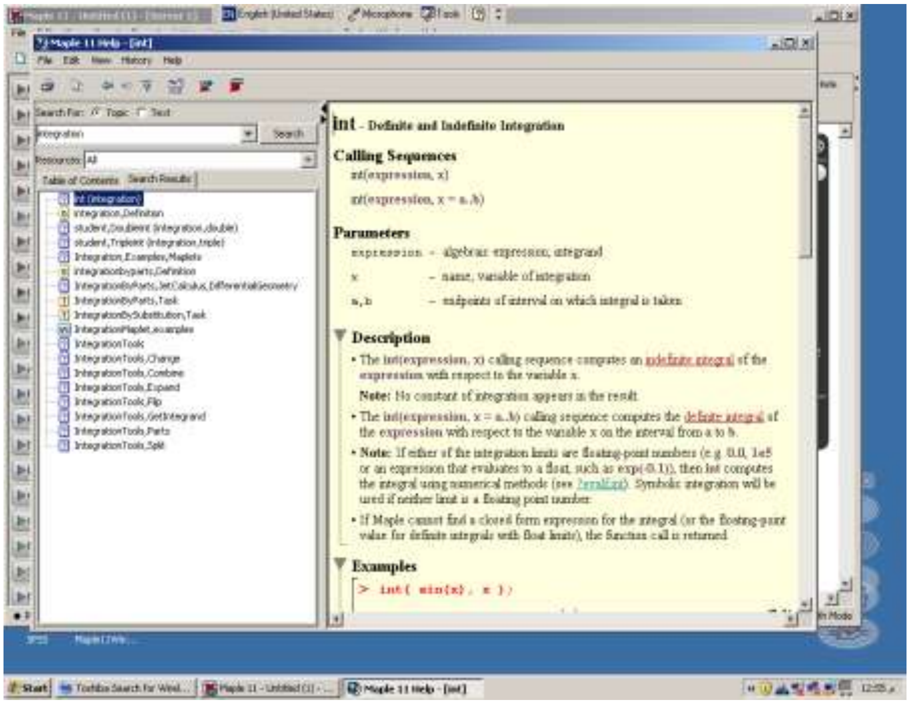
- كذلك يوجد يسار الصفحة في أعلى مستطيل يتم كتابة أسم البرنامج المطلوب أستدعائه ثم الضغط على Search.



شكل (٤)

فمثلاً عند كتابة Integration في المستطيل ثم الضغط على Search فتظهر لنا الصفحة التالية في شكل (٥).

- في شكل (٥) الصفحة على اليمين يوجد توصيف لكيفية كتابة أوامر إدخال الدالة المراد تكاملها بأكثر من طريقة.
- وفي نهاية الصفحة توجد مجموعة من الأمثلة كما هو موضح بشكل (٦).



شكل (٥)

Examples

```
> int( sin(x), x );
```

$$-\cos(x)$$

```
> int( sin(x), x=0..Pi );
```

$$2$$

```
> int( sin, a..b );
```

$$\cos(a) - \cos(b)$$

```
> int( x/(x^3-1), x );
```

$$\frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)$$

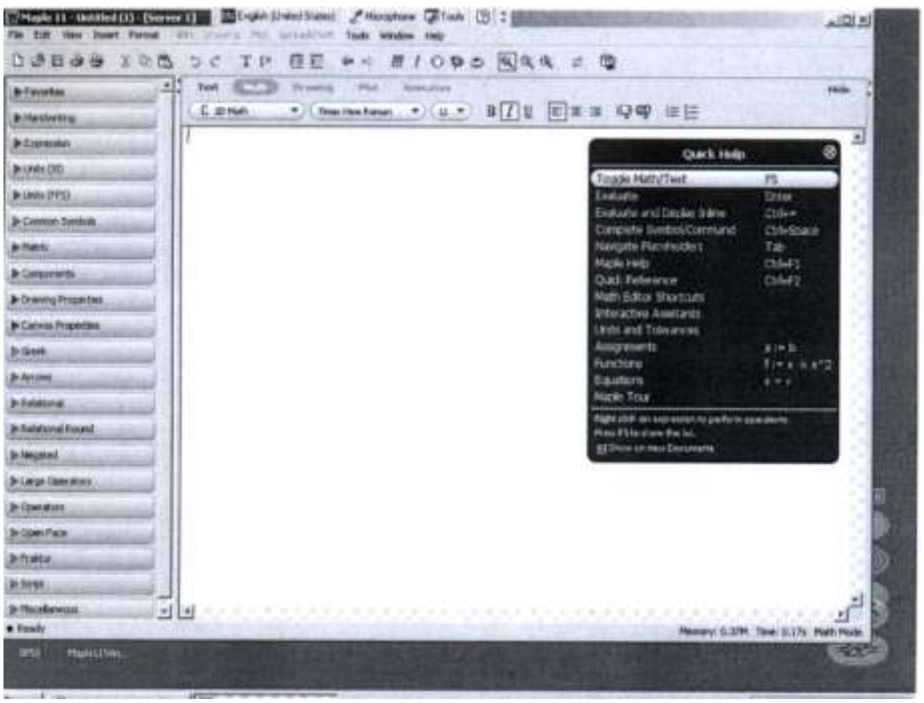
شكل (٦)

<u>ولأيجاد تكامل دالة ما</u>

٥- أ. يكتب أمر أدخال البيانات المراد تكاملها مباشرة فى المستطيلاالنشط (بشكل ٧) بالنسبة للمجيدين الأجادة المطلوبة لكتابة الأوامر.

أما بالنسبة لغير المجيدين الأجادة المطلبة لكتابة الأوامر –فأنة يمكن

ب.أخذ نسخة (Copy) من الأمثلة ثم الضغط على Maple 11 من الشريط أسفل الصفحة فتظهر الصفحة التالية كما هو موضح بشكل (٧)



شكل (٧)

- يتم لصق (Paste) النسخة في المستطيل النشط بشكل (٧).

- يـتم تغييـر بيانـات الدالـة أو الـدوال فـي المثـال أو الأمثلـة ببيانـات الدالـة أو الدوال المطلوب تكاملها.

٦- ثم يتم الضغط على مفتاح Enter فيتم التنفيذ.

المصطلحات

Antiderivatives	العملية العكسية للمشتقات
Approximation	تقريب
Average Rate of Change	متوسط معدل التغير
Bivariate Function	دالة في متغيران
Bordered Hessian Matrix	المصفوفة الهيسينية الحدودية
Co-domain	النطاق المصاحب
Compound Interest	الفائدة المركبة
Continuity	الأتصال
Continuous	متصلة
Cost	تكلفة
Decay Models	نماذج الاضمحلال
Defined	معرفة
Definite Integral	تكامل محدود
Definition	تعريف
Dependence	عدم الأستقلال
Derivative	مشتقة
Differential Equations	المعادلات التفاضلية
Differentiation	تفاضل
Dimensions	محاور
Discontinuous	غي متصلة
Domain	النطاق
Double Integral	تكامل مزدوج
Elasticity	مرونة
Equilibrium Price	السعر التوازني
Equilibrium Quantity	الكمية التوازنية
Error	خطأ
Exist	موجودة
Exponential Function	الدالة الأسية
First Order	الترتيب الأول
Form	صياغة
Function	الدالة
Growth Models	نماذج النمو

Hessian Matrix	المصفوفة الهيسينية
Homogeneous	متجانسة
Input	مدخلات
Integration	تكامل
Interpolation Theory	نظرية الاستكمال
Inverse Function	معكوس الدالة (الدالة العكسية)
Lagrange Method	طريقة لأجرانج
Lagrange Multipliers	معاملات لأجرانج
Limits	النهايات
Linear	الخطي
Logarithmic Function	الدالة اللوغاريتمية
Logistic Growth	النمو اللوجيسيتى
Marginal Function	الدالة الهامشية
Marginal Rate	المعدل الحدي (الهامشي)
Mathematical Process	العملية الرياضية
Mathematical Rule	قاعدة رياضية
Maxima Value	القيمة العظمي
Minima Value	القيمة الصغري
Necessary Condition	شرط ضروري
Newton Method	طريقة نيوتن
Nonlinear Programming	البرمجة غير الخطية
Numerical Integration	تكامل عددي
Numerical Solutions	حلول عددية
Optimization Problem	مشاكل الأمثلية
Ordered Pairs	الأزواج المرتبة
Ordinary Differential Equations	معادلات تفاضلية عادية
Output	مخرجات
Parabolic Are	القطع المكافئ
Partial Derivatives	المشتقات الجزئية
Partial Elasticity	المرونة الجزئية
Partial Fractions	الكسور الجزئية
Paths	مسارات
Polynomial	كثيرة الحدود

Principle Minors	المحيددات الأساسية
Product Rule	قاعدة الضرب
Quotient Rule	قاعدة القسمة
Range	المدي
Rectangles	مستطيلات
Relationship	علاقة
Restricted Domain	النطاق المقيد
Restricted Problems	مشاكل مقيدة
Restricted Range	المدي المقيد
Revenue	عائد
Rules	قواعد
Saddle Point	نقطة أرتكاز
Sets	الفئات
Several Variables	متغيرات متعددة
Several Variables Function	دالة متعددة المتغيرات
Single Variables Function	دالة في متغير واحد
Substitution	التعويض
Sufficient Condition	شرط كافي
Trapezoidal Rule	قاعدة شبة المنحرف
Unconstant	غير ثابت
Unique Polynomial	كثيرة حدود وحيدة
Unlimited	غير محدود
Unrestricted Problems	مشاكل غير مقيدة

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

[١] أ.د. عفاف الدش (١٩٨٧): "بحوث العمليات وأتخاذ القرارت" مكتبة عين شمس – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٢] أ.د. عفاف الدش، أ.د. سليمان الكومي، أ.د. عبدالمنعم قنديل (١٩٨٩): "الرياضيات للمرحلة الجامعية الأولي" مكتبة عين شمس – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٣] أ.د. عفاف الدش (١٩٩٤): الرياضيات وصناعة القرارت – مكتبة عين شمس – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٤] أ.د. عفاف الدش (٢٠٠٤): "رياضيات الأعمال" الطبعة الثالثة – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٥] أ.د. عفاف الدش، م.م. سماح، م.م. أسامة (٢٠٠٩): "استخدام الحزم الجاهزة SPSS-Maple-Tora" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٦] أ.د. هناء خيرالدين (١٩٨٧): "الاقتصاد الرياضي" مكتبة نهضة الشرق– جامعة القاهرة – جمهورية مصر العربية.

ثانياً: المراجع الأجنبية

[7] Ahdelwahali Kharah and Ronold B. Guenther (2000): " An Introduction to Numerical Method: A Matlab Approach" Chapman Hall/Crc London.

[8] Conte and corlde Boor S. D. (1972): "Elementary Numerical Analysis – An Algorithmic Approach" Second Edition, McGraw – Hill Book Company, New York.

[9] David Kincaid and Ward Cheney (1991): "Numerical Analysis – Mathematics of Scientific Computer" Books/sale Publishing Company, California.

[10] Faires and Burden (1998): "Numerical Methods" Second Edition, An International Thomson Publishing Company, London.

[11] Francis S.cheid (1968): "Schaum's Outline of Theory and Problems of Numerical Analysis" McGraw – Hill Book Company, New York.

[12] Frank Ayres (1962): " Schaum's Outline Series – Theory and Problems of Matrices" McGraw – Hill Book Company, New York.

[13] Frank S. Budinick (1994): "Applied Mathematics For Business Economics and The Social Sciences" McGraw - Hill Book Company, New York.

[14] Forray, M. (1978): "Calculus With Analytic Geometry" Macmillas Publishing Co, Inc, New York.

[15] Gerald L. Bradley and Karl J. Smith (1999): "Calculus" Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

[16] Gradsheteyv and Ryzhik (1969): "Table of Integrals, Series, and Products" Academic Press, New York.

[17] Harley Flanders Justin and Justin J. Price (1978): "Calculus With Analytic" Academic Press, New York.

[18] Hildelrand F. B. (1956,1978): "Introduction To Numerical Analysis" Second Edition, McGraw – Hill Book Company, New York.

[19] Karim M. Ahadir and Jan R. Magnus (2005): "Matrix Algebra" Cambridge University Press.

[20] Karim M. Ahadir and Jan R. Magnus (2005): "Matrix Algebra, Econometric Exercises" Cambridge, U.K.D.

[21] Kendall E. Atkinson (1978): "An Introduction To Numerical Analysis" John Wiley & Sons, New York.

[22] Kenneth Longe (1999):"Numerical Analysis for Statisticians" Springer, New York.

[23] Lapain L. (1994): "Quantitative Methods for Business Decisions" The Dryden Press, Harcourt Brace College Publishers, New York.

[24] Matheus Gasselli and Dmitry Pelinousky (2008): "Numerical Mathematics" Jones and Bartlett Publishers, London.

[25] Nita, H.S. , Ravin, M. G. , and Hardik (2007): "Operation Research" Prentice – Hall of India, New Dalli.

[26] Ronold, L.R. (1998): "Optimization in Operations Research" Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jerrey.

[27] Smith Mintan (2007): "Calculus" Third Edition, McGraw Hill Higher Eduction, New York

[28] Shao & Shao (1988): "Mathematic for Management and Finance" Eighth Edition, South. Western. College Publishing, United States of America

[29] Staff of Research and Education Association (1983): "The Numerical Analysis – Problem Solver" Research and Education Association, New Jersey.

[30] Tan (2005): "Applied Calculus" 6th Edition, Thomson Brooks /Cole, United States.

[31] Taha, H (1998): "Operation Research" An Introduction Macmillan Publishing Co., INC. New York